Seleção de carteiras: Escolha entre modelos baseada em persistência de performance

(Portfolio selection: Decision-making based on performance persistence)

Ricardo S. Tavares[†]

João F. Caldeira[‡]

Abstract This essay presents an alternative to the problem of choosing between strategies for building investment portfolios. We propose a new portfolio selection procedure, dividing the sample into three equal parts (for estimations initiations, training, and evaluation outside the sample) in which, at each point of time, the strategy with the best performance is chosen in a window of p recent observations for a given criterion. We considered as criteria the mean, variance, and Sharpe ratio, aiming to construct sequences of allocation choices that best adapted to the different contexts and databases analyzed. Results indicate that the suggested approach was capable of generating allocation sequences with good performance in terms of average return and Sharpe ratio.

Keywords: Portfolio selection; Performance evaluation; Performance persistence; Volatility timing; Reward-to-risk timing

JEL Code: C58, G11.

Resumo Este trabalho traz uma alternativa ao problema da escolha de estratégias para construção carteiras de investimentos. Foi proposto um procedimento para seleção de carteiras, o qual divide a amostra em três partes iguais (para estimações iniciais, treinamento e avaliação fora da amostra) em que, a cada ponto do tempo, é escolhida a estratégia com melhor desempenho em uma janela de p observações recentes para determinado critério. Foram considerados como critérios a média, variância e índice Sharpe, visando a construção de sequências de escolhas de alocações que melhor se adaptassem aos diferentes contextos e bases de dados analisados. Os resultados encontrados indicaram que a abordagem sugerida foi capaz de gerar sequências de alocações com bom desempenho em termos de retorno médio e índice Sharpe.

Palavras-chave: Otimização de carteiras; Avaliação de performance; Persistência de performance; Volatility timing; Reward-to-risk timing

Código JEL: C58, G11.

1. Introdução

Arranjos e estruturas para alocação de recursos são uma das razões para existência da economia como ciência. Grande parte dos estudos nesta área

Submitted on November 13, 2019. Revised on March 24, 2020. Accepted on March 25, 2020. Published online in May 2020. Editor in charge: Marcelo Fernandes.

[†]PPGE – UFRGS, Brazil: s17tavaresricardo@gmail.com

[‡]Departamento de Economia – UFSC & CNPq, Brazil: joao.caldeira@ufsc.br

visam a melhor utilização dos recursos disponíveis, que, na maioria das vezes, são escassos. O mesmo ocorre no campo de finanças, em que um dos principais problemas é o de alocação de recursos do investidor, que deseja maximar os retornos de seus investimentos e ao mesmo tempo minimizar os riscos deles. A partir deste *trade-off*, isto é, a escolha entre níveis de risco e retorno por parte do agente que deseja realizar investimentos, Markowitz (1952) apresenta um trabalho pioneiro que dá origem à moderna teoria de seleção de carteiras.

A partir de Markowitz (1952), diversas estratégias de seleção de carteiras foram desenvolvidas. Ao mesmo passo que vários problemas em relação a sua implementação e performance foram encontrados. Entre os estudos que obtiveram significativos impactos nesta literatura estão Best & Grauer (1991), que demonstraram que a imposição de restrições sobre os pesos dos ativos impactam positivamente a performance das carteiras; Black & Litterman (1992), que em seu modelo de seleção de carteiras propuseram a incorporação da opinião de agentes no processo de otimização; Jagannathan & Ma (2003), que desenvolveram sua estratégia com restrição de venda a descoberto no processo de construção dos portfólios, entre tanto outros estudos acerca do tema (Kolm, Tutuncu & Fabozzi, 2014).

Apesar das críticas e seus opositores, há inúmeros modelos de seleção de portfólios aplicados a diferentes problemas de alocação no campo de finanças. E a maioria das estratégias para seleção de carteiras, como a otimização por média-variância ou mínima-variância, traz consigo a necessidade da previsão do vetor de retornos esperados e das matrizes de covariância para todos ativos contidos no universo de investimentos. A despeito desta necessidade, há certa dificuldade na realização de tais previsões com níveis de precisão aceitáveis. Segundo Best & Grauer (1991), erros de previsão nesse sentido acarretam em significativa perda de performance das carteiras.

Tendo em vista as diversas estratégias competidoras para seleção de carteiras, vários estudos propuseram como alternativa a combinação de modelos de média e mínima variância (Garlappi, Uppal & Wang, 2006; Kan & Zhou, 2007; Brandt, Santa-Clara & Valkanov, 2009; Tu & Zhou, 2011). Por outro lado, trabalhos como Rodrigues & Stevenson (2013), Pettenuzzo & Ravazzolo (2016) e Caldeira, Moura, Nogales & Santos (2017) utilizaram uma série de modelos competidores para combinação de previsões para os *inputs* utilizados no processo de otimização. Ao considerar as inúmeras estratégias de seleção de carteiras elaboradas no decorrer das últimas décadas, além das diferentes metodologias para estimação e previsão dos *inputs* do problema de otimização, surge a dúvida de como determinar o modelo que melhor se adequa, em termos de performance, a diferentes conjuntos de ativos e, até

mesmo, mercados. Ainda, supondo que haja uma escolha de estratégia ótima para construção de carteiras em determinado universo de investimentos, ela se manteria ao longo do tempo? Isto é, continuaria a entregar bons resultados em outros períodos?

Levantadas essas questões, o que se propõe neste estudo é a aplicação de alguns critérios, levando em conta informações recentes sobre o comportamento dos ativos, para escolher a cada ponto do tempo a estratégia com maior potencial de performance. Neste caso, o potencial será avaliado com base no desempenho passado das carteiras. Existem vários trabalhos que defendem a persistência a curto prazo da performance de ativos individuais ou carteiras (Hendricks, Patel & Zeckhauser, 1993; Brown & Goetzmann, 1995; Carhart, 1997; Bollen & Busse, 2004; Lou, 2012). De modo geral, esses autores mostraram que os ativos ou carteiras que alcançaram bons resultados em períodos recentes, tendem a ter desempenho semelhante a curto prazo, o mesmo vale para aqueles que desempenharam mal. Essa persistência no desempenho, em muitos casos, pode ser capturada pelo fator momento como em Carhart (1997) ou Fama & French (2012).¹

A despeito dos tradicionais estudos acerca do fator momento, Bollen & Busse (2004) sugerem que a persistência de performance pode ter duração mais curta que a defendida por Carhart (1997) e encontraram evidências de que o desempenho superior seria um fenômeno de prazo ainda mais curto, normalmente, duraria cerca de um mês e meio. Em estudos mais recentes, Gao, Han, Li & Zhou (2018) e Zhang, Ma & Zhu (2019) encontraram evidências para presença do fator momento em conjuntos de dados de alta frequência para períodos intradiários. Sendo assim, é possível observar que há literatura tratando da persistência de performance em horizontes de tempo que cobrem períodos maiores que um ano até estudos que encontram evidências para ocorrência desse fenômeno dentro de um único dia.

A partir das evidências de persistência em relação à performance, construiu-se uma estrutura na qual, após a determinação de um número p de observações passadas dos retornos dos ativos e alguns critérios estatísticos, foi possível fazer a escolha, a cada ponto do tempo, do modelo com maior potencial de performance. Aqui, é assumido que o modelo com maior potencial é aquele apresentou melhores resultados nas p observações recentes dos retornos em relação a um critério, ou seja, a definição de potencial é feita seguindo a suposição de persistência de performance.

¹ Os autores encontraram fortes evidências da ocorrência do fator momento em mercados de ações para três diferentes continentes, o que reforça a utilização de medidas de desempenho avaliadas em observações passadas como critérios indicativos de potencial futuro para ativos do universo de investimentos com o qual se esteja trabalhando.

Para avançar nessa questão foi desenvolvido um processo de escolha em que, a cada ponto do tempo, é selecionado, dentro do universo de modelos (ou estratégias) de seleção de carteiras, aquele candidato a apresentar melhor performance no período posterior, dada a persistência de desempenho nas observações realizadas. No tocante aos critérios empregados no processo de escolha, foram utilizados: i) retorno médio; ii) razão de Sharpe; iii) variância dos retornos. A amostra é dividida em três partes: a primeira parte é usada nas estimações iniciais com as metodologias competidoras, a segunda é destinada ao treinamento e à seleção das estratégias com base na persistência de performance, e a terceira parte é utilizada para avaliação fora da amostra das estratégias selecionadas.

A análise empírica do estudo foi realizada com três bases dados distintas: ações de empresas que compõem o índice S&P100; ações de empresas componentes do Ibovespa; e, por fim, as 25 carteiras baseadas na classificação de capitalização a mercado e razão *book to market*² da base mantida por Kenneth French.³ Ainda, recorreu-se a mesma base de Kenneth French para os fatores do mercado norte-americano e a base de dados do NEFIN⁴ para obtenção dos fatores de risco do mercado brasileiro. O experimento foi realizado com dados diários levando em conta observações dos últimos dez anos, 03 de novembro de 2008 a 31 de outubro de 2018.

No processo de escolha entre estratégias foram utilizadas como metodologias competidoras para seleção de ativos a carteira ingênua, carteiras de média-variância com restrição de venda a descoberto construídas a partir da amostra ou dos fatores de risco, a carteira de mínima-variância amostral, além das estratégias *volatility timing* e *reward-to-risk timing* desenvolvidas por Kirby & Ostdiek (2012). Em relação a formulação das carteiras, contou-se com previsões amostrais e com o auxílio dos modelos de fatores propostos por Carhart (1997) e Fama & French (2015).

O procedimento de escolha de estratégias apresentou bom desempenho, quando definida uma janela amostral dos retornos entre 4 e 14 observações anteriores, no caso em que se utilizou o razão de Sharpe e média como critérios de otimização de performance. Embora, quando se adotou o critério da variância se obteve uma performance razoável apenas para a base de dados 25BTM. O fato de serem obtidos melhores resultados para prazos menores, como ocorreu neste experimento, vai ao encontro de parte dos resultados ob-

²Razão entre o valor patrimonial da empresa, registrado em seus instrumentos contábeis, e o valor de mercado.

³Disponível em http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html,

⁴Centro Brasileiro de Pesquisa em Economia Financeira da Universidade de São Paulo. Disponível em http://nefin.com.br/risk_factors.html.

tidos por alguns pesquisadores, como Bollen & Busse (2004), que defendem a hipótese de persistência como um fenômeno de curtíssima duração.

Apesar de o experimento ter sido realizado para ativos de renda variável, especificamente ações, não é difícil vislumbrar sua aplicação em problemas de seleção em renda fixa ou outros mercados com características afins. Ademais, além desta breve introdução, o trabalho conta com uma revisão de literatura na seção 2; a descrição dos aspectos metodológicos na seção 3; o experimento empírico na seção 4; e, por fim, algumas considerações finais acerca do que foi proposto e os resultados obtidos.

2. Evolução da Teoria de Seleção de Carteiras

Uma das primeiras orientações que se tem a respeito do problema de alocação em investimentos, segundo Duchin & Levy (2009), foi feita há mais de 1500 anos. Os autores relatam que um antigo babilônio de nome Talmud pregava uma espécie de estratégia ingênua rudimentar, na qual, segundo ele, o indivíduo deveria empregar um terço de suas riquezas em terras, igual parcela em mercadorias, e a última parte em moeda (ou algum substituto). Partindo do caso particular para o geral, para Duchin & Levy (2009) e Tu & Zhou (2011), no fundo Talmud aconselhava as pessoas a adotarem a estratégia $1/N$.

Entretanto, a fase moderna da teoria de seleção de carteiras, derivada do problema de alocação de recursos do investidor, só viria a ser inaugurada com Markowitz (1952). Na qual, a partir do *trade-off* risco-retorno, passaram a ser desenvolvidas inúmeras metodologias para alocação de recursos com o intuito de otimizar o bem-estar do investidor em relação às suas preferências, que também podem ser determinadas pelo seu nível de aversão ao risco. Definições básicas e a construção matemática do problema da otimização por média-variância podem ser encontradas em Kolm et al. (2014).

Kritzman (2011) apresenta um trabalho em que enaltece os mais de sessenta anos de aplicação e aprimoramento da abordagem de otimização por média-variância. Muito embora essa técnica tenha sido vastamente utilizada nas últimas seis ou sete décadas no campo de finanças, especialmente no contexto de alocação de recursos de investidores, tal abordagem foi e continua sendo alvo de muitas críticas e debates tanto entre pesquisadores quanto participantes do mercado.

Um dos trabalhos recentes de maior impacto nessa literatura foi o de De-Miguel, Garlappi & Uppal (2009), no qual os autores desafiaram as metodologias tradicionais, em especial às de otimização por média variância, ao demonstrar, utilizando diferentes bases de dados, que a carteira igualmente ponderada obtém melhor performance que as demais carteiras otimizadas em seu estudo. E, então, a chamada estratégia ingênua seria preferível a algu-

mas das mais elaboradas estratégias competidoras. Foram utilizadas diversas variações da abordagem de otimização de média-variância, inclusive combinações de carteiras, para demonstrar que, com as bases de dados utilizadas, a carteira ingênua, de modo geral, obtém melhor desempenho que os demais portfólios construídos por estratégias como às de Craig MacKinlay & Pástor (2000), Garlappi et al. (2006) e Kan & Zhou (2007).

Vários estudos apontaram possíveis pontos fracos do trabalho de DeMiguel et al. (2009) e construíram portfólios por média ou mínima variância capazes de superar a carteira ingênua. Entre eles Kritzman, Page & Turkington (2010), além de criticar DeMiguel et al. (2009), defendem a otimização por média-variância e contestam pontos nos quais os críticos da otimização se apoiam, demonstrando que se escolhidas as estratégias certas, os principais problemas da otimização, como os de que os otimizadores seriam maximizadores de erros ou de que a otimização se basearia em pressupostos falsos, podem ser contornados. Kirby & Ostdiek (2012) sugeriram que os resultados obtidos por DeMiguel et al. (2009) se deveram em grande parte ao seu modelo de pesquisa, que se concentra em carteiras que estão sujeitas a altos riscos de estimação e *turnovers* extremos. Kirby & Ostdiek (2012) repetiram o experimento de DeMiguel et al. (2009) com bases de dados semelhantes e construíram carteiras que superaram a carteira $1/N$ (inclusive na presença dos custos de transação). Tratam-se das estratégias *volatility timing* e *reward-to-risk timing*.

As primeiras estratégias foram elaboradas a partir dos estudos de Fleming, Kirby & Ostdiek (2001) e Fleming, Kirby & Ostdiek (2003). Essas metodologias para construção de carteiras têm como principal vantagem a sua facilidade de implementação, uma vez que não necessitam da realização de otimização, não é necessário inversão das matrizes de covariância, além da velocidade do ajuste dos pesos da carteira às mudanças na volatilidade dos ativos poder ser regulada por um parâmetro específico. Tais estratégias apresentaram, de modo geral, melhor performance em relação à carteira ingênua quando aplicadas a bases similares às usadas por DeMiguel et al. (2009).

Já as estratégias *reward-to-risk timing*, diferentemente da *volatility timing*, dependem dos retornos esperados dos ativos. Em um caso específico de estratégia *reward-to-risk*, ao invés de retornos esperados, são usadas as médias das cargas dos fatores de risco, com a justificativa de que a substituição mitigaria os problemas gerados pela previsão dos retornos dos ativos, cujos erros de estimação trazem grandes prejuízos à atribuição de pesos relativos a eles, como observado por Best & Grauer (1991). Tanto na formulação com os retornos esperados, como no caso em que são substituídos pela média da carga dos fatores, as estratégias obtiveram performance superior à estratégia

$1/N$.

Kritzman et al. (2010) fizeram diversas aplicações e encontraram evidências de que, se utilizados estimadores plausíveis de retornos esperados, volatilidades e correlações, as carteiras otimizadas alcançam desempenho fora da amostra superior à carteira $1/N$. Ainda em relação às críticas à abordagem de média-variância, há uma corrente que argumenta que a otimização se basearia em pressupostos falsos. A abordagem parte da suposição de que os retornos dos ativos seguem distribuição normal ou que os indivíduos apresentam uma função utilidade quadrática. Todavia, Kritzman (2011) argumenta que só há falha quando ambas as suposições são conjunta e significativamente violadas, o que dificilmente ocorre em experimentos práticos.

Outra importante crítica é levantada por Michaud (1989), segundo o autor, os otimizadores seriam maximizadores de erros. Porém, segundo Kritzman (2006), pequenos erros nos *inputs* do problema levam a grandes diferenças nos pesos da carteira ótima, em relação aos pesos ideais, apenas se os ativos forem substitutos próximos, mas as alocações incorretas em substitutos próximos dificilmente reduzem a eficiência das carteiras. E pequenos erros de alocação em ativos não-substitutos não levam a grandes distorções nas atribuições dos pesos da carteira ótima.

Uma das alternativas para amenizar o problema da imprecisão nos *inputs* do problema de otimização por média-variância, dadas as complicações na estimação dos retornos esperados,⁵ é a abordagem de otimização por mínima-variância. O objetivo principal desta abordagem é entregar um vetor de pesos para a carteira que obtenha o menor desvio-padrão dentro do universo de todos os vetores possíveis, dadas informações acerca de risco e retornos esperados. Uma revisão mais detalhada da abordagem de otimização por mínima-variância pode ser encontrada em Clarke, De Silva & Thorley (2006) ou Clarke, De Silva & Thorley (2011).

Outra linha de pesquisa recente partiu para construção de metodologias de combinação de estratégias no processo de atribuição de pesos aos ativos. Como no trabalho de Kan & Zhou (2007), no qual os autores demonstram que uma carteira obtida pela combinação do ativo livre de risco, carteira de tangência e carteira de mínima-variância global alcança um desempenho melhor que a carteira de média-variância amostral. Nessa abordagem, o fato de haver mais de uma carteira de risco no problema de alocação minimizaria o risco de estimação e traria ganhos em termos de performance em relação a abordagem tradicional.

DeMiguel et al. (2009) também utilizaram da metodologia de combinação de estratégias para seleção de carteiras. Além de construir as combinações

⁵ Uma consulta mais extensa acerca deste problema é possível em Jagannathan & Ma (2003).

desenvolvidas por Garlappi et al. (2006) e Kan & Zhou (2007), formularam outras nas quais ponderam os resultados da estratégia igualmente ponderada com os de carteiras de mínima-variância. Muito embora seu desempenho na aplicação empírica não tenha sido superior a carteira $1/N$. Enquanto, Tu & Zhou (2011) partem da argumentação de que as estratégias de Markowitz (1952) e suas extensões teriam desempenho ruim em muitas situações de real aplicação, para propor estratégias formuladas a partir da combinação da carteira $1/N$ com outras mais sofisticadas. Os autores combinam a carteira ingênua com as desenvolvidas por Jorion (1986), Craig MacKinlay & Pástor (2000) e Kan & Zhou (2007), gerando quatro carteiras que alcançaram boa performance em diferentes cenários nos quais são aplicadas. Inclusive com desempenho superior a carteira igualmente ponderada em vários casos.

Ainda em relação à combinação em seleção de carteiras, Brandt et al. (2009) desenvolveram uma metodologia diferente para atribuição de pesos aos ativos. Em sua abordagem, propuseram a utilização de características das empresas às quais os ativos são vinculados para definição dos pesos atribuídos a eles na composição das carteiras. Nesse caso, a combinação de informações a respeito da capitalização a mercado, a razão *book-to-market* e os retornos passados determina os pesos na construção realizada pelos autores.

Por outro lado, autores como Rodrigues & Stevenson (2013) e Pettenuzzo & Ravazzolo (2016) utilizam a abordagem de combinação no problema de previsão dos *inputs* para otimização. Já Caldeira et al. (2017) propuseram a construção de carteiras de média e mínima variância combinando diferentes previsões para as matrizes de covariâncias. Além das carteiras construídas por essa metodologia apresentarem bons resultados, os pesos dos modelos de previsão empregados no processo de otimização são determinados com base em um critério de desempenho que leva em conta a performance da carteira e não apenas a adequação das previsões a posterior observação do evento.

Outras estratégias de seleção de carteiras que têm ganhado notoriedade e se consolidado na literatura são as bayesianas. Nesse tipo de construção se lida com o problema da incerteza em relação à distribuição dos parâmetros no problema de seleção de carteiras, particularmente a matriz de covariância e os retornos esperados. Segundo Avramov & Zhou (2010), a metodologia bayesiana consegue empregar informações prévias úteis acerca das quantidades de interesse na construção de carteiras ótimas através da recuperação da densidade preditiva dos parâmetros utilizados na otimização. Ainda, Kolm, Focardi & Fabozzi (2008), Zhou (2009), Pastor & Veronesi (2009) e Anderson & Cheng (2016) são exemplos de estudos que utilizaram abordagens bayesianas para seleção de carteiras.

3. Escolha de modelos baseada em persistência de performance

A presente seção destina-se à apresentação do procedimento proposto para lidar com o problema de escolha de metodologias para construção de carteiras de investimento. Como já discutido, um dos grandes problemas na moderna teoria de carteiras é a definição, dentre o conjunto de metodologias e extensões disponíveis, daquela que tem maiores chances de apresentar melhor performance no período posterior ao conjunto de observações da amostra. Além disso, muitas abordagens que alcançam boa performance em uma determinada base de dados, podem não repetem seu desempenho quando as características do objeto de experimento mudam.

Dado que existem várias metodologias competidores para determinação dos pesos dos ativos em uma carteira, o que se propõe aqui é utilização de diferentes modelos de seleção de carteiras e a cada ponto do tempo, por meio de medidas de desempenho (média, razão de Sharpe e variância), a seleção daquele que, com base na hipótese da persistência, tenha apresentado maior indicação de performance. Vários trabalhos como Hendricks et al. (1993), Brown & Goetzmann (1995), Carhart (1997), Grinblatt & Keloharju (2000), Bollen & Busse (2004) e Lou (2012) abordam o tema da persistência de performance a curto prazo, isto é, o caso em que ativos têm o seu rendimento atual impactado pelos seus próprios resultados recentes. Basicamente, esses autores procuram entender e mensurar os laços entre o desempenho atual e o realizado no passado recente, cujos resultados de muitas de suas pesquisas apontam para validade dessa hipótese.

Bollen & Busse (2004) procuraram entender o quão curto seria esse prazo, isto é, por qual período ainda existiriam sinais de persistência de performance? Seus resultados levaram a conclusão que o prazo pode ser bem mais curto que o defendido por Carhart (1997) e demais trabalhos com resultados semelhantes. Os autores encontraram evidências de que o desempenho superior baseado na hipótese de persistência de performance seria um fenômeno de curta duração, de modo geral duraria cerca de um mês e meio, e que só poderia ser detectado usando janelas de medição relativamente curtas. Além disso, Kaniel, Saar & Titman (2008) demonstraram que decisões de compra e venda de ativos, que determinam seus preços e, portanto, os retornos, muitas vezes são tomadas levando em conta alterações nos preços dos ativos no mês imediatamente anterior e, então, os ciclos de valorização ou deterioração dos ativos seriam limitados a um prazo que pode ser compreendido em um mês. Já Gao et al. (2018) e Zhang et al. (2019) encontram evidências da ocorrência do fator momento para períodos intradiários.

Partindo para algumas definições, suponha que haja um universo de $k =$

$1, 2, \dots, K$ metodologias de seleção de carteiras competidoras, o qual pode ser definido como:

$$U^K = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k, \dots, \omega^K) \quad (1)$$

em que cada $\omega^k = [\omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_n^k]$ é um vetor de pesos ótimos para os n ativos do universo de investimento, gerado por uma metodologia k qualquer dentro do universo de estratégias competidoras disponíveis.

Ainda, o universo de metodologias de seleção de carteiras pode ser apresentado, em uma perspectiva temporal, como:

$$U_t^K = (\omega_t^1, \omega_t^2, \dots, \omega_t^k, \dots, \omega_t^K), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2)$$

nesse o caso, o vetor de pesos de uma estratégia k qualquer também é apresentado em uma perspectiva temporal $\omega_t^k = [\omega_{1t}^k, \omega_{2t}^k, \dots, \omega_{nt}^k]$.

A presente proposta de escolha entre estratégias para montagem de carteiras sugere que a cada ponto do tempo seja escolhida a estratégia ω_t^k que obteve melhor performance recente, considerando alguma medida de desempenho, dadas a informações dos modelos até o período anterior ($t - 1$). A ideia é avaliar se um gestor ou um participante do mercado que toma suas decisões de escolha de estratégias para montagem de carteiras com base na hipótese de persistência de performance alcançaria resultados superiores ao caso em que mantém uma estratégia individual fixa ao longo do tempo.

3.1 Avaliação de desempenho das carteiras

Uma vez definido o universo de estratégias para construção de carteiras, o desempenho das carteiras otimizadas é avaliada em termos de retorno médio variância dos retornos da carteira, razão de Sharpe (λ) e turnover. Estas estatísticas são calculadas como segue:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\omega_t' R_{t+1}), \quad (3)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\omega_t' R_{t+1} - \hat{\mu})^2, \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}, \quad (5)$$

$$\tau_{p,t} = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{T-1} (|\omega_{i,t+1} - \omega_{i,t}|) \quad (6)$$

onde $\omega_{i,t}$ é o peso do ativo i na carteira no tempo $t + 1$ antes do rebalanceamento e $\omega_{i,t+1}$ é o peso desejado do ativo i no tempo $t + 1$. O turnover da

carteira, como definido acima, pode ser interpretado como a fração média do volume de recursos alocado na carteira que é transacionado em cada período.

3.2 Pré-seleção – Filtragem

Antes de implementar o procedimento de escolha das estratégias optou-se por eliminar as carteiras que apresentaram, no período dentro da amostra, desempenho inferior à carteira $1/N$ e *turnover* superior a um *threshold* γ . Já que o objetivo do trabalho se aproximar o máximo possível de uma aplicação real, o que se pretende com esta etapa é reduzir esforço computacional e evitar que estratégias que geraram resultados ruins (inferiores à carteira $1/N$) por um longo período de tempo possam prejudicar a performance das carteiras resultantes do processo de seleção proposto.

Inicialmente, a amostra com com T observações é dividida em três partes: a primeira parte é usada nas estimações iniciais, a segunda parte é usada para treinamento e seleção das estratégias com base na persistência de performance, e a terceira parte é utilizada para avaliação fora da amostra das estratégias selecionadas.

Seja $\omega_{1/N}$ a carteira igualmente ponderada e $\gamma_{\max}$ o parâmetro de *turnover* máximo, a pré-seleção definirá o universo de metodologias para seleção de carteiras restrito (U^*). Os componentes de U^* serão as $j = 1, 2, \dots, J$ estratégias cujos retornos obtiverem desempenho igual ou superior à carteira $1/N$ em termos de razão de Sharpe e *turnover* menor ou igual a $\gamma_{\max}$ no conjunto de dados de treinamento. Ou seja:

$$\text{Se } \lambda(r^j) \geq \lambda(r_{1/N}) \text{ e } \bar{\tau}_p(w^j) \leq \gamma_{\max} \implies \omega^j \in U^*. \quad (7)$$

A escolha da carteira ingênua como limite para performance tem como justificativa a argumentação de DeMiguel et al. (2009) de que ela seria o *benchmark* natural para problemas envolvendo seleção de carteiras. Recomendação que, de fato, vem sendo seguida pela literatura posterior, como pode ser visto em Tu & Zhou (2011), Kirby & Ostdiek (2012) e Caldeira et al. (2017). Além disso, foi definido o razão de Sharpe como medida de performance nesta etapa, pela sua ampla utilização como principal fonte de avaliação dos resultados em problemas de seleção de carteiras. E, por fim, há o limite adicional dado pelo parâmetro de *turnover* máximo, que visa restringir a escolha às estratégias que apresentem menores custos de transação.

3.3 Critérios de performance

A primeira etapa no processo de seleção de metodologias consiste na construção das carteiras individuais através das diferentes abordagens consideradas

usando os dados da primeira parte da amostra. Feito isso, chega-se ao conjunto de carteiras U^K , em seguida aplica-se o procedimento de pré-seleção descrito acima chegando-se ao conjunto de carteiras U^* , que será analisado nos dados de treinamento. Ao conjunto de carteiras U^* aplica-se os critérios para tomada de decisão, a cada nova observação o procedimento é repetido de tal forma que em cada ponto do tempo seleciona-se uma estratégia com base na hipótese da persistência de performance.

O procedimento para seleção das estratégias retorna a cada momento a estratégia que apresentou melhor desempenho para as p observações passadas definidas pela janela amostral em relação ao critério pré-estabelecido. Cada elemento da sequência de escolhas geradas através da avaliação do critério, a cada ponto do tempo, pode ser definido como:

$$\omega_t^s = f(U_t^*; r^1, r^2, \dots, r^K; p; \delta), \quad t = 1, \dots, T, \quad (8)$$

em que $r^k = [r_{t-1}^k, r_{t-2}^k, \dots, r_{t-p}^k]'$ é o vetor de retornos para uma carteira k qualquer e uma determinada janela de observações passadas p . Assim, a sequência de escolhas é função do vetor dos retornos passados até o tempo $t - p$, da dimensão da janela de defasagem p e de um critério de avaliação performance δ , o qual pode ser escolhido arbitrariamente, o que será melhor elucidado a seguir.

A matriz $K \times p$ de retornos passados é dada por:

$$RP = \begin{bmatrix} r_{t-1}^1 & r_{t-1}^2 & \cdots & r_{t-1}^K \\ r_{t-2}^1 & r_{t-2}^2 & \cdots & r_{t-2}^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{t-p}^1 & r_{t-p}^2 & \cdots & r_{t-p}^K \end{bmatrix} \quad (9)$$

em que cada coluna representa os retornos passados de uma das K estratégias do universo restrito de metodologias para seleção de carteiras. Ainda a janela de defasagem determina o número de linhas da matriz. Um passo importante é a definição da janela de observações p , pois isso determinará a dimensão da matriz RP. Feito isto, o próximo passo é a definição do critério a ser empregado na função de seleção de estratégias (δ).

O primeiro critério considerado consiste da média amostral dos retornos, de modo que o modelo escolhido no tempo t será aquele que maximizar a média amostral para as p observações anteriores. Seja $M_t = [M_t^1, M_t^2, \dots, M_t^K]$ o vetor de médias em t , é escolhida a estratégia de seleção de carteiras que obtiver maior média nesta subamostra:

$$\omega_{t,M}^k = \arg \max (U_t^*; M_t^1, M_t^2, \dots, M_t^K). \quad (10)$$

Isto é, obtém-se a média dos retornos na janela amostral (delimitada pelo parâmetro p) para cada estratégia, depois é identificada aquela com valor máximo do critério e, então, retorna-se o vetor de pesos em t da estratégia que maximizou a média da subamostra de p observações passadas dos retornos.

Se o critério for o razão de Sharpe, como no caso anterior, será selecionado o modelo com maior razão de Sharpe na amostra de treinamento. Do mesmo modo, será calculado o razão de Sharpe para cada coluna da matriz (9), ou seja, para cada estratégia dentro da janela de observações passadas, com o vetor de índices sendo dado por: $\lambda_t = [\lambda_t^1, \lambda_t^2, \dots, \lambda_t^K]$. Então, será escolhida, a cada ponto do tempo, a estratégia com melhor performance em termos de razão de Sharpe nas p observações passadas:

$$\omega_{t,\lambda}^k = \arg \max (U_t^*, \lambda_t^1, \lambda_t^2, \dots, \lambda_t^K), \quad (11)$$

em que $w_{t,\lambda}^k$ determina o t -ésimo elemento da sequência de escolhas para atribuição de pesos aos ativos.

Por fim, será utilizada a variância como critério para escolha. Porém, dessa vez o modelo escolhido será aquele que minimizar a variância para as p observações subjacentes à realização do experimento. Aqui, será gerado um vetor das variâncias de cada metodologia para todo t ($V_t = [V_t^1, V_t^2, \dots, V_t^K]$), dada a subamostra definida por p e, posteriormente, será selecionada a estratégia que apresentar menor risco nesta janela amostral:

$$\omega_{t,V}^k = \arg \min (U_t^*, V_t^1, V_t^2, \dots, V_t^K), \quad (12)$$

nesse caso $\omega_{t,V}^k$ determina a sequência de escolhas obtidas através da minimização da variância para uma janela de p observações anteriores.

3.4 Estratégias Competidoras

Esta seção se destina à apresentação das estratégias competidoras para este experimento em particular. Neste caso, foram utilizadas algumas estratégias de fácil compreensão e construção, uma vez que o objetivo aqui é explorar os possíveis ganhos com a escolha de metodologias baseada em persistência de performance e critérios de avaliação simples. A seguir são apresentadas os modelos competidores utilizados no experimento.

3.4.1 Estratégia Ingênua (*naive*)

A carteira igualmente ponderada é um competidor amplamente utilizado na literatura e que não é fácil de ser superado (DeMiguel et al., 2009). Portanto, é uma escolha natural para compor as estratégias competidoras e também para servir como uma referência em termos de desempenho para as demais

abordagens. Neste caso, todos os ativos recebem o mesmo peso no momento da construção da carteira:

$$\omega_{i,t}^{\text{naive}} = \frac{1}{n}. \quad (13)$$

3.4.2 Estratégias de otimização por média-variância

As estratégias de otimização desenvolvidas a partir de Markowitz (1952) e suas extensões dominaram o campo de seleção de carteiras por muito tempo e ainda têm grande espaço nesta área. Em sua formulação básica, o vetor de pesos ótimos, segundo Cochrane (2005), é definido como:

$$\omega_t^{\text{mv}} = (\Sigma_t)^{-1} \frac{\mu_t(C\mu_0 - B) + l(A - B\mu_0)}{AC - B^2}, \quad (14)$$

onde $A = \mu_t(\Sigma_t)^{-1}\mu_t$, $B = \mu_t(\Sigma_t)^{-1}l$ e $C = l'(\Sigma_t)^{-1}l$, l é um vetor de uns e Σ_t é a matriz de variância-covariância no tempo t .

As estratégias de otimização por média-variância resultam de combinações de pesos atribuídos aos ativos que visam alcançar o menor risco para um nível fixo de retorno μ_0 . De modo alternativo, podem ser obtidas fixando um nível máximo de risco, nesse caso a otimização é feita visando um nível de retorno máximo. Serão adotadas duas estratégias de otimização por média-variância neste experimento, optou-se por restringir a venda a descoberto nos dois casos com o intuito de reduzir os custos de transação e evitar alocações extremas nas carteiras otimizadas.

A primeira carteira implementada será construída com a utilização da previsão amostral dos retornos esperados e matriz de covariância. A outra carteira utilizará a previsão dos retornos dos ativos obtidas com o auxílio dos modelos de precificação; Fama & French (1993), Carhart (1997) ou Fama & French (2015). Neste caso, para a previsão da média de cada ativo, tem-se:

$$\hat{\mu}_{i,t}^* = \beta_{i,t}' \hat{\mathbf{f}}_t, \quad (15)$$

em que $\beta_{i,t} = (\beta_{i,t}^1, \beta_{i,t}^2, \dots, \beta_{i,t}^F)'$ é vetor dos coeficientes de carga dos F fatores para os i ativos e $\hat{\mathbf{f}}_t = (\hat{f}_t^1, \hat{f}_t^2, \dots, \hat{f}_t^F)'$ é o vetor de fatores previstos para o tempo t . De modo semelhante a previsão das volatilidades individuais de cada ativo é feita segundo:

$$\hat{\sigma}_{i,t}^{2*} = \beta_{i,t}' \hat{\Gamma}_t \beta_{i,t}, \quad (16)$$

onde $\hat{\Gamma}_t$ é previsão amostral da matriz de covariância dos fatores.

3.4.3 Estratégia de mínima-variância

A estratégia de mínima-variância é um caso particular das carteiras de média-variância. A justificativa para elaboração desta estratégia se encontra na dificuldade de se obter boas estimativas para os retornos esperados, além de que a má especificação deles pode trazer grandes prejuízos à otimização, como visto em Best & Grauer (1991). O vetor de pesos ótimos desta abordagem é dado por:

$$\omega_t^{\text{minv}} = \frac{l'(\hat{\Sigma}_t)^{-1}}{l'(\hat{\Sigma}_t)^{-1}l} \quad (17)$$

em que l é um vetor de uns $n \times 1$.

3.4.4 Estratégias *Volatility Timing*

Fleming et al. (2001) e Fleming et al. (2003) propuseram abordagens alternativas para construção de carteiras, cuja estruturação não depende da estimação dos retornos esperados. A metodologia conta com um parâmetro (η) que dá a velocidade de ajuste do rebalanceamento da carteira em relação a mudanças de volatilidade. No presente estudo, assim como em Kirby & Ost diek (2012), o parâmetro η assumirá os seguintes valores: $\{1, 2, 4\}$. Além disso, o cálculo da volatilidade seguirá duas abordagens, a primeira com estimações amostrais, cujos pesos para cada ativo i são dados por:

$$\omega_{i,t}^{\text{vt}} = \frac{(1/\hat{\sigma}_{i,t})^\eta}{\sum_{i=1}^n (1/\hat{\sigma}_{i,t})^\eta} \quad (18)$$

O outro caso é quando a estimação da volatilidade é feita via modelos de fatores. Neste caso, basta usar $\hat{\sigma}_{i,t}^{2*}$ obtido com a Equação (16) no lugar de $\hat{\sigma}_{i,t}$ na Equação (18). Deste modo, serão empregadas seis diferentes estratégias *volatility timing*, dadas as duas formas de estimação da volatilidade esperada e os 3 valores diferentes do parâmetro η .

3.4.5 Estratégias *Reward-to-Risk Timing*

Tendo em vista que o conjunto de estratégias anterior ignora as informações que podem ser trazidas por meio dos retornos esperados, Kirby & Ost diek (2012) criaram as estratégias *reward-to-risk*. Assim como no caso anterior, esta abordagem não leva conta os elementos fora da diagonal principal da matriz de covariância prevista. Os autores argumentam que a construção de estratégias desconsiderando tais elementos da matriz de covariância diminui o risco de pesos extremos para os ativos. Os pesos desta abordagem

para um ativo i são dados por:

$$\omega_{i,t}^{\text{rw}} = \frac{(\hat{\mu}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta}{\sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta} \quad (19)$$

em que $\hat{\mu}_{i,t}^+ = \max(\hat{\mu}_{i,t}, 0)$, o que garante pesos positivos à carteira. No caso em que as previsões são obtidas através dos modelos de fatores, basta substituir os valores obtidos com as Equações (15) e (16) em (19). Portanto, serão analisadas também seis estratégias *reward-to-risk*.

3.4.6 Estratégias *Reward-Risk Timing* alternativas

Dados os problemas de estimação dos retornos dos ativos, os quais são usados na abordagem anterior, Kirby & Ostdiek (2012) criaram uma estratégia na qual utilizam as cargas de modelos multi-fatores de risco para substituir os retornos esperados na formulação anterior. Assim, é empregado um novo parâmetro que traz o valor médio da carga dos fatores. Os pesos desta estratégia são dados a seguir:

$$\omega_{i,t}^{\text{rwa}} = \frac{(\bar{\beta}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta}{\sum_{i=1}^n (\bar{\beta}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t})^\eta}, \quad (20)$$

onde $\bar{\beta}_{i,t}^+ = \max(\bar{\beta}_{i,t}, 0)$ e $\bar{\beta}_{i,t} = (1/F) \sum_{f=1}^F \beta_{i,t}^f$ é a média da carga dos F fatores utilizados na construção do modelo.

Caso a volatilidade também seja calculada via modelos de fatores, o peso de cada ativo i na carteira é definido como:

$$\omega_{i,t}^{\text{rwa*}} = \frac{(\bar{\beta}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t}^*)^\eta}{\sum_{i=1}^n (\bar{\beta}_{i,t}^+ / \hat{\sigma}_{i,t}^*)^\eta}, \quad (21)$$

em que $\beta_{i,t}^+$ segue as mesmas diretrizes do caso anterior.

Dadas as duas formas de se calcular a volatilidade a serem empregadas na aplicação empírica da metodologia aqui proposta, além dos três parâmetros de velocidade de rebalanceamento da carteira, outra vez serão geradas seis carteiras.

As previsões dos retornos e das matrizes de covariância para todas estratégias serão obtidos através do esquema de janela deslizante e cada janela será composta por 1/3 do total de observações.

4. Aplicação e resultados

O problema de alocação de recursos, em especial o caso da seleção de carteiras de investimentos, pode ser resolvido de diversas maneiras, como já

discutido nas seções anteriores. No entanto, dadas as diferentes formas de se resolver esse problema, as quais podemos chamar de estratégias, metodologias ou modelos, não há unanimidade em termos de performance quando se parte para sua implementação empírica. Desse modo, foi desenvolvido o procedimento de escolha descrito na seção anterior, no qual, a partir de um universo de metodologias competidoras, deseja-se chegar a cada ponto do tempo àquela cujo desempenho num passado recente foi superior às demais, levando em conta a avaliação de algum dos critérios definidos anteriormente. Nesse caso, segundo a hipótese de persistência de performance, a curto prazo essa carteira continuará a apresentar bom desempenho.

A presente proposta de escolha entre estratégias foi implementada dividindo a amostra em três partes com o mesmo número de observações. A primeira parcela das observações foi tomada como ponto de partida das estimações *rolling window* dos parâmetros das estratégias, assim os primeiros componentes da previsão amostral dos parâmetros de média e volatilidade foram obtidos tomando toda essa parcela como amostra. Além disso, a estimação dos modelos de fatores foi realizada via regressão normal multivariada também contando com auxílio do método de rolagem amostral com igual dimensão da janela de rolagem. Ainda, os retornos e matrizes de covariância dos fatores foram calculados com o procedimento rolagem amostral igual ao aplicado nos retornos dos ativos individuais.

Na segunda parte da amostra é realizada a pré-seleção, nessa etapa foram calculadas as 22 estratégias de seleção de carteiras propostas anteriormente para as três diferentes bases de dados: ações de empresas que compõe o índice Ibovespa; ações de empresas que compõe o índice S&P 100; e 25 carteiras formadas a partir da classificação de capitalização a mercado e razão *book-to-market* do mercado americano. Então, puderam ser selecionadas para a última etapa (fora da amostra) aquelas estratégias que obtiveram desempenho aceitável nesta fase de filtragem e, assim, estavam aptas a integrar o universo restrito de metodologias para construção de carteiras. Nesse caso, além do desempenho superior a estratégia ingênua em termos de razão de Sharpe, foram selecionadas as estratégias com *turnover* igual ou inferior a 2%, valor definido para o parâmetro γ , para compor U^* .

Uma vez construído o universo restrito de metodologias para construção de carteiras de investimento, foi implementado, para cada uma das bases de dados, o procedimento de escolha entre estratégias para seleção de carteiras baseado em persistência de performance, no qual foram definidos como critérios de avaliação: média, razão de Sharpe e variância – cada um à sua vez. Para cada caso, o experimento foi realizado considerando todos valores possíveis para o parâmetro p , que determina o tamanho da matriz de retornos

passados. Além disso, implementou-se o teste desenvolvido por Ledoit & Wolf (2008) com o *bootstrap* de Politis & Romano (1994) para verificar se as séries de retornos das carteiras geradas pelo processo de seleção aqui apresentado seriam estatisticamente diferentes das carteiras geradas individualmente. Detalhes da aplicação e resultados para cada base de dados são apresentados a seguir.

4.1 Ações componentes do índice SP 100

A primeira base de dados à qual o estudo foi empregado é formada por observações dos preços das ações de empresas que compuseram o índice S&P 100⁶ no último trimestre de 2018 e têm abertura de capital anterior a data inicial desta amostra. Foram tomadas 2517 observações dos preços diários destas ações com ajustamento para dividendos e *splits* que compreendem um período de 10 anos, de 03 de novembro de 2008 a 31 de outubro de 2018.

Ainda em relação à base de dados, para cálculo dos modelos de fatores, os quais foram empregados na construção de algumas das estratégias deste exercício, recorreu-se à base de dados mantida por Kenneth French. O modelo de fator que melhor se adequou à presente análise foi o desenvolvido por Fama & French (2015), que conta com cinco fatores em sua formulação. Para sua construção foram utilizadas 2517 observações, que compreendem período igual ao das ações, dos fatores de risco de mercado, SMB, HML, RMW e CMA, além do ativo livre de risco. O cálculo dos parâmetros do modelo foi realizado com a utilização de regressões normais multivariadas com janela de rolagem de 838 observações. Cabe destacar que todas as estratégias aplicadas nesta base de dados foram realizadas utilizando a mesma especificação para rolagem da janela de estimação.

A tabela 1 traz os resultados obtidos na etapa de pré-seleção, por meio dela foi possível determinar o conjunto de metodologias para compor o universo de estratégias restrito. Neste caso, as estratégias selecionadas para compor U^* foram as duas estratégias de otimização por média-variância, a *volatility timing* e as *reward-to-risk* estimadas com o auxílio do modelo de precificação de ativos de Fama & French (2015), com $\eta = 1$ e $\eta = \{1,2\}$ respectivamente, além do próprio portfólio igualmente ponderado.

Em relação à performance das estratégias na parcela da amostra destinada à pré-seleção, pode-se notar que a estratégia que obteve maior razão de Sharpe e retorno médio, 1,964 e 21,31 respectivamente, foi a obtida pela metodologia de otimização por média-variância com os parâmetros calculados

⁶É um índice do mercado de ações norte-americano mantido pela Standard & Poor's que mede o desempenho das empresas de maior capitalização dos Estados Unidos. O índice inclui 102 papéis de 100 grandes companhias de vários setores.

Tabela 1
Pré-seleção aplicada à base de ações componentes do índice SP 100

estratégias		medidas de performance			
		média	Sharpe	desvio-padrão	turnover
ingênua		19,43	1,620	12,00	0,007
mínima-variância		11,22	1,189	9,45	0,016
média-variância	amostral ⁺	16,57	1,642	10,10	0,013
	FF(5) ⁺	21,31	1,964	10,86	0,018
volatility timing amostral	$\eta = 1$	17,02	1,608	10,59	0,007
	$\eta = 2$	17,25	1,562	11,05	0,008
	$\eta = 4$	12,11	1,273	9,52	0,010
volatility timing FF(5)	$\eta = 1$	17,77	1,716	10,36	0,008
	$\eta = 2$	15,25	1,565	9,75	0,010
	$\eta = 4$	11,14	1,064	10,47	0,015
RWR amostral	$\eta = 1$	17,96	1,605	11,20	0,020
	$\eta = 2$	16,72	1,543	10,85	0,032
	$\eta = 4$	14,48	1,350	10,73	0,053
RWR FF(5)	$\eta = 1$	17,88	1,681	10,64	0,010
	$\eta = 2$	16,38	1,640	9,99	0,013
	$\eta = 4$	14,97	1,536	9,75	0,016
RWR alternativa amostral	$\eta = 1$	15,83	1,527	10,37	0,011
	$\eta = 2$	14,21	1,439	9,88	0,016
	$\eta = 4$	11,46	1,187	9,66	0,025
RWR alternativa FF(5)	$\eta = 1$	16,72	1,586	10,55	0,049
	$\eta = 2$	13,51	1,416	9,55	0,020
	$\eta = 4$	10,07	1,002	10,06	0,023

A tabela traz uma avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos, tomando como medidas de desempenho o retorno médio, razão de Sharpe e desvio-padrão anualizados, além do turnover médio das carteiras no período de pré-seleção, aplicadas às ações componentes do índice S&P 100. Aqui estão destacados em negrito aqueles valores que violam algum dos critérios da pré-seleção, definidos pela regra (7) (com $\gamma = 0,02$), e, desta forma, excluem as estratégias às quais estes valores pertencem do universo restrito de metodologias para construção de carteiras (U^*).

com auxílio do modelo de fatores. Por outro lado, a estratégia RWR Alternativa FF(5) com $\eta = 4$ foi a que apresentou pior performance no tocante a essas medidas, com média igual a 10,07 e razão de Sharpe alcançando apenas 1,002. Quando se analisa o risco destas carteiras, percebe-se que a carteira igualmente ponderada foi aquela com maior desvio-padrão (12,00), enquanto a carteira de mínima-variância amostral apresentou o menor valor para essa medida (9,45).

Na tabela 2 são apresentados os resultados das estratégias individuais nas 839 últimas observações da amostra. Ao analisar os resultados das carteiras geradas por essas metodologias, nota-se que a estratégia com melhor performance em termos de retorno médio e razão de Sharpe continuou sendo a de Média-Variância FF(5), 13,05 e 1,136 respectivamente. Em contrapartida a

Tabela 2
Desempenho das estratégias individuais aplicadas à base de ações do SP 100

estratégias		medidas de performance		
		retorno médio	Sharpe	desvio-padrão
ingênua		12,05	0,932	12,94
mínima-variância		9,90	0,962	10,29
média-variância	amostral ⁺	10,94	1,051	10,41
	FF(5) ⁺	13,05	1,136	11,49
volatility timing amostral	$\eta = 1$	11,28	0,946	11,93
	$\eta = 2$	11,59	0,971	11,94
	$\eta = 4$	10,39	0,974	10,67
volatility timing FF(5)	$\eta = 1$	11,19	0,980	11,43
	$\eta = 2$	10,81	1,016	10,65
	$\eta = 4$	10,11	0,903	11,21
RWR timing amostral	$\eta = 1$	12,00	0,952	12,61
	$\eta = 2$	11,94	0,963	12,41
	$\eta = 4$	11,47	0,935	12,28
RWR FF(5)	$\eta = 1$	11,30	0,934	12,10
	$\eta = 2$	11,17	0,967	11,57
	$\eta = 4$	11,26	1,001	11,26
RWR alternativa amostral	$\eta = 1$	9,67	0,837	11,55
	$\eta = 2$	8,55	0,755	11,33
	$\eta = 4$	7,45	0,655	11,37
RWR alternativa FF(5)	$\eta = 1$	10,82	0,938	11,54
	$\eta = 2$	10,03	0,956	10,50
	$\eta = 4$	9,59	0,885	10,84

A tabela 2 traz a avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos no período final (fora da amostra), tomando como medidas de desempenho o retorno médio, razão de Sharpe e desvio-padrão anualizados das carteiras formadas a partir de ações que compunham o índice S&P 100 no último trimestre de 2018 e foram utilizadas no estudo.

estratégia que obteve pior desempenho em relação a essas estatísticas foi a RWR Alternativa estimada a partir da amostra com $\eta = 4$, cujos resultados de retorno médio e razão de Sharpe atingiram 7,45 e 0,655 respectivamente. Em relação ao desvio-padrão a carteira de mínima-variância amostral novamente foi a que obteve melhor resultado (10,29), enquanto a carteira ingênua apresentou o maior desvio-padrão dentre as demais carteiras (12,94).

A tabela 3 apresenta os resultados obtidos por carteiras construídas através da escolha baseada nos critérios de média, razão de Sharpe e variância. Cabe ressaltar que apesar de se ter realizado o experimento com todos possíveis valores para a janela de observações passadas (p), optou-se aqui por apresentar o intervalo em que a escolha entre carteiras logrou melhor desempenho, nesse caso entre 4 e 14 observações passadas ao tempo em que foi

Tabela 3
Carteiras construídas a partir da escolha entre estratégias - SP 100

critério	janela (p)	medidas de desempenho			janela (p)	medidas de desempenho		
		μ	λ	σ		μ	λ	σ
média	4	15,39***	1,378***	11,18	20	13,10**	1,214**	10,80
	5	12,35*	1,112*	11,12	30	13,23**	1,197**	11,06
	6	14,50**	1,304**	11,12	60	12,62*	1,116*	11,32
	7	14,41**	1,301**	11,08	90	11,71	1,030*	11,38
	8	13,77**	1,247**	11,04	120	12,95*	1,138**	11,39
	9	13,27**	1,213*	10,95	150	14,11**	1,228**	11,50
	10	14,02**	1,309**	10,72	200	12,43*	1,062*	11,71
	11	13,82**	1,299**	10,65	250	11,51	0,981	11,73
	12	13,60**	1,265**	10,76	375	13,97**	1,232**	11,35
	13	13,01*	1,206**	10,80	500	13,67**	1,202**	11,38
	14	12,90*	1,195**	10,80	750	13,13**	1,121	11,72
Sharpe	4	14,21**	1,282**	11,09	20	13,13**	1,212**	10,84
	5	12,47*	1,131*	11,04	30	13,18**	1,187**	11,11
	6	12,75*	1,157**	11,03	60	12,02	1,076*	11,18
	7	12,05	1,101*	10,95	90	11,69	1,050*	11,14
	8	12,54*	1,166**	10,76	120	11,72	1,047*	11,20
	9	13,03*	1,214**	10,74	150	12,08*	1,073*	11,27
	10	12,43*	1,170**	10,63	200	11,38	1,003*	11,35
	11	12,07*	1,128*	10,71	250	12,69*	1,137**	11,17
	12	11,17	1,034*	10,82	375	14,53**	1,334**	10,90
	13	12,66*	1,178**	10,75	500	12,55*	1,172**	10,71
	14	12,81*	1,184**	10,82	750	14,03**	1,220**	11,51
variância	4	11,32	1,038*	10,92	20	9,43	0,902	10,46
	5	10,76	0,989*	10,88	30	10,09	0,948*	10,65
	6	9,33	0,866	10,78	60	10,30	0,984*	10,47
	7	11,34	1,057*	10,74	90	10,66	1,015*	10,52
	8	10,57	0,987*	10,71	120	10,36	0,986*	10,50
	9	9,32	0,873	10,68	150	10,93	1,041*	10,51
	10	8,47	0,797	10,64	200	9,57	0,912	10,51
	11	9,33	0,876	10,66	250	10,17	0,974*	10,45
	12	8,51	0,798	10,67	375	11,15	1,057*	10,55
	13	9,13	0,860	10,62	500	10,49	1,000*	10,50
	14	9,23	0,872	10,58	750	10,49	1,000*	10,50

Resultados em termos de retorno médio (μ), razão de Sharpe (λ) e desvio-padrão (σ) anualizados para carteiras construídas através da escolha de estratégias baseada em persistência de performance. (*) significa que a estratégia teve desempenho superior a ingênua, (**) que obteve performance superior a todas estratégias individuais e (***) que teve o melhor desempenho dentre todas carteiras empregadas no estudo.

tomada decisão de alocação, além de janelas amostrais periodicamente espalhadas para fins de comparação.

Quando o procedimento de escolha foi realizado utilizando a média como critério de otimização e janela de observações passadas igual a quatro ($p = 4$), foram obtidos os melhores resultados em termos de razão de Sharpe e retorno médio, 1,378 e 15,39 respectivamente. Os resultados do teste de Ledoit & Wolf (2008) apontaram que, para quase todas as carteiras geradas pelo pro-

Figura 1
Dinâmica das escolhas ótimas entre estratégias com base na hipótese de
persistência de performance, utilizando como critério a média e definindo
 $p = 4$

A figura traz o deslocamento, ao longo do período fora da amostra, do procedimento de escolha entre as estratégias do universo restrito de metodologias para seleção de carteiras tomando como critério a média para as 4 últimas observações.

Figura 2
Número de vezes em que as carteiras foram selecionadas no procedimento
de escolha tomando como critério a média e definindo $p = 4$

O gráfico acima apresenta o número de vezes em que cada estratégia contida em U^* foi escolhida, ao longo do período fora da amostra, quando definido como critério a média para as 4 últimas observações.

cesso de seleção aqui aplicado, não se pode afirmar que elas tenham razão de Sharpe e média diferentes das carteiras construídas individualmente. Apenas quando se analisa a variância, há evidências de que as séries diferem umas

das outras para este parâmetro segundo os resultados do teste.

A figura 1 traz a evolução da seleção entre estratégias para compor essa carteira. Por meio deste gráfico é possível observar a cada ponto do tempo a estratégia escolhida para compor a sequência de escolhas ótimas com base na persistência de performance. Já, a figura 2 traz o número de vezes em que cada uma das estratégias foi a escolhida quando definida a média como critério de seleção para as 4 observações imediatamente passadas, isto é, quantas vezes cada estratégia do universo restrito de metodologias obteve maior média se consideradas as 4 observações anteriores à aplicação do procedimento de escolha. Nesse caso, nota-se que a estratégia de média variância amostral (mv^+) e a estratégia ingênua (*naive*) foram as mais selecionadas, a primeira 337 e a segunda 300 vezes ao longo do período. Por outro lado, as metodologias que foram escolhidas por menos vezes foram a RWR FF(1), 25 vezes, e a RWR FF(2), 17 vezes na última parcela de observações.

A apresentação das figuras 1 e 2 foi realizada para ilustrar a dinâmica do processo da escolha de estratégias ao longo do tempo. Assim, optou-se por apresentar o procedimento de escolha que obteve melhor desempenho para exemplificar o processo, que é similar ao aplicado aos demais casos cujos resultados são apresentados na tabela 3.

4.2 Ações do índice Ibovespa

O experimento foi aplicado ao mercado de ações brasileiro com auxílio de dados históricos dos preços de ações negociadas na B3,⁷ que foram obtidos através da base Economatica. O conjunto de dados é constituído por 2472 observações diárias, de 03 de novembro de 2018 a 31 de outubro de 2018, dos preços de ações de empresas que compunham o índice Ibovespa no último trimestre de 2018, cuja abertura de capital foi anterior anterior a data das primeiras observações da amostra.

Além disso, se recorreu a base do Centro Brasileiro de Pesquisa em Economia Financeira da Universidade de São Paulo - NEFIN⁸ - para obtenção dos fatores de risco de mercado, SMB, HML e WML. Os quais foram utilizados para cálculo do modelo de fatores desenvolvido por Carhart (1997) que foi empregado na estimação das volatilidades e retornos esperados utilizados na construção de algumas estratégias definidas na seção anterior. As observações dos fatores têm a mesma frequência e data das observações dos preços

⁷ A B3, cujo nome se refere as palavras Brasil, Bolsa e Balcão, é a bolsa de valores brasileira, que ganhou esse nome após a última fusão, em março de 2017, entre Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBOVESPA) e a Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (CETIP).

⁸ Pode ser acessada em <http://www.nefin.com.br>.

ações.

A janela de rolagem da abordagem *rolling window* empregada na previsão dos retornos dos ativos e fatores, assim como das matrizes de covariância dos retornos dos ativos e fatores foi definida como: $L = 823$. E, assim como nos demais casos, o total de observações foi dividido 3 partes iguais, a primeira para rolagem inicial dos estimadores *rolling window*, a segunda destinada à etapa de pré-seleção e a última à aplicação do procedimento de escolha baseado em persistência de performance.

A tabela 4 traz o resultados das estratégias competidoras no período de pré-seleção, o que permite avaliar o desempenho individual das estratégias,

Tabela 4
Pré-seleção aplicada à base de ações componentes do Ibovespa

estratégias		medidas de performance			
		média	Sharpe	desvio-padrão	turnover
ingênua		-0,06	-0,003	19,79	0,014
mínima-variância amostral		11,25	0,794	14,16	0,018
média-variância	amostral ⁺ FF(4) ⁺	10,07	0,704	14,32	0,017
		10,19	0,623	16,36	0,019
volatility timing amostral	$\eta = 1$	0,71	0,039	18,33	0,013
	$\eta = 2$	3,41	0,192	17,80	0,013
	$\eta = 4$	3,68	0,226	16,29	0,015
volatility timing FF(4)	$\eta = 1$	5,30	0,325	16,31	0,015
	$\eta = 2$	10,35	0,668	15,50	0,020
	$\eta = 4$	13,90	0,766	18,15	0,028
RWR amostral	$\eta = 1$	4,59	0,289	15,86	0,041
	$\eta = 2$	5,56	0,362	15,35	0,055
	$\eta = 4$	7,06	0,402	17,59	0,068
RWR FF(4)	$\eta = 1$	9,87	0,579	17,04	0,057
	$\eta = 2$	15,82	0,858	18,44	0,048
	$\eta = 4$	18,55	0,901	20,61	0,047
RWR alternativa amostral	$\eta = 1$	1,07	0,053	20,13	0,016
	$\eta = 2$	1,79	0,088	20,29	0,018
	$\eta = 4$	3,87	0,192	20,21	0,024
RWR alternativa FF(4)	$\eta = 1$	5,76	0,319	18,09	0,017
	$\eta = 2$	13,44	0,750	17,93	0,019
	$\eta = 4$	26,52	1,127	23,54	0,011

A tabela traz uma avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos, tomando como medidas de desempenho o retorno médio, razão de Sharpe e desvio-padrão anualizados, além do turnover médio das carteiras no período de pré-seleção. Aqui estão destacados em negrito aqueles valores que violam algum dos critérios da pré-seleção, definidos pela regra (7) (com $\gamma = 0,02$), e, desta forma, excluem as estratégias às quais estes valores pertencem do universo restrito de metodologias para construção de carteiras (U^*).

Tabela 5
Desempenho das estratégias individuais - IBOVESPA

estratégias		medidas de performance		
		retorno médio	Sharpe	desvio-padrão
ingênua		19,84	0,814	24,39
mínima-variância		2,38	0,148	16,12
média-variância	amostral ⁺	3,84	0,237	16,20
	FF(4) ⁺	13,57	0,656	20,68
volatility timing amostral	$\eta = 1$	12,99	0,613	21,19
	$\eta = 2$	14,27	0,688	20,74
	$\eta = 4$	3,66	0,216	16,99
volatility timing FF(4)	$\eta = 1$	13,12	0,638	20,57
	$\eta = 2$	9,62	0,515	18,57
	$\eta = 4$	10,55	0,541	19,52
RWR timing amostral	$\eta = 1$	8,52	0,418	20,39
	$\eta = 2$	5,62	0,294	19,11
	$\eta = 4$	4,53	0,233	19,45
RWR FF(4)	$\eta = 1$	7,88	0,355	22,24
	$\eta = 2$	6,68	0,316	21,17
	$\eta = 4$	6,37	0,305	20,88
RWR alternativa amostral	$\eta = 1$	15,88	0,709	22,40
	$\eta = 2$	14,50	0,679	21,38
	$\eta = 4$	14,69	0,696	21,11
RWR alternativa FF(4)	$\eta = 1$	16,57	0,760	21,82
	$\eta = 2$	15,77	0,791	19,94
	$\eta = 4$	17,26	0,834	20,69

A tabela 5 traz a avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos no período final (fora da amostra), tomando como medidas de desempenho o retorno médio, razão de Sharpe e desvio-padrão anualizados das carteiras para formadas a partir da base de ações componentes do índice Ibovespa.

além de determinar aquelas selecionadas para compor U^* . Nessa fase, a carteira com melhor desempenho em relação a média dos retornos e razão de Sharpe foi a RWR Alternativa FF(4) com $\eta = 4$, 26,52 e 1,127 respectivamente. Enquanto a estratégia com pior desempenho nesses indicadores foi a 1/n, apresentando retorno médio e razão de Sharpe negativos, -0,06 e -0,003 respectivamente. Quando se analisa o desvio-padrão, a carteira de mínima variância amostral foi àquela com melhor resultado, 14,16.

Em relação às estratégias selecionadas para compor o universo restrito de metodologias para construção de carteiras, como a carteira ingênua obteve um desempenho muito ruim em termos de razão de Sharpe, todas as demais carteiras apresentaram um desempenho superior a ela. No entanto, algumas estratégias obtiveram um *turnover* superior ao máximo definido ($\gamma = 0,02$),

Tabela 6
Carteiras construídas a partir da escolha entre estratégias - IBOVESPA

critério	janela (p)	medidas de desempenho			janela (p)	medidas de desempenho		
		μ	λ	σ		μ	λ	σ
média	4	10,44	0,511	20,46	20	14,80	0,668	22,16
	5	17,86	0,875**	20,43	30	8,11	0,388	20,91
	6	19,05	0,935**	20,40	60	13,31	0,635	20,98
	7	16,59	0,795	20,87	90	7,24	0,332	21,81
	8	19,71	0,965**	20,44	120	15,13	0,695	21,79
	9	17,33	0,832*	20,83	150	13,69	0,627	21,87
	10	18,10	0,878**	20,63	200	12,52	0,582	21,52
	11	18,00	0,874**	20,60	250	16,60	0,760	21,85
	12	17,58	0,857**	20,53	375	17,92	0,827*	21,69
	13	17,86	0,866**	20,63	500	18,89	0,892**	21,18
	14	18,58	0,900**	20,65	750	15,66	0,759	20,65
Sharpe	4	10,73	0,545	19,70	20	13,37	0,651	20,55
	5	17,57	0,894**	19,67	30	4,13	0,202	20,50
	6	16,15	0,811	19,93	60	7,07	0,346	20,48
	7	18,89	0,945**	19,99	90	5,09	0,241	21,16
	8	20,83**	1,061**	19,63	120	8,47	0,395	21,46
	9	21,30**	1,081***	19,71	150	9,69	0,455	21,29
	10	13,36	0,679	19,70	200	6,64	0,322	20,65
	11	13,05	0,665	19,65	250	13,88	0,663	20,96
	12	13,78	0,705	19,56	375	12,58	0,605	20,78
	13	14,30	0,733	19,52	500	18,48	0,883**	20,95
	14	12,90	0,657	19,66	750	15,63	0,763	20,50
variância	4	8,68	0,487	17,81	20	6,82	0,403	16,92
	5	10,78	0,614	17,57	30	5,76	0,347	16,61
	6	10,79	0,625	17,27	60	3,44	0,209	16,51
	7	9,14	0,536	17,05	90	4,41	0,272	16,22
	8	8,49	0,497	17,10	120	2,95	0,182	16,20
	9	8,39	0,488	17,20	150	3,11	0,193	16,15
	10	8,89	0,525	16,94	200	3,33	0,205	16,23
	11	10,84	0,639	16,98	250	2,99	0,185	16,17
	12	8,28	0,483	17,14	375	2,22	0,138	16,15
	13	11,10	0,647	17,18	500	2,15	0,133	16,19
	14	8,94	0,529	16,92	750	2,08	0,128	16,19

Resultados em termos de retorno médio (μ), razão de Sharpe (λ) e desvio-padrão (σ) anualizados para carteiras construídas através da escolha de estratégias baseada em persistência de performance. (*) significa que a estratégia teve desempenho superior a ingênua, (**) que obteve performance superior a todas estratégias individuais e (***) que teve o melhor desempenho dentre todas carteiras empregadas no estudo.

e, assim, não foram selecionadas para compor U^* , são elas: *Volatility Timing* FF(4) com $\eta = 4$, RWR Amostral com $\eta = \{1,2,4\}$, RWR FF(4) com $\eta = \{1,2,4\}$ e RWR Alternativa Amostral com $\eta = 4$. Desse modo, as outras 14 metodologias foram escolhidas na fase de pré-seleção para etapa de escolha realizada no período posterior.

Através da tabela 5 é possível analisar o desempenho das 22 estratégias individuais no período fora da amostra. Nota-se que a estratégia com melhor

Figura 3
Dinâmica das escolhas ótimas entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance, utilizando como critério o razão de Sharpe e definindo $p = 9$

A figura traz o deslocamento, ao longo do período fora da amostra, da sequência de escolhas entre estratégias do universo restrito de metodologias de seleção de carteiras, tomando como critério razão de Sharpe para as 9 últimas observações.

Figura 4
Número de vezes em que as carteiras foram selecionadas no procedimento de escolha tomando como critério o razão de Sharpe e definindo $p = 9$

O gráfico acima apresenta o número de vezes em que cada estratégia contida em U^* foi escolhida, ao longo do período fora da amostra, quando definido como critério o razão de Sharpe para as 9 últimas observações passadas.

desempenho em termos de retorno médio foi a igualmente ponderada, 19,84, em relação ao razão de Sharpe a RWR Alternativa FF(4) obteve o melhor resultado, 0,834, enquanto a estratégia de mínima-variância amostral apresen-

tou menor desvio-padrão, 16,12. Em contrapartida a metodologia que obteve pior resultado em termos de retorno médio e razão de Sharpe, 2,38 e 0,148 respectivamente, foi a de mínima-variância, já a carteira com pior resultado em relação ao risco, foi a 1/n com desvio-padrão de 24,39.

Os resultados obtidos através da escolha de estratégias baseada na hipótese de persistência de performance são apresentados na tabela 6. A partir dela, pode-se notar que quando utilizada a média como critério de escolha, para janelas de observações passadas contidas no intervalo $p = \{4, \dots, 14\}$, houve desempenho superior em termos de razão de Sharpe em relação às demais carteiras estimadas individualmente no período fora da amostra, a exceção de quando $p = 7$ e $p = 9$, porém no último caso ainda é superior à estratégia ingênua. Ainda, quando se levou em conta o razão de Sharpe como critério, apenas com a definição das janelas de observações passadas com dimensões iguais a $p = \{5, 7, 8, 9\}$ houve performance superior às carteiras construídas individualmente em termos de razão de Sharpe. Por outro lado, quando se utilizou o critério da variância no processo de escolha entre estratégias, embora a sequência de escolhas tenha gerado menor desvio-padrão em relação aos dois critérios anteriores, os resultados em termos de retorno médio e, por consequência, razão de Sharpe foram muito baixos, sequer superando a estratégia ingênua. Quando aplicado o teste de Ledoit & Wolf (2008) com o mesmo *bootstrap* utilizado na base anterior, novamente, só se pode dizer que houve diferença estatística com base no teste para variância para quase todas as carteiras geradas por esta metodologia.

A figura 3 apresenta a dinâmica da sequência de escolhas que apresentou melhores resultados no período fora da amostra. É possível, a cada ponto do tempo, visualizar a estratégia selecionada quando se definiu como critério de otimização o razão de Sharpe para as 9 observações passadas. Além disso, a figura 4 traz o número de vezes em que cada estratégia foi escolhida na parcela final das observações para esse caso, através dela pode-se notar que a estratégia mais selecionada foi a RWR Alternativa FF(4) com $\eta = 3$, 248 vezes, seguida da ingênua, 146 vezes. Em contrapartida, a metodologia de otimização por Média-Variância FF(4) não foi selecionada nenhuma vez e a estratégia *Volatility Timing* com $\eta = 1$ apenas uma vez.

4.3 25 carteiras *Size* e *Book-to-market* de Kenneth French

A última base de dados na qual foi realizado o estudo se trata da base

de 25 carteiras formadas a partir da classificação de capitalização a mercado e razão *book-to-market* mantida por Kenneth French. Várias das mais relevantes pesquisas no campo de seleção de portfólios utilizam as carteiras de French como ativos para as mais diversas formulações metodológicas envolvendo o problema do investidor, trabalhos como os realizados por DeMiguel et al. (2009), Tu & Zhou (2011) e Kirby & Ost diek (2012) são exemplos disto. Nesse caso, optou-se pelas carteiras 25 *Size* e BTM pelo seu costumeiro uso no problema de alocação de recursos do investidor, fato que também ocorre nos trabalhos anteriormente citados.

Como se tratam de carteiras que agrupam ativos do mercado americano, a

Tabela 7
Pré-seleção aplicada às 25 carteiras *size* e *book-to-market* de Kenneth French

estratégias		medidas de performance			
		média	Sharpe	desvio-padrão	turnover
ingênua		16,52	1,159	14,21	0,003
mínima-variância		13,11	1,094	11,99	0,007
média-variância	amostral ⁺	15,29	1,196	12,79	0,015
	FF(5) ⁺	19,58	1,226	15,98	0,0198
volatility timing amostral	$\eta = 1$	16,13	1,178	13,70	0,003
	$\eta = 2$	16,31	1,191	13,71	0,003
	$\eta = 4$	14,71	1,198	12,29	0,004
volatility timing FF(5)	$\eta = 1$	16,13	1,179	13,70	0,003
	$\eta = 2$	15,67	1,192	13,16	0,003
	$\eta = 4$	14,74	1,199	12,30	0,004
RWR amostral	$\eta = 1$	15,99	1,165	13,74	0,009
	$\eta = 2$	15,49	1,165	13,31	0,016
	$\eta = 4$	14,63	1,156	12,67	0,026
RWR FF(5)	$\eta = 1$	16,04	1,166	13,76	0,007
	$\eta = 2$	15,55	1,167	13,33	0,012
	$\eta = 4$	15,05	1,163	12,95	0,017
RWR alternativa amostral	$\eta = 1$	16,28	1,160	14,04	0,004
	$\eta = 2$	16,19	1,161	13,96	0,005
	$\eta = 4$	16,20	1,169	13,86	0,008
RWR alternativa FF(5)	$\eta = 1$	16,28	1,160	14,04	0,004
	$\eta = 2$	16,19	1,162	13,94	0,005
	$\eta = 4$	16,19	1,172	13,83	0,008

A tabela traz a avaliação da performance das estratégias individuais de seleção de ativos, tomando como medidas de desempenho o retorno médio, razão de Sharpe e desvio-padrão anualizados, além do turnover médio das carteiras no período de pré-seleção, para as 25 carteiras formadas a partir da classificação de capitalização a mercado e razão *book to market* mantida por Kenneth French. Aqui estão destacados em negrito aqueles valores que violam algum dos critérios da pré-seleção, definidos pela regra (7) (com $\gamma = 0,02$), e, desta forma, excluem as estratégias às quais estes valores pertencem do universo restrito de metodologias para construção de carteiras (U^*).

Tabela 8
Desempenho das estratégias individuais - carteiras 25 Size e BTM

estratégias		medidas de performance		
		retorno médio	Sharpe	desvio-padrão
ingênua		9,27	0,617	15,05
mínima-variância		11,82	0,934	12,67
média-variância	amostral ⁺	10,35	0,778	13,31
	FF(5) ⁺	14,01	0,973	14,40
volatility timing amostral	$\eta = 1$	9,51	0,652	14,60
	$\eta = 2$	9,49	0,652	14,58
	$\eta = 4$	10,18	0,751	13,56
volatility timing FF(5)	$\eta = 1$	9,40	0,641	14,68
	$\eta = 2$	9,53	0,666	14,31
	$\eta = 4$	9,79	0,717	13,67
RWR timing amostral	$\eta = 1$	9,08	0,627	14,49
	$\eta = 2$	9,04	0,644	14,05
	$\eta = 4$	9,27	0,685	13,54
RWR FF(5)	$\eta = 1$	9,10	0,623	14,62
	$\eta = 2$	9,04	0,636	14,21
	$\eta = 4$	9,09	0,656	13,86
RWR alternativa amostral	$\eta = 1$	9,24	0,619	14,95
	$\eta = 2$	9,27	0,619	14,99
	$\eta = 4$	9,30	0,616	15,11
RWR alternativa FF(5)	$\eta = 1$	9,14	0,609	15,03
	$\eta = 2$	9,09	0,600	15,15
	$\eta = 4$	8,97	0,580	15,47

A tabela 8 traz a avaliação de performance das estratégias individuais de seleção de ativos no período final (fora da amostra), tomando como medidas de desempenho o retorno médio, razão de Sharpe e desvio-padrão anualizados das estratégias para a base das 25 carteiras construídas através da classificação por capitalização a mercado e razão *book-to-market* mantida por Kenneth French.

data e a frequência de observações é a mesma do caso das ações componentes do S&P 100. São 2517 observações que abrangem um período que vai de 03 de novembro de 2008 a 31 de outubro de 2018. Aqui também foram utilizados dados dos fatores que são necessários à estimação do modelo de precificação de Fama & French (2015), além do ativo livre de risco, todos eles disponibilizados por Kenneth French e com a mesma frequência dos dados relativos aos 25 portfólios *Size* e *BTM*. Para todas estimações se recorreu a abordagem *rolling window* amostral com $L = 839$.

A tabela 7 traz os resultados relativos ao desempenho das estratégias para seleção de investimentos na fase de pré-seleção, por meio dela é possível notar que a metodologia que apresentou maior retorno médio foi a Média-Variância FF(5), 19,58, e, apesar de ter obtido o maior desvio-padrão dentre

Tabela 9
Carteiras construídas a partir da escolha entre estratégias - 25 BTM

critério	janela (p)	medidas de desempenho			janela (p)	medidas de desempenho		
		μ	λ	σ		μ	λ	σ
média	4	17,64**	1,024**	17,23	20	11,87*	0,820*	14,49
	5	15,18**	0,881*	17,24	30	11,04*	0,756*	14,62
	6	18,83**	1,091**	17,27	60	10,79*	0,721*	14,97
	7	18,24**	1,076*	16,97	90	10,22*	0,682*	14,99
	8	10,63*	0,610	17,43	120	12,72*	0,848*	15,01
	9	11,07*	0,649*	17,07	150	12,33*	0,825*	14,97
	10	16,70**	1,002**	16,68	200	12,63*	0,845*	14,97
	11	21,20**	1,280**	16,56	250	12,08*	0,813*	14,87
	12	22,79**	1,301**	17,53	375	12,73*	0,866*	14,71
	13	16,04**	0,935*	17,15	500	12,68*	0,871*	14,58
	14	17,85**	1,041**	17,15	750	13,58*	0,936*	14,53
Sharpe	4	17,96**	1,199**	14,98	20	14,22**	0,985**	14,45
	5	19,13**	1,280**	14,95	30	12,29*	0,854*	14,40
	6	17,91**	1,212**	14,78	60	10,56*	0,724*	14,60
	7	18,25**	1,208**	15,11	90	10,78*	0,738*	14,61
	8	15,61**	1,068**	14,62	120	12,68*	0,862*	14,71
	9	13,39*	0,913*	14,68	150	12,33*	0,840*	14,69
	10	17,57**	1,197**	14,70	200	12,62*	0,857*	14,73
	11	20,34**	1,360***	14,96	250	12,83*	0,877*	14,63
	12	18,42**	1,233**	14,95	375	12,12*	0,833*	14,56
	13	15,92**	1,063**	14,98	500	12,90*	0,890*	14,50
	14	15,98**	1,064**	15,03	750	12,19*	0,860*	14,18
variância	4	11,52*	0,821*	14,04	20	11,68*	0,857*	13,64
	5	8,95*	0,637*	14,04	30	11,00*	0,829*	13,27
	6	9,56*	0,685*	13,96	60	11,14*	0,831*	13,40
	7	9,88*	0,717*	13,80	90	10,70*	0,799*	13,40
	8	11,29*	0,821*	13,76	120	9,66*	0,722*	13,38
	9	10,04*	0,739*	13,60	150	10,33*	0,771*	13,41
	10	9,88*	0,733*	13,49	200	10,23*	0,767*	13,36
	11	11,79*	0,873*	13,51	250	10,33*	0,775*	13,34
	12	13,10*	0,976**	13,43	375	10,46*	0,785*	13,34
	13	9,79*	0,737*	13,30	500	10,34*	0,774*	13,38
	14	11,01*	0,835*	13,20	750	10,26*	0,762*	13,47

Resultados em termos de retorno médio (μ), razão de Sharpe (λ) e desvio-padrão (σ) anualizados para carteiras construídas através da escolha de estratégias baseada em persistência de performance. (*) significa que a estratégia teve desempenho superior a ingênua, (**) que obteve performance superior a todas estratégias individuais e (***) que teve o melhor desempenho dentre todas carteiras empregadas no estudo.

as outras estratégias, 15,98, obteve maior razão de Sharpe, 1,226. Além disso, a estratégia com melhor resultado em relação ao risco foi novamente a estratégia de mínima-variância, que obteve 11,99 de desvio-padrão, apesar de ser a carteira com piores resultados para média e razão de Sharpe, 13,11 e 1,094 respectivamente

Na etapa de pré-seleção, as carteiras que obtiveram resultado, em termos de razão de Sharpe, inferior à carteira igualmente ponderada e, deste

Figura 5
Dinâmica das escolhas ótimas entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance, utilizando como critério o razão de Sharpe e definindo $p = 11$

A figura traz o deslocamento, ao longo do período fora da amostra, da escolha entre as estratégias do universo restrito de metodologias de seleção de carteiras, tomando como critério o razão de Sharpe para as 11 últimas observações.

Figura 6
Número de vezes em que as carteiras foram selecionadas no procedimento de escolha tomando como critério o razão de Sharpe e definindo $p = 11$

O gráfico acima apresenta o número de vezes em que cada estratégia contida em U^* foi selecionada, ao longo do período fora da amostra, quando definido como critério o razão de Sharpe para as 11 últimas observações passadas.

modo, foram excluídas do universo restrito de metodologias para construção de carteiras foram as estratégias de otimização por Mínima-Variância e RWR Amostral com $\eta = 4$. Sendo que a última estratégia também obteve *turno-*

ver acima do limite máximo pré-determinado ($\gamma = 0,02$) e seria excluída de qualquer forma de U^* . Assim, as demais metodologias puderam compor U^* e foram avaliadas no processo de escolha no período, que compreendeu as 839 observações fora da amostra.

A tabela 8 apresenta os resultados das estratégias individuais no período fora da amostra, por meio dela pode-se observar que a estratégia com melhor performance, em termos de retorno médio e razão de Sharpe, foi a obtida por meio da otimização por média-variância com o auxílio do modelo de fatores de Fama & French (2015) para o cálculo dos *inputs*, com resultados de 14,01 e 0,973 respectivamente. A carteira com menor desvio-padrão foi a de Mínima-Variância: 12,67. Por outro lado, a estratégia RWR Alternativa FF(5) obteve a pior performance em todas as medidas de desempenho, com retorno médio de 8,97, razão de Sharpe de 0,58 e 15,47 de desvio-padrão.

Os resultados obtidos através do processo de escolha com base em persistência de performance são apresentados na tabela 9. Nota-se que para o caso em que se recorreu a média como critério se obteve desempenho superior, em termos de razão de Sharpe, às carteiras geradas pelas metodologias individuais apresentadas na tabela 8, se analisado o intervalo $p = \{4, \dots, 14\}$, à exceção de quando $p = \{5, 9\}$, nesse caso os resultados ainda foram superiores à estratégia ingênua, e $p = 8$, cujo desempenho ficou abaixo da carteira $1/n$. Quando o critério utilizado foi o razão de Sharpe, também houve boa performance considerando este intervalo para as janelas de observações passadas, apenas com $p = 9$ o resultado não foi superior em termos de razão de Sharpe às estratégias individuais. Por outro lado, quando se recorreu variância, apesar de resultados com menores níveis de desvio-padrão e desempenho superior à carteira $1/n$, houve uma performance ruim se comparado às carteiras individuais ou às obtidas através das sequências de escolhas realizadas adotando outros critérios, nota-se que apenas quando se definiu $p = 12$ houve desempenho superior às estratégias individuais em termos de razão de Sharpe. Por fim, o teste de Ledoit & Wolf (2008) com base no *bootstrap* de Politis & Romano (1994), teve resultado muito parecido com a sua implementação nas bases anteriores, só se pôde dizer que na maioria das especificações de p são diferentes estatisticamente em termos de variância.

A figura 5 traz a dinâmica de escolha entre as estratégias no período fora da amostra quando se levou em conta o razão de Sharpe máximo para as 11 observações anteriores. Enquanto a figura 6 mostra o número de vezes em que cada uma das estratégias foi a que apresentou maior potencial de performance em algum ponto da amostra, segundo a hipótese de persistência, tomando como critério o razão de Sharpe para as 11 últimas observações. Nesse caso, a estratégia de Média Variância FF(5) foi a mais selecionada,

348 vezes, seguida da estratégia de Média-Variância Amostral, 172 vezes. Enquanto as estratégias *Volatility Timing* Amostral com $\eta = 4$, *Volatility Timing* FF(4) com $\eta = 1$, RW FF(5) com $\eta = 1$ e RW Alternativa Amostral com $\eta = 4$ não foram selecionadas nenhuma vez no decorrer do período.

5. Considerações finais

Uma vez que há inúmeras estratégias destinadas à seleção de ativos para composição de carteiras de investimento, isto é, vários modelos candidatos a solucionar o problema de alocação do investidor, para os quais não há uma unanimidade em termos de performance em sua aplicação empírica. O que se propôs neste trabalho foi a possibilidade, do ponto de vista do gestor, de a cada ponto do tempo selecionar aquela estratégia que, dado o conjunto de informações passadas, apresentou maior indicação de entregar boa performance no presente. Foram tomados como indicativos de desempenho a média, o razão de Sharpe e a variância, cada um a sua vez, com base na hipótese de persistência de performance.

O procedimento de escolha entre estratégias foi realizado em passos distintos, num primeiro momento foi realizada a pré-seleção. Nessa etapa, foram selecionadas estratégias que obtiveram desempenho igual ou superior à carteira ingênua em termos de razão de Sharpe e *turnover* abaixo ou igual a um limite, definido por $\gamma = 0,02$. Então, para cada caso se obteve um universo restrito de metodologias para construção de carteiras de dimensão diferente. No experimento realizado com a base de ações componentes do S&P 100 foram pré-selecionadas 6 das 22 estratégias estimadas; no próximo com ações do Ibovespa foram escolhidas 14 metodologias que respeitaram os critérios de filtragem; e, por fim, com a base de 25 carteiras *size* e *book-to-market*, mantidas por Kenneth French, apenas duas estratégias foram excluídas do universo restrito (U^*).

No passo seguinte foi realizado a escolha entre estratégias com base na hipótese de persistência de performance para cada tempo do último terço da amostra. E, de forma geral, foram gerados bons resultados quando adotados como critérios a média e o razão de Sharpe, cada um a sua vez, em especial para janelas de observações passadas dos retornos dos ativos definidas entre 4 e 14 observações. Por outro lado, quando o processo de escolha foi estruturado para selecionar a cada ponto do tempo aquela metodologia que obteve menor variância nas últimas p observações não se logrou muito êxito, apenas quando aplicado à última base de dados obteve desempenho superior à estratégia $1/n$, em quase todas as definições de p apresentadas.

Apesar de não se ter definido uma janela de observações passadas ótima para o processo de escolha baseada em persistência de performance, foi de-

monstrado que para uma faixa entre 4 e 14 observações passadas, normalmente, a escolha baseada em persistência gera um desempenho superior às demais carteiras construídas individualmente quando definidos como critérios a média e o razão de Sharpe. Já o critério da variância se mostrou incapaz de gerar desempenho superior tanto em termos de maior retorno como para mitigação de risco. Um ponto do trabalho que talvez possa ser aperfeiçoado em pesquisas futuras é a definição de um valor ótimo para o parâmetro p ao longo do tempo.

Além do mais, o procedimento de escolha baseado em persistência de performance mostrou que é possível, sob o ponto de vista do gestor, selecionar, a cada ponto do tempo, aquela estratégia que apresentou maior potencial de gerar bons resultados segundo a hipótese de persistência de performance. Ainda, por meio de três diferentes bases de dados demonstrou-se que a escolha baseada em persistência de performance pode ter aplicação abrangente e razoáveis chances de apresentar bons resultados em diferentes bases de dados e universos de metodologias para construção de carteiras. Em suma, foi proposto e empregado em algumas bases de dados um procedimento com potencial para aplicação em diversos problemas de alocação envolvendo investimentos, especialmente quando utilizada a informação de curto prazo em relação aos critérios empregados neste estudo.

6. Acknowledgments

O autor João F. Caldeira agradece ao CNPq pelo auxílio oferecido através dos processos nº 430192/2016-9 e nº 306886/2018-9.

Referências

- Anderson, E. W. & Cheng, A.-R. (2016). Robust Bayesian portfolio choices, *Review of Financial Studies* **29**(5): 1330–1375.
- Avramov, D. & Zhou, G. (2010). Bayesian portfolio analysis, *Annual Review of Financial Economics* **2**(1): 25–47.
- Best, M. J. & Grauer, R. R. (1991). On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: Some analytical and computational results, *Review of Financial Studies* **4**(2): 315–342.
- Black, F. & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization, *Financial Analysts Journal* **48**(5): 28–43.
- Bollen, N. P. & Busse, J. A. (2004). Short-term persistence in mutual fund performance, *Review of Financial Studies* **18**(2): 569–597.

- Brandt, M. W., Santa-Clara, P. & Valkanov, R. (2009). Parametric portfolio policies: Exploiting characteristics in the cross-section of equity returns, *Review of Financial Studies* **22**(9): 3411–3447.
- Brown, S. J. & Goetzmann, W. N. (1995). Performance persistence, *Journal of Finance* **50**(2): 679–698.
- Caldeira, J. F., Moura, G. V., Nogales, F. J. & Santos, A. A. (2017). Combining multivariate volatility forecasts: an economic-based approach, *Journal of Financial Econometrics* **15**(2): 247–285.
- Carhart, M. M. (1997). On persistence in mutual fund performance, *Journal of Finance* **52**(1): 57–82.
- Clarke, R., De Silva, H. & Thorley, S. (2006). Minimum-variance portfolios in the US equity market, *Journal of Portfolio Management* **33**(1): 10.
- Clarke, R., De Silva, H. & Thorley, S. (2011). Minimum-variance portfolio composition, *Journal of Portfolio Management* **37**(2): 31.
- Cochrane, J. H. (2005). *Asset Pricing*, Princeton University Press.
- Craig MacKinlay, A. & Pástor, L. (2000). Asset pricing models: Implications for expected returns and portfolio selection, *Review of Financial Studies* **13**(4): 883–916.
- DeMiguel, V., Garlappi, L. & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the $1/n$ portfolio strategy?, *Review of Financial Studies* **22**(5): 1915–1953.
- Duchin, R. & Levy, H. (2009). Markowitz versus the Talmudic portfolio diversification strategies, *Journal of Portfolio Management* **35**(2): 71–74.
- Fama, E. F. & French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds, *Journal of Financial Economics* **33**(1): 3–56.
- Fama, E. F. & French, K. R. (2012). Size, value, and momentum in international stock returns, *Journal of Financial Economics* **105**(3): 457–472.
- Fama, E. F. & French, K. R. (2015). A five-factor asset pricing model, *Journal of Financial Economics* **116**(1): 1–22.
- Fleming, J., Kirby, C. & Ostdiek, B. (2001). The economic value of volatility timing, *Journal of Finance* **56**(1): 329–352.

- Fleming, J., Kirby, C. & Ostdiek, B. (2003). The economic value of volatility timing using ‘realized’ volatility, *Journal of Financial Economics* **67**(3): 473–509.
- Gao, L., Han, Y., Li, S. Z. & Zhou, G. (2018). Market intraday momentum, *Journal of Financial Economics* **129**(2): 394–414.
- Garlappi, L., Uppal, R. & Wang, T. (2006). Portfolio selection with parameter and model uncertainty: A multi-prior approach, *Review of Financial Studies* **20**(1): 41–81.
- Grinblatt, M. & Keloharju, M. (2000). The investment behavior and performance of various investor types: a study of Finland’s unique data set, *Journal of Financial Economics* **55**(1): 43–67.
- Hendricks, D., Patel, J. & Zeckhauser, R. (1993). Hot hands in mutual funds: Short-run persistence of relative performance, 1974–1988, *Journal of Finance* **48**(1): 93–130.
- Jagannathan, R. & Ma, T. (2003). Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps, *Journal of Finance* **58**(4): 1651–1683.
- Jorion, P. (1986). Bayes-Stein estimation for portfolio analysis, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **21**(3): 279–292.
- Kan, R. & Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **42**(3): 621–656.
- Kaniel, R., Saar, G. & Titman, S. (2008). Individual investor trading and stock returns, *Journal of Finance* **63**(1): 273–310.
- Kirby, C. & Ostdiek, B. (2012). It’s all in the timing: Simple active portfolio strategies that outperform naive diversification, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **47**(2): 437–467.
- Kolm, P. N., Focardi, S. M. & Fabozzi, F. J. (2008). Incorporating trading strategies in the Black-Litterman framework, *Handbook of Finance* **2**.
- Kolm, P. N., Tutuncu, R. & Fabozzi, F. J. (2014). 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends, *European Journal of Operational Research* **2**(234): 356–371.
- Kritzman, M. (2006). Are optimizers error maximizers?, *Journal of Portfolio Management* **32**(4): 66.

- Kritzman, M. (2011). The graceful aging of mean-variance optimization, *Journal of Portfolio Management* **37**(2): 3.
- Kritzman, M., Page, S. & Turkington, D. (2010). In defense of optimization: The fallacy of $1/n$, *Financial Analysts Journal* **66**(2): 31–39.
- Ledoit, O. & Wolf, M. (2008). Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio, *Journal of Empirical Finance* **15**(5): 850–859.
- Lou, D. (2012). A flow-based explanation for return predictability, *Review of Financial Studies* **25**(12): 3457–3489.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection, *Journal of Finance* **7**(1): 77–91.
- Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is ‘optimized’ optimal?, *Financial Analysts Journal* **45**(1): 31–42.
- Pastor, L. & Veronesi, P. (2009). Learning in financial markets, *Annual Review of Financial Economics* **1**(1): 361–381.
- Pettenuzzo, D. & Ravazzolo, F. (2016). Optimal portfolio choice under decision-based model combinations, *Journal of Applied Econometrics* **31**(7): 1312–1332.
- Politis, D. N. & Romano, J. P. (1994). The stationary bootstrap, *Journal of the American Statistical Association* **89**(428): 1303–1313.
- Rodrigues, B. D. & Stevenson, M. J. (2013). Takeover prediction using forecast combinations, *International Journal of Forecasting* **29**(4): 628–641.
- Tu, J. & Zhou, G. (2011). Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies, *Journal of Financial Economics* **99**(1): 204–215.
- Zhang, Y., Ma, F. & Zhu, B. (2019). Intraday momentum and stock return predictability: Evidence from China, *Economic Modelling* **76**: 319–329.
- Zhou, G. (2009). Beyond Black-Litterman: Letting the data speak, *Journal of Portfolio Management* **36**(1): 36.