Combinação da projeção da volatilidade percebida por Redes Neurais e HAR (Combining neural network and HAR forecasts of perceived volatility)

Alcides Araújo[†]

Alessandra Montini[‡]

Joelson Sampaio^{*}

Resumo

Este artigo analisa a combinação dos métodos HAR e redes neurais para melhor projetar a volatilidade percebida e, consequentemente, trazer maior eficiência na gestão de riscos. Para realizar as projeções, combinações e testes foi utilizada a série de volatilidade percebida do Ibovespa no período entre 2000 e 2018, totalizando 4530 observações. Os principais resultados evidenciam que a combinação de ambos os modelos resultou numa melhor previsibilidade da volatilidade percebida, o que pode ser interpretado como um ganho de eficiência para gestão de riscos. Adicionalmente, artigo também avaliou o desempenho dos modelos considerando a rentabilidade de trading com opções. Para o caso da rentabilidade, verificou-se que as combinações de modelos lineares e não lineares apresentaram melhor *performance*.

Palavras-chave: Dados em Alta Frequência; Volatilidade Percebida; Combinação de Projeções.

Código JEL: C53, C58.

Abstract

This paper examines a combination of HAR and neural networks methods to better predict perceived volatility and, consequently, to more efficiently manage risk. To carry out the projections, combinations and tests, the series of perceived volatility of Ibovespa was collected between 2000 and 2018, producing a sample of 4,530 observations. The main results show that the combination of both models better predict perceived volatility, which can be interpreted as an efficiency gain for risk management. In addition, this article also evaluates the performance of the models, considering the profitability of trading with options. For the case of profitability, combinations of linear and nonlinear models present better performance.

Keywords: High Frequency Data; Realized Volatility; Forecast Combination.

JEL Code: C53, C58.

1. Introdução

Volatilidade possui impacto em diversas aplicações financeiras. As aplicações vão desde gestão de carteiras, alocação de recursos, apreçamento de derivativos, gestão de riscos até tomadas de decisão das instituições a respeito da estabilidade financeira, conforme apresenta Danielsson (2011).

O presente artigo tem como objetivo analisar a acurácia de dois métodos de projeção de volatilidade percebida. O primeiro modelo é denominado *Heterogeneous Autoregressive Model of Realized Volatility* (HAR), sugerido em Corsi (2011) e o segundo é o método de Redes Neurais. A contribuição desse trabalho é combinar as projeções dos modelos HAR e Rede Neural, dado que o primeiro modelo é baseado em pressupostos da teoria econômica, enquanto que o segundo está baseado em modelos determinísticos não lineares advindos da área de aprendizagem de máquina. Este artigo busca também avaliar o desempenho dos modelos considerando a rentabilidade de *trading* com opções.

A combinação desses modelos poderá melhorar o desempenho das projeções de volatilidade percebida e, consequentemente, trazer maior eficiência na gestão de riscos de operações de HFT (*High Frequency Trading*).

Submetido em 27 de agosto de 2017. Revisado em 12 de janeiro de 2019. Aceito em 14 de janeiro de 2019. Publicado online em outubro de 2019. Editor responsável: Márcio Laurini.

[†](Autor correspondente) Universidade de São Paulo, Brasil. E-mail: alcides.carlos@yahoo.com.br

[‡]Universidade de São Paulo, Brasil. E-mail: amontini@usp.br

^{*}São Paulo School of Economics/FGV, Brasil. E-mail: joelson.sampaio@fgv.br

HFT é um tipo de negociação associada a rápida realocação de capital, em que as transações podem ocorrer em milésimos de segundos.

Um desafio da área financeira é analisar grandes bancos de dados de negociações na bolsa de valores. Estas negociações são realizadas em tempo real e, para diversos ativos, em alta frequência. Outro desafio de lidar com HFT é a gestão de riscos, dado que certo algoritmo pode apresentar retornos excelentes em um dia e em seguida revertê-los em perdas em um único momento. Cabe ao gestor de algoritmos de negociação selecionar uma medida de risco eficiente para controlar as perdas de suas operações ou mensurar o quanto poderá perder caso ocorra o pior cenário. Portanto, projetar volatilidade de forma eficiente é importante para uma melhor gestão de riscos.

Volatilidade percebida ou volatilidade realizada (*Realized Volatility - RV*), proposta por Andersen & Bollerslev (1998), tem tido bastante relevância nos últimos anos. De acordo com Danielsson (2011), esta medida utiliza dados passados com frequência intradiária; deste modo, torna-se uma medida puramente direcionada pelos dados. Conforme apresentam Zivot (2005) e Andersen, Bollerslev & Diebold (2007), modelos de projeção que utilizam a métrica da volatilidade percebida demonstraram melhor desempenho de projeção.

Os estudos a respeito de combinação de projeções possuem bastante aplicação prática. Conforme Timmermann (2006), a combinação de projeções demonstrou sucesso empírico em diversas aplicações econômicas, como projeção de PIB, preço do petróleo e retorno de ações.

Uma das razões apresentadas na literatura para utilizar combinações de previsão é que previsões individuais podem ser diferentemente afetadas por quebras estruturais causadas, por exemplo, por mudanças de desenvolvimentos tecnológicos. Alguns modelos podem se adaptar rapidamente e serão temporariamente afetados por quebras estruturais, enquanto outros têm parâmetros que só se ajustam muito lentamente aos novos dados pós-quebra (Hendry & Clements, 2004; Aiolfi & Timmermann, 2006; Winkler, 1989).

Os principais resultados deste trabalho evidenciam que a combinação de ambos os modelos resultou numa melhor previsibilidade da volatilidade percebida, o que pode ser interpretado como um ganho de eficiência para gestão de riscos. Esse ganho de eficiência na combinação das projeções do modelo HAR e do método de Redes Neurais, foi obtido por um melhor desempenho alcançado pelos menores valores de RMSE e MAE.

Para o caso da rentabilidade, considerando os modelos quanto ao desempenho de *trading* de opções, verificou-se que as combinações de modelos lineares e não lineares apresentaram melhor *performance*. Portanto, apesar de não serem conclusivos, foram encontrados indícios de que combinar modelos lineares com não lineares pode trazer benefícios tanto para o desempenho preditivo quanto para a rentabilidade num processo de projeção da volatilidade percebida.

Este artigo está estruturado da seguinte maneira: a Seção 2 apresenta os trabalhos que serviram de base para este estudo. Apresentar os modelos e dados é o objetivo da Seção 3. Na Seção 4 apresentamos os resultados do estudo. Por fim, a Seção 5 apresenta as conclusões do artigo.

2. Revisão da literatura

Segundo Zivot (2005), o estudo das medidas de volatilidade para dados em alta frequência é um tema de pesquisa relativamente recente. Esta área de estudos possui importância dado que produz estimadores que apresentam melhor exatidão para a volatilidade e correlação condicional quando comparados com estimadores que utilizam dados diários ou mensais.

Fleming, Kirby & Ostdiek (2003) foram os primeiros a aplicar tais métodos para estudar o valor econômico de dados de alta frequência no contexto de decisões de investimento. Em um cenário trivial, eles estimam a matriz de covariância condicional diária dos retornos sobre os contratos futuros do S&P500 e contratos futuros de ouro. Eles acham que a utilização de retornos de alta frequência em oposição aos retornos diários gera ganhos que vão de 50 a 200 pontos base, por ano.

Os estimadores de volatilidade para dados em alta frequência são derivados a partir do conceito da Variância Integrada (*Integrated Variance - IV*), conforme descrevem Andersen (2001), Barndorff-Nielsen & Shephard (2004) e Bauwens, Hafner & Laurent (2012). Conforme os autores, dado a velocidade e liquidez nos mercados financeiros, as operações tendem a ocorrer de forma muito próxima do tempo contínuo.

Andersen (2001) examinam as volatilidades diárias e as correlações de retorno de capital “realizadas” obtidas a partir de preços de transação *intraday* de alta frequência em ações individuais do índice *Dow Jones*. Eles acham que as distribuições incondicionais de variâncias e covariâncias realizadas são altamente assimétricas à direita, enquanto o logaritmo dos desvios padrão realizados e correlações são aproximadamente gaussianas, assim como as distribuições de retornos escaladas pelo desvio padrão. Os autores também mostram que volatilidades realizadas e correlações mostram forte dependência temporal e parecem estar bem descritas por longos processos de memória. Por fim, eles apresentam fortes evidências de que as volatilidades realizadas e as correlações se movem juntas de uma maneira amplamente consistente com o fator latente estrutural.

A seleção de uma única projeção possui a vantagem do modelo utilizado ter demonstrado o menor erro de previsão. Entretanto, Timmermann (2006) demonstra que combinar as projeções possibilita a utilização do “melhor” que cada modelo pode oferecer, minimizando os erros de previsão. Esta metodologia foi inspirada no problema de os tomadores de decisão possuírem múltiplas projeções para a mesma variável.

Makridakis & Winkler (1983) investigam empiricamente o impacto do número e escolha de métodos de previsão na precisão sobre médias simples. Conclui-se que a precisão da previsão melhora e a variabilidade de precisão entre as diferentes combinações diminui, à medida que o número de métodos aumenta. Para os autores, pesos iguais e MSFE apresentam melhor desempenho.

Chan, Stock & Watson (1999) modelam um painel de previsões *ex ante* de uma única série temporal como um modelo de fator dinâmico, onde a expectativa condicional é o único fator não observado. Quando aplicado a previsão fora da amostra, isso levou à combinação de previsões baseadas em métodos diferentes do OLS. Esses métodos apresentaram bom desempenho em um experimento de Monte Carlo.

Stock & Watson (2004) usaram métodos combinados de previsão para prever o crescimento do produto interno bruto em um conjunto de dados econômicos trimestrais de 7 países cobrindo o período entre 1959 e 1999, com até 73 preditores por país. Embora as previsões baseadas nesses preditores sejam instáveis ao longo do tempo e em vários países, em média, apresentam pior desempenho do que uma referência considerando um modelo autorregressivo. Os resultados com a combinação foram mais bem sucedidas, ou seja, são as menos sensíveis ao desempenho recente das previsões individuais.

Smith & Wallis (2009) apresentam uma explicação formal do quebra-cabeça de combinação de previsão. Eles evidenciam que combinações simples de previsões pontuais tendem a superar combinações ponderadas sofisticadas em aplicações empíricas. A explicação está no efeito do erro da amostra finita na estimativa dos pesos combinados.

Andrada-Félix, Fernández-Rodríguez & Fuertes (2016) demonstram que as previsões de volatilidade considerando os vizinhos mais próximos (VP) podem aumentar o desempenho das previsões baseadas nesses modelos. A motivação teórica para a abordagem VP é que esta pode capturar a flexibilidade das dependências dinâmicas complexas de uma forma que mitiga a especificação indevida do modelo e a incerteza da estimativa de parâmetro. Eles apresentam evidências de não-linearidade nos resíduos de vários modelos de memória longa não linear da volatilidade realizada. Eles também evidenciam que em mercados calmos, o melhor desempenho vem de uma combinação de previsões VP e previsões baseadas em outros modelos. Já em mercados turbulentos, as previsões VP dominam. Para os autores, o maior desempenho das previsões VP decorre de sua capacidade superior de antecipar quedas de volatilidade.

3. Metodologia

3.1 Medidas de volatilidade com dados em alta frequência

Seja Y_t um vetor de preços $N \times 1$, em que $Y_t = \ln p_t$, sendo p_t o preço negociado, a difusão dos preços é expressa na equação 1,

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

em que dY_t é o incremento do preço em logaritmo, μ_t é a direção (*drift*) do processo contínuo localmente delimitado, σ_t é a volatilidade instantânea estritamente positiva e estacionária e W_t é um Movimento Browniano Padrão.

Pode-se assumir que t é um dia de operações, sendo $i - s$ o espaçamento entre duas observações, com $s = 1$ e $i = 1 \dots M$ períodos intradiários, o retorno $r_{t,i}$ é expresso na equação 2.

$$r_{t,i} \equiv Y_{t,i} - Y_{t,i-1} = \int_{t,i-1}^{t,M} \mu_{t,s} ds + \int_{t,i-1}^{t,M} \sigma_{t,s} dW_{t,s}, \quad i = 1 \dots M. \quad (2)$$

Por meio da expressão 2, a distribuição de probabilidade dos retornos é definida na expressão 3,

$$r_{t,i} \sim N \left(\int_{t,i-1}^{t,M} \mu_{t,s} ds, IV_{t,M} \right), \quad (3)$$

em que $IV_{t,s}$ é dada pela expressão 4,

$$IV_{t,s} \equiv \int_{t,i-1}^{t,M} \sigma_{t,s}^2 ds, \quad (4)$$

em que IV é a Variância Integrada (*Integrated Variance* – IV).

Como se observa, os valores da variável IV precisam ser estimados, uma vez que é uma variável latente. No caso, IV pode ser estimada utilizando dados intradiários, Andersen & Bollerslev (1998) propõem o estimador da Variância Percebida (*Realized Variance* - RV), expressão 5,

$$RV_t = \sum_{i=1}^M r_{t,i}^2. \quad (5)$$

De acordo com Andersen, Bollerslev, Diebold & Labys (2003), o estimador foi apresentado com o objetivo de integrar dados de negociação em alta frequência e medidas de estimação de volatilidades. Conforme os autores, o estimador é fácil de ser implementado e melhora o desempenho dos modelos preditivos.

Por meio da estimação do RV_t para cada dia, obtém-se a série de Volatilidade Percebida. Conforme apresenta Corsi (2009), esta série é altamente assimétrica a direita e leptocúrtica, consequentemente, desvia-se da normalidade. Porém, este comportamento é padrão para as séries de Volatilidades, sendo um resultado observado desde Bollerslev, Engle & Nelson (1994).

3.2 Dados

O objetivo do presente artigo é propor a combinação das projeções de Volatilidade Percebida obtidas pelos modelos HAR e Redes Neurais. Para realizar as projeções, combinações e testes foi utilizada a série de Volatilidade Percebida do índice Bovespa no período entre 04/02/2000 a 21/06/2018, total de 4530 observações.

A pesquisa foi realizada em 4 etapas: obtenção da série de volatilidade percebida (RV), estimação dos modelos HAR e Redes Neurais, combinação das projeções e avaliação de desempenho.

3.3 Obtenção da série de Volatilidade Percebida

Para obtenção da série de volatilidade percebida foram utilizados os retornos continuamente compostos em intervalos de cinco minutos. No artigo de Wink Júnior & Pereira (2011), os autores testaram a utilização das frequências de 1, 5 e 15 minutos; os resultados demonstraram que as volatilidades realizadas com frequência de 5 minutos apresentaram o menor intervalo de confiança.

Ainda como procedimento de limpeza dos dados, os retornos obtidos nos períodos de abertura e fechamento foram retirados, conforme foi proposto em Rydberg (2003). O objetivo deste procedimento é retirar os efeitos dos leilões de abertura e fechamento das séries.

3.4 Estimação dos modelos

Na segunda etapa foram estimados os modelos HAR e Redes Neurais, foram analisadas as metodologias de janela fixa, janela deslizante e janela recursiva.

Para a metodologia de janela fixa foi utilizada 70% da amostra total, sendo ao todo 3171 observações, compreendendo o período entre 04/02/2000 a 17/12/2012. Este percentual de divisão da amostra também é

observado nos trabalhos de Chiriac & Voev (2011) e Val, Pinto & Klotzle (2014). Nos trabalhos de Forsberg & Ghysels (2007) e Santos & Ziegelmann (2014) os autores também mantiveram uma amostra maior para treino e um percentual menor para teste. Também foram analisados 60%, 80% e 90%, mas os resultados mantiveram-se similares.

3.5 Projeção com Modelo HAR

O modelo HAR (*Heterogeneous Autoregressive Model of Realized Volatility*) foi sugerido em Corsi (2011), sendo apresentada uma versão revisada em Corsi (2009). Este método de projeção é uma adaptação dos modelos *Heterogeneous Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (HARCH) propostos em Müller, Dacorogna, Davé, Olsen, Pictet & Von Weizsäcker (1997) e Dacorogna, Müller, Pictet & Olsen (1998).

Uma vez que séries de Volatilidades Percebidas são altamente assimétricas, tendo comportamento que se desvia da normalidade, Corsi (2009) e Fernandes, Medeiros & Scharth (2014) apresentam que o modelo HAR é adequado a tais características. Dado que o modelo possibilita a observação do impacto da volatilidade tanto no curto quanto no longo prazo.

Para estimação do modelo, Boudt, Cornelissen & Payseur (2012) descrevem primeiramente sobre a necessidade de obter as volatilidades percebidas (RV), uma medida foi apresentada na expressão 5. Durante esta etapa estima-se o RV como agregação de vários dias por meio da expressão 6,

$$RV_t^{(n)} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n RV_{t-i} \right], \quad (6)$$

em que n é o número de dias que se busca obter o RV agregado.

Na expressão 7 é apresentado o modelo HAR para k parâmetros,

$$RV_{t+h} = \sum_{i=0}^k \beta^{(i)} RV_t^{(i)} + \varepsilon_{t+h}, \quad (7)$$

em que os parâmetros $\beta^{(i)}$ são os coeficientes para os horizontes de tempo selecionados para a estimação e h é o número de dias a frente para ser projetado. Normalmente as escolhas para k são 1, 5 e 22 dias, conforme é sugerido em Corsi (2009).

O tratamento do $RV_t^{(i)}$ para a etapa de estimação foi um ponto de discussão entre os pesquisadores. Nos trabalhos de Barndorff-Nielsen & Shephard (2002), Andersen et al. (2007) e Forsberg & Ghysels (2007) foram testados modelos como: $RV_t^{(i)}$, $\sqrt{RV_t^{(i)}}$ e $\log RV_t^{(i)}$. Os resultados mostraram que o $\log RV_t^{(i)}$ demonstrou melhor comportamento para amostras finitas, uma vez que os erros preditivos foram menores.

No Brasil, os trabalhos de Val et al. (2014), Santos & Ziegelmann (2014) e Araújo & de Ávila Montini (2016), que utilizaram o Ibovespa e ações que o compõem, encontraram resultados similares aos artigos internacionais baseados no S&P500, isto é, o $\log RV_t^{(i)}$ demonstrando melhor desempenho preditivo. Diante disto, no presente artigo foram utilizadas estimações baseados no $\log RV_t^{(i)}$.

Vale ressaltar que após obter as previsões para $\log(\widehat{RV}_{t+h})$, pode-se obter os valores originais por $\widehat{RV}_{t+h} = \exp(\log(\widehat{RV}_{t+h}))$, conforme é apresentado em Andersen et al. (2007) e Forsberg & Ghysels (2007).

Nas três metodologias foram analisadas duas formas de estimar e prever a Volatilidade Percebida por meio do modelo HAR. A primeira forma foi utilizar o modelo HAR clássico apresentado em Corsi (2011), em que os componentes: diário (1 dia), semanal (5 dias) e mensal (22 dias) são utilizados como variáveis explicativas. No presente artigo, este modelo será denominado de HAR(1,5,22), sendo apresentado na expressão 8,

$$RV_{t+h}^{(d)} = \beta_0 + \beta^{(d)} RV_t^{(d)} + \beta^{(w)} RV_t^{(w)} + \beta^{(m)} RV_t^{(m)} + \varepsilon_{t+h} \quad (8)$$

em que os parâmetros $\beta^{(d)}$, $\beta^{(w)}$ e $\beta^{(m)}$ são os coeficientes para os horizontes de tempo diário, semanal e mensal respectivamente e ε_{t+h} é o resíduo. As séries $RV_t^{(w)}$ e $RV_t^{(m)}$ foram construídas conforme a expressão 6.

A segunda forma para estimar o HAR foi utilizar todos os componentes de agregações da Volatilidade Percebida dentro da amplitude entre 1 a 22 dias. A seleção sobre quais destas agregações se manteriam no modelo foi realizado pelo método *Stepwise*, buscando-se selecionar o conjunto de variáveis que maximizassem o BIC (*Bayesian information criterion*).

Neste artigo, este modelo será denominado HAR *Stepwise*, sendo apresentado na expressão 9,

$$RV_{t+h}^{(d)} = \sum_{i=0}^{22} \beta^{(i)} RV_t^{(i)} + \varepsilon_{t+h}, \quad (9)$$

em que os parâmetros $\beta^{(i)}$ são os coeficientes para os horizontes de tempo a serem selecionados pelo método *Stepwise* durante a estimação.

No artigo de Craioveanu & Hillebrand (2012), os autores tratam este modelo como HAR *flexible lag selection*. Os autores trataram o número máximo de defasagens fixo e selecionaram os modelos pela verificação de todas as possíveis combinações de defasagens.

Os resultados demonstraram que adicionar defasagens além dos 20 dias não agregou informação significativa na performance dos modelos. Além disto, a utilização do HAR *flexible lag selection* não apresentou desempenho preditivo significativamente melhor que o modelo HAR(1,5,22). Neste artigo, buscou-se verificar se estes resultados também podem ser confirmados no caso brasileiro, além disto testou-se a expansão desta abordagem para os modelos não lineares, no caso, os modelos de Redes Neurais.

3.6 Projeção com Modelo de Redes Neurais

Devido ao comportamento complexo de uma série de volatilidade, diversas pesquisas estão empregando a utilização da técnica de Redes Neurais para estimá-la e projetá-la. Alguns trabalhos que apresentaram resultados significativos foram os de Donaldson & Kamstra (1997), Hu & Tsoukalas (1999) e Hamid & Iqbal (2004). Para o caso específico da Volatilidade Percebida, podem ser citados os artigos de Hillebrand & Medeiros (2010), Fernandes et al. (2014) e Vortelinos (2017).

Conforme apresentam de Oliveira, Montini, Mendes-da Silva & Bergmann (2011), Rede Neural é uma técnica de análise de dados que mapeia algum tipo de entrada de informação, processa esta informação em diversas camadas e sugere uma determinada saída após um processo de aprendizagem. As principais vantagens para utilização desta técnica são generalização, flexibilidade e modelagem não linear. Na Figura 1 pode ser visualizado o funcionamento da técnica.

Nas variáveis X1 a X5 é observada a camada de entrada (variáveis preditoras); H1 a H3 são denominados neurônios, estes compõem a camada oculta e Y é a camada de saída (variável de previsão). Os pesos β_i e γ_i são pesos utilizados para ajustar os valores observados na camada de entrada de forma a melhor prever os resultados observados na camada de saída.

Do ponto de vista econométrico, Kuan & White (1994) apresentam a técnica de Redes Neurais como um modelo de entrada-saída, tendo características como: massivo paralelismo, capacidade de capturar dependência não linear entre variáveis e processamento de informações em multicamadas. Conforme Fernandes et al. (2014), estas características explicam o sucesso na utilização da técnica para modelagem da Volatilidade.

No trabalho de Hillebrand & Medeiros (2010), os autores adaptam a técnica de Redes Neurais como uma extensão não linear do Modelo HAR, conforme é apresentado na expressão 10,

$$RV_{t+h} = T(RV_t) + \varepsilon_{t+h}, \quad (10)$$

em que $T(RV_t)$ é uma função não linear e $RV_t = (RV_t^{(1)}, RV_t^{(2)}, RV_t^{(3)}, \dots, RV_t^{(h)})$.

O objetivo da modelagem por Redes Neurais é aproximar a função $T(RV_t)$ pela expressão 11,

$$T(RV_t) \approx G(RV_t; \psi) := \beta_0' RV_t + \sum_{i=1}^H \beta_i f(RV_t; \gamma_i), \quad (11)$$

Figura 1
modelo de redes neurais

em que H é o número neurônios na camada oculta, $G(RV_t; \psi)$ é uma função não linear das variáveis RV_t , ajustada pelo vetor de parâmetros $\psi = (\beta_i, \gamma_i)$, sendo que $f(RV_t; \gamma_i)$ pode ser ajustada por função logística (expressão 12),

$$f(RV_t; \gamma_i) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma_i RV_t}}, \quad (12)$$

ou uma função tangente hiperbólica (expressão 13),

$$f(RV_t; \gamma_i) = \frac{e^{2\gamma_i RV_t} - 1}{e^{2\gamma_i RV_t} + 1} \quad (13)$$

Os modelos ajustados utilizaram a expressão 13 como função de ligação, conforme é recomendado nos artigos de Vortelinos (2017) e Hillebrand & Medeiros (2010).

Dado que o modelo HAR foi analisado de duas formas, buscou-se analisar a técnica de redes Neurais também de duas formas. Na primeira forma, estendeu-se o modelo HAR clássico para uma função não linear, apresentada na expressão 14, no artigo este modelo será denominado de NNHAR(1,5,22),

$$RV_{t+h} = \sum_{i=1}^H \beta_i \left(\frac{e^{2(\gamma^{(d)} RV_t^{(d)} + \gamma^{(w)} RV_t^{(w)} + \gamma^{(m)} RV_t^{(m)})} - 1}{e^{2(\gamma^{(d)} RV_t^{(d)} + \gamma^{(w)} RV_t^{(w)} + \gamma^{(m)} RV_t^{(m)})} + 1} \right) + \varepsilon_{t+h} \quad (14)$$

em que H é o número neurônios na camada oculta e os parâmetros $\gamma^{(d)}$, $\gamma^{(w)}$ e $\gamma^{(m)}$ são os coeficientes para os horizontes de tempo diário, semanal e mensal respectivamente e β_i são os coeficientes dos neurônios de saída.

A segunda forma para projetar a Volatilidade Percebida por Redes Neurais foi utilizar todos os componentes de agregações da Volatilidade Percebida dentro da amplitude entre 1 a 22 dias. Neste artigo, este modelo será

denominado NNHAR(1:22), sendo apresentado na expressão 15,

$$RV_{t+h} = \sum_{i=1}^H \beta_i \left(\frac{e^{2\left(\sum_{i=1}^{22} \gamma^{(i)} RV_t^{(i)}\right)} - 1}{e^{2\left(\sum_{i=1}^{22} \gamma^{(i)} RV_t^{(i)}\right)} + 1} \right) + \varepsilon_{t+h} \quad (15)$$

em que H é o número neurônios na camada oculta, β_i são os coeficientes dos neurônios de saída e $\gamma^{(i)}$ são os coeficientes para os horizontes de tempo que variam entre 1 a 22 dias.

No processo de estimar NNHAR(1,5,22) e NNHAR(1:22) é necessário definir a quantidade de neurônios na camada oculta H . Porém, selecionar um número pequeno de neurônios pode-se realizar uma estimação pouco eficaz. Por outro lado, escolher um número grande para H pode-se gerar um ajuste demasiado no modelo (*overfitting*), fazendo com que a técnica apresente fraco desempenho na amostra de teste.

Deste modo, buscou-se analisar o número ótimo de H numa janela entre 3 a 10 neurônios, procedimento similar utilizado por Fernandes et al. (2014) e Vortelinos (2017). Como forma de controlar o ajuste demasiado foram utilizados dois critérios: fator de decaimento do erro e regularização bayesiana.

No critério de fator de decaimento do erro, o processo de estimação é parado quando numa determinada iteração o decaimento do erro de previsão se torna aproximadamente estável.

No critério de regularização Bayesiana, busca-se balancear o número de parâmetros estimados e o melhor ajuste do modelo. Deste modo, o algoritmo controla o *overfitting* tornando alguns dos coeficientes β_i e $\gamma^{(i)}$ praticamente insignificantes. Os modelos estimados utilizando-se a regularização Bayesiana foram denominados de BNNHAR(1,5,22) e BNNHAR(1:22) respectivamente.

Além do treinamento das redes por decaimento do erro e regularização bayesiana, buscou-se seguir outros procedimentos importantes para ajustes de redes, conforme apresentam Donaldson & Kamstra (1997), Hu & Tsoukalas (1999), Hamid & Iqbal (2004), Hillebrand & Medeiros (2010), de Oliveira et al. (2011), Fernandes et al. (2014) e Vortelinos (2017). Primeiramente buscou-se normalizar a série conforme expressão 16:

$$zRV_t = \frac{RV_t - \overline{RV}}{\sigma_{RV}}. \quad (16)$$

Após normalizar a série de volatilidade percebida, buscou-se utilizar parte da amostra de treino para definir H (número de neurônios) e a taxa de aprendizagem (indica a velocidade em que rede aprende durante o treinamento) e uma outra parte para validação do treino.

Deste modo, utilizou-se 80% da amostra de treino compreendida entre 04/02/2000 a 26/07/2010 para ajuste da rede e 20%, entre 27/07/2010 a 17/12/2012, para validação e seleção da rede que apresentou melhores valores conforme o critério de informação de Akaike (AIC).

3.7 Combinação das projeções

Conforme é apresentado na literatura a combinação pela média simples (pesos iguais) apresenta resultados difíceis de serem superados. Por este motivo, utilizou-se neste trabalho a combinação a ser realizada com pesos iguais. Na expressão 17 é apresentada a ponderação por pesos iguais,

$$\omega_{i,t}^{ig} = \frac{1}{K}, (17)$$

em que K é o número de modelos a serem combinados.

Considerando os métodos de estimação e os controles para evitar *overfitting*, foram realizadas previsões para 7 modelos: HAR(1,5,22), HAR *Stepwise* AIC, HAR *Stepwise* BIC, NNHAR(1,5,22) com fator de decaimento de erro, NNHAR(1:22) com fator de decaimento de erro, BNNHAR(1,5,22) com regularização Bayesiana e BNNHAR(1:22) regularização Bayesiana.

Dado a existência de previsões para 7 modelos, buscou-se realizar as combinações com 2 a 7 modelos diferentes. Deste modo, foram realizadas 21 combinações com 2 modelos, 35 com 3 e 4 modelos, 21 combinações com 5 modelos, 7 combinações com 6 modelos e 1 combinação utilizando todos os modelos (127 previsões). Este procedimento também foi utilizado nos trabalhos de Andrada-Félix et al. (2016) e Santos & Ziegelmann (2014).

3.8 Avaliaco de desempenho

Na terceira etapa foram obtidas as projees dos modelos HAR e Redes Neurais, as previsões da volatilidade foram realizadas seguindo h períodos a frente de 1, 5, 10 e 15 dias. A amostra utilizada para testes compreendeu o período entre 18/12/2012 a 21/06/2018, sendo ao todo 1359 observaces.

Após a estimacão dos modelos foi necessário avaliar o desempenho preditivo, foram utilizadas as medidas MAE (expressão 18), RMSE (expressão 19), QLIKE – *Quase-Likelihood* (expressão 20), HAAE – *Heteroskedasticity-adjusted absolute error* (expressão 21) e LE – *Logarithmic error* (expressão 22).

As métricas MAE e RMSE são amplamente utilizadas na literatura, ambas são consideradas medidas simétricas por atribuir o mesmo peso para os erros positivos (volatilidade prevista acima da observada) e negativos (previsão abaixo da volatilidade observada). Sendo que o RMSE, de acordo com Forsberg & Ghysels (2007) e Patton (2011),  uma medida robusta que independe da métrica de volatilidade utilizada para previsão.

As métricas QLIKE, HAAE, LE são consideradas medidas de avaliacão assimétricas, dado que penalizam as previsões abaixo do esperado mais fortemente de que as previsões acima do esperado. Estas métricas foram importantes a serem observadas dado que em atividades de gestão de risco projetar a volatilidade abaixo do esperado pode ter consequências piores de que as projees acima do esperado, conforme apresentam Wong, Chin & Tan (2016) e Sharma & Vipul (2016).

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \widehat{RV}_{t+h} - RV_t \right|, \quad (18)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\widehat{RV}_{t+h} - RV_t \right)^2}, \quad (19)$$

$$QLIKE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\ln \left(\widehat{RV}_{t+h} \right) + \frac{RV_{t+h}}{\widehat{RV}_{t+h}} \right), \quad (20)$$

$$HAAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| 1 - \frac{RV_{t+h}}{\widehat{RV}_{t+h}} \right|, \quad (21)$$

$$LE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\ln \left(\frac{RV_{t+h}}{\widehat{RV}_{t+h}} \right) \right)^2. \quad (22)$$

Outra métrica a ser utilizada é a regressão de Mincer & Zarnowitz (1969), expressão 23.

$$RV_{t+h} = \alpha + \beta \widehat{RV}_{t+h} + \varepsilon_{t+h}. \quad (23)$$

Esta métrica é interessante devido fornecer o quanto a variável independente (a previsão produzida pelo modelo) explica a variável dependente (volatilidade percebida real) por meio do R^2 apresentado (quanto maior, melhor a previsão). Além disto, o modelo também fornece um teste t que verifica se a previsão explica de forma significativa o valor da variável observada.

Após verificar a performance individual dos modelos, utilizou-se o teste de Giacomini-White (Giacomini & White, 2006) para realizar uma análise comparativa entre os métodos de previsão. O teste funciona conforme o seguinte: seja dois modelos $\widehat{g}_{t,m_g}$ e $\widehat{f}_{t,m_f}$ aplicados numa série, buscamos verificar se ambos possuem a mesma capacidade preditiva dado as informaes em $\mathcal{G}_t$ pela hipótese:

$$H_0 : E \left[L_{t+h} \left(y_{t+h}, \widehat{f}_{t,m_f} \right) - L_{t+h} \left(y_{t+h}, \widehat{g}_{t,m_g} \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] = 0, \quad (24)$$

em que L_{t+h}  uma funo de perda e y_{t+h} são os valores observados. Deste modo, a hipótese se torna $E [\Delta L_{m,t+h} | \mathcal{G}_t] = 0$ para $t = 1, 2, \dots$.

A hipótese é testada em duas etapas; na primeira deve-se calcular o MAE dos modelos na amostra de avaliação, estima uma regressão entre estes erros absolutos dos modelos e obtém-se o coeficiente de regressão $\hat{\delta}_n$. Depois disto, aplica-se o teste conforme as expressões 24 e 25:

$$T_{m,n}^h = n \left(\frac{1}{n} \sum_{t=m}^{T-h} H_t \Delta L_{m,t+h} \right) \hat{\Omega}_n^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=m}^{T-h} H_t \Delta L_{m,t+h} \right), \quad (25)$$

$$\hat{\Omega}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=m}^{T-h} Z_{m,t+h} Z_{m,t+h}', \quad (26)$$

em que $Z_{m,t+h} = H_t \Delta L_{m,t+h}$, $\hat{\Omega}_n$ é uma matriz que estima a variância de $Z_{m,t+h}$.

Na segunda etapa deve-se tomar a decisão, caso a hipótese de igualdade de performance preditiva seja rejeitada na etapa 1. No caso, se $\hat{\delta}_n h_t > c$, usar o modelo $\hat{g}_{t,m_g}$; se $\hat{\delta}_n h_t < c$, usar modelo $\hat{f}_{t,m_f}$, sendo o valor crítico c um valor definido pelo pesquisador.

No presente artigo manteve-se $c = 0$, conforme Giacomini & White (2006) propuseram. Conforme Fernandes et al. (2014), ajustou-se o teste apresentado em Giacomini & White (2006) e Rossi & Inoue (2012) pelos erros padrão de Newey-West para corrigir possível heterocedasticidade, principalmente quando o horizonte de previsão $h > 1$.

O método de Giacomini & White (2006) foi preferido ao invés do teste de Diebold e Mariano (Diebold & Mariano, 1995), comumente utilizado, devido ao teste ser robusto a incerteza de parâmetros dos modelos, ser aplicável a diversos métodos de estimação seja paramétrico, semi-paramétrico e não paramétrico, além de possibilitar a comparação quando técnicas de combinação de previsões são utilizadas.

3.9 Aplicação prática

Além da avaliação da *performance* preditiva dos modelos, também buscou-se analisar o valor econômico ao utilizar diferentes métodos de previsão da volatilidade percebida. Conforme Engle, Kane & Noh (1997), uma forma natural de escolher entre um par de modelos de previsão de volatilidade seria verificar a rentabilidade incremental esperada ao trocar um modelo por outro em alguma aplicação financeira.

Deste modo, utilizou-se a metodologia proposta em Engle, Hong, Kane & Noh (1993), Xekalaki & Degiannakis (2005), Angelidis & Degiannakis (2008) e Andrada-Félix et al. (2016) que aplicaram as previsões numa simulação de negociações de opções utilizando uma estratégia baseada em *straddles*.

Mediante a literatura financeira, uma estratégia de *straddle at-the-money* é delta neutra ao risco dado que os retornos tendem a ser idênticos em condições de alta ou baixa no mercado. Deste modo, a principal incerteza nesta estratégia é a volatilidade futura, sendo esta previsão da volatilidade o principal objetivo dos modelos estudados.

A previsões para RV_{t+h} são utilizadas como direcionadoras para posicionamento na estratégia. Para casos de projeção de alta na volatilidade aplicou-se uma *long straddle*, compra de *call* e *put* com mesmo preço de exercício e maturidade. Para casos de projeção de baixa, aplicou-se um *short straddle*, venda de *call* e *put* com as mesmas características.

Considerando-se a existência de custos operacionais, tornou-se necessário aplicar uma regra para o excesso de volatilidade esperada, uma vez que pode não ser necessário realizar tradings quando há pouco aumento/decréscimo na volatilidade esperada. Diante disto, aplicaram-se as seguintes regras:

- Se $\frac{\widehat{RV}_{t+h} - RV_t}{RV_t} > threshold$ então utiliza *long straddle* (sinal de compra).
- Se $\frac{\widehat{RV}_{t+h} - RV_t}{RV_t} < threshold$ então utiliza *short straddle* (sinal de venda).
- Para os dias que não haver sinal de trading aplica-se no ativo livre de risco.

Os retornos das estratégias são calculados conforme as expressões 26 e 27:

$$r_{t+h}^{\text{compra}} = \frac{(C_{t+h} + P_{t+h}) - (C_t + P_t)}{C_t + P_t} - 2 \cdot TC, \quad (27)$$

$$r_{t+h}^{\text{venda}} = \frac{(C_t + P_t) - (C_{t+h} + P_{t+h})}{C_t + P_t} - 2 \cdot TC \quad (28)$$

em que TC são os custos transacionais, C_t é o preço da call e P_t é o preço da put. Os valores de C_t e P_t são obtidos pela fórmula de Black & Scholes (1973), apresentadas nas expressões 28, 29 e 30:

$$C_{t+1} = S_t N(d_1) - Ke^{-rf_t \tau} N(d_2), \quad (29)$$

$$P_{t+1} = -S_t N(-d_1) + Ke^{-rf_t \tau} N(-d_2), \quad (30)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (rf_t + \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2)\tau}{\sigma_{t+1}\sqrt{\tau}} \text{ e } d_2 = d_1 - \sigma_{t+1}\sqrt{\tau}. \quad (31)$$

em que S_t é o preço do ativo, rf_t é a taxa livre de risco, K é o preço de exercício, $N(\cdot)$ é a função cumulativa da distribuição normal e σ_{t+1} é a volatilidade do ativo durante o período de existência da opção e τ é o número de dias até o vencimento.

Dada a metodologia apresentada, os parâmetros da simulação do *trading* de opções foram os seguintes, conforme pode ser visto na literatura: S_t foi o preço do ativo em $t + 1$, K foi o preço atual, τ foi 22 dias, rf_t foi o CDI, σ_{t+1} foi RV_{t+h} , o *threshold* foi 0,15 e TC foi de 0,0025. Em pesquisas futuras, torna-se válida a discussão da análise de sensibilidade para valores diferentes de TC e *threshold*.

Para avaliar a *performance* da estratégia foi utilizada a estatística de Pesaran & Timmermann (1992) adaptada para trading por Anatolyev & Gerko (2005) que busca medir a taxa de acerto do modelo em relação aos sinais de posicionamento da estratégia de negociação. Outras medidas de performance foram os índices de Sharpe (Sharpe, 1966), Sortino (Sortino & Price, 1994), Ômega (Shadwick & Keating, 2002) e Alpha de Jensen (Jensen, 1968).

$$\bar{A}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I\left((RV_{t+h} - RV_t) \cdot (\widehat{RV}_{t+h} - RV_t) > 0\right), \quad (32)$$

O índice de Sharpe foi utilizado para comparar o retorno dos modelos em relação ao desvio-padrão. O índice de Sortino foi importante devido penalizar somente os retornos abaixo de zero, o que indica que os modelos apresentaram um erro muito alto na previsão da volatilidade.

O índice Ômega foi importante para verificar o quanto de ganho os modelos conseguiram proporcionar em relação as perdas provocadas pelos erros e pelo Alpha de Jensen buscou-se analisar se as estratégias seguindo os modelos apresentaram retornos maiores em relação ao ativo alvo.

4. Análise dos dados

4.1 Análise exploratória

Neste tópico são apresentados resultados de análise exploratória da série de volatilidade realizada do Ibo-vespa. Na Figura 2 são apresentadas as séries para RV_t e $\log(RV_t)$, pode-se observar que aplicar o $\log(RV_t)$ auxilia a suavizar os saltos presentes na série para RV_t . Assim como foi apresentado em Santos & Ziegelmann (2014), observamos um período de alta volatilidade relacionada a crise *subprime* (crise que teve origem no mercado de hipotecas americano).

Na tabela 1 são apresentadas as estatísticas descritivas das séries em RV_t e $\log(RV_t)$. Ambas as séries possuem média e mediana muito próximas. Assim como foi observado na Figura 2, a série em $\log(RV_t)$ possui menor assimetria e curtose, sendo que ambas são rejeitadas quanto a normalidade no teste de Jarque-Bera. Estes resultados são similares aos trabalhos de Andersen et al. (2007) e Forsberg & Ghysels (2007) que realizaram o estudo para outros mercados.

Figura 2
série diária – volatilidade percebida IBovespa

(a) série RV_t do IBovespa – abril/2000 a junho/2018.

(b) série $\log(RV_t)$ do IBovespa – abril/2000 a junho/2018.

Tabela 1
análise descritiva

estatística	RV_t	$\log \log RV_t$
média	0,039	-3,650
mediana	0,025	-3,690
dp	0,066	0,817
assimetria	9,190	0,556
curtose	126	1,420
mínimo	0,001	-6,640
máximo	1,490	0,399
Q(10)	15.504 (0,000)	14.999 (0,000)
Jarque-Bera	0,000	0,000

Nota: As 7 primeiras linhas apresentam a média, mediana, desvio-padrão, assimetria, curtose, mínimo e máximo para a série de volatilidade percebida do Ibovespa para todo o período de análises. Q(10) representa a estatística de Ljung-Box para verificar autocorrelação com 10 defasagens (p -valores entre parênteses). Na última linha temos os p -valores do teste de normalidade de Jarque-Bera.

Na Figura 3 são apresentados os gráficos da função de autocorrelação e autocorrelação parcial; na Figura 3(a) podemos observar que as autocorrelações continuam significantes até o *lag* 40. No gráfico de autocorrelação parcial se percebe rápido decaimento, porém ainda se observa autocorrelações significantes depois do *lag* 30. Estes resultados complementam as estatísticas de Ljung-Box apresentadas na Tabela 1.

O alto grau de autocorrelação confirma outros resultados observados na literatura sobre a persistência nas séries de volatilidade realizada, tanto em mercados internacionais (Corsi, 2009; Fernandes et al., 2014) como no Brasil (Santos & Ziegelmann, 2014; Val et al., 2014).

4.2 Estimação dos modelos

Nesta seção são discutidos os resultados dos coeficientes estimados pelos modelos durante o período compreendido entre 04/02/2000 a 17/12/2012, sendo ao todo 3171 observações. Na tabela 2 são apresentados os coeficientes e os erros padrões ajustados pela correção de *Newey-West*, conforme propõe Corsi (2009), para os modelos HAR(1,5,22), HAR BIC e HAR AIC.

Para o caso dos modelos não lineares NNHAR(1,5,22), NNHAR(1:22), BNNHAR(1,5,22) e BNNHAR(1:22) foram obtidos os efeitos parciais médios e os intervalos de confiança a 95% utilizando a metodologia de reamostragem por blocos (*block bootstrap algorithm*), conforme utilizaram Fernandes et al. (2014).

Conforme as sugestões de Kunsch (1989) e Hall, Horowitz & Jing (1995), a metodologia é aplicada pela retirada de amostras artificiais da série original com tamanho de aproximadamente $T^{\frac{1}{3}}$ observações, sendo reamostradas em torno de $B = 200$.

Por meio destes resultados na amostra de estimação, podemos denominar dois grupos de modelos: os restritos e os irrestritos. No caso dos restritos temos HAR(1,5,22), NNHAR(1,5,22) e BNNHAR(1,5,22); os irrestritos temos HAR BIC, HAR AIC, NNHAR(1:22) e BNNHAR(1:22).

Os modelos restritos apresentaram resultados claramente observados na literatura, em que os componentes diário, semanal e mensal são positivos e significantes, sendo que o componente mensal representou menor influência na explicação da volatilidade. Uma possível novidade nestes resultados foi a observação deste comportamento nos modelos não lineares, representados por NNHAR(1,5,22) e BNNHAR(1,5,22).

Por meio dos modelos irrestritos buscou-se verificar a possível existência de outros componentes na metodologia HAR, conforme Corsi (2009) apresenta ser possível adicionar mais termos ao modelo. Para o período estudado, podemos observar que o componente diário está presente em praticamente todos os modelos à exceção do NNHAR(1:22). Outro componente que apresentou forte influência, principalmente nos métodos não

Figura 3
funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para $\log(RV_t)$

(a) FAC da $\log(RV_t)$ do IBOvespa – abril/2000 a junho/2018.

(b) FACP da $\log(RV_t)$ do IBOvespa – abril/2000 a junho/2018.

lineares, foi o efeito de 2 defasagens.

No caso do componente semanal, percebe-se pouca influência no termo para os modelos irrestritos não lineares. Entretanto, estes modelos irrestritos captaram efeitos significantes nos períodos entre 10 a 14 dias, este resultado chama atenção por aparentemente parecer existir um componente bi-semanal ou quinzenal no mercado brasileiro. Contudo, não há evidências suficientes para comprovar este efeito, algo que pode ser explorado em pesquisas futuras.

Efeitos maiores que 22 dias não foram analisados devido a literatura apresentar a baixa influência destes termos nos modelos. Conforme Craioveanu & Hillebrand (2012) que realizaram uma exaustiva avaliação deste objetivo, perceberam que os coeficientes que demonstraram influência significativa ocorriam entre os *lags* 5 a 14, sendo confirmado que utilizar o modelo HAR até o *lag* 21 é suficiente para obter estimações confiáveis.

4.3 Desempenho das previsões

Neste tópico são apresentados os desempenhos das previsões geradas pelos modelos para a amostra de teste, compreendida entre 18/12/2012 a 21/06/2018. Os resultados são apresentados nas Tabelas 3, 4, 5 e 6. As análises buscaram avaliar os erros de previsão dos modelos utilizando-se as métricas citadas nas expressões 18 a 23, as diferenças foram avaliadas pelo teste de Giacomini & White (2006).

Dado que 6 métricas foram usadas para avaliação de *performance*, utilizou-se o procedimento de Wong et al. (2016) para ordenar os resultados gerais. Conforme os autores, um score de posição é criado, no caso do artigo entre 1 a 127, em que 1 indica melhor *performance* na métrica e 127 a pior. Os scores das métricas são somados possibilitando o ranqueamento, sendo o menor score associado ao melhor modelo de previsão.

Na Tabela 3 são apresentados os resultados dos modelos individuais. Para $h = 1$, o modelo NNHAR(1,5,22) apresentou melhor desempenho geral baseando-se em cada métrica de avaliação quando comparado com os demais modelos individuais. Outros dois modelos que se destacaram entre os métodos individuais foram BNNHAR(1,5,22) e HAR(1,5,22) que ficaram em segundo e terceiro respectivamente. Verifica-se que estes modelos apresentaram melhor desempenho em pelo menos uma das métricas de avaliação.

Para $h = 5, 10$ e 15 destaca-se o modelo BNNHAR(1,5,22) que apresentou melhor desempenho geral em comparação aos métodos individuais. Destacamos novamente o desempenho das metodologias NNHAR(1,5,22) e HAR(1,5,22) que apresentaram a segunda e terceira melhor performance respectivamente.

Para cada métrica específica podemos observar que o método HAR(1,5,22) apresentou a melhor *performance* para o LE (medida assimétrica), os outros dois métodos, NNHAR(1,5,22) e BNNHAR(1,5,22), foram os melhores nas demais métricas. Outro resultado que podemos atentar foi o desempenho ruim dos modelos considerados “irrestritos” que ficaram entre os piores resultados das análises, principalmente o NNHAR(1:22) que foi o pior entre todas as previsões avaliadas.

Por meio dos testes de Giacomini-White (Tabela 4) podemos verificar se as diferenças entre os resultados de previsão foram significantes. Para $h = 1$, O modelo BNNHAR(1,5,22) apresentou desempenho de previsão superior aos modelos HAR(1,5,22) a 10%, HAR AIC a 5%, HAR BIC e NNHAR(1:22) a 1%, para $h = 5, 10$ e 15 este mesmo modelo foi superior aos métodos HAR BIC e NNHAR(1:22).

Conforme observou-se anteriormente, o modelo HAR(1,5,22) não foi superior aos métodos BNNHAR(1,5,22) e NNHAR(1,5,22). Contudo, os testes apresentaram que somente o BNNHAR(1,5,22) foi estatisticamente superior para $h = 1$, para os demais períodos de tempo as diferenças não foram significantes. Este resultado de desempenho similar entre os métodos lineares e não lineares foram parecidos com os encontrados em Fernandes et al. (2014).

Quando comparamos os modelos “restritos” e “irrestritos”, em geral, as diferenças entre os desempenhos de previsões foram estatisticamente superiores em relação aos modelos restritos. Estes resultados estão em concordância, em parte, com a literatura quando observamos diferenças não significantes entre os modelos restritos, somente no caso de $h = 1$ que observamos uma pequena superioridade do BNNHAR(1,5,22) em relação ao HAR(1,5,22) para o período de análise estudado.

Quanto as diferenças entre os modelos “irrestritos”, podemos verificar diferenças em relação aos resultados de Craioveanu & Hillebrand (2012), uma vez que os resultados destes autores apontam para não existir dife-

Tabela 2
estimativas dos modelos

Modelos	HAR(1,5,22)	HAR BIC	HAR AIC	NNHAR(1,5,22)	NNHAR(1:22)	BNNHAR(1,5,22)	BNNHAR(1:22)
β_0	-0,424 (0,058)	-0,470 (0,057)	-0,428 (0,057)				
$\beta^{(1d)}$	0,345 (0,025)	0,270 (0,031)	0,269 (0,031)	0,288 (0,195;0,361)	0,221 (-0,673;1,033)	0,271 (0,204;0,335)	0,215 (0,16;0,311)
$\beta^{(2d)}$		0,160 (0,042)	0,160 (0,042)		0,566 (0,403;0,844)		0,578 (0,443;0,683)
$\beta^{(3d)}$					-0,309 (-2,023;0,511)		-0,225 (-0,322;-0,108)
$\beta^{(4d)}$					0,049 (-0,55;1,517)		-0,044 (-0,084;0,003)
$\beta^{(5d)}$	0,360 (0,038)	0,141 (0,051)	0,229 (0,059)	0,286 (0,124;0,471)	-0,15 (-1,311;1,163)	0,312 (0,144;0,462)	-0,094 (-0,234;0,053)
$\beta^{(6d)}$					0,198 (-0,743;0,798)		0,215 (0,031;0,367)
$\beta^{(7d)}$					0,144 (-0,041;0,682)		0,06 (-0,02;0,126)
$\beta^{(8d)}$			-0,267 (0,096)		-0,221 (-0,444;0,219)		-0,074 (-0,116;-0,034)
$\beta^{(9d)}$					0,058 (-0,405;0,263)		-0,086 (-0,179;0,038)
$\beta^{(10d)}$		0,313 (0,042)	0,690 (0,219)		-0,065 (-0,487;0,145)		-0,07 (-0,124;0,017)
$\beta^{(11d)}$			-0,318 (0,190)		-0,29 (-0,509;-0,069)		-0,16 (-0,388;0,111)
$\beta^{(12d)}$					0,15 (-0,491;0,801)		0,161 (-0,003;0,258)
$\beta^{(13d)}$					0,649 (0,562;0,711)		0,542 (0,419;0,641)
$\beta^{(14d)}$					-0,267 (-1,1;0,992)		-0,356 (-0,583;-0,083)
$\beta^{(15d)}$					0,028 (-0,49;0,242)		0,148 (-0,046;0,361)
$\beta^{(16d)}$					-0,033 (-0,199;0,306)		-0,034 (-0,147;0,15)
$\beta^{(17d)}$					-0,07 (-0,312;0,041)		-0,046 (-0,185;0,105)
$\beta^{(18d)}$					0,325 (0,15;0,464)		0,285 (0,173;0,381)
$\beta^{(19d)}$					-0,083 (-0,813;0,607)		-0,088 (-0,164;-0,028)
$\beta^{(20d)}$			0,136 (0,043)		-0,03 (-0,751;0,819)		0,013 (-0,054;0,036)
$\beta^{(21d)}$					-0,178 (-1,325;0,647)		-0,166 (-0,349;-0,005)
$\beta^{(22d)}$	0,195 (0,031)			0,141 (0,098;0,272)	0,021 (-0,432;1,044)	0,136 (0,101;0,199)	-0,06 (-0,137;0,031)

Para os modelos HAR(1,5,22), HAR BIC e HAR AIC são apresentados os coeficientes de regressão e nos parênteses os erros padrão utilizando a correção de Newey-West, conforme propõe Corsi (2009). Para os modelos NNHAR(1,5,22), NNHAR(1:22), BNNHAR(1,5,22) e BNNHAR(1:22) são apresentados os efeitos parciais médios e nos parênteses os intervalos de confiança a 95% obtidos pelo algoritmo de reamostragem por blocos (block bootstrap algorithm) conforme utilizado em Fernandes et al. (2014).

renças significativas. Na amostra estudada do presente artigo, a superioridade dos modelos que possuem uma interpretação econômica é destacada significativamente.

Na Tabela 5 são apresentados os modelos que ficaram no percentil 5% do score geral de desempenho dos 127 modelos. Em geral, conforme a literatura apresenta, as previsões combinadas demonstraram desempenho superior de previsão. Entretanto, podemos destacar o modelo NNHAR(1,5,22) para $h = 1$ e 10 e o modelo BNNHAR(1,5,22) para $h = 5$ e 10 presentes no conjunto de modelos de melhor desempenho.

A combinação que se destaca em todos os horizontes de tempo é a BNNHAR(1,5,22) + HAR(1,5,22) + NNHAR(1,5,22) que utiliza as previsões dos três modelos que possuem interpretação econômica. Vale ressaltar que estes modelos foram os melhores quando avaliados individualmente, sendo que a combinação deles consegue melhorar o desempenho de previsão.

Na Tabela 6 são apresentadas as comparações destas melhores previsões em relação aos modelos individuais por meio do teste de Giacomini & White (2006). Como esperado, as combinações superaram de forma significativa as previsões geradas pelos modelos “irrestritos”, contudo nenhuma foi estatisticamente melhor de que os métodos NNHAR(1,5,22) e BNNHAR(1,5,22). Em relação ao desempenho comparado com o modelo HAR(1,5,22), em que a literatura da área é mais voltada, observa-se melhor desempenho significativo das combinações somente no horizonte $h = 1$, sendo somente a combinação BNNHAR(1,5,22) + HAR(1,5,22) + NNHAR(1,5,22) estatisticamente significativa a 5%.

Este resultado, em parte, parece estar diferente da literatura por indicar superioridade das combinações em relação ao HAR(1,5,22), algo não observado, por exemplo, em Santos & Ziegelmann (2014) e Vortelinos (2017). Porém, este mesmo modelo estava presente na combinação que apresentou melhor desempenho preditivo.

Estes resultados, apesar de não serem conclusivos, demonstram indícios de que combinar modelos lineares com não lineares pode trazer benefícios ao desempenho preditivo num processo de projeção da volatilidade percebida.

4.4 Desempenho estratégia com opções

Na Tabela 7 são apresentados os resultados da simulação de *trading* de opções para os modelos individuais. Para $h = 1$ podemos observar que o modelo HAR(1,5,22) demonstrou melhor desempenho em praticamente todos os critérios, sendo o segundo melhor no índice Ômega. Além disto, em segundo e terceiro lugar podem ser vistos os modelos BNNHAR(1,5,22) e HAR AIC, este terceira se destaca por ter apresentado bom desempenho quanto a taxa de acerto de sinais de *trading*.

Nos demais horizontes de tempo podemos constatar a presença do modelo HAR(1,5,22) entre os 3 melhores nos horizontes $h = 5$ e 10. O BNNHAR(1,5,22) apresentou melhor desempenho nos horizontes $h = 5$ e 15 e o modelo HAR AIC presente entre os 3 melhores nos horizontes $h = 10$ e 15.

Na Tabela 8 são apresentados os resultados gerais para todos os modelos estudados na simulação de *trading* de opções. Assim como nas análises de desempenho de previsão, novamente percebemos a melhor *performance* das projeções combinadas, esta técnica manteve-se em maioria entre os melhores nos horizontes $h = 1, 5$ e 10.

Para $h = 1$ podemos destacar a combinação BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR AIC que apresentou segundo melhor desempenho, sendo que estes modelos foram os melhores individualmente. Um modelo que se destacou na *performance* de *trading* foi o HAR AIC, este modelo esteve presente nas combinações que demonstraram os melhores resultados.

Um ponto de atenção foi a diferença de alguns resultados quando comparamos as análises de *performance* de previsão e desempenho de *trading*. Este comportamento foi encontrado anteriormente nos trabalhos de Satchell & Timmermann (1995) e Andrada-Félix et al. (2016); conforme estes autores, exista a possibilidade de que alguns modelos que apresentaram a melhor acurácia, não necessariamente apresentarão a melhor rentabilidade.

De acordo com Andrada-Félix et al. (2016) uma possível explicação para esta diferença ocorre pelos objetivos diferentes entre acurácia e rentabilidade. No caso do contexto de gerenciamento de riscos, previsões pontuais são mais importantes. Para o caso de *trading*, as previsões direcionais demonstram maior importância devido proporcionar a direção que o mercado irá tender em passos futuros.

Tabela 3
comparações dos modelos individuais

modelo	h	RMSE	MAE	HAAE	QLIKE	LE	R ²	Score
HAR(1,5,22)	1	2,859 (113)	1,02 (71)	0,4261 (113)	-2,7883 (113)	0,2458 (5)	0,18 (106)	521 (96)
HAR AIC	1	2,864 (121)	1,0262 (113)	0,4297 (125)	-2,7862 (125)	0,2502 (97)	0,1773 (118,5)	699,5 (123)
HAR BIC	1	2,864 (120)	1,0323 (122)	0,4298 (126)	-2,7861 (126)	0,2511 (111)	0,1773 (118,5)	723,5 (126)
NNHAR(1,5,22)	1	2,826 (1)	1,014 (20)	0,4204 (21)	-2,7931 (2)	0,2478 (37)	0,1991 (1)	82 (4,5)
NNHAR(1:22)	1	2,882 (127)	1,0571 (127)	0,4253 (112)	-2,7889 (105)	0,2621 (127)	0,1673 (127)	725 (127)
BNNHAR(1,5,22)	1	2,847 (40)	1,0097 (1)	0,4185 (4)	-2,7924 (7)	0,246 (7)	0,1865 (38)	97 (8)
BNNHAR(1:22)	1	2,843 (19)	1,0248 (111)	0,4322 (127)	-2,7854 (127)	0,2575 (126)	0,1891 (16)	526 (97)
HAR(1,5,22)	5	2,927 (78)	1,0857 (72)	0,4941 (101)	-2,7405 (97)	0,3101 (2)	0,1456 (75,5)	425,5 (66)
HAR AIC	5	2,929 (95)	1,0903 (106)	0,4957 (113)	-2,7397 (103)	0,3148 (60)	0,1443 (98,5)	575,5 (103)
HAR BIC	5	2,933 (113)	1,104 (125)	0,4964 (119)	-2,7384 (110)	0,3191 (113)	0,14 (117)	697 (119)
NNHAR(1,5,22)	5	2,916 (7)	1,0816 (23)	0,4826 (6)	-2,7481 (3)	0,3162 (87)	0,1562 (3)	129 (17)
NNHAR(1:22)	5	2,97 (127)	1,1264 (127)	0,5125 (127)	-2,725 (127)	0,3397 (127)	0,1177 (127)	762 (127)
BNNHAR(1,5,22)	5	2,911 (1)	1,0791 (6)	0,4782 (1)	-2,7495 (1)	0,3129 (27)	0,1565 (2)	38 (3)
BNNHAR(1:22)	5	2,928 (87)	1,095 (118)	0,5028 (126)	-2,7341 (125)	0,3259 (126)	0,1453 (80)	662 (114)
HAR(1,5,22)	10	2,978 (97)	1,1357 (89)	0,5248 (116)	-2,7255 (100)	0,3418 (18)	0,1199 (86)	506 (94,5)
HAR AIC	10	2,982 (109)	1,1402 (106)	0,5253 (118)	-2,7247 (108)	0,3448 (56)	0,1163 (109)	606 (105)
HAR BIC	10	2,986 (117)	1,1576 (125)	0,5258 (119)	-2,7237 (115)	0,3516 (116)	0,1124 (118)	710 (123)
NNHAR(1,5,22)	10	2,963 (7)	1,1225 (3)	0,5119 (10)	-2,7325 (3)	0,3445 (52)	0,1397 (2)	77 (6)
NNHAR(1:22)	10	3,019 (127)	1,1793 (127)	0,5323 (126)	-2,712 (127)	0,3778 (127)	0,0898 (127)	761 (127)
BNNHAR(1,5,22)	10	2,955 (1)	1,123 (6)	0,5074 (1)	-2,7341 (1)	0,343 (34)	0,1387 (3)	46 (4)
BNNHAR(1:22)	10	2,98 (107)	1,1458 (118)	0,544 (127)	-2,7142 (126)	0,3595 (126)	0,1197 (88,5)	692,5 (119)
HAR(1,5,22)	15	2,993 (20)	1,1546 (2)	0,5459 (81)	-2,7109 (61)	0,3673 (1)	0,1134 (9)	174 (28)
HAR AIC	15	3,001 (91)	1,1701 (76)	0,5538 (117)	-2,707 (108)	0,3743 (54)	0,1068 (85)	531 (90)
HAR BIC	15	2,998 (56)	1,1771 (107)	0,5501 (102)	-2,708 (100)	0,3778 (77)	0,1081 (70)	512 (89)
NNHAR(1,5,22)	15	2,994 (27)	1,1608 (16)	0,5343 (4)	-2,7158 (4)	0,3754 (58)	0,1145 (2)	111 (14)
NNHAR(1:22)	15	3,04 (127)	1,2429 (127)	0,5849 (127)	-2,6842 (127)	0,4266 (127)	0,0793 (127)	762 (127)
BNNHAR(1,5,22)	15	2,987 (1)	1,162 (25)	0,5273 (1)	-2,7187 (1)	0,3737 (49)	0,1137 (7)	84 (10)
BNNHAR(1:22)	15	3,008 (119)	1,1849 (120)	0,5688 (126)	-2,6995 (126)	0,3868 (120)	0,1018 (118)	729 (123)

Valores de RMSE e MAE estão multiplicados por 100. Em parênteses o score de cada modelo em determinada métrica. A coluna score é a soma das posições de cada modelo em determinada métrica de avaliação, conforme sugere Wong *et al.* (2016). Em negrito estão indicados os modelos que apresentaram melhor desempenho.

Tabela 4
resultados testes Giacomini-White dos modelos individuais

<i>h = 1</i>						
Modelo	HAR(1,5,22)	HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)	NNHAR(1:22)	BNNHAR(1,5,22)
HAR AIC	-1,119 (0,263)					
HAR BIC	-1,979 (0,048)**					
NNHAR(1,5,22)	0,845 (0,398)					
NNHAR(1:22)	-3,59 (0,000)***					
BNNHAR(1,5,22)	1,844 (0,065)*					
BNNHAR(1:22)	-0,563 (0,573)					
		HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)	NNHAR(1:22)	BNNHAR(1,5,22)
		-1,724 (0,085)*	1,95 (0,051)*			
		1,354 (0,176)	-2,721 (0,007)***	-3,305 (0,001)***		
		-3,586 (0,000)***	2,97 (0,003)***	0,761 (0,447)	3,959 (0,000)***	
		2,215 (0,027)**	0,922 (0,356)	-1,569 (0,117)	2,867 (0,004)***	-2,147 (0,032)**
		0,183 (0,855)				
<i>h = 5</i>						
Modelo	HAR(1,5,22)	HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)	NNHAR(1:22)	BNNHAR(1,5,22)
HAR AIC	-0,663 (0,508)					
HAR BIC	-1,803 (0,071)*					
NNHAR(1,5,22)	0,323 (0,747)					
NNHAR(1:22)	-2,587 (0,01)**					
BNNHAR(1,5,22)	0,501 (0,616)					
BNNHAR(1:22)	-0,797 (0,425)					
		HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)	NNHAR(1:22)	BNNHAR(1,5,22)
		-2,034 (0,042)**				
		0,62 (0,536)	1,229 (0,219)			
		-2,69 (0,007)***	-1,451 (0,147)	-2,219 (0,026)**		
		0,79 (0,43)	1,381 (0,167)	0,564 (0,573)	2,236 (0,025)**	
		-0,544 (0,586)	0,823 (0,411)	-1,103 (0,27)	1,929 (0,054)*	-1,449 (0,147)
<i>h = 10</i>						
Modelo	HAR(1,5,22)	HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)	NNHAR(1:22)	BNNHAR(1,5,22)
HAR AIC	-0,633 (0,526)					
HAR BIC	-1,544 (0,123)					
NNHAR(1,5,22)	0,702 (0,483)					
NNHAR(1:22)	-2,397 (0,017)**					
BNNHAR(1,5,22)	0,693 (0,488)					
BNNHAR(1:22)	-0,76 (0,447)					
		HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)	NNHAR(1:22)	BNNHAR(1,5,22)
		-1,979 (0,048)**				
		0,8 (0,423)	1,247 (0,212)			
		-2,334 (0,02)**	-1,157 (0,247)	-1,957 (0,05)*		
		0,805 (0,421)	1,275 (0,202)	-0,09 (0,928)	1,902 (0,057)*	
		-0,471 (0,638)	0,806 (0,42)	-1,336 (0,182)	1,417 (0,156)	-1,517 (0,129)
<i>h = 15</i>						
Modelo	HAR(1,5,22)	HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)	NNHAR(1:22)	BNNHAR(1,5,22)
HAR AIC	-2,505 (0,012)**					
HAR BIC	-1,782 (0,075)*					
NNHAR(1,5,22)	-0,705 (0,481)					
NNHAR(1:22)	-4,19 (0,000)***					
BNNHAR(1,5,22)	-0,898 (0,369)					
BNNHAR(1:22)	-2,508 (0,012)**					
		HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)	NNHAR(1:22)	BNNHAR(1,5,22)
		-0,731 (0,465)				
		0,931 (0,352)	1,424 (0,154)			
		-3,665 (0,000)***	-2,866 (0,004)***	-4,315 (0,000)***		
		0,906 (0,365)	1,656 (0,098)*	-0,2 (0,841)	3,923 (0,000)***	
		-1,643 (0,1)	-0,783 (0,434)	-1,751 (0,08)*	2,564 (0,01)**	-2,061 (0,039)**

Os valores são os resultados da estatística de teste da metodologia de Giacomini e White (2006), valores positivos indicam que o modelo da linha foi superior ao modelo da coluna. Valores *p* em parênteses. (*) Significante a 10%. (**) Significante a 5%. (***) Significante a 1%.

Tabela 5
comparações dos modelos melhor de desempenho

Modelo	h	RMSE	MAE	HAAE	QLIKE	LE	R ²	Score
NNHAR(1,5,22)	1	2,826 (1)	1,014 (20)	0,4204 (21)	-2,7931 (2)	0,2478 (37)	0,1991 (1)	82 (4,5)
HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	1	2,84 (7)	1,0123 (8)	0,421 (34)	-2,7916 (20)	0,2454 (3)	0,1905 (6)	78 (3)
BNNHAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	1	2,835 (3)	1,0106 (3)	0,4187 (5)	-2,7931 (3)	0,2463 (12)	0,1934 (3)	29 (1)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	1	2,842 (14)	1,0102 (2)	0,4196 (10)	-2,792 (12)	0,2453 (2)	0,1896 (12,5)	52,5 (2)
BNNHAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	1	2,842 (16)	1,0116 (5)	0,4203 (16)	-2,7916 (17)	0,2462 (10)	0,189 (18)	82 (4,5)
BNNHAR(1,5,22)+HAR BIC+NNHAR(1,5,22)	1	2,842 (15)	1,0131 (14)	0,4202 (14)	-2,7916 (19)	0,2465 (15)	0,1891 (16)	93 (6)
BNNHAR(1,5,22)+ BNNHAR(1,22)+NNHAR(1,5,22)	1	2,836 (4)	1,0116 (6)	0,4203 (18)	-2,7917 (15)	0,2482 (47)	0,193 (4)	94 (7)
BNNHAR(1,5,22)	5	2,911 (1)	1,0791 (6)	0,4782 (1)	-2,7495 (1)	0,3129 (27)	0,1565 (2)	38 (3)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)	5	2,916 (9)	1,0793 (7)	0,4847 (14)	-2,746 (12)	0,31 (1)	0,1526 (13)	56 (5)
BNNHAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	5	2,913 (2)	1,0795 (9)	0,4796 (2)	-2,7493 (2)	0,3137 (41)	0,1568 (1)	57 (6)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	5	2,915 (3)	1,0772 (1)	0,4825 (5)	-2,7475 (4)	0,3108 (7)	0,1545 (5)	25 (1)
BNNHAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	5	2,915 (5)	1,0781 (3)	0,4823 (4)	-2,7475 (5)	0,3118 (14)	0,1542 (6)	37 (2)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	5	2,917 (13)	1,0787 (4)	0,4846 (12)	-2,7462 (8)	0,3107 (5)	0,1527 (11,5)	53,5 (4)
BNNHAR(1,5,22)+ BNNHAR(1,22)+ HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	5	2,916 (8)	1,0789 (5)	0,4848 (15)	-2,7458 (15)	0,312 (18)	0,1536 (7)	68 (7)
NNHAR(1,5,22)	10	2,963 (7)	1,1225 (3)	0,5119 (10)	-2,7325 (3)	0,3445 (52)	0,1397 (2)	77 (6)
BNNHAR(1,5,22)	10	2,955 (1)	1,123 (6)	0,5074 (1)	-2,7341 (1)	0,343 (34)	0,1387 (3)	46 (4)
BNNHAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	10	2,958 (2)	1,1218 (2)	0,5088 (2)	-2,7339 (2)	0,3429 (32)	0,1398 (1)	41 (3)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	10	2,962 (3)	1,1215 (1)	0,5117 (9)	-2,7324 (4)	0,3402 (4)	0,1345 (5)	26 (1)
BNNHAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	10	2,962 (6)	1,123 (5)	0,5114 (8)	-2,7323 (5)	0,3409 (7)	0,1335 (6)	37 (2)
BNNHAR(1,5,22)+HAR BIC+NNHAR(1,5,22)	10	2,962 (4)	1,128 (21)	0,5113 (6)	-2,7323 (6)	0,3427 (28)	0,1326 (7)	72 (5)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	10	2,965 (14)	1,1245 (9)	0,5138 (30)	-2,7312 (8)	0,3402 (3)	0,1307 (13,5)	77,5 (7)
HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	15	2,992 (14)	1,1541 (1)	0,5373 (12)	-2,7147 (11)	0,3694 (3)	0,1145 (2)	43 (3)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)	15	2,989 (2)	1,1557 (3)	0,5346 (5)	-2,7158 (5)	0,3692 (2)	0,1142 (5)	22 (1)
BNNHAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	15	2,99 (3)	1,1607 (13)	0,5303 (2)	-2,7176 (2)	0,3741 (51)	0,1144 (4)	75 (7)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR BIC	15	2,991 (5)	1,1608 (14)	0,5381 (14)	-2,7142 (14)	0,3707 (13)	0,1132 (10)	70 (6)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	15	2,99 (4)	1,1562 (4)	0,5336 (3)	-2,7163 (3)	0,3705 (9)	0,1145 (2)	25 (2)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	15	2,992 (9)	1,1582 (6)	0,5374 (13)	-2,7145 (13)	0,3706 (12)	0,113 (12)	65 (5)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR BIC+NNHAR(1,5,22)	15	2,991 (6)	1,1595 (11)	0,5361 (9)	-2,7152 (8)	0,3711 (18)	0,1138 (6)	58 (4)

Valores de RMSE e MAE estão multiplicados por 100. Em parênteses o score de cada modelo em determinada métrica. A coluna score é a soma das posições de cada modelo em determinada métrica de avaliação, conforme sugere Wong et al. (2016). Em negrito estão indicados os modelos que apresentaram melhor desempenho.

Tabela 6
resultados testes Giacomini-White dos modelos de melhor desempenho

<i>h = 1</i>							
Modelo	BNNHAR(1,5,22)	BNNHAR(1:22)	NNHAR(1:22)	HAR(1,5,22)	HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)
NNHAR(1,5,22)	0,761 (0,447)	-1,569 (0,117)	-3,305 (0,001)	0,845 (0,398)	1,354 (0,176)	1,95 (0,051)	-
HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	-0,619 (0,536)	1,794 (0,073)	3,921 (0,000)	1,855 (0,064)	2,065 (0,039)	2,728 (0,006)	0,454 (0,65)
BNNHAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	-0,322 (0,748)	2,218 (0,027)	3,784 (0,000)	1,604 (0,109)	1,976 (0,048)	2,651 (0,008)	1,185 (0,236)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	-0,16 (0,873)	2,154 (0,031)	4,065 (0,000)	2,212 (0,027)	2,353 (0,019)	3,04 (0,002)	0,937 (0,349)
BNNHAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	-0,596 (0,551)	2,253 (0,024)	4,22 (0,000)	1,782 (0,075)	2,636 (0,008)	3,334 (0,001)	0,535 (0,592)
BNNHAR(1,5,22)+HAR BIC+NNHAR(1,5,22)	-1,079 (0,28)	1,955 (0,051)	4,044 (0,000)	1,406 (0,16)	2,262 (0,024)	3,329 (0,001)	0,198 (0,843)
BNNHAR(1,5,22)+BNNHAR(1:22)+NNHAR(1,5,22)	-0,526 (0,599)	3,042 (0,002)	3,913 (0,000)	1,336 (0,182)	2,007 (0,045)	2,697 (0,007)	0,651 (0,515)
<i>h = 5</i>							
Modelo	BNNHAR(1,5,22)	BNNHAR(1:22)	NNHAR(1:22)	HAR(1,5,22)	HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)
NNHAR(1,5,22)	-	-1,449 (0,147)	2,236 (0,025)	0,501 (0,616)	0,79 (0,43)	1,381 (0,167)	0,564 (0,573)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)	-0,033 (0,974)	1,72 (0,085)	2,632 (0,008)	0,81 (0,418)	1,179 (0,238)	1,875 (0,061)	0,382 (0,703)
BNNHAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	-0,18 (0,857)	1,358 (0,174)	2,277 (0,023)	0,476 (0,634)	0,768 (0,443)	1,349 (0,177)	0,938 (0,348)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	0,524 (0,6)	1,749 (0,08)	2,588 (0,01)	0,766 (0,444)	1,129 (0,259)	1,698 (0,09)	1,218 (0,223)
BNNHAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	0,21 (0,834)	1,904 (0,057)	2,671 (0,008)	0,702 (0,483)	1,146 (0,252)	1,716 (0,086)	0,742 (0,458)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	0,066 (0,948)	1,914 (0,056)	2,79 (0,005)	0,811 (0,417)	1,332 (0,183)	1,932 (0,053)	0,507 (0,612)
BNNHAR(1,5,22)+BNNHAR(1:22)+HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	0,043 (0,966)	2,088 (0,037)	2,633 (0,008)	0,66 (0,51)	1,107 (0,268)	1,739 (0,082)	0,521 (0,603)
<i>h = 10</i>							
Modelo	BNNHAR(1,5,22)	BNNHAR(1:22)	NNHAR(1:22)	HAR(1,5,22)	HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)
NNHAR(1,5,22)	-0,09 (0,928)	-1,336 (0,182)	-1,957 (0,05)	0,702 (0,483)	0,8 (0,423)	1,247 (0,212)	-
BNNHAR(1,5,22)	-	-1,517 (0,129)	1,902 (0,057)	0,693 (0,488)	0,805 (0,421)	1,275 (0,202)	-0,09 (0,928)
BNNHAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	0,402 (0,688)	1,489 (0,136)	1,966 (0,049)	0,75 (0,453)	0,846 (0,398)	1,291 (0,197)	0,222 (0,824)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	0,297 (0,767)	1,823 (0,068)	2,24 (0,025)	0,987 (0,324)	1,076 (0,282)	1,527 (0,127)	0,169 (0,866)
BNNHAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	0,009 (0,993)	1,932 (0,053)	2,287 (0,022)	0,954 (0,34)	1,082 (0,279)	1,572 (0,116)	-0,067 (0,947)
BNNHAR(1,5,22)+HAR BIC+NNHAR(1,5,22)	-0,651 (0,515)	1,687 (0,092)	2,144 (0,032)	0,592 (0,554)	0,849 (0,396)	1,486 (0,137)	-0,615 (0,538)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	-0,175 (0,861)	1,965 (0,049)	2,411 (0,016)	1,068 (0,285)	1,198 (0,231)	1,705 (0,088)	-0,217 (0,828)
<i>h = 15</i>							
Modelo	BNNHAR(1,5,22)	BNNHAR(1:22)	NNHAR(1:22)	HAR(1,5,22)	HAR AIC	HAR BIC	NNHAR(1,5,22)
HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	1,347 (0,178)	2,475 (0,013)	4,506 (0,00)	0,105 (0,916)	2,283 (0,022)	2,031 (0,042)	1,453 (0,146)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)	1,45 (0,147)	2,64 (0,008)	4,248 (0,00)	-0,266 (0,79)	2,239 (0,025)	2,061 (0,039)	0,789 (0,43)
BNNHAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	0,432 (0,665)	1,994 (0,046)	4,192 (0,00)	-0,766 (0,444)	1,047 (0,295)	1,66 (0,097)	0,028 (0,977)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR BIC	0,318 (0,75)	2,511 (0,012)	3,945 (0,00)	-0,966 (0,334)	1,602 (0,109)	2,34 (0,019)	0,009 (0,993)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+NNHAR(1,5,22)	1,471 (0,141)	2,449 (0,014)	4,377 (0,00)	-0,308 (0,758)	1,941 (0,052)	2,029 (0,042)	1,053 (0,292)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR AIC+NNHAR(1,5,22)	0,822 (0,411)	2,492 (0,013)	4,323 (0,00)	-0,777 (0,437)	2,23 (0,026)	1,963 (0,05)	0,483 (0,629)
BNNHAR(1,5,22)+HAR(1,5,22)+HAR BIC+NNHAR(1,5,22)	0,731 (0,465)	2,431 (0,015)	4,136 (0,00)	-0,76 (0,447)	1,645 (0,1)	2,263 (0,024)	0,256 (0,798)

Os modelos apresentados na tabela são os métodos que demonstraram melhor desempenho geral, sendo posicionados no percentil 5% entre as 127 previsões geradas por meio dos modelos individuais e combinações. Os valores são os resultados da estatística de teste da metodologia de Giacomini e White (2006), valores positivos indicam que o modelo da linha foi superior ao modelo da coluna. Valores *p* em parênteses. (*) Significante a 10%. (**) Significante a 5%. (***) Significante a 1%.

Apesar dos resultados ainda não serem conclusivos, podemos perceber que para os horizontes $h = 1, 5$ e 10 , o modelo HAR AIC demonstrou melhor taxa de acerto de sinal de *trading* em relação ao modelo NNHAR(1,5,22). Deste modo, percebe-se indícios da mudança de modelo nas combinações. Para o caso da acurácia temos a combinação BNNHAR(1,5,22) + HAR(1,5,22) + NNHAR(1,5,22) e para o caso do trading BNNHAR(1,5,22) + HAR(1,5,22) + HAR AIC. A combinação que se manteve melhor posicionada em ambos os critérios foi a BNNHAR(1,5,22) + NNHAR(1,5,22).

Tabela 7
resultados simulação trading opções dos modelos individuais

Modelo	h	Taxa de acerto de sinal	Índice de Sharpe	Índice Sortino	Índice Ômega	Alfa de Jensen	Score
BNNHAR(1, 5, 22)	1	0,669 (2,5)	2,723 (52)	1,106 (23)	7,762 (9)	5,117 (32)	118,5 (12)
BNNHAR(1:22)	1	0,65 (122,5)	2,633 (120)	0,965 (116)	6,276 (116)	4,933 (110)	584,5 (124)
HAR(1, 5, 22)	1	0,663 (35)	2,792 (6)	1,127 (12)	7,496 (28)	5,33 (3)	84 (4)
HAR AIC	1	0,666 (11,5)	2,737 (38)	1,045 (68)	6,575 (103)	5,114 (33)	253,5 (48)
HAR BIC	1	0,66 (59)	2,666 (107)	0,957 (120)	5,866 (124)	5,043 (65)	475 (108)
NNHAR(1, 5, 22)	1	0,656 (78)	2,652 (110)	1,126 (13)	8,037 (3)	4,967 (103)	307 (64,5)
NNHAR(1:22)	1	0,632 (127)	2,547 (126)	0,872 (126)	5,703 (125)	4,737 (126)	630 (126)
BNNHAR(1, 5, 22)	5	0,667 (30,5)	3,279 (15)	1,022 (10)	4,9 (12)	7,387 (17)	84,5 (3)
BNNHAR(1:22)	5	0,662 (92)	3,166 (116)	0,953 (113)	4,498 (116)	7,166 (113)	550 (121)
HAR(1, 5, 22)	5	0,664 (65,5)	3,262 (27)	1,001 (42)	4,72 (60)	7,364 (22)	216,5 (34)
HAR AIC	5	0,664 (65,5)	3,198 (92)	0,97 (90)	4,556 (105)	7,194 (104)	456,5 (106)
HAR BIC	5	0,663 (78,5)	3,219 (68)	0,985 (69)	4,603 (90)	7,318 (49)	354,5 (78)
NNHAR(1, 5, 22)	5	0,663 (78,5)	3,345 (4)	1,149 (1)	5,299 (1)	7,621 (1)	85,5 (4,5)
NNHAR(1:22)	5	0,652 (127)	3,185 (106)	0,958 (110)	4,492 (118)	7,243 (84)	545 (119)
BNNHAR(1, 5, 22)	10	0,657 (120,5)	3,353 (38)	1,059 (47)	4,612 (72)	7,595 (55)	332,5 (69)
BNNHAR(1:22)	10	0,66 (111)	3,307 (96)	1,011 (122)	4,431 (120)	7,524 (81)	530 (123)
HAR(1, 5, 22)	10	0,664 (64,5)	3,443 (7)	1,113 (2)	4,949 (2)	7,83 (7)	82,5 (4)
HAR AIC	10	0,665 (50,5)	3,407 (11)	1,083 (10)	4,751 (20)	7,76 (13)	104,5 (8)
HAR BIC	10	0,669 (18)	3,375 (22)	1,081 (12)	4,774 (11)	7,659 (26)	89 (5)
NNHAR(1, 5, 22)	10	0,655 (125)	3,487 (2)	1,183 (1)	5,116 (1)	8,091 (2)	131 (11)
NNHAR(1:22)	10	0,659 (116)	3,512 (1)	1,078 (15)	4,635 (56)	8,274 (1)	189 (29)
BNNHAR(1, 5, 22)	15	0,641 (67)	3,7 (4)	1,24 (4)	5,126 (6)	8,861 (4)	85 (2)
BNNHAR(1:22)	15	0,629 (126)	3,581 (38)	1,131 (88)	4,737 (68)	8,52 (61)	381 (90)
HAR(1, 5, 22)	15	0,636 (112,5)	3,535 (89)	1,138 (81)	4,781 (55)	8,339 (120)	457,5 (105)
HAR AIC	15	0,634 (124)	3,61 (22)	1,204 (16)	4,983 (17)	8,509 (65)	244 (35,5)
HAR BIC	15	0,635 (119)	3,588 (34)	1,165 (42)	4,838 (46)	8,418 (98)	339 (71)
NNHAR(1, 5, 22)	15	0,64 (82,5)	3,7 (3)	1,258 (2)	5,176 (2)	8,905 (2)	91,5 (3)
NNHAR(1:22)	15	0,622 (127)	3,419 (127)	1,035 (127)	4,184 (127)	8,442 (88)	596 (127)

Valor do índice Sharpe está multiplicado por 10 e Alfa de Jensen está multiplicado por 100. Em parênteses o score de cada modelo em determinada métrica. A coluna score é a soma das posições de cada modelo em determinada métrica de avaliação, conforme sugere Wong *et al.* (2016). Em negrito estão indicados os modelos que apresentaram melhor desempenho.

Tabela 8
resultados simulação trading opções dos modelos de melhor desempenho

Modelo	h	Tx de acerto do sinal	Índice Sharpe	Índice Sortino	Índice Ômega	Alfa de Jensen	Score
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR(1, 5, 22)+HAR AIC	1	0,666 (11,5)	2,759 (17)	1,117 (15)	7,509 (26)	5,201 (9)	78,5 (2)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR AIC+NNHAR(1, 5, 22)	1	0,664 (25,5)	2,764 (12)	1,133 (10)	7,784 (8)	5,125 (26)	81,5 (3)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR AIC+NNHAR(1:22)	1	0,657 (71,5)	2,84 (2)	1,151 (6)	7,594 (19)	5,309 (4)	102,5 (7)
BNNHAR(1, 5, 22)+NNHAR(1, 5, 22)	1	0,665 (18,5)	2,782 (9)	1,229 (1)	8,848 (1)	5,266 (5)	34,5 (1)
BNNHAR(1:22)+HAR(1, 5, 22)+NNHAR(1, 5, 22)	1	0,663 (35)	2,76 (16)	1,116 (17)	7,757 (10)	5,147 (18)	96 (6)
HAR(1, 5, 22)	1	0,663 (35)	2,792 (6)	1,127 (12)	7,496 (28)	5,33 (3)	84 (4)
HAR(1, 5, 22)+NNHAR(1, 5, 22)	1	0,661 (54,5)	2,791 (7)	1,148 (8)	8,088 (2)	5,176 (14)	85,5 (5)
BNNHAR(1, 5, 22)	5	0,667 (30,5)	3,279 (15)	1,022 (10)	4,9 (12)	7,387 (17)	84,5 (3)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR(1, 5, 22)+HAR AIC+NNHAR(1:22)	5	0,665 (52,5)	3,298 (9)	1,028 (8)	4,917 (9)	7,445 (10)	88,5 (6)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR(1, 5, 22)+HAR BIC	5	0,664 (65,5)	3,324 (5)	1,04 (6)	5,036 (4)	7,487 (5)	85,5 (4,5)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR AIC+NNHAR(1, 5, 22)	5	0,663 (78,5)	3,345 (3)	1,045 (4)	4,993 (6)	7,582 (2)	93,5 (7)
BNNHAR(1, 5, 22)+NNHAR(1, 5, 22)	5	0,667 (30,5)	3,375 (1)	1,137 (2)	5,268 (2)	7,534 (4)	39,5 (1)
HAR(1, 5, 22)+HAR AIC+NNHAR(1:22)	5	0,672 (5)	3,278 (16)	1,019 (12)	4,868 (18)	7,388 (16)	67 (2)
NNHAR(1, 5, 22)	5	0,663 (78,5)	3,345 (4)	1,149 (1)	5,299 (1)	7,621 (1)	85,5 (4,5)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR(1, 5, 22)+NNHAR(1, 5, 22)	10	0,666 (36,5)	3,408 (10)	1,096 (5)	4,84 (4)	7,722 (14)	69,5 (2)
HAR(1, 5, 22)	10	0,664 (64,5)	3,443 (7)	1,113 (2)	4,949 (2)	7,83 (7)	82,5 (4)
HAR(1, 5, 22)+HAR AIC+NNHAR(1:22)	10	0,671 (6,5)	3,399 (13)	1,076 (17)	4,735 (23)	7,807 (9)	68,5 (1)
HAR(1, 5, 22)+NNHAR(1, 5, 22)	10	0,666 (36,5)	3,414 (9)	1,091 (7)	4,792 (6)	7,765 (12)	70,5 (3)
HAR(1, 5, 22)+NNHAR(1:22)	10	0,663 (75,5)	3,453 (4)	1,1 (4)	4,803 (5)	7,961 (4)	92,5 (6)
HAR AIC+HAR BIC	10	0,672 (2,5)	3,372 (24)	1,073 (24)	4,74 (22)	7,671 (21)	93,5 (7)
HAR BIC	10	0,669 (18)	3,375 (22)	1,081 (12)	4,774 (11)	7,659 (26)	89 (5)
BNNHAR(1, 5, 22)	15	0,641 (67)	3,7 (4)	1,24 (4)	5,126 (6)	8,861 (4)	85 (2)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR(1, 5, 22)+HAR BIC+NNHAR(1, 5, 22)	15	0,64 (82,5)	3,674 (5)	1,239 (5)	5,147 (4)	8,784 (6)	102,5 (6)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR(1, 5, 22)+NNHAR(1, 5, 22)	15	0,642 (52,5)	3,633 (12)	1,206 (13)	5 (16)	8,687 (14)	107,5 (7)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR AIC	15	0,642 (52,5)	3,655 (7)	1,238 (6)	5,132 (5)	8,712 (11)	81,5 (1)
BNNHAR(1, 5, 22)+HAR AIC+HAR BIC+NNHAR(1, 5, 22)	15	0,64 (82,5)	3,707 (2)	1,251 (3)	5,167 (3)	8,887 (3)	93,5 (4)
BNNHAR(1, 5, 22)+NNHAR(1, 5, 22)	15	0,639 (97)	3,754 (1)	1,281 (1)	5,302 (1)	9,027 (1)	101 (5)
NNHAR(1, 5, 22)	15	0,64 (82,5)	3,7 (3)	1,258 (2)	5,176 (2)	8,905 (2)	91,5 (3)

Valor do índice Sharpe está multiplicado por 10 e Alfa de Jensen está multiplicado por 100. Em parênteses o score de cada modelo em determinada métrica. A coluna score é a soma das posições de cada modelo em determinada métrica de avaliação, conforme sugere Wong *et al.* (2016). Em negrito estão indicados os modelos que apresentaram melhor desempenho.

5. Considerações finais

O presente artigo teve o objetivo de analisar o desempenho de dois métodos de projeção de volatilidade percebida: *Heterogeneous Autoregressive Model of Realized Volatility* (HAR), sugerido em Corsi (2011) e o método de Redes Neurais. A contribuição do trabalho ocorre em propor a combinação de ambos os modelos para melhorar acurácia e rentabilidade.

O artigo de Vortelinos (2017) aborda o seguinte problema demonstrando que os modelos lineares tenderam a apresentar melhores resultados em relação aos métodos não lineares estudados. O presente artigo busca verificar outros pontos não abordados como redes bayesianas e escolha do *lag*, além de avaliar o desempenho dos modelos quanto ao desempenho de *trading*.

O primeiro ponto tratado foi verificar se modelos com escolha de defasagens livres apresentariam melhor resultado de que os modelos com interpretação econômica. Os resultados obtidos foram similares ao trabalho de Craioveanu & Hillebrand (2012), porém, ao contrário dos respectivos autores, em que não houve diferenças entre os desempenhos; no presente artigo, a superioridade dos modelos que possuem uma interpretação econômica foi destacada significativamente.

Quando a acurácia dos modelos foi analisada, foi possível observar a superioridade da combinação BN-NHAR(1,5,22) + HAR(1,5,22) + NNHAR(1,5,22). Esta diferença estatisticamente significativa indica, apesar de ainda não ser conclusiva, um contraponto em relação a literatura, uma vez que nos trabalhos de Santos & Ziegelmann (2014) e Vortelinos (2017) não foi verificada diferenças de acurácia significantes. Porém, como pode ser observado, o modelo HAR(1,5,22) esteve presente na melhor combinação.

Para o caso da rentabilidade, verificou-se as combinações BNNHAR(1,5,22) + NNHAR(1,5,22) e BN-NHAR(1,5,22) + HAR(1,5,22) + HAR AIC apresentaram melhor *performance*. Novamente podemos observar a existência de modelos lineares e não lineares demonstrando melhor *performance*.

Deste modo, neste artigo, apesar de não serem conclusivos, foram encontrados indícios de que combinar modelos lineares com não lineares pode trazer benefícios tanto ao desempenho preditivo quanto para a *performance* de rentabilidade num processo de projeção da volatilidade percebida.

Em trabalhos futuros, mais métodos de combinação de projeções devem ser estudados, sendo que no presente trabalho limitou-se ao estudo dos métodos de pesos iguais. Ressalta-se que somente foi utilizada a série do Ibovespa, sendo importante expandir as análises para mais séries. Ainda em relação a combinação de projeções, existe uma necessidade de trabalhos na área, dado que ainda não existe um consenso entre os pesquisadores sobre qual peso ótimo deveria ser utilizado.

Referências

- Aiolfi, M. & Timmermann, A. (2006). Persistence in forecasting performance and conditional combination strategies, *Journal of Econometrics* **135**(1-2): 31–53.
- Anatolyev, S. & Gerko, A. (2005). A trading approach to testing for predictability, *Journal of Business and Economic Statistics* **23**(4): 455–461.
- Andersen, T. (2001). The distribution of realized stock return volatility, *Journal of Financial Economics* **61**(1): 43–76.
- Andersen, T. G. & Bollerslev, T. (1998). Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts, *International Economic Review* **39**(4): 885.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T. & Diebold, F. X. (2007). Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility, *Review of Economics and Statistics* **89**(4): 701–720.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. & Labys, P. (2003). Modeling and Forecasting Realized Volatility, *Econometrica* (2): 579–625.

- Andrada-Félix, J., Fernández-Rodríguez, F. & Fuertes, A. M. (2016). Combining nearest neighbor predictions and model-based predictions of realized variance: Does it pay?, *International Journal of Forecasting* **32**(3): 695–715.
- Angelidis, T. & Degiannakis, S. (2008). Volatility forecasting: intra-day versus inter-day models, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* **18**(5): 449–465.
- Araújo, A. C. & de Ávila Montini, A. (2016). Técnicas de big data e projeção de risco de mercado utilizando dados em alta frequência, *Future Studies Research Journal: Trends and Strategies* **8**(3): 83–108.
- Barndorff-Nielsen, O. E. & Shephard, N. (2002). Estimating quadratic variation using realized variance, *Journal of Applied Econometrics* **17**(5): 457–477.
- Barndorff-Nielsen, O. E. & Shephard, N. (2004). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps, *Journal of Financial Econometrics* **2**(1): 1–37.
- Bauwens, L., Hafner, C. & Laurent, S. (2012). *Handbook of Volatility Models and Their Applications*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **81**(3): 637–654.
- Bollerslev, T., Engle, R. F. & Nelson, D. B. (1994). Arch models, in R. F. Engle & D. L. McFadden (eds), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Elsevier.
- Boudt, K., Cornelissen, J. & Payseur, S. (2012). Highfrequency : Toolkit for the analysis of highfrequency financial data in R.
- Cavaleri, R. (2008). *Combinação de previsões aplicada à volatilidade*, PhD thesis, UFRGS, Porto Alegre.
- Chan, Y. L., Stock, J. H. & Watson, M. W. (1999). A dynamic factor model framework for forecast combination, *Spanish Economic Review* **1**(2): 91–121.
- Chiriac, R. & Voev, V. (2011). Modelling and forecasting multivariate realized volatility, *Journal of Applied Econometrics* **26**(6): 922–947.
- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility, *Journal of Financial Econometrics* **7**(2): 174–196.
- Corsi, F. (2011). A Simple Long Memory Model of Realized Volatility.
- Craioveanu, M. & Hillebrand, E. (2012). Why It Is OK to Use the HAR-RV (1 , 5 , 21) Model.
- Dacorogna, M. M., Müller, U. A., Pictet, O. V. & Olsen, R. B. (1998). Modelling Short-Term Volatility with GARCH and HARCH Models, in C. Dunis & B. Zhou (eds), *Nonlinear Modelling of High Frequency Financial Time Series*, Wiley, Chichester, UK.
- Danielsson, J. (2011). *Financial risk forecasting: The theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and MATLAB*, John Wiley & Sons, Chichester.
- de Oliveira, M. A., Montini, A. d. Á., Mendes-da Silva, W. & Bergmann, D. R. (2011). Estabilidade de preços de ações no mercado de capitais brasileiro: um estudo aplicando redes neurais e expoentes de Lyapunov, *Revista de Administração* **46**(2): 161–177.
- Diebold, F. X., & Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy, *Journal of Business and Economic Statistics* **13**(3): 253–263.

- Donaldson, R. G. & Kamstra, M. (1997). An artificial neural network-GARCH model for international stock return volatility, *Journal of Empirical Finance* **4**(1): 17–46.
- Engle, R. F., Kane, A. & Noh, J. (1997). Index-option pricing with stochastic volatility and the value of accurate variance forecasts, *Review of Derivatives Research* **1**(2): 139–157.
- Engle, R. F., Hong, C. H., Kane, A. & Noh, J. (1993). Arbitrage valuation of variance forecasts with simulated options, in D. M. Chance & R. R. Trippi (eds), *Advances in Futures and Options Research* **6**: 393–415.
- Fernandes, M., Medeiros, M. C. & Scharth, M. (2014). Modeling and predicting the CBOE market volatility index, *Journal of Banking and Finance* **40**(1): 1–10.
- Fleming, J., Kirby, C. & Ostdiek, B. (2003). The economic value of volatility timing using “realized” volatility, *Journal of Financial Economics* **67**(3): 473–509.
- Forsberg, L. & Ghysels, E. (2007). Why do absolute returns predict volatility so well?, *Journal of Financial Econometrics* **5**(1): 31–67.
- Giacomini, R. & White, H. (2006). Tests of conditional predictive ability, *Econometrica* **74**(6): 1545–1578.
- Hall, P., Horowitz, J. L. & Jing, B. Y. (1995). On blocking rules for the bootstrap with dependent data, *Biometrika* **82**(3): 561–574.
- Hamid, S. A. & Iqbal, Z. (2004). Using neural networks for forecasting volatility of S&P 500 Index futures prices, *Journal of Business Research* **57**(10): 1116–1125.
- Hendry, D. F. & Clements, M. P. (2004). Pooling of forecasts, *Econometrics Journal* **7**(1): 1–31.
- Hillebrand, E. & Medeiros, M. C. (2010). The benefits of bagging for forecast models of realized volatility, *Econometric Reviews* **29**(5): 571–593.
- Jensen, M. C. (1968). The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964, *The Journal of Finance* **23**(2): 389.
- Hu, M. Y. & Tsoukalas, C. (1999). Combining conditional volatility forecasts using neural networks: an application to the EMS exchange rates, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* **9**(4): 407–422.
- Kuan, C. M. & White, H. (1994). Artificial neural networks: An econometric perspective, *Econometric Reviews* **13**(1): 1–91.
- Kunsch, H. R. (1989). The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observations, *The Annals of Statistics* **17**(3): 1217–1241.
- Makridakis, S. & Winkler, R. L. (1983). Averages of Forecasts: Some Empirical Results, *Management Science* **29**(7): 987–996.
- Mincer, J. A. & Zarnowitz, V. (1969). The evaluation of economic forecasts, in J. A. Mincer (ed), *Economic Forecasts and Expectations*, Columbia University Press.
- Müller, U. A., Dacorogna, M. M., Davé, R. D., Olsen, R. B., Pictet, O. V. & Von Weizsäcker, J. E. (1997). Volatilities of different time resolutions - Analyzing the dynamics of market components, *Journal of Empirical Finance* **4**(2-3): 213–239.
- Patton, A. J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies, *Journal of Econometrics* **160**(1): 246–256.

- Pesaran, H. M. & Timmermann, A. (1992). A simple nonparametric test of predictive performance, *Journal of Business and Economic Statistics* **10**(4): 461–465.
- Rossi, B. & Inoue, A. (2012). Out-of-sample forecast tests robust to the choice of window size, *Journal of Business and Economic Statistics* **30**(3): 432–453.
- Rydberg, T. H. (2003). Dynamics of Trade-by-Trade Price Movements: Decomposition and Models, *Journal of Financial Econometrics* **1**(1): 2–25.
- Santos, D. G. & Ziegelmann, F. A. (2014). Volatility forecasting via MIDAS, HAR and their combination: An empirical comparative study for IBOVESPA, *Journal of Forecasting* **33**(4): 284–299.
- Satchell, S. & Timmermann, A. (1995). An assessment of the economic value of non-linear foreign exchange rate forecasts, *Journal of Forecasting* **14**(6): 477–497.
- Shadwick, W. F. & Keating, C. (2002). A Universal Performance Measure, *Journal of Performance Measurement* **6**(3): 59–84.
- Sharma, P. & Vipul (2016). Forecasting stock market volatility using Realized GARCH model: International evidence, *Quarterly Review of Economics and Finance* **59**: 222–230.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance, *Journal of Business* **39**(1): 119–138.
- Smith, J. & Wallis, K. F. (2009). A simple explanation of the forecast combination puzzle, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* **71**(3): 331–355.
- Sortino, F. A. & Price, L. N. (1994). Performance Measurement in a Downside Risk Framework, *The Journal of Investing* **3**(3): 59–64.
- Stock, J. H. & Watson, M. W. (1998). A Comparison of Linear and Nonlinear Univariate Models for Forecasting Macroeconomic Time Series, *NBER Working Paper No. 6607*.
- Stock, J. H. & Watson, M. W. (2004). Combination forecasts of output growth in a seven-country data set, *Journal of Forecasting* **23**(6): 405–430.
- Timmermann, A. (2006). Forecast Combinations, in G. Elliott, C. Granger & A. Timmermann (eds), *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. 1, North Holland.
- Val, F. d. F., Pinto, A. C. F. & Klotzle, M. C. (2014). Volatilidade e Previsão de Retorno com Modelos de Alta Frequência e GARCH: Evidências para o Mercado Brasileiro, *Revista Contabilidade & Finanças* **25**(65): 189–201.
- Vortelinos, D. I. (2017). Forecasting realized volatility: HAR against Principal Components Combining, neural networks and GARCH, *Research in International Business and Finance* **39**: 824–839.
- Xekalaki, E. & Degiannakis, S. (2005). Evaluating volatility forecasts in option pricing in the context of a simulated options market, *Computational Statistics and Data Analysis* **49**(2): 611–629.
- Wink Júnior, M. V. & Pereira, P. L. V. (2011). Modeling and forecasting of realized volatility: evidence from Brazil, *Brazilian Review of Econometrics* **31**(2): 315–337.
- Winkler, R. L. (1989). Combining forecasts: A philosophical basis and some current issues, *International Journal of Forecasting* **5**(4): 605–609.
- Wong, Z. Y., Chin, W. C. & Tan, S. H. (2016). Daily value-at-risk modeling and forecast evaluation: The realized volatility approach, *The Journal of Finance and Data Science* **2**(3): 171–187.

Zivot, E. (2005). Analysis of High Frequency Financial Data : Models , Methods and Software . Part I : Descriptive Analysis of High Frequency Financial Data with S-PLUS, *Working Paper* .