Carteiras de Variância Mínima no Brasil
(Minimum Variance Portfolios in the Brazilian Equity Market)

Alexandre Rubesam*
André Lomonaco Beltrame**

Resumo

Neste artigo, investigamos carteiras de variância mínima no mercado de ações brasileiro, utilizando diferentes modelos de estimação da matriz de covariância, desde a simples matriz de covariância amostral até modelos GARCH multivariados. Comparamos os resultados das carteiras de variância mínima com os seguintes *benchmarks*: (i) o índice IBOVESPA, (ii) uma carteira igualmente ponderada, (iii) uma carteira formada através da maximização da razão de Sharpe e (iv) uma carteira formada através da maximização da média geométrica dos retornos. Os resultados mostram que as carteiras de variância mínima apresentam retornos maiores e volatilidades menores do que todos os *benchmarks*. Também avaliamos o desempenho de carteiras de variância mínima com alavancagem, do tipo 130/30, com resultados análogos. A carteira de variância mínima concentra os investimentos em um número pequeno de ações, com βs baixos em relação ao IBOVESPA, sendo facilmente replicável por investidores individuais ou institucionais.

Palavras-chave: otimização de carteiras; carteiras de variância mínima; alocação de ativos; gestão quantitativa de investimentos.

Códigos JEL: C61; G11; G15.

Abstract

We investigate minimum variance portfolios in the Brazilian equity market using different methods to estimate the covariance matrix, from the simple model of using the sample covariance to multivariate GARCH models. We compare the performance of the minimum variance portfolios to those of the following benchmarks: (i) the IBOVESPA equity index, (ii) an equally-weighted portfolio, (iii) the maximum Sharpe ratio portfolio and (iv) the maximum growth portfolio. Our

---

Submetido em 12 de outubro de 2012. Reformulado em 22 de janeiro de 2013. Aceito em 28 de janeiro de 2013. Publicado on-line em 30 de maio de 2013. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Newton Costa Jr.

*Gerente de Controle de Risco, Itaú-Unibanco, São Paulo, Brasil.
E-mail: `alexandre.rubesam@gmail.com`

**Analista de Validação de Modelos de Risco, Itaú-Unibanco, São Paulo, Brasil.
E-mail: `deco@me.com`

ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

results show that the minimum variance portfolio has higher returns with lower risk compared to the benchmarks. We also consider long-short 130/30 minimum variance portfolios and obtain similar results. The minimum variance portfolio invests in relatively few stocks with low βs measured with respect to the IBOVESPA index, being easily replicable by individual and institutional investors alike.

***Keywords*:** portfolio optimization; minimum variance portfolios; asset allocation; quantitative asset management; shrinkage.

1. Introdução

O trabalho de Markowitz (1952, 1959) teve uma grande influência na maneira como a relação entre o risco e o retorno dos ativos é pensada em Finanças. Quando as preferências dos investidores dependem apenas da média e da variância dos retornos dos ativos, os investidores devem formar carteiras na fronteira eficiente, que contém as carteiras com o maior retorno médio por unidade de risco. Formalmente, dado um universo de N ativos de risco com retornos médios $\mu = (\mu_1 ... \mu_N)'$ e matriz de covariância $\sum$, o problema de Markowitz consiste em encontrar o vetor de pesos ou alocações em cada ação $\mathbf{w} = (w_1 ... w_N)'$, solução do problema abaixo para um nível de retorno médio desejado $\bar{r}$:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}' \sum \mathbf{w} \text{ sujeito a } \sum\nolimits_{\mathbf{i}} \mathbf{w_i} = \mathbf{1} \text{ e } \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} = \mathbf{\bar{r}}$$

A solução deste problema para vários níveis de retorno esperado gera a fronteira eficiente. Para implantar uma carteira eficiente na prática, é preciso estimar as covariâncias entre os ativos, além de seus retornos médios. Entretanto, o erro de estimação, principalmente dos retornos médios, possui um grande impacto na escolha dos pesos (ver Merton (1980)), o que faz com que o desempenho dessas carteiras seja ruim nos períodos subsequentes.[1] Logo, quando o investidor não possui um método preciso para estimar o retorno médio futuro dos ativos (por exemplo, se ele se baseia em médias históricas de retornos passados), pode ser preferível ignorar completamente as médias e focar na estimação da matriz de covariância, conforme sugerido por Jagannathan & Ma (2003). Neste caso, a única carteira na fronteira eficiente que pode ser determinada é a carteira de variância mínima global, o ponto mais à esquerda da fronteira eficiente. Chamaremos esta carteira simplesmente de Carteira de Variância Mínima ou CVM.

[1] Ver por exemplo Best & Grauer (1991) e Michaud (1989).

Paradoxalmente, vários estudos empíricos sugerem que a CVM produz, fora da amostra,[2] retornos ajustados a risco superiores a outras carteiras baseadas no paradigma média-variância de Markowitz. Por exemplo, Jagannathan & Ma (2003) mostram que uma CVM formada com ativos globais tem desempenho (fora da amostra) melhor do que o de carteiras eficientes obtidas com médias históricas de retorno. Jorion (1985, 1991) demonstra a superioridade de CVMs formadas com índices internacionais e índices de setores industriais. Clark *et al.* (2006) derivam resultados analíticos para os pesos da CVM sob um modelo de precificação com apenas um fator, o retorno do mercado. Os autores demonstram que, sob este modelo, a minimização da variância impõe um limite no β máximo das ações da CVM, e interpretam que a superioridade da CVM é uma manifestação da fraca dispersão entre β e retorno, observada empiricamente (por exemplo, por Fama & French (1992)). Os autores confirmam empiricamente que a CVM domina a carteira de mercado (definida como a carteira com as 1000 maiores ações do mercado estadunidense, com pesos proporcionais à capitalização).

Outros trabalhos estudam diretamente a relação entre o risco e retorno das ações. Por exemplo, Ang *et al.* (2006) documentam uma relação inversamente proporcional entre volatilidade idiossincrática e alfa, enquanto Blitz & Vliet (2007) documentam o "efeito de volatilidade": uma carteira *long-short* comprada em ações de baixa volatilidade e vendida em ações de alta volatilidade produz um retorno estatisticamente significante e que não é explicado por fatores comumente usados nos modelos de precificação.

No mercado brasileiro, dois trabalhos recentes avaliaram o desempenho de CVMs. Thomé *et al.* (2011) estudaram o desempenho de índices de variância mínima formadas com as ações do índice IBOVESPA entre 1998 e 2008, concluindo que, se for imposto um limite de alocação máximo por ação de 10%, o índice de variância mínima apresenta retornos estatisticamente superiores aos do índice IBOVESPA, porém não aos de uma estratégia de investimento ainda mais simples, que consiste em formar cartei-

[2]Usamos o termo "fora-da-amostra" para indicar que um resultado é obtido em um período subsequente ao de formação da carteira, ou seja, usando dados posteriores aos usados na estimação. Por exemplo, se uma carteira é formada usando as séries de retornos históricos do ano 2000 e o desempenho da carteira é calculado para o ano 2001, este resultado é fora-da-amostra. Caso avaliemos o resultado no próprio ano de 2000, este resultado será "dentro-da-amostra". A distinção é essencial; os resultados obtidos fora da amostra são relevantes para balizar escolhas de investimento na prática, pois representam resultados que, a princípio, poderiam ter sido produzidos na realidade.

ras igualmente ponderadas dos ativos. Santos & Tessari (2012) avaliam CVMs e estratégias baseadas no paradigma média-variância ao longo de um período de pouco menos de 2 anos entre 2010 e 2011, dando uma maior ênfase ao estudo de diferentes métodos para estimar a matriz de covariância dos ativos, como os métodos de encolhimento (*shrinkage*) de Ledoit & Wolf (2004b,a) e o método de ponderação exponencial.

Do ponto de vista teórico, a ausência de uma relação positiva entre volatilidade e retorno é um problema sério para os modelos de precificação usuais, assim como a existência de anomalias como o efeito de tamanho, valor, momento e outras.[3] Falkenstein (2009) levanta o ponto de que, como os modelos baseados na Teoria de Precificação por Arbitragem (APT) ou na Teoria de Fatores de Desconto Estocásticos não especificam quais são os fatores de risco, é difícil criticar a proposição de que alguma medida de risco não seja positivamente correlacionada com retornos esperados. No entanto, é razoável presumir que tal risco precificado seja correlacionado positivamente com a volatilidade, já que os modelos são, de maneira crua, baseados na suposição de que investidores não gostam de volatilidade na sua riqueza futura.

Além de colocar em dúvida a relação racional esperada entre risco e retorno, resultados empíricos como os citados acima possuem implicações práticas profundas. Por exemplo, fundos de pensão supõem um prêmio de risco para o mercado de ações que pode ser muito menor do que o esperado, nulo ou até negativo. Do ponto de vista de gestão de recursos, estes resultados sugerem uma maneira simples e eficaz de obter retornos superiores aos de *benchmarks* de mercado.

Neste artigo, reavaliamos as carteiras de variância mínima no mercado brasileiro. O nosso trabalho é próximo dos de Thomé *et al.* (2011) e de Santos & Tessari (2012), porém possui diferenças importantes. Em primeiro lugar, consideramos um universo mais abrangente de ações que

[3] O efeito de tamanho consiste no retorno anormal (em relação ao CAPM) de empresas pequenas, ou seja, de baixa capitalização em relação a empresas grandes, e foi inicialmente identificado por Banz (1981). O efeito de valor consiste no retorno anormal (em relação ao CAPM) obtido por empresas com múltiplos de valoração (por exemplo, a razão valor patrimonial por preço de mercado) altos em relação a empresas com múltiplos de valoração baixos, e foi inicialmente reportado por Basu (663–682). O efeito de momento, identificado por Jegadeesh & Titman (1993), consiste na continuação dos movimentos dos preços em intervalos de alguns meses até um ano. Ações com maiores retornos (ganhadoras) nestes períodos tendem a continuar ganhando no curto prazo, enquanto ações com os menores retornos (perdedoras) tendem a continuar perdendo. Existem muitas outras anomalias empíricas, ver Fama & French (2008).

inclui ações que não fazem parte do índice IBOVESPA. Em segundo lugar, comparamos o desempenho da CVM com o de outros *benchmarks* além do IBOVESPA e da carteira igualmente ponderada, a saber: (i) carteiras formadas através da maximização da razão de Sharpe e (ii) carteiras formadas através da maximização da média geométrica (Estrada, 2010, ver). Além disso, consideramos também a possibilidade de utilizar posições vendidas e alavancagem nas carteiras, formando carteiras otimizadas do tipo 130/30.[4] Finalmente, além de estimadores da matriz de covariância similares aos utilizados por Santos & Tessari (2012), testamos um modelo de matriz de covariância condicional, o DCC-GARCH multivariado proposto por Engle & Sheppard (2002).

Nossos resultados mostram que as CVMs obtidas com métodos simples de estimação da matriz de covariância, como a covariância amostral ou o método de encolhimento, possuem desempenho superior a todos os *benchmarks* considerados, incluindo a carteira igualmente ponderada. Entre os métodos de estimação da matriz de covariância, os que produziram carteiras com melhores resultados foram o estimador amostral e o estimador por encolhimento, enquanto os modelos de ponderação exponencial e DCC-GARCH não produziram resultados bons. Nossos resultados corroboram estudos anteriores sobre a anomalia de volatilidade e suportam a noção de que índices do mercado de ações como o IBOVESPA são facilmente superados por estratégias simples e mecânicas de investimento, o que sugere que um índice de variância mínima seria um *benchmark* mais adequado para a indústria de investimentos, como sugerido por Thomé *et al.* (2011).

O restante deste artigo está organizado da seguinte maneira: os dados e metodologia são explicados na Seção 2; a Seção 3 contém os resultados empíricos; a Seção 4 apresenta uma discussão dos resultados e a Seção 5 contém as conclusões.

2. Dados e Metodologia de Construção de Carteiras

2.1 Dados

Os dados utilizados neste trabalho dizem respeito a todas as ações negociadas no mercado de ações brasileiro, no período de junho de 1998 a junho de 2011, disponíveis na base de dados da Economática. Os dados utilizados incluem os preços de fechamento e volumes diários de negociação de

[4]Uma carteira 130/30 permite posições compradas e vendidas, possuindo até 30% de exposição na ponta vendida, com até 130% de exposição na ponta comprada.

944 ações distintas que existiram em algum momento no período estudado, incluindo ações diferentes da mesma empresa (ex: ações ordinárias e preferenciais). Ações que deixaram de existir foram utilizadas até o dia em que há registros dos seus preços, para minimizar o viés de sobrevivência. Apesar do número grande de ativos na base, o número de ações com volume de negociação positivo no período da amostra varia entre 138 e 402, com uma média de aproximadamente 268.

Além das séries das ações, foram utilizadas as séries diárias do índice IBOVESPA e do CDI.[5]

2.2 Metodologias de formação das carteiras

Carteira de variância mínima (CVM)

Dado um universo de N ativos e uma carteira representada por pesos ou alocações $\mathbf{w} = (w_1 ... w_N)'$, a CVM é a solução do problema

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}' \sum \mathbf{w} \text{ sujeito a } \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{1}$$

onde $\sum$ é a matriz de covariância dos ativos. Na formulação acima, a CVM é a solução de um problema de otimização irrestrita, no sentido de que os pesos w_i estão livres para assumir quaisquer valores, positivos ou negativos, desde que sua soma seja igual a 1, ou seja, a carteira seja totalmente investida. Uma restrição adicional comum nos trabalhos sobre CVMs é a de que não existam posições vendidas, ou seja, $w_i \geq 0 \; \forall i$. Jagannathan & Ma (2003) mostram que, ao restringir posições vendidas, o problema resultante, com $\sum$ estimada pela matriz de covariância amostral, pode ser interpretado como a solução do problema de otimização irrestrito (1), com uma matriz de covariância alterada. Essa alteração é interpretada como um método indireto de *shrinkage* da matriz de covariância amostral, e os autores argumentam que a imposição das restrições é benéfica, já que permite o uso direto da matriz de covariância amostral, com resultados tão bons quanto se fossem utilizados estimadores mais sofisticados e robustos.

[5] O CDI é fornecido em base anual. Os retornos diários foram calculados utilizando a relação

$$CDI_{\text{diário}} = (1 + CDI_{\text{anual}})^{1/252} - 1,$$

onde CDI_{anual} é o valor do CDI em base anual, no formato decimal.

2.3 Carteira que maximiza a razão de Sharpe (CRS)

Uma alternativa à CVM é a carteira que maximiza a razão de Sharpe, ou seja, a carteira obtida no ponto de tangência à fronteira eficiente. A razão de Sharpe de uma carteira p é definida como $SR = (\mu_p - r_f)/\sigma_p$, onde μ_p é o retorno médio da carteira, r_f é o retorno do ativo livre de risco e σ_p é a volatilidade da carteira. A carteira que maximiza a razão de Sharpe produz, em teoria, a melhor relação risco-retorno, se o risco for definido como a volatilidade. A CRS é a solução do seguinte problema de otimização:

$$\max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}'\sum\mathbf{w}}} \text{ sujeito a } \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{2}$$

onde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 ... \mu_N)'$ é o vetor de retornos médios.

Carteira que maximiza a média geométrica dos retornos (CMG)

A maximização da média geométrica parte do pressuposto de que o investidor deseja maximizar o crescimento do capital investido, com o objetivo único de maximizar sua riqueza terminal. Esta filosofia de investimento tem como origem o trabalho de Kelly (1956), que avaliou estratégias ótimas no contexto de um apostador com informações privadas acerca da probabilidade de ganho em um jogo de apostas. Estrada (2010) avalia empiricamente o critério de maximização da média geométrica, comparando-o com a maximização da razão de Sharpe, e conclui que ele é um critério de formação de carteira útil e tão razoável quanto o de média-variância, mas que parece ser pouco utilizado na prática. Mais detalhes acerca deste assunto podem ser obtidos em Christensen (2005) e Estrada (2010). A seguir damos uma breve explicação sobre como obter carteiras que maximizam a média geométrica dos retornos.

O retorno geométrico médio de uma carteira, calculado com uma amostra de t retornos $\{r_{p,t}\}_{t=1}^{T}$, é definido pela expressão

$$1 + R_p = \left(\Pi_{t=1}^{T}(1 + r_{p,t})\right)^{1/T}$$

Tomando logaritmo dos dois lados e aplicando a expansão de Taylor, é possível mostrar que a maximização da expressão acima é equivalente ao seguinte problema de otimização Estrada (2010, ver):

$$\max_{\mathbf{w}} \left\{ ln(1 + \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}) - \frac{\mathbf{w}'\sum\boldsymbol{\mu}}{2(1 + \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu})^2} \right\} \text{ sujeito a } \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{3}$$

2.4 Carteira igualmente ponderada (CIP)

A carteira igualmente ponderada possui pesos iguais para todas as ações. Se há N ações disponíveis, os pesos que definem a CIP são dados por:

$$w_i = \frac{1}{N} \forall i \tag{4}$$

Restrições

Os problemas de otimização (1), (2) e (3) acima apresentam apenas a restrição de que as carteiras sejam totalmente investidas, ou seja, de que a soma dos pesos seja igual a 1. Na prática, os investidores sempre resolvem um problema de otimização com restrições, devido a diversos fatores, que incluem desde a dificuldade ou custo de manter posições vendidas até restrições de mandato e risco.

Neste artigo, consideramos dois conjuntos de restrições diferentes quando resolvemos os problemas de otimização. Para os nossos resultados principais, consideramos apenas carteiras com posições compradas, e restringimos os pesos da ações a um máximo de 15%. Isto pode ser denotado como

$$0 \leq w_i \leq 0,15 \; \forall i, \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{5}$$

O limite de 15% por ação, apesar de arbitrário, é uma escolha razoável na prática. Realizamos testes (não reportados) para avaliar a robustez com relação a este parâmetro, e os resultados foram qualitativamente similares.

Uma segunda possibilidade é permitir alavancagem na carteira, relaxando a restrição de que a carteira contenha apenas posições compradas. Uma escolha que tem crescido em popularidade na indústria de investimento são os fundos do tipo 130/30, também chamados fundo com extensão ativa, que mantém 30% do capital em posições vendidas e 130% em posições compradas, como em Lo & Patel (2007). O atrativo de uma carteira 130/30 é que, apesar de possuir maior alavancagem em relação a uma carteira *long-only*, a volatilidade e a correlação com o mercado são comparáveis ou até menores. Além disso, caso um investidor possua uma visão pessimista de algum ativo, ele pode apostar em sua desvalorização ao manter uma posição vendida.

Note que uma carteira 130/30 pode ser decomposta em uma carteira *long-only* e uma carteira *long-short* com uma exposição de 30% da carteira *long-only*, ou seja, a razão de alavancagem é de 1,6 para 1. De maneira genérica, denotando por δ a razão de alavancagem, podemos descrever as restrições de uma carteira deste tipo requerendo que a soma dos pesos seja igual a 1 e, simultaneamente, a soma dos módulos dos pesos seja inferior a δ.[6] Uma abordagem similar é utilizada por DeMiguel *et al.* (2009). O conjunto de restrições utilizado neste trabalho para as carteiras alavancadas é

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1, \sum_{i=1}^{N} |w_i| \leq \delta, \;\; -0,15 \leq w_i \leq 0,15 \; \forall i \tag{6}$$

Consideramos carteiras do tipo 130/30, ou seja, utilizamos $\delta = 1,6$.

É importante ressaltar que, com a inclusão de posições vendidas, os resultados podem ser afetados pelas condições do mercado de aluguéis de ações. A dificuldade ou inexistência de aluguel de algumas ações é um fator importante. Na prática, os investidores consultam diversas fontes, como corretoras e a CBLC , sobre a disponibilidade e custo de aluguel de ações. Dada a falta de um banco de dados com históricos de taxas de aluguel, é impossível saber se uma determinada posição short seria factível na prática em uma certa data, e a qual taxa. Por este motivo, os resultados das carteiras alavancadas devem ser considerados com cautela.

2.5 Estimação da matriz de covariância

Na prática, a matriz de variância-covariância dos ativos, $\sum$, é desconhecida, e precisa ser estimada. Existem diferentes modelos para estimação de $\sum$ e, portanto, as carteiras otimizadas dependem do modelo escolhido. O modelo mais simples para estimar a matriz de covariância consiste em utilizar a matriz de covariância amostral. Uma crítica comum a este método é a baixa eficiência na estimação, especialmente quando o número de ativos é grande, pois o número total de parâmetros a ser estimado cresce exponencialmente. Por exemplo, o número de parâmetros a estimar em matrizes de covariância de 50, 100 e 500 ativos é, respectivamente, de 1.225, 4.950 e 124.750. Em casos mais extremos, é possível que o número de ativos seja maior do que o de observações na amostra, o que pode causar problemas de condicionamento na matriz de covariância amostral, conforme discutido por Ledoit & Wolf (2004b).

[6]Note que esta restrição é não-linear, porém pode ser linearizada através da inclusão de variáveis adicionais no problema de otimização.

Jagannathan & Ma (2003) citam algumas abordagens para mitigar este problema. A primeira consiste em estipular algum tipo de estrutura simplificadora para a matriz de covariância, com o intuito de reduzir o número de parâmetros a ser estimado, como os modelos fatoriais. A segunda consiste nos estimadores de encolhimento (*shrinkage*), que procuram combinar a matriz de covariância amostral com um estimador bastante estruturado (por exemplo, o estimador baseado em um modelo fatoriais ou de correlação constante). A terceira consiste em utilizar um número maior de dados, possivelmente aumentando a frequência de amostragem.

Com o intuito de averiguar a robustez das carteiras otimizadas com respeito ao modelo escolhido, realizamos testes com diferentes modelos:[7]

i. Matriz de covariância amostral

ii. Método de encolhimento de Ledoit & Wolf (2004a)

iii. Ponderação exponencial (método EWMA/RiskMetrics)

iv. Modelo DCC-GARCH Multivariado de Engle & Sheppard (2002).

Todas as estimativas foram obtidas utilizando amostras de 3 anos de retornos diários das ações, o que corresponde a $T = 756$ observações para cada ação. Utilizamos a notação $r_{i,t}$ para denotar o retorno da ação i no dia t. A seguir fornecemos detalhes acerca de cada uma das abordagens acima.

Matriz de covariância amostral

O método estatístico tradicional baseia-se na hipótese de retornos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), e consiste em calcular a matriz de covariância amostral usando uma amostra das séries temporais dos retornos dos ativos em um período recente. A covariância entre as ações i e j é estimada por

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j)$$

onde $r_{i,t}$ é o retorno da ação i no dia t e $\bar{r}_i$ é a média amostral dos retornos da ação na amostra.

[7]Agradecemos um revisor anônimo pela sugestão de incorporar os diferentes modelos de estimação da matriz de covariância no artigo.

2.6 Método de encolhimento (*shrinkage*)

Seguimos neste artigo a abordagem de encolhimento descrita por Ledoit & Wolf (2004a). A ideia deste método é combinar dois estimadores: um estimador simples e não-viesado, porém ineficiente (a matriz de covariância amostral), e um segundo estimador, altamente estruturado e com um pequeno número de parâmetros, mas que reflita alguma característica importante da quantidade a ser estimada. Seja $\mathbf{S}$ a matriz de covariância amostral, e $\mathbf{F}$ o estimador estruturado. O método de encolhimento consiste em obter uma combinação linear convexa $\gamma\mathbf{F} + (1-\gamma)\mathbf{S}$, onde $0 \leq \gamma \leq 1$ é denominada constante de encolhimento.

Ledoit & Wolf (2004a) sugerem utilizar para $\mathbf{F}$ uma matriz de covariância baseada no modelo de correlação constante, isto é, baseado na suposição de que todas as correlações entre os ativos são iguais. Esta correlação é estimada pela média das correlações amostrais. Além disso, os autores demonstram como calcular a constante de encolhimento ótima, no sentido de minimizar a diferença esperada entre o estimador por encolhimento e a verdadeira matriz de covariância.

Notamos que existem outras sugestões para $\mathbf{F}$, como o modelo unifatorial (Ledoit & Wolf, 2004a) e a matriz identidade (Ledoit & Wolf, 2004b). Ledoit & Wolf (2004a) argumentam que o modelo de correlação constante possui desempenho tão bom quanto o do modelo unifatorial, com um custo computacional menor. Santos e Tessari testaram as três variantes de estimadores de encolhimento, com resultados bastante similares entre os três métodos.

2.7 Método de ponderação exponencial (EWMA/RiskMetrics)

O método de ponderação exponencial ou EWMA (*Exponentially-Weighted Moving Average*), também conhecido pelo nome RiskMetrics e comumente utilizado no mercado, consiste em utilizar uma ponderação exponencial que dá maior peso às observações mais recentes. O método possui um parâmetro de suavização γ, o qual determina a velocidade de decaimento das ponderações e, consequentemente, a persistência da volatilidade. É importante notar que o método EWMA não é um modelo de volatilidades condicionais, apenas uma ponderação diferente de cada ponto da amostra. Para maiores detalhes, ver Alexander (2008).

A covariância entre as ações i e j no instante t é estimada pelo método EWMA através da fórmula recursiva

$$\hat{\sigma}_{ij,t} = (1-\lambda)(r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j) + \lambda \hat{\sigma}_{ij,t-1}$$

A escolha do parâmetro λ é relativamente arbitrária. Na prática, o parâmetro $\lambda = 0,94$ é frequentemente utilizado. Utilizamos dois valores neste estudo: $\lambda = 0,94$ e $\lambda = 0,97$, porém, como os resultados foram muito similares, reportamos apenas os resultados para $\lambda = 0,94$.

Modelo DCC-GARCH multivariado

Engle & Sheppard (2002) propôs um modelo GARCH multivariado no qual os retornos de N ativos são condicionalmente normais com valor esperado zero e matriz de covariância $\mathbf{H}_t$. Os retornos podem ser resíduos de um modelo condicional para a média, ou simplesmente as séries de retornos originais centralizadas. O modelo assume que a matriz de covariância no instante t é dada por $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{C}_t \mathbf{D}_t$, onde $\mathbf{D}_t$ é uma matriz diagonal contendo as volatilidades dos ativos obtidas através de modelos GARCH (*General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) univariados para cada ativo, e $\mathbf{C}_t$ é uma matriz de correlações que variam no tempo. A matriz $\mathbf{C}_t$ é parametrizada como $\mathbf{C}_t = \mathbf{Q}_t^{*-1} \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_t^{*-1}$, onde $\mathbf{Q}_t^{*-1}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são a raiz quadrada da diagonal de $\mathbf{Q}_t$. Esta parametrização implica que a correlação condicional entre os ativos i e j, ou seja, o elemento (i,j) da matriz $\mathbf{C}_t$, é dada por $c_{ij,t} = \frac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii,t} q_{jj,t}}}$. Finalmente, a estrutura de evolução temporal de $\mathbf{Q}_t$ é dada por um modelo do tipo GARCH(1,1), ou seja,

$$q_{ij,t} = \hat{\rho}_{i,j} + \alpha(\epsilon_{i,t-1}\epsilon_{j,t-1} - \hat{\rho}_{ij}) + \beta(q_{ij,t-1} - \hat{\rho}_{ij})$$

onde $\epsilon_{i,t}$ denota a série de resíduos do modelo univariado para o ativo i e $\hat{\rho}_{ij}$ é a correlação amostral entre $\epsilon_{i,t}$ e $\epsilon_{j,t}$.

A estimação do modelo DCC é feita pelo método de máxima verossimilhança, em duas etapas. Na primeira etapa, os modelos GARCH univariados para cada ativo são estimados, e na segunda, os parâmetros da estrutura de correlação são estimados. A estimação foi realizada utilizando o pacote MFE para Matlab.[8]

A princípio, diferentes tipos de modelo GARCH podem ser ajustados para cada série de retorno. Neste trabalho, como necessitamos estimar o modelo centenas de vezes para um número relativamente grande de ativos, optamos por uma especificação parcimoniosa de GARCH(1,1) com choques normais para cada série de retornos. Ou seja, utilizamos o seguinte modelo para os retornos de todas as ações:

$$r^*_{i,t} = \sigma_{it}\epsilon it$$

$$\sigma^2_{it} = \omega_i + \alpha_i\epsilon^2_{it} + \beta_i\sigma^2_{i,t-1}$$

onde $r^*_{i,t} = r^*_{i,t} - \bar{r}_i$ é o retorno centralizado da ação i. Devido a limitações computacionais, foi necessário restringir o número máximo de ações nas carteiras.

É importante notar que, dentre os estimadores utilizados, o DCC-GARCH é o único estimador condicional da matriz de covariância.

2.8 Processo de simulação (*backtesting*)

Descreveremos a seguir o processo de simulação (*backtest*) utilizado para medir o desempenho das carteiras. Para os resultados principais, as carteiras foram rebalanceadas mensalmente, porém, para avaliar a robustez dos resultados à frequência de rebalanceamento, realizamos testes com rebalanceamentos semanais e trimestrais, cujos resultados reportamos na Seção 3.3. O processo de *backtest* é similar para todos os casos. No início de cada período (semana, mês ou trimestre), a matriz de covariância $\sum$ e o vetor de retornos médios $\boldsymbol{\mu}$ são estimados pelos diversos métodos, utilizando os últimos três anos de dados diários (ou o maior período disponível). Em seguida, as carteiras otimizadas são obtidas através da solução dos problemas de otimização (1), (2) e (3), utilizando o programa Matlab. Também é construída a CIP através da relação (4). Desta maneira,

[8]Disponível em `http://www.kevinsheppard.com/wiki/MFE_Toolbox`, link funcional em 16/01/2013.

são obtidos os vetores de alocações na ações que definem as carteiras vigentes para o próximo período (semana, mês ou trimestre). O processo é iniciado em janeiro de 2001 e finalizado em maior de 2011, gerando séries temporais com 2577 retornos diários para cada carteiras. Foram consideradas elegíveis para um dado mês as ações com cotações em pelo menos 75% dos dias no período de estimação, e volume mediano positivo no período. Para verificar o impacto do limite máximo por ação, testamos também carteiras com pesos máximos (em módulo) de 10%, 30% e 100%.

Um fator importante ao analisar o desempenho das carteiras são os custos envolvidos. Foi considerado um fator único de custo, para levar em consideração a diferença de preço entre as ofertas de compra e venda (*bid-ask spread*), corretagem e, quando adequado, custo de aluguel. Foi considerado o valor de 0,0005 ou 0,05% para o custo de corretagem, o que é razoável para um investidor institucional, e de 0,001 ou 0,10% para o valor do *bid-ask spread*. O custo de aluguel é estipulado em 3% a.a., um valor conservador.[9] Assim o custo total de uma operação de compra é igual a 0,0005+0,001 = 0,0015 ou 0,15%, enquanto o custo anual de uma posição de R$1 vendido é de R$0,05.

Para estimar o custo anual médio de uma determinada carteira, primeiro calculamos o *turnover* mensal médio da carteira como a porcentagem média da carteira (em termos financeiros) que é rebalanceada a cada período. A seguir, aplicamos o fator de custo acima, multiplicado pelo número de vezes em que ocorreu o rebalanceamento, e dividimos pelo número total de períodos.

O *benchmark* de mercado escolhido para comparar as carteiras foi o índice IBOVESPA, que inclui as maiores e mais líquidas ações do mercado brasileiro. Apesar de, *a priori*, não existir motivo para o IBOVESPA representar uma carteira eficiente, ele é frequentemente utilizado como carteira de mercado em estudos financeiros e é o principal índice usado para medir o desempenho do mercado acionário brasileiro.

3. Resultados Empíricos

Calculamos diversas medidas para avaliar o desempenho, risco e custo das carteiras. Uma medida comumente utilizada para comparar investimentos e que leva em consideração tanto o risco quanto o retorno é a razão de Sharpe. A razão de Sharpe de uma carteira é definida como a razão entre

[9] Ver Caldeira & Portugal (2010), especialmente Tabelas 7 e 8.

o retorno desta carteira acima da taxa livre de risco (no nosso caso, o CDI) e sua volatilidade. Para testar a significância da diferença entre a razão de Sharpe das carteiras e a do IBOVESPA, foi utilizado o teste robusto de *bootstrap* proposto por Ledoit & Wolf (2008), com tamanho de bloco igual a 5 e 1000 reamostragens.

3.1 Carteiras long-only

As tabelas 1 e 2 sumarizam os resultados obtidos para carteiras com posições exclusivamente compradas e sem alavancagem (carteiras *long-only*), com rebalanceamento mensal. As CVMs superam as demais carteiras otimizadas em termos de retorno anualizado, com volatilidades menores, independentemente do método de estimação da matriz de covariância. Isso fica evidente ao compararmos as razões de Sharpe das carteiras. Por exemplo, utilizando-se a matriz de covariância amostral, os retornos anualizados (razões de Sharpe) da CVM, CRS e CMG são, respectivamente, de 27,66% (0,63), 17,42% (0,07) e 12,95% (-0,11). Este resultado corrobora os estudos sobre o efeito de volatilidade e o desempenho inferior de carteiras otimizadas quando se utiliza a média amostral dos retornos como estimador dos retornos esperados. O fato de a CRS, que teoricamente é construída de maneira a maximizar a razão de Sharpe, possuir resultados fora-da-amostra tão ruins, revela quão pouca informação os retornos passados das ações contêm sobre os retornos futuros.

Em termos da robustez em relação aos métodos de estimação da matriz de covariância, notamos que os métodos EWMA e DCC-GARCH multivariado produzem resultados inferiores aos métodos mais simples, como covariância amostral e encolhimento. Uma possível explicação para isto é o fato de o *turnover* médio ser bem maior quando estes métodos são usados, o que gera instabilidade na composição das carteiras. Outra possibilidade é que o retorno futuro das ações esteja mais negativamente associado à volatilidade de longo prazo, ao invés da volatilidade condicional (no caso do GARCH) ou com maior ponderação para os retornos recentes (EWMA).

Por outro lado, os métodos de covariância amostral e por encolhimento produziram resultados praticamente idênticos. Por isto, a seguir nos concentraremos nos resultados obtidos com o primeiro método, que é o mais simples e, ausente uma qualificação, nos referiremos às carteiras obtidas com este método.

Tabela 1
Estatísticas de desempenho fora da amostra de carteiras otimizadas *long-only*

Esta tabela apresenta estatísticas descritivas de várias carteiras formadas com ações do mercado brasileiro. O período amostral é de jun/2001 a jun/2011 e a tabela é baseada em resultados fora-da-amostra, com rebalanceamento mensal. CVMrepresenta a carteira de variância mínima, CRS representa a carteira que maximiza a razão de Sharpe, CMG representa a carteira que maximiza o retorno geométrico, CIP é a carteira igualmente ponderada, IBOVESPA representa o índice de ações da Bovespa e CDI representa o ativo livre de risco, dado pelo valor dos depósitos interfinanceiros. As carteiras CVM, CRS, CMG e CIP são formadas usando as 100 ações mais líquidas disponíveis no início de cada mês.

	Covariância Amostral			Covariância Shrinkage					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOV	CDI
Retorno Anualizado	27,66%	17,42%	12,95%	27,48%	16,72%	13,04%	19,69%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	19,42%	24,10%	28,44%	19,37%	24,49%	28,52%	25,83%	30,63%	0,24%
VaR diário médio	*-2,61%*	*-3,24%*	*-3,75%*	*-2,60%*	*-3,28%*	*-3,76%*	*-3,51%*	*-4,14%*	
Valor Terminal de R$1	R$ 12,15	R$ 5,16	R$ 3,47	R$ 11,98	R$ 4,86	R$ 3,50	R$ 6,29	R$ 3,89	R$ 4,25
Turnover Médio	16,30%	33,75%	43,23%	15,84%	34,19%	43,26%	4,03%	-	-%
Custo Anual	0,29%	0,61%	0,78%	0,29%	0,62%	0,78%	0,07%	-	-
Razão de Sharpe	0,63*	0,07	-0,11	0,62*	0,04	-0,1	0,17*	-0,03	-
Perda Máxima	-52,56%	-63,87%	-76,02%	-53,45%	-65,22%	-75,94%	-52,23%	-59,99%	0,00%
Correlação IBOVESPA	0,72	0,73	0,78	0,72	0,74	0,78	0,95	-	-
Beta	0,46	0,57	0,72	0,46	0,59	0,73	0,8	-	-
Alpha	10,43%	2,64%	-0,66%	10,28%	2,08%	-0,57%	4,11%	-	-
Estatística t (Alpha)	2,47*	0,51	-0,12	2,46*	0,4	-0,1	1,59	-	-

*Representa diferença estatisticamente significante entre a razão de Sharpe da carteira e do IBOVESPA ao nível de 1% de significância de acordo com o teste de Ledoit & Wolf (2008).
**Representa um valor de alpha estatisticamente significante ao nível de 1% de significância.

Tabela 2
Estatísticas de desempenho de carteiras otimizadas *long-only*

Esta tabela apresenta estatísticas descritivas de várias carteiras formadas com ações do mercado brasileiro. O período amostral é de jun/2001 a jun/2011 e a tabela é baseada em resultados fora-da-amostra, com rebalanceamento mensal. CVMrepresenta a carteira de variância mínima, CRS representa a carteira que maximiza a razão de Sharpe, CMG representa a carteira que maximiza o retorno geométrico, CIP é a carteira igualmente ponderada, IBOVESPA representa o índice de ações da Bovespa e CDI representa o ativo livre de risco, dado pelo valor dos depósitos interfinanceiros. As carteiras CVM, CRS, CMG e CIP são formadas usando as 100 ações mais líquidas disponíveis no início de cada mês.

	Covariância EWMA			Covariância GARCH-DCC					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOV	CDI
Retorno Anualizado	18,86%	17,10%	12,28%	18,95%	15,89%	12,44%	19,69%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	20,46%	22,15%	27,34%	20,39%	22,78%	28,13%	25,83%	30,63%	0,24%
VaR diário médio	*-2,69%*	*-2,94%*	*-3,69%*	*-2,65%*	*-3,05%*	*-3,74%*	*-3,51%*	*-4,14%*	
Valor Terminal de R$1	R$ 5,85	R$ 5,03	R$ 3,27	R$ 5,90	R$ 4,52	R$ 3,32	R$ 6,29	R$ 3,89	R$ 4,25
Turnover Médio	93,47%	67,33%	50,18%	72,36%	54,38%	46,71%	4,03%	-	-%
Custo Anual	1,68%	1,21%	0,90%	1,30%	0,98%	0,84%	0,07%	-	-
Razão de Sharpe	0,1	0,03	-0,14	0,12	-0,01	-0,13	0,17*	-0,03	-
Perda Máxima	-55,43%	-65,38%	-72,49%	-54,64%	-58,75%	-74,75%	-52,23%	-59,99%	0,00%
Correlação IBOVESPA	0,64	0,65	0,74	0,62	0,65	0,75	0,95	-	-
Beta	0,43	0,47	0,66	0,41	0,48	0,69	0,8	-	-
Alpha	3,65%	2,35%	-1,32%	3,77%	1,39%	-1,06%	4,11%	-	-
Estatística t (Alpha)	0,74	0,45	-0,23	0,75	0,26	-0,18	1,59	-	-

*Representa diferença estatisticamente significante entre a razão de Sharpe da carteira e do IBOVESPA ao nível de 1% de significância de acordo com o teste de Ledoit & Wolf (2008).
**Representa um valor de alpha estatisticamente significante ao nível de 1% de significância.

Em comparação com o *benchmark* de mercado, o índice IBOVESPA, vemos que a CVM possui retornos anualizados quase duas vezes maiores, com volatilidades aproximadamente 40% menores. O índice de Sharpe do IBOVESPA no período foi de -0,03 no período, refletindo o fato de que a valorização do índice ficou abaixo da valorização do CDI. Apesar de várias das carteiras otimizadas possuirem razões de Sharpe pontualmente superiores à do índice, as únicas que apresentam razões de Sharpe estatisticamente superiores[10] à do IBOVESPA são as CVMs obtidas com matrizes de covariância amostrais ou por encolhimento, que possuem razões de Sharpe próximos de 0,62. A Carteira Igualmente Ponderada (CIP), que não envolve otimização e consiste na estratégia ingênua de dividir o capital igualmente entre as ações disponíveis, possui uma razão de Sharpe de 0,17, também estatisticamente superior ao índice. Um teste da diferença entre as razões de Sharpe das CVMs e das CIPs revela que a diferença é estatisticamente significante, com p-valores da ordem de 0,015.

Um indicador de risco bastante considerado por gestores é a chamada perda máxima (*maximum drawdown*), a qual representa a maior perda, de um máximo na série de retornos acumulados até o mínimo. A CVM e a CIP apresentam os melhores resultados, porém ainda bastante severos, com perdas máximas de aproximadamente -52%, o que significa que o investidor chegou a verificar, em algum momento, uma perda de mais da metade do capital, em relação a algum ponto de máximo. O valor para o índice IBOVESPA é de quase -60%, e para a CRS e a CMG são ainda maiores. Isso indica que, apesar de a CVM apresentar um risco bem menor do que o das outras carteiras, ela ainda constitui um investimento com alto nível de risco, o que é esperado de uma carteira totalmente investida em ações.

Outra medida de risco amplamente utilizada gestão de risco é o *Value-at-Risk* ou VaR. O VaR com um nível de confiança γ representa uma perda que não se espera ser excedida com uma probabilidade $(1-\gamma)$. É comum utilizar-se $\gamma = 1\%$, ou seja, calcular uma perda que só será excedida em 1% dos casos. Neste caso, denotando por r a variável aleatória que representa o retorno de uma carteira, o VaR dé definido como

$$VaR_{\gamma}(r) = inf\left\{x \in \mathbb{R} : P(r < x) \leq \alpha^{VaR}\right\}$$

[10] De acordo com o testes de Ledoit & Wolf (2008) com um nível de significância de 1%.

Calculamos o VaR diário para todas as carteiras utilizando a metodologia de ponderação exponencial para o cálculo das volatilidades (ver por exemplo Alexander (2008, p.125), e reportamos nas tabelas 1 e 2 a média do VaR diário na amostra. As CVMs apresentam os menores VaRs médios, próximos de -2,60%. O VaR médio do IBOVESPA foi de -4,14% e da CIP, de -3,51%.

O retorno superior da CVM é consistente ao longo do tempo. A CVM supera o IBOVESPA em 8 dos 11 anos da amostra, as exceções sendo os anos de 2005, 2007 e 2009.[11] Em 2005, por exemplo, o retorno da CVM é negativo, -1,86%, enquanto o IBOVESPA tem um resultado muito bom, com retorno de aproximadamente 30%. Isso pode ser explicado pelo fato de que, como a CVM minimiza a variância, ela é penalizada em anos muito bons para o mercado, já que os retornos positivos inflacionam a variância tanto quanto os negativos. Outro exemplo é o ano de 2009, um ano de recuperação após a crise de 2008. O IBOVESPA retornou 70,43% neste ano, enquanto a CVM teve retorno de 45,52%. O comportamento das carteiras ao longo do tempo pode ser visto na Figura 1, que apresenta os retornos acumulados das carteiras. Omitimos da figura a CMG, já que esta apresentou resultados ruins.

[11] As tabelas de retornos das carteiras por ano foram omitidos devido a limitações de espaço, porém estão disponíveis com os autores.

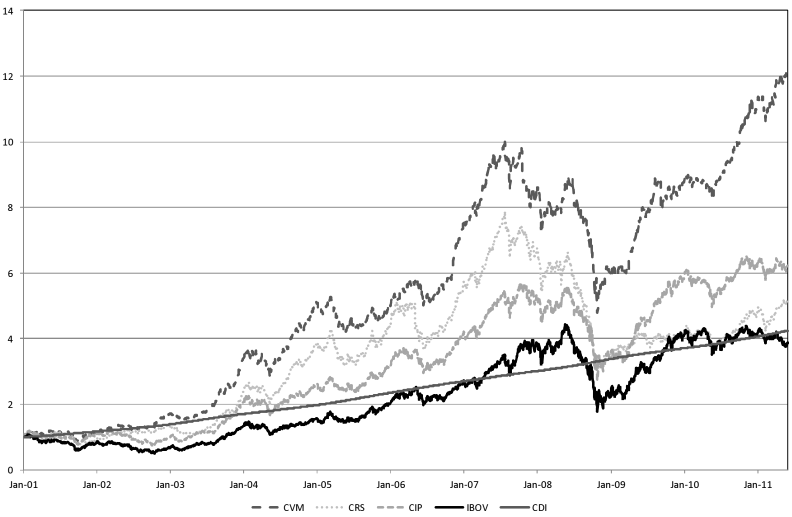

Figura 1
Curvas de retorno acumulado de carteiras otimizadas *long-only*, IBOVESPA e CDI
Esta figura apresenta as curvas de retorno acumulado de várias carteiras formadas com ações do mercado de ações brasileiro. O período amostral é de jun/2001 a jun/2011, e a tabela é baseada em resultados fora-da-amostra, com rebalanceamento mensal. CVM representa a carteira de variância mínima, CRS representa a carteira que maximiza a razão de Sharpe, CMG representa a carteira que maximiza o retorno geométrico, CIP é a carteira igualmente ponderada, IBOVESPA representa o índice de ações da Bovespa e CDI representa o ativo livre de risco, dado pelo valor dos depósitos interfinanceiros.

Nossos resultados indicam que a CVM possui alocações em um número relativamente pequeno de ações. A Figura 2 apresenta a alocação média e o número de ações com alocações não-nulas. Notamos que, com o passar do tempo, o número de ações na CVM oscila entre 12 e 27, enquanto a alocação média por ação varia entre aproximadamente 3,7% e 8,3%. A título de comparação, a carteira do IBOVESPA possuia, no final do período considerado, 68 ações, sendo que 43 ações correspondiam a 90% da carteira. O pequeno número de ações na CVM indica que a carteira poderia facilmente ser implantada mesmo por um investidor individual. Notamos que a CVM é relativamente estável em sua composição, comparada com a CRS e a CMG. O turnover médio da CVM é da ordem de 16%, ou seja, a cada mês, 16% das posições mudam (em termos financeiros) em média, enquanto os turnovers médios da CRS e CMG são da ordem de 30% e 40%, respectivamente (ver Tabelas 1 e 2).[12] Isso faz com que o seu custo seja inferior ao custo destas carteiras. A exceção é a CIP, a qual, por construção, possui um turnover baixo, da ordem de 4%, o que leva a um custo também baixo.

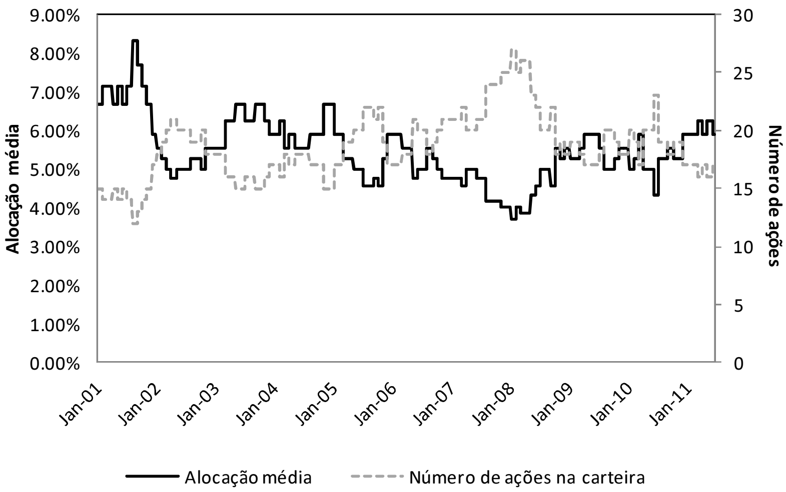

Figura 2
Alocação média e número de ações com alocação não-nula para a carteira de variância mínima *long-only*
Esta figura apresenta a alocação média e o número de ações com alocações não-nulas para a carteira de variância mínima *long-only*. Os critérios de eligibilidade de ações para cada mês são volume mediano positivo em uma janela de 3 anos e pelo menos 75% de dias com retornos não-nulos. O período amostral é de janeiro de 2001 a maio de 2011.

Todas as carteiras criadas possuem alta correlação com o índice IBOVESPA. A CIP possui a maior correlação, de 0,95, enquanto a CVM, CRS e CMG possuem correlações de 0,72, 0,73 e 0,78. Isso significa que as carteiras tendem a se mover na mesma direção do índice. Apesar de a CVM ter uma correlação relativamente alta com o IBOVESPA, ela é concentrada em ações com βs baixos. O β da CVM com o índice é de apenas 0,45.[13]

[12] Calculamos o *turnover* da carteira entre dois períodos de rebalanceamento como a soma das diferenças (em módulo) dos pesos das ações.

[13] Os valores de alfa e beta da tabela foram estimados com uma regressão

$$r_{i,t} - r_{CDI,t} = \alpha_i + \beta_i(r_{IBOV,t} - r_{CDI,t}) + \epsilon_{i,t}, t = 1, ..., T$$

onde $r_{i,t}$ é o retorno de uma CVM no dia t, $r_{CDI,t}$ é o retorno do CDI no dia t, e $r_{IBOV,t}$

Isso significa que, apesar de a CVM tender a ter retornos na mesma direção que o índice, os retornos tendem a ter quase a metade da magnitude. Este resultado está em linha com o desenvolvimento analítico de Clark *et al.* (2006), os quais mostraram que, se for assumido um modelo unifatorial de mercado[14] para os retornos dos ativos, então a CVM (irrestrita) é composta por ativos com β de mercado abaixo de um certo limiar. Isso pode ser visto claramente na Figura 3, a qual apresenta o gráfico de dispersão dos βs das ações elegíveis para a criação da CVM que vigorou no final de maio de 2001, contra as alocações da carteira. Podemos ver claramente que a CVM induz empiricamente um limiar de aproximadamente 0,5 para os βs das ações que a compõem, o que esclarece e valida o fato de a CVM possuir poucas ações com alocações relevantes. Isto está relacionado à dificuldade de se encontrar ações com baixa correlação com o IBOVESPA, e sugere que estas ações possam estar subprecificadas no mercado.

O retorno da CVM não explicado pelo índice IBOVESPA, ou seja, o α da carteira, é significante tanto do ponto de vista estatístico como econômico. O α da CVM é da ordem de 10% (anualizado) e estatisticamente significante no nível de 5% de significância (ver Tabelas 1 e 2). A única outra carteira com α positivo e significante é a CIP, com um α de 4,41%, porém significante apenas no nível de 10% de significância.

Resumindo os resultados obtidos até agora, temos que a CVM apresenta retornos superiores, com volatilidades, perdas máximas e *Value-at-Risk* inferiores aos do IBOVESPA e das outras carteiras consideradas. Tanto a CRS quanto a CMG falham em seus objetivos, fora da amostra, pois a CRS não tem a maior razão de Sharpe, e a CMG não tem a maior média geométrica. O desempenho da CVM acima do índice IBOVESPA é estatisticamente e economicamente significante, e a CVM concentra os investimentos em um número pequeno de ações com βs baixos em relação ao IBOVESPA, as quais tendem a não fazer parte do índice.

é o retorno do IBOVESPA no dia t, e $\epsilon_{i,t}$ é um erro aleatório.

[14]O modelo introduzido por Sharpe (1963).

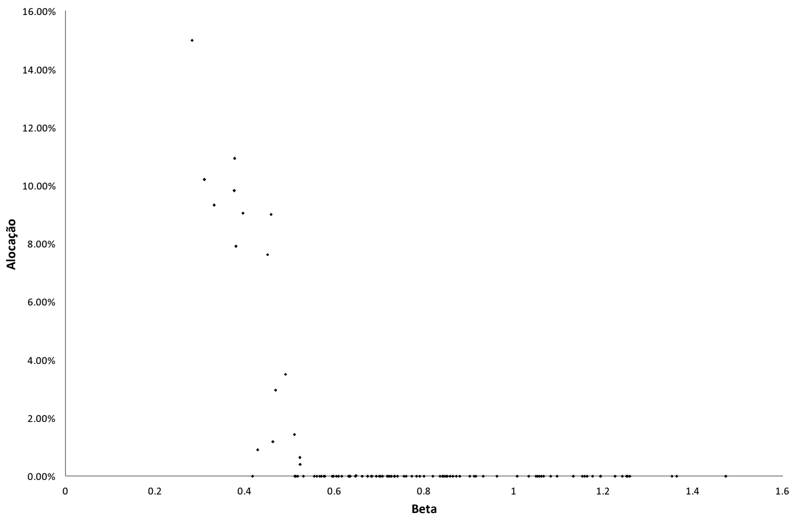

Figura 3
Esta figura apresenta o gráfico de dispersão das alocações da carteira de variância mínima long-only contra os betas das ações com o índice IBOVESPA. Os valores de beta foram estimados com uma regressão

$$r_{i,t} - r_{CDI,t} = \alpha_i + \beta_i(r_{IBOV,t} - r_{CDI,t}) + \epsilon_{i,t}, t = 1, ..., T,$$

onde $r_{i,t}$ é o retorno de uma CVM no dia t, $r_{CDI,t}$ é o retorno do CDI no dia t, e $r_{IBOV,t}$ é o retorno do IBOVESPA no dia t, e $\epsilon_{i,t}$ é um erro aleatório. Foram utilizados três anos de dados históricos. Os critérios de eligibilidade de ações para criação da carteira de variância mínima a cada mês são volume mediano positivo em uma janela de 3 anos e pelo menos 75% de dias com cotações na mesma janela.

3.2 Carteiras 130/30

Relaxando a restrição *long-only*, construímos carteiras otimizadas 130/30 com os critérios de minimização de variância, maximização da razão de Sharpe e maximização da média geométrica. Os resultados com rebalanceamento mensal são apresentados nas Tabelas 3 e 4. Para comparação, repetimos na tabela os resultados da carteira igualmente ponderada (CIP) e do IBOVESPA, as quais são carteiras *long-only*.

A possibilidade de ter posições vendidas tem um impacto relativamente modesto no desempenho da CVM. Por exemplo, quando a matriz de covariância amostral é utilizada, a razão de Sharpe da carteira 130/30 é aproximadamente 10% maior em relação a sua versão *long-only* (0,68 contra 0,62). Notamos que para as carteiras 130/30, o método de encolhimento produz resultados pontualmente melhores do que os da matriz de covariância amostral, porém esta diferença não é estatisticamente significante. Os métodos EWMA e DCC-GARCH multivariado continuam performando mal em relação aos demais métodos.

O *turnover* mensal da CVM 130/30 é da ordem de 47%, bastante superior ao da CVM *long-only*. Além disso, o fato de a CVM 130/30 ter 30% de posições vendidas implica em custos de aluguel, o que faz com que o custo anual da CVM 130/30 (1,70%) seja bem superior ao da CVM *long-only* (0,29%). Notamos também uma diminuição na correlação e no β da CVM 130/30 com o índice IBOVESPA, em relação a CVM long-only. Ambos são aproximadamente 25% menores para as carteiras 130/30.

Os resultados das demais carteiras otimizadas são ambíguos. A extensão para posições vendidas melhora o desempenho fora da amostra da CRS, porém o da CMG é similar. Notamos também que, apesar de ter posições vendidas, as carteiras otimizadas não parecem se beneficiar disso em anos muito ruins para o mercado, repetindo o padrão observado para as carteiras long-only, com a CVM performando mal nos mesmos anos (2005, 2007 e 2009).[15]

Avaliando estes resultados, concluimos que, apesar de o relaxamento da restrição a vendas de ações ter introduzido apenas um ganho modesto para a CVM em termos de retorno, a diminuição da correlação com IBOVESPA pode ser considerada um atrativo para certos investidores, para os quais atingir retornos superiores aos do índice pode ser tão importante quanto manter uma baixa correlação com os movimentos do mercado. A carteira que maximiza a razão de Sharpe, apesar de apresentar um desempenho bem melhor na sua versão 130/30, ainda é muito inferior, fora da amostra, a carteira com variância mínima.

A escolha do nível de alavancagem da carteira, ou equivalentemente, do percentual do capital do investidor que fica na ponta vendida, foi baseado na popularidade dos fundos 130/30 Lo & Patel (2007, ver). Em resultados não reportados, testamos outras possibilidades, como 120/20 (correspondente a uma razão de alavancagem $\delta = 1,4$) ou 110/10 (correspondente a uma razão de alavancagem $\delta = 1,2$). De maneira geral, a razão de Sharpe das carteiras aumenta com a alavancagem, assim como o custo e o *turnover*, enquanto a correlação com o IBOVESPA diminui.

[15] As tabelas de retornos das carteiras por ano foram omitidas devido a limitações de espaço, porém estão disponíveis com os autores.

3.3 Análise de robustez

Esta seção apresenta análises de robustez dos resultados em relação à frequência de rebalanceamento, alocação máxima por ação e número máximo de ações no universo de investimento. Para os dois últimos testes, relatamos apenas os resultados obtidos com as carteiras *long-only* e com a matriz de covariância amostral. Os demais resultados são análogos e podem ser obtidos com os autores.

Frequência de rebalanceamento

Os resultados apresentados até agora foram obtidos com rebalanceamento mensal. A frequência de rebalanceamento é um parâmetro importante, pois tem um impacto direto nos custos das carteiras. Para avaliar a robustez dos resultados com relação à escolha de rebalanceamento mensal, repetimos o processo de simulação utilizando rebalanceamento semanal (sempre no início da semana) e trimestral (rebalanceando as carteiras no início dos meses de janeiro, abril, julho e outubro). Acreditamos que rebalanceamentos mais frequentes do que semanais ou menos frequentes do que trimestrais raramente são usados na prática.

As Tabelas 5 e 6 apresentam os resultados. Com exceção da carteira igualmente ponderada, o desempenho de todas as carteiras melhora, enquanto os custos diminuem, quanto menor a frequência de rebalanceamento. Por exemplo, as razões de Sharpe da CVM com covariância amostral são de 0,59, 0,63 e 0,65 para rebalanceamentos semanal, mensal e trimestral, respectivamente, enquanto os custos anuais são de 0,49%, 0,29% e 0,07%. Os resultados comprovam a robustez em relação à frequência de rebalanceamento e favorecem o rebalanceamento trimestral, devido à maior facilidade de implantação e o menor custo.

Alocação máxima por ação

Os resultados apresentados anteriormente foram obtidos com um limite máximo de 15% para a alocação em qualquer ação (ou entre -15% e 15% na versão 130/30), um valor escolhido de maneira ad hoc e que não foi otimizado. A literatura sugere que o valor deste parâmetro é importante. Por exemplo, Thomé *et al.* (2011) reportam resultados melhores quando a alocação máxima é de 10% (melhor resultado encontrado pelos autores), e resultados progressivamente piores (em termos de retorno ajustado a risco) conforme a alocação máxima aumenta. Conduzimos testes variando a alocação máxima entre os valores de 10%, 30% e 100%. Os resultados, disponíveis com os autores, demonstraram que uma alocação máxima de 10% piora ligeiramente a razão de Sharpe da CVM em relação aos resultados anteriores, que utilizaram 15% de limite (a razão de Sharpe da CVM cai de 0,62 para 0,53). Por outro lado, tanto a CRS como a CMG apresentam resultados melhores com o limite menor. Em particular, a CMG apresentou razão de Sharpe negativa com alocação máxima de 15%, e positiva com 10%. Quando aumentamos o limite para 30%, a CVM apresenta um ótimo resultado, com razão de Sharpe de 0,70, enquanto a CRS e a CMG pioram. Os resultados com limite de 100% (não reportados) são idênticos aos de 30% para a CVM, indicando que nenhuma ação teve alocação maior do que 30% em nenhum dos períodos da amostra. Tanto a CRS como a CMG apresentam resultados ruins neste caso.

Concluimos que a alocação máxima não é um fator crucial para o desempenho da CVM, sendo que mesmo se não restringirmos as alocações, permitindo 100% de alocação em apenas uma ação, a CVM atinge um resultado muito bom, pois empiricamente, a minimização da variância não induz concentrações acima de 30% por ação.

Tabela 3
Estatísticas de desempenho de carteiras otimizadas 130/30

Esta tabela apresenta estatísticas descritivas de várias carteiras formadas com ações do mercado de ações brasileiro. As carteiras são alavancadas, totalmente investidas, com a soma das alocações positivas igual a 1,3, e das alocações negativas igual a -0,30. O período amostral é de jun/2001 a jun/2011 e a tabela é baseada em resultados fora-da-amostra, com rebalanceamento mensal. CVM representa a carteira de variância mínima, CRS representa a carteira que maximiza a razão de Sharpe, CMG representa a carteira que maximiza o retorno geométrico, CIP é a carteira igualmente ponderada, IBOVESPA representa o índice de ações da Bovespa e CDI representa o ativo livre de risco, dado pelo valor dos depósitos interfinanceiros. As carteiras CVM, CRS, CMG e CIP são formadas usando as 100 ações mais líquidas disponíveis no início de cada mês.

	Covariância Amostral			Covariância Shrinkage					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOV	CDI
Retorno Anualizado	29,58%	24,20%	15,59%	31,86%	23,48%	15,30%	19,69%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	18,47%	25,41%	32,23%	19,34%	25,68%	32,28%	25,83%	30,63%	0,24%
VaR diário médio	*-2,51%*	*-3,48%*	*-4,34%*	*-2,58%*	*-3,52%*	*-4,35%*	*-3,51%*	*-4,14%*	-
Valor Terminal de R$1	R$ 14,16	R$ 9,17	R$ 4,40	R$ 16,91	R$ 8,65	R$ 4,29	R$ 6,29	R$ 3,89	R$ 4,25
Turnover Médio	47,94%	49,83%	62,72%	51,44%	49,65%	62,80%	4,03%	-	-
Custo Anual	1,75%	1,78%	2,02%	1,81%	1,78%	2,02%	0,07%	-	-
Razão de Sharpe	0,68*	0,28	-0,05	0,77*	0,25	-0,06	0,17*	-0,03	-
Perda Máxima	-52,39%	-66,20%	-77,32%	-51,81%	-66,79%	-77,63%	-52,23%	-59,99%	0,00%
Correlação IBOVESPA	0,55	0,49	0,6	0,52	0,5	0,6	0,95	-	-
Beta	0,33	0,41	0,63	0,33	0,42	0,63	0,8	-	-
Alpha	12,24%	9,22%	3,18%	14,16%	8,68%	2,94%	4,11%	-	-
Estatística t (Alpha)	2,53**	1,33	0,39	2,73**	1,25	0,36	1,59	-	-

* Representa diferença estatisticamente significante entre a razão de Sharpe da carteira e do IBOVESPA ao nível de 1% de significância de acordo com o teste de Ledoit & Wolf (2008).
** Representa um valor de alpha estatisticamente significante ao nível de 1% de significância.

Tabela 4
Estatísticas de desempenho de carteiras otimizadas 130/30

Esta tabela apresenta estatísticas descritivas de várias carteiras formadas com ações do mercado de ações brasileiro. As carteiras são alavancadas, totalmente investidas, com a soma das alocações positivas igual a 1,3, e das alocações negativas igual a -0,30. O período amostral é de jun/2001 a jun/2011 e a tabela é baseada em resultados fora-da-amostra, com rebalanceamento mensal. CVM representa a carteira de variância mínima, CRS representa a carteira que maximiza a razão de Sharpe, CMG representa a carteira que maximiza o retorno geométrico, CIP é a carteira igualmente ponderada, IBOVESPA representa o índice de ações da Bovespa e CDI representa o ativo livre de risco, dado pelo valor dos depósitos interfinanceiros. As carteiras CVM, CRS, CMG e CIP são formadas usando as 100 ações mais líquidas disponíveis no início de cada mês.

	Covariância EWMA			Covariância GARCH-DCC					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOV	CDI
Retorno Anualizado	23,98%	21,40%	16,92%	23,12%	19,24%	15,31%	19,69%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	20,08%	22,45%	30,82%	19,68%	23,97%	31,27%	25,83%	30,63%	0,24%
VaR diário médio	*-2,71%*	*-3,05%*	*-4,23%*	*-2,58%*	*-3,25%*	*-4,26%*	*-3,51%*	*-4,14%*	-
Valor Terminal de R$1	R$ 9,01	R$ 7,26	R$ 4,95	R$ 8,39	R$ 6,05	R$ 4,29	R$ 6,29	R$ 3,89	R$ 4,25
Turnover Médio	190,11%	133,64%	67,23%	144,82%	92,47%	65,87%	4,03%	-	-
Custo Anual	4,31%	3,29%	2,10%	3,49%	2,55%	2,07%	0,07%	-	-
Razão de Sharpe	0,22	0,13	-0,01	0,23	0,06	-0,06	0,17*	-0,03	-
Perda Máxima	-52,81%	-56,36%	-72,82%	-51,77%	-63,88%	-75,62%	-52,23%	-59,99%	0,00%
Correlação IBOVESPA	0,48	0,46	0,56	0,49	0,46	0,57	0,95	-	-
Beta	0,31	0,34	0,57	0,32	0,36	0,58	0,8	-	-
Alpha	8,22%	6,52%	4,10%	7,43%	5,02%	2,80%	4,11%	-	-
Estatística t (Alpha)	1,49	1,05	0,52	1,39	0,75	0,35	1,59	-	-

* Representa diferença estatisticamente significante entre a razão de Sharpe da carteira e do IBOVESPA ao nível de 1% de significância de acordo com o teste de Ledoit & Wolf (2008).
** Representa um valor de alpha estatisticamente significante ao nível de 1% de significância.

Tabela 5
Comparação dos resultados para diferentes frequências de rebalanceamento

Esta tabela apresenta estatísticas descritivas comparando várias carteiras formadas com ações do mercado de ações brasileiro, utilizando rebalanceamentos semanais (Painel A), mensais (Painel B) e trimestrais (Painel C). O período amostral é de jun/2001 a jun/2011.

Panel A: Rebalanceamento semanal									
	Covariância Amostral			Covariância Shrinkage					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOVESPA	CDI
Retorno Anualizado	27,03%	12,24%	7,46%	26,97%	11,15%	7,40%	19,83%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	19,16%	24,12%	27,97%	19,11%	24,43%	28,04%	25,86%	30,63%	0,24%
Custo Anual	0,49%	1,35%	1,72%	0,47%	1,38%	1,72%	0,09%	0,00%	-
Razão de Sharpe	0,59*	-0,18	-0,34	0,59*	-0,22	-0,34	0,18*	-0,03	-
Perda Máxima	-52,67%	-70,86%	-78,12%	-53,36%	-71,96%	-78,17%	-52,21%	-59,99%	0,00%
Panel B: Rebalanceamento mensal									
	Covariância Amostral			Covariância Shrinkage					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOVESPA	CDI
Retorno Anualizado	27,66%	17,42%	12,95%	27,48%	16,72%	13,04%	19,69%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	19,42%	24,10%	28,44%	19,37%	24,49%	28,52%	25,83%	30,63%	0,24%
Custo Anual	0,29%	0,61%	0,78%	0,29%	0,62%	0,78%	0,07%	0,00%	-
Razão de Sharpe	0,63*	0,07	-0,11	0,62*	0,04	-0,1	0,17*	-0,03	-
Perda Máxima	-52,56%	-63,87%	-76,02%	-53,45%	-65,22%	-75,94%	-52,23%	-59,99%	0,00%
Panel C: Rebalanceamento trimestral									
	Covariância Amostral			Covariância Shrinkage					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOVESPA	CDI
Retorno Anualizado	28,09%	18,38%	13,08%	28,05%	17,75%	13,26%	19,26%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	19,72%	24,51%	29,29%	19,65%	24,92%	29,31%	25,76%	30,63%	0,24%
Custo Anual	0,07%	0,12%	0,15%	0,07%	0,12%	0,15%	0,02%	0,00%	-
Razão de Sharpe	0,65*	0,13	-0,08	0,65*	0,1	-0,07	0,16*	-0,03	-
Perda Máxima	-53,61%	-65,55%	-76,16%	-54,12%	-66,40%	-76,01%	-51,85%	-59,99%	0,00%

Tabela 6
Comparação dos resultados para diferentes frequências de rebalanceamento

Esta tabela apresenta estatísticas descritivas comparando várias carteiras formadas com ações do mercado de ações brasileiro, utilizando rebalanceamentos semanais (Painel A), mensais (Painel B) e trimestrais (Painel C). O período amostral é de jun/2001 a jun/2011.

Panel A: Rebalanceamento semanal									
	Covariância EWMA			Covariância GARCH-DCC					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOVESPA	CDI
Retorno Anualizado	16,39%	12,17%	8,73%	17,81%	13,39%	7,88%	19,83%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	19,51%	21,54%	26,63%	19,47%	22,28%	26,99%	25,86%	30,63%	0,24%
Custo Anual	3,78%	2,83%	1,95%	3,80%	2,69%	2,02%	0,09%	0,00%	-
Razão de Sharpe	- 0,13	-0,27	-0,32	-0,06	-0,20	-0,35	0,18*	-0,03	-
Perda Máxima	-55,28%	-67,08%	-74,22%	-52,27%	-63,82%	-77,41%	-52,21%	-59,99%	0,00%
Panel B: Rebalanceamento mensal									
	Covariância EWMA			Covariância GARCH-DCC					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOVESPA	CDI
Retorno Anualizado	18,86%	17,10%	12,28%	18,95%	15,89%	12,24%	19,69%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	20,46%	22,15%	27,34%	20,39%	22,78%	28,13%	25,83%	30,63%	0,24%
Custo Anual	1,68%	1,21%	0,90%	1,30%	0,98%	0,84%	0,07%	0,00%	-
Razão de Sharpe	0,10	0,03	-0,14	0,12	-0,01	-0,13	0,17*	-0,03	-
Perda Máxima	-55,43%	-65,38%	-72,49%	-54,64%	-58,75%	-74,75%	-52,23%	-59,99%	0,00%
Panel C: Rebalanceamento trimestral									
	Covariância EWMA			Covariância GARCH-DCC					
	CVM	CRS	CMG	CVM	CRS	CMG	CIP	IBOVESPA	CDI
Retorno Anualizado	20,78%	17,29%	12,69%	17,50%	17,43%	12,48%	19,26%	14,22%	15,19%
Volatilidade Anual	20,33%	22,48%	28,11%	20,78%	23,01%	28,90%	25,76%	30,63%	0,24%
Custo Anual	0,25%	0,19%	0,16%	0,18%	0,16%	0,15%	0,02%	0,00%	-
Razão de Sharpe	0,26	0,08	-0,09	0,10	0,09	-0,10	0,16*	-0,03	-
Perda Máxima	-48,85%	-62,80%	-72,88%	-52,09%	-58,56%	-75,27%	-51,85%	-59,99%	0,00%

Número de ações no universo de investimento

O número de ações elegíveis ao longo do tempo, de acordo com os critérios de eligibilidade utilizados (volume mediano positivo nos últimos três anos, e retornos não-nulos em mais de 75% dos dias) varia entre 38 e 145, aumentando ao longo do tempo conforme mais empresas abriram capital e passaram a ter ações listadas na bolsa. Nos resultados apresentados até este momento, foram consideradas, a cada período, as 100 ações mais líquidas (com maior volume) que atendiam aos critério de eligibilidade de volume mediano positivo nos últimos três anos, e retornos não-nulos em mais de 75% dos dias. O motivo desta restrição, conforme comentado anteriormente, foi possibilitar a estimação do modelo DCC-GARCH multivariado, a qual é computacionalmente custosa e mostrou-se inviável para um número maior de ações.

Para avaliar se os nossos resultados são robustos a esta escolha, realizamos testes limitando o universo de investimento às 30, 50 e 75 ações com maior volume mediano nos últimos três anos. Os resultados utilizando todas as ações disponíveis foram essencialmente idênticos aos obtidos com as 100 ações mais líquidas.

Os resultados, disponíveis com os autores, são similares aos obtidos anteriormente: a CVM supera as demais carteiras otimizadas, a carteira igualmente ponderada e o IBOVESPA. Além disso, verifica-se uma relação crescente entre o número de ações no universo e as razões de Sharpe da CVM e da CIP. Por exemplo, quando o universo contém as 30, 50 e 75 ações mais líquidas, a razão de Sharpe da CVM (CIP) é de 0,42 (0,11), 0,48 (0,12) e 0,56 (0,17). Para as demais carteiras otimizadas, não é possível identificar uma relação similar.

Concluímos que os resultados obtidos para o desempenho superior da CVM são robustos em relação ao número de ações. No entanto, resultados melhores são obtidos quando o maior universo possível é considerado.

4. Discussão

Os resultados obtidos indicam que a CVM apresenta um desempenho superior aos do índice IBOVESPA e dos outros *benchmarks* de otimização, e esta diferença é estatisticamente significante. O fato de a CVM apresentar um desempenho superior ao de índices de mercado não é, isoladamente, tão surpreendente, já que não há razão para supor, *a priori*, que estas carteiras sejam eficientes. Pelo mesmo raciocínio, o fato de a CVM superar a CRS, quando os retornos esperados são estimados através das médias históricas de retornos dos ativos, pode apenas indicar quão inadequados estes estimadores são para prever os retornos esperados dos ativos.

Clark *et al.* (2006) interpretam a superioridade da CVM como uma manifestação de uma crítica antiga ao modelo CAPM, resumida pelo resultado empírico de que ações com βs baixos apresentam retornos relativamente altos Fama & French (1992, ver, por exemplo,). Nossos resultados confirmam esta noção, já que a CVM é concentrada em ações com β baixo, apresentando no entanto retornos relativamente altos. O fato de o β não explicar o retorno das ações pode ser um reflexo da existência de outros fatores de risco precificados. No entanto, o fato de a volatilidade não estar positivamente relacionada com retorno parece pouco razoável do ponto de vista de modelos racionais de precificação de ativos, já que estes modelos são baseados, grosso modo, na suposição de que os investidores não gostam de volatilidade na sua riqueza futura.

Falkenstein (2009) propõe uma teoria radical para explicar a ausência de um prêmio de risco em diversas classes de ativos. Segundo esta teoria, a utilidade dos investidores é uma função de status, especificamente o valor da riqueza de um investidor em relação aos seus pares, de maneira que apenas desvios de um consenso ou *benchmark* de risco constituem situações desfavoráveis. Neste caso, o "risco" de performar pior do que os pares pode ser evitado quando todos os agentes possuem a mesma carteira, enquanto o risco no sentido usual não é precificado.

Independentemente das causas deste fenômeno, o fato de o bom desempenho da CVM ter sido documentado em vários mercados possui implicações práticas fortes, pois sugere uma maneira simples, eficiente e facilmente replicável de gerar retornos superiores aos de *benchmarks* conhecidos.

Nosso artigo é próximo aos de Thomé *et al.* (2011) e Santos & Tessari (2012). Ambos os trabalhos investigam uma CVM formada com as ações que compõem o índice IBOVESPA. Thomé, Leal e Almeida comparam o desempenho da CVM com uma CIP com as mesmas ações, além de fundos de investimento, enquanto Santos e Tessari fazem comparações com uma carteira baseada no paradgima média-variância, variando o coeficiente de aversão ao risco.

Nosso trabalho possui diferenças relevantes em relação aos artigos acima. Em primeiro lugar, consideramos todas as ações listadas na BM&F BOVESPA, e não apenas as que fazem parte do índice IBOVESPA. Em segundo lugar, testamos dois métodos de otimização diferentes: maximização da razão de Sharpe e da média geométrica dos retornos. Além de métodos similares aos utilizados por Santos e Tessari para estimar a matriz de covariância, também estimamos matrizes de covariância condicionais com o modelo DCC-GARCH multivariado. Finalmente, consideramos a possibilidade de utilizar posições vendidas e montar carteiras alavancadas.

Os resultados obtidos também apresentam diferenças em relação aos destes trabalhos. Por exemplo, os resultados de Thomé, Leal e Almeida mostram que a CIP performa tão bem quanto a CVM, o que sugere uma estratégia de investimento ainda mais simples: basta dividir o capital igualmente entre as ações. Nossos resultados sugerem que a CVM supera, inclusive, a CIP, o que está em linha com o reportado por Santos e Tessari. Outra diferença surge nos testes de robustez. Thomé, Leal e Almeida indicam que melhores resultados são obtidos com pesos máximos de 10% por ação, com desempenhos piores conforme este valor aumenta. Nossos resultados principais, obtidos com um peso máximo de 15% por ação, foram melhores do que os resultados com peso máximo de 10%, e observamos que resultados com 30% são ainda melhores. Além disso, notamos que os resultados são pouco sensíveis a aumentos neste limite. Quando a restrição é aumentada para até 100% por ação, a CVM resultante nunca apresentou pesos maiores do que 30%, ou seja, mesmo a otimização irrestrita, no nosso caso, entregaria uma CVM com ótimo resultado, o que está em contraste com os resultados de Thomé, Leal e Almeida para as ações do IBOVESPA. Além disso, investigamos carteiras alavancadas do tipo 130/30, as quais apresentaram potenciais de ganho um pouco acima da versão com posições compradas, com correlações menores com os retornos do IBOVESPA.

5. Conclusão

Neste artigo, investigamos as características de carteiras de variância mínima no mercado de ações brasileiro, comparando-as com vários *benchmarks* como o índice IBOVESPA, uma carteira de ações igualmente ponderada, uma carteira formada para maximizar a razão de Sharpe, e uma carteira que maximiza a média geométrica dos retornos. Utilizamos diferentes métodos para estimar a matriz de covariância dos retornos dos ativos, desde métodos simples como a matriz de covariância condicional até modelos condicionais da matriz de covariância, como o modelo DCC-GARCH multivariado de Engle & Sheppard (2002).

Nossos resultados mostram que carteiras de variância mínima apresentam resultados superiores, fora da amostra, a todos os *benchmarks*. Além disso, os métodos mais simples de estimação da matriz de covariância produzem os mehores resultados. A carteira de variância mínima apresenta retornos médios maiores, com volatilidades e perdas máximas inferiores aos do IBOVESPA e das outras carteiras consideradas. O desempenho da carteira de variância mínima, em termos de retorno ajustado ao risco, é estatisticamente superior ao das demais carteiras, incluindo o índice IBOVESPA e a carteira igualmente ponderada das ações.

Além disso, os resultados confirmam que a otimização de carteiras através do uso de médias históricas de retorno produz resultados ruins fora da amostra (Jagannathan & Ma, 2003). As duas carteiras que utilizam estimativa histórica da média dos retornos (as carteiras formadas através da maximização da razão de Sharpe e da média geométrica dos retornos) falham, fora da amostra, em seus objetivos. Estes resultados confirmam que, quando o investidor não possui uma maneira adequada de estimar as médias dos retornos, é preferível ignorar completamente estes parâmetros. Neste caso, duas alternativas são interessantes: a carteira de variância mínima global e a carteira igualmente ponderada, entre as quais a primeira é a que obtém, empiricamente, o melhor resultado no mercado brasileiro.

A carteira de variância mínima concentra os investimentos em um número pequeno de ações com βs baixos e que tendem a não pertencer ao IBOVESPA. Isso sugere um potencial de ganho fora do universo de ações que compõe o índice, além de corroborar a noção de que a relação entre β e retorno não se verifica empiricamente. Esta constatação empírica também confirma o resultado téorico derivado por Clark *et al.* (2006), de que a minimização da variância induz um limite no β máximo das ações que compõem a carteira de variância mínima.

Uma outra contribuição deste trabalho foi investigar uma carteira de variância mínima com possibilidade de alavancagem com posições vendidas. As carteiras construídas são do tipo 130/30, com 130% do capital do investidor em posições compradas, e 30% em posições vendidas. Os resultados obtidos para estas carteiras são análogos aos obtidos para as carteiras com posições compradas, ou seja, a carteira de variância mínima superou todos os *benchmarks*. Em relação à versão *long-only*, observou-se um ganho modesto em termos de retorno ajustado a risco: a razão de Sharpe da carteira de variância mínima 130/30 é aproximadamente 11% maior do que a razão de Sharpe da versão *long-only*. Além disso, a carteira

130/30 apresentou uma correlação mais baixa com o índice IBOVESPA, o que pode ser um atrativo para alguns investidores.

Os resultados obtidos possuem implicações importantes para gestores de recursos e mesmo investidores individuais. Em primeiro lugar, os nossos resultados mostram que uma estratégia de investimento simples e replicável supera o *benchmark* mais comum do mercado de ações brasileiro, o IBOVESPA. Além disso, esta regra envolve um número relativamente pequeno de ações, sugerindo que sua implantação por investidores individuais é perfeitamente possível. Outra possibilidade seria a criação de instrumentos como ETFs (*Exchange Traded Funds*) baseados na carteira de variância mínima, ou de índices de variância mínima como *benchmarks* de mercado, conforme sugerido por Thomé *et al.* (2011). Um ETF seria particularmente atraente, dado que é um investimento com custo bastante inferior ao dos fundos de ação.

Finalmente, como direção para pesquisa futura, seria interessante comparar a performance das estratégias apresentadas neste trabalho com as de carteiras com gestão ativa, como os fundos de investimento em ações.

Referências

Alexander, Carol. 2008. *Market Risk Analysis*. John Wiley & Sons.

Ang, Andrew, Hodrick, Robert J., Xing, Yuhang, & Zhang, Xiaoyan. 2006. The Cross-Section of Volatility and Expected Returns. *Journal of Finance*, **61**, 259–299.

Banz, Rolf W. 1981. The Relationship Between Return and Market Value of Common Stocks. *Journal of Financial Economics*, **9**, 3–18.

Basu, Sanjoy. 663–682. Investment Performance of Common Stocks in Relation to their Price-Earnings Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis. *Journal of Finance*, **32**, 1977.

Best, Michael J., & Grauer, Robert R. 1991. On the Sensitivity of Mean-Variance Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. *Review of Financial Studies*, **4**, 315–342.

Blitz, David, & Vliet, Pim V. 2007. The Volatility Effect. *Journal of Portfolio Management*, **Fall**, 102–113.

Caldeira, João F., & Portugal, Marcelo S. 2010. Estratégia Long-Short, Neutra Ao Mercado, e Index Tracking Baseadas Em Portfólios Cointegrados. *Revista Brasileira de Finanças*, **8**, 469–504.

Christensen, Morten. 2005. *On the History of the Growth Optimal Portfolio*. Unpublished manuscript. `http://www.szit.bme.hu/~oti/portfolio/articles/history.pdf`.

Clark, Roger, De Silva, Harinda, & Thorley, Steven. 2006. Minimum-Variance Portfolios in the US Equity Market. *Journal of Portfolio Management*, 10–24.

DeMiguel, Victor, Garlappi, Lorenzo, Nogales, Francisco J., & Uppal, Raman. 2009. A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science*, **55**, 798–812.

Engle, Robert F., & Sheppard, Kevin. 2002. Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, **20**, 339–350.

Estrada, Javier. 2010. Geometric Mean Maximization: An Overlooked Portfolio Approach? *The Journal of Investing*, **19**, 134–147.

Falkenstein, Erik G. 2009. *Risk and Return in General: Theory and Evidence*. Available at SSRN: `http://ssrn.com/abstract=1420356`.

Fama, Eugene F., & French, Kenneth R. 1992. The Cross-Section of Expected Returns. *Journal of Finance*, **47**, 427–465.

Fama, Eugene F., & French, Kenneth R. 2008. Dissecting Anomalies. *Journal of Finance*, **63**, 1653–1678.

Jagannathan, Ravi, & Ma, Tongshu. 2003. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *Journal of Finance*, **58**, 1651–1684.

Jegadeesh, Narasimhan, & Titman, Sheridan. 1993. Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency. *Journal of Finance*, **48**, 65–91.

Jorion, Philippe. 1985. International Portfolio Diversification with Estimation Risk. *Journal of Business*, **58**, 259–278.

Jorion, Philippe. 1991. Bayesian and CAPM Estimators of the Means: Implications for Portfolio Selection. *Journal of Banking & Finance*, **15**, 717–727.

Kelly, John. 1956. A New Interpretation of Information Rate. *Bell System Technical Journal*, **35**, 917–926.

Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2004a. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. *Journal of Portfolio Management*, **30**, 110–119.

Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2004b. A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, **88**, 365–411.

Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2008. Robust Performance Hypothesis Testing with the Sharpe Ratio. *Journal of Empirical Finance*, **15**, 850–859.

Lo, Andrew W., & Patel, Pankaj N. 2007. 130/30: The New Long-Only. *The Journal of Portfolio Management*, **34**, 12–38.

Markowitz, Harry M. 1952. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, **7**, 77–91.

Markowitz, Harry M. 1959. *Portfolio Selection*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Merton, Robert C. 1980. On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation. *Journal of Financial Economics*, **8**, 323–361.

Michaud, Richard O. 1989. The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimized Optimal. *Financial Analysts Journal*, **45**, 31–42.

Santos, André A. P., & Tessari, Cristina. 2012. Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas Ao Mercado de Ações Brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, **10**, 369–394.

Sharpe, William F. 1963. A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, **9**, 277–293.

Thomé, César N., Leal, Ricardo P. C., & Almeida, Vinício de S. 2011. Um Índice de Mínima Variância de Ações Brasileiras. *Economia Aplicada*, **15**, 535–557.