Notas e comentários

Nota sobre o problema de "exaustão" do produto

Carlos G. Langoni *

1. Demonstração tecnológica; 2. Introduzindo a noção de equilíbrio em competição; 3. Demonstração com base exclusiva na idéia de equilíbrio de longo prazo com lucro zero; 4. Comparação dos resultados obtidos com a hipótese de equilíbrio local com aqueles derivados exclusivamente da hipótese tecnológica.

1. Demonstração tecnológica

A demonstração de que, se a função de produção for homogênea de grau um, o pagamento dos fatores por suas produtividades marginais exaure o produto total é na verdade equivalente a demonstrar a validade do teorema de Euler no caso particular de retornos constantes de escala.

Assim para uma função homogênea do grau k,

$$\lambda^k X = f(\lambda L, \lambda K)$$

o teorema de Euler mostra que

$$^{\kappa}X = L \cdot \frac{\partial X}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial X}{\partial K} \qquad (1)$$

se $k \equiv 1$ (homogênea de grau um) $\Longrightarrow X = L \cdot \dfrac{\partial X}{\partial K} + K \cdot \dfrac{\partial X}{\partial K}$ (2)

* Professor de economia da EPGE.

o que soluciona o problema da exaustão. De fato fazendo $\lambda = \frac{1}{L}$ e chamando $\frac{X}{L} = G\left(\frac{K}{L}\right)$

$$\frac{\partial x}{\partial L} = G\left(\frac{K}{L}\right) - G'\left(\frac{K}{L}\right) \cdot \frac{K}{L} \quad \text{onde} \quad G'\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{d\,G\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)} \tag{3}$$

$$\frac{\partial X}{\partial K} = G'\left(\frac{K}{L}\right) \tag{4}$$

substituindo (3) e (4) em (2)

$$L \cdot G\left(\frac{K}{L}\right) - K \cdot G'\left(\frac{K}{L}\right) + K \cdot G'\left(\frac{K}{L}\right) = L \cdot G\left(\frac{K}{L}\right) = X$$

Observem que se $k > 1$, (retornos *crescentes* de escala)

$L \cdot \frac{\partial X}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial X}{\partial K} > X$, isto é, neste caso o pagamento dos fatores pelas suas produtividades marginais *excederia* o produto.

Ao mesmo tempo $k < 1$ (retornos decrescentes de escala)

$$L \cdot \frac{\partial X}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial X}{\partial K} < X$$

isto é, o pagamento dos fatores pelas suas produtividades marginais seria inferior ao produto.

2. Introduzindo a noção de equilíbrio em competição

Duas outras importantes conseqüências da hipótese de homogeneidade de grau um:

(a) o lucro de longo prazo é *zero*

$$\text{por (2) } X = L \cdot \frac{\partial X}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial X}{\partial K}$$

$$pX = L \cdot p \cdot \frac{\partial X}{\partial L} + K \cdot p \cdot \frac{\partial X}{\partial K}$$

$pX = L \cdot \omega + K \cdot p_k$, isto é, receita = despesa

(b) o tamanho da firma é indeterminado. Isto porém não afeta o equilíbrio de longo prazo, já que competição perfeita implica conhecimento perfeito e comportamento totalmente racional. Portanto, se uma firma tentar expandir a produção, ela será imediatamente seguida por todas as outras.

3. Demonstração com base exclusiva na idéia de equilíbrio de longo prazo com lucro zero

3.1 Assim se

a função de produção *não é* homogênea mas duas hipóteses são satisfeitas:

1.º os empresários maximizam lucros;

2.º o lucro máximo de longo prazo é zero;

então pagamento dos fatores seguindo as suas produtividades marginais irá necessariamente exaurir o produto.

3.2 Supondo inicialmente o caso particular de competição perfeita

A primeira hipótese implica

$$\omega_i = p_o \cdot \frac{\partial X}{\partial qi} \tag{5}$$

isto é, o preço do fator é igual ao *valor* de sua *produtividade marginal*.

p_o = Preço do produto final (fixo por competição)

ω_i = Preço de cada fator (também dado para a firma)

$\frac{\partial X}{\partial q_i}$ = Produtividade marginal (física)

A segunda hipótese implica

$$\pi = RT - CT = 0$$

$$\therefore \; p_o \cdot X - \Sigma_i \, \omega_i \, q_i = 0. \tag{6}$$

Assim, em *equilíbrio* (isto é para um *determinado nível de produção*),

podemos reescrever

$$p_o X = \Sigma \, p_o \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} \cdot q_i \tag{7}$$

isto é, pagamento pelas produtividades marginais exaure o produto se adotarmos a hipótese de *equilíbrio local,* onde neste caso todas as firmas produzem no mesmo ponto mínimo de sua curva de custo médio. Observem que não há o que demonstrar em (7), já que ela decorre *logicamente* das proposições (5) e (6).

3.3 O resultado anterior pode evidentemente ser generalizado para **competição imperfeita** no caso (sem dúvida especial como a do modelo da firma representativa de Chamberlain) em que o equilíbrio de longo prazo também se dá com lucro zero. Neste caso o nível de produção será necessariamente **inferior** àquele obtido no **ponto mínimo** da curva de custo médio.

Assim, no caso mais geral de *monopólio* no mercado de produto e *competição* no mercado de fatores, a primeira hipótese implica

$$\omega_i = RMA \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} \tag{8}$$

isto é, a firma monopolista irá determinar a quantidade empregada de cada fator, ponderando a sua produtividade marginal física pela sua contribuição (marginal) para a receita (RMA).

A segunda hipótese implica

$$\pi = RT - CT = 0 \tag{9}$$

então o pagamento segundo a receita marginal-produto $(RMA \cdot PM_i)$ (*marginal revenue product*) também irá exaurir o produto.

Isto é, combinando (8) e (9), a expressão seguinte é *necessariamente verdadeira* para os valores de equilíbrio de X (produção)

$$p \cdot X = \Sigma \, \omega_i \, q_i \tag{10}$$

$$RME \cdot X = \Sigma \, RMA \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} \cdot q_i$$

onde RME = Receita média

4. Comparação dos resultados obtidos com a hipótese de equilíbrio local com aqueles derivados exclusivamente da hipótese tecnológica

Assim, no caso mais geral de *monopólio e monopsônio,* as duas hipóteses de equilíbrio de mercado levariam a

$$p \cdot X = \Sigma \frac{RMa \cdot PMi}{\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_i}\right)} \cdot q_i \tag{11}$$

isto porque o monopsonista-monopolista *em equilíbrio* iguala a *receita marginal-produto* ($RMa \cdot PMi$) do fator com o seu *custo marginal* (CMF_i) que é necessariamente mais elevado do que o preço do fator i uma vez que a curva de oferta do fator é *positivamente* inclinada. Isto é, equilíbrio monopolista-monopsonista significa que

$$RMa \cdot PM_i = CMF_i$$

ou

$$RME \cdot \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = \omega_i \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_i}\right) \tag{12}$$

δ = Elasticidade da demanda pelo produto final

ε = Elasticidade da oferta do fator i

ω = Preço de oferta do fator i

Vamos agora desenvolver (11) *não para provar a igualdade,* mas sim para gerar uma expressão comparável àquela obtida pelo teorema de Euler:

Combinando (11) e (12) obtemos:

$$\frac{RMA}{\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)} \cdot X = RMA \cdot \Sigma \frac{PM_i}{\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_i}\right)} \cdot q_i$$

$$X = \Sigma \frac{q_i \, PM_i}{1 + \frac{1}{\varepsilon_i}} - \frac{1}{\delta} \cdot \Sigma \frac{q_i \, PM_i}{1 + \frac{1}{\varepsilon_i}} \tag{13}$$

enquanto pelo teorema de Euler tínhamos

$$X = \Sigma \; q_i \cdot PM_i \tag{14}$$

A conclusão a que chegamos da comparação entre (13) e (14) é de que não temos efetivamente no caso anterior uma função homogênea de grau um. Em outras palavras este resultado confirma a idéia de que a hipótese de equilíbrio local com lucro zero permite exaurir o produto mesmo com competição imperfeita sem que o teorema de Euler seja satisfeito.

Tomemos agora $\varepsilon_i = \infty$ (isto é, competição no mercado de fatores)

então (13) torna-se $X = \Sigma \, q_i \cdot PM_i - \frac{1}{\delta} \Sigma \, q_i \cdot PM_i$ (15)

Este resultado tem duas implicações:

1. Em competição imperfeita, a firma em equilíbrio *não* pode pagar ao fator o *valor* de sua produtividade marginal; caso contrário, a soma desses pagamentos *excederia* o produto total. Ela tem que pagar menos, e esta parcela depende das elasticidades da demanda pelo produto e da oferta de fatores, que refletem o grau de imperfeição, respectivamente, no mercado de produtos e no mercado de fatores.

2. Se quisermos imaginar uma função de produção *homogênea* que seja consistente com o resultado (15) esta é certamente uma de grau *superior a um*. De fato recordem que quando $k > 1$, $\Sigma \; q_i \cdot PM_i > X$. Este resultado também é lógico do ponto de vista econômico já que o retorno *crescente* de escala significa que firmas maiores são mais lucrativas do que firmas menores, o que estimula o aumento do tamanho da firma cujo resultado final é, em maior ou menor grau, monopólio.

Finalmente observem que se $\delta = \infty$ (competição também no mercado de produto) (13) torna-se

$$X = \Sigma \; q_i \cdot PM_i \tag{16}$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido a partir da hipótese de homogeneidade de grau um (teorema de Euler). Porém no nosso caso esta *equação* reflete apenas a idéia fundamental de equilíbrio local com lucros zero (todas as firmas produzindo no mesmo custo médio mínimo), sem qualquer referência a característica da função de produção.

Resumo

Os pontos fundamentais da discussão são:

1.º Não é necessário impor restrições tecnológicas para obter o resultado de que o pagamento segundo as produtividades marginais exaure o produto.

2.º A hipótese de equilíbrio local e lucros zero de longo prazo leva à mesma conclusão, inclusive no caso de mercados imperfeitos.

3.º A comparação entre os resultados obtidos a partir da demonstração tecnológica e da de mercado sugere que firmas em competição imperfeita, a fim de exaurir o produto (lucro zero), não podem pagar o valor da produtividade marginal dos fatores empregados e sim a receita marginal-produto $(RMA \, . \, PM_i)$ desses mesmos fatores.

Bibliografia

Henderson, J. M. & Quandt, R. E. *Microeconomic theory.* New York, McGraw-Hill Books, 1958.

Samuelson, Paul. *Foundations of economic analysis.* Cambridge, Harward University Press, 1963.