A questão da dinâmica de preços de ativos financeiros*

Marcelo Fernandes**
Ilan Gleiser***

Sumário: 1. Introdução; 2. Procedimentos matemáticos de evidenciação de processos caóticos: descrição e problemas; 3. A diferenciação entre caos determinístico e processos estocásticos; 4. As investigações empíricas; 5. Comentários finais.

1. Introdução

Muitos estudos sobre a aplicação de processos estocásticos aos movimentos de preços de ações foram apresentados desde o início dos anos 50. Anteriormente, a tendência das pesquisas era buscar estabelecer, estatisticamente, uma aproximação de preços de ações à hipótese de *random walk*, calcada em incrementos independentes e da variância finita. As evidências empíricas mais consistentes foram desenvolvidas por Kendal (1953) e Moore (1962).

Enquanto alguns autores criticam a adoção da hipótese de *random walk* a partir do pressuposto de incrementos independentes, Alexander (1961 e 1964), Cootner (1962) e outros, Mandelbrot (1963) e Fama (1963a e b) questionam a hipótese de os incrementos seguirem distribuição gaussiana. De qualquer forma, abriu-se espaço para a introdução de outras distribuições de probabilidades, como a Pareto-Levy proposta por Mandelbrot (1963), e de novos instrumentos estatísticos na análise dos movimentos de preços de ações.

Alexander (1961) utiliza uma série de índices de preços de ações para testar a hipótese de incrementos gaussianos independentes. Contudo, os resultados não diferem muito dos apresentados por Kendall. A idéia central de seus ensaios (Alexander, 1961 e 1964) gira em torno da existência de uma tendência presente em determinados intervalos de tempo, mas insignificante em alguns períodos. Assim sendo, se os incrementos são realmente independentes, então inexiste qualquer estratégia de mercado que possibilite lucros extraordinários. A partir dessa hipótese, Alexander tenta desenvolver uma estratégia de mercado fundamentada na filtragem de movimentos de preços abaixo de certo nível. Considerando os movimentos apenas acima do nível estabelecido, essa regra acaba por resultar em investimentos substancialmente bem-sucedidos, contrariando a hipótese de *random walk*.

O trabalho posterior de Alexander (1964) corrigiu alguns erros de procedimento no processo de filtragem. Contudo, segundo Cootner (1964), o método de filtragem considerado pode apresentar comportamento similar a outras estratégias de mercado, com ganhos mais

* Gostaríamos de agradecer o incentivo, a orientação e as sugestões dadas pelos professores Antonio Maria da Silveira e Renato Galvão Flôres Júnior. Os comentários dos participantes do I Fórum Interdisciplinar: Caos, Acaso e Determinismo nas Ciências, Artes e Filosofia, realizado no Fórum de Ciência e Cultura da UFRJ, também foram proveitosos.

** Mestrando da EPGE/FGV.

*** Mestrando do IEI/UFRJ.

freqüentes do que perdas, mas ocasionalmente produzindo também grandes prejuízos. Os resultados podem inclusive ser questionados quanto ao pressuposto de uma natureza não-linear, particularmente não necessário. Se o processo estocástico envolvido apresentasse caráter não-estacionário, os resultados exibiriam comportamento semelhante.

Assim como Alexander, Cootner (1962) também apresenta uma regra de decisão com melhores resultados do que um método de compra aleatória de ações. Evidentemente, tal resultado já implica ou em dependência ou em não-estacionariedade da série. A hipótese sugerida por Cootner define o movimento de preços de ações como seguindo um processo de *random walk* restrito, caracterizado por leptocurtose, um comportamento flutuante na correlação serial e um padrão que explique o sucesso das estratégias elaboradas por Alexander e pelo próprio Cootner. A partir daí, Cootner aborda possíveis desvios de um processo gaussiano.

Utilizando uma série dos movimentos de preços de ações, Fama (1963a) realiza toda uma investigação empírica em torno da validade da hipótese de *Stable Paretian*, complementando os resultados encontrados por Mandelbrot (1963). As propostas de natureza mais teórica das hipóteses de Mandelbrot são expostas com grande clareza em Fama (1963b).

Apesar de muitos outros trabalhos terem reexaminado o assunto, limitamo-nos aqui a avaliar a corrente empenhada em evidenciar processos de natureza própria do caos determinístico. Em outras palavras, comportamentos aparentemente aleatórios, mas de ordem determinística, em que há uma grande dependência das condições iniciais.

2. Procedimentos matemáticos de evidenciação de processos caóticos: descrição e problemas

Os métodos matemáticos normalmente utilizados partem do princípio de medir o grau de dependência das condições iniciais ou de tentar verificar uma dimensão fractal no espaço de fase. Contudo, nenhum dos testes é suficientemente completo para evidenciar consistentemente um padrão caótico. Desse modo, torna-se necessária a aplicação de diferentes testes para a mesma série de dados para se ter uma comprovação consistente. Dentre esses testes podemos citar:

a) *Entropia de Kolmogorov*: mede a sensibilidade de dependência das condições iniciais através da mensuração da velocidade com que dois pontos inicialmente muito próximos se dispersam até se tornarem distinguíveis um do outro. Sendo assim, para se comprovar a presença do caos determinístico, a estatística deve ser diferente de zero, de modo a representar a existência de um distanciamento dos dois pontos considerados.

b) *Expoente máximo estimado de Lyapunov* (Brock, 1986): também busca medir o grau de dependência das condições iniciais mensurando a distância entre dois pontos inicialmente muito próximos ao longo do tempo. Deve portanto ser positivo para sistemas caóticos.

c) *Box-counting dimension*: busca medir a capacidade dimensional do atrator, de modo a verificar se sua dimensão é ou não fractal. Para tal, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$d = \lim_{e \to \infty} \ln N(e)/\ln(1/e)$$

onde d é a dimensão e $N(e)$ o número mínimo de quadrados de lado e necessários para preencher o atrator.

d) *Correlação de Dimensão* (Grassberger & Procaccia, 1983): busca medir a dimensão da série temporal observada e tem que ser baixa (menor que dois dígitos) para sistemas caóticos. Parte da estimativa da probabilidade de dois pontos quaisquer estarem a certa distância um do outro e das alterações dessa probabilidade a partir de incrementos na distância desses dois pontos.

e) *Estatística BDS* (Brock, Dechert & Scheinkman, 1987): desenvolve um teste geral para dependência da série de dados sob a hipótese nula de que os dados são independentes e identicamente distribuídos (IID). Desse modo, testa tanto a não-linearidade como a correlação serial.

f) *Teste Residual* (Brock, 1986): para confirmar a presença de caos determinístico na série, deve-se estimar a mesma Entropia de Kolmogorov e a mesma dimensão da série temporal para os resíduos de uma aproximação via um modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*)[1] ou GARCH (*Generalized ARCH*).[2]

g) *Shuffle Diagnostic* (Scheinkman & LeBaron, 1989): teste de significância, onde se misturam os dados observados, de modo a torná-los teoricamente IID, e se refazem os demais testes de evidenciação para essa nova série. A série construída aleatoriamente deve ter resultados bem distintos dos dados brutos (iniciais) para comprovar a presença de determinado grau de dependência na série original considerada.

Jaditz & Sayers (1992) destacam a importância da filtragem dos dados, principalmente se a série se caracterizar por blocos de volatilidade (*volatility clustering*), uma vez que evita as relações espúrias de dependência. Para tal utilizam modelos do tipo ARCH ou GARCH e analisam seus resíduos em busca de dependências adicionais.

Brock, Hsieh & LeBaron (1991) constatam que séries temporais geradas por processos caóticos exibem dependência mesmo após a aplicação de filtros de modelos tipo ARCH. O procedimento de filtragem pode ser interpretado como um teste de especificação com o modelo ARCH (ou GARCH), sendo a hipótese nula. No caso de a hipótese nula ser rejeitada, isto é, os resíduos do modelo não apresentarem caráter IID, demonstra-se um padrão caótico da série temporal considerada.

Evidentemente, os testes possuem algumas limitações que devem ser cuidadosamente observadas para não se chegar a conclusões deturpadas. Em primeiro lugar, a não-estacionariedade dos dados prejudica a adoção dos critérios da Entropia de Kolmogorov e da Correlação de Dimensão, uma vez que torna suas estimativas imprecisas. Como a maioria das séries agregadas é não-estacionária, limita-se muito o universo de pesquisa de processos caóticos na economia, onde pode-se destacar o maior grau de confiabilidade das séries financeiras. Outro ponto refere-se ao uso de pequenas amostras, pois a teoria da estatística-U, pressuposta nos critérios mencionados, depende da característica de distribuição assintótica

[1] Ver Engle (1982).

[2] Ver Bollerslev (1986).

para ter boas aproximações.[3] Assim, para não se ter estimativas enviesadas, necessita-se de amostras bem grandes, que nem sempre são disponíveis e/ou confiáveis.

Outro problema é a limitação quanto ao número de variáveis, o que dificulta a identificação de propriedades em sistemas de maiores dimensões. Desse modo, só há condições de identificar processos caóticos de baixa dimensão, o que implica modelos reducionistas. De acordo com Boldrin (1992): *"Intuitively it seems clear that if the economy is driven by some nonlinear dynamical system it has to be one with a high number of degrees of freedom"*.

Portanto, a dificuldade de identificar o caos determinístico nos movimentos e flutuações econômicas é bastante significativa, não só na esfera da própria natureza dos dados, mas também devido a impedimentos de ordem teórica.

3. A diferenciação entre caos determinístico e processos estocásticos

O modelo de mercado de ativos eficientes, normalmente utilizado, é calcado na redução do agente ao homem econômico — decisor racional que busca defender seus interesses utilizando sua capacidade ilimitada de cálculo e de plena informação para avaliar, sob forma de relação custo-benefício, todas as alternativas e escolher aquela que maximize sua satisfação.

Quando o mercado é bem organizado e altamente competitivo, o paradigma linear o define como mercado perfeito. As forças de oferta e demanda conduzem a um equilíbrio no nível de preços dos ativos, tornando o preço corrente a melhor estimativa para preços futuros. Desse modo, os movimentos de preços somente poderiam ser criados a partir de novas informações no mercado. Como não há razão para se esperar que o surgimento de informações tenha qualquer raiz não-aleatória, os movimentos do nível de preços dos ativos devem ser independentes uns dos outros, seguindo um comportamento aleatório. Havendo grande número de movimentos independentes de preços, no limite, a distribuição de probabilidade converge para a distribuição normal, como postula o teorema central do limite. A hipótese de que a distribuição de probabilidade dos retornos converge para uma distribuição normal possibilita uma grande quantidade de testes estatísticos e técnicas de modelagem, que por sua vez garantem soluções ótimas para o processo de decisão.

Segundo Mandelbrot (1963), Bachelier (1900) foi o primeiro a desenvolver um modelo estocástico, analisando os preços de ativos. Bachelier baseou seu modelo nas seguintes hipóteses:

a) as variações sucessivas dos preços são independentes;

b) todos os preços seguem um comportamento característico do processo de Martingale, caracterizando um mercado perfeito;

c) as imperfeições do mercado se mantêm apenas quando são inferiores aos custos de transação e, sendo assim, não comprometem as demais hipóteses;

d) os preços competitivos seguem um movimento browniano, também conhecido como processo de Wiener (simultaneamente um processo de Markov e um Martingale).

---

[3] Ver Jaditz & Sayers (1992).

Contudo, Mandelbrot criticou duramente o modelo desenvolvido por Bachelier, baseado na falta de evidências empíricas para dados mais atualizados e na *descontinuidade dos preços.* Esta última crítica refere-se à necessidade de continuidade dos dados para a adoção do movimento browniano, que parte da hipótese de comportamento gaussiano, demonstrado a partir de um *random walk* no tempo contínuo e de deslocamentos infinitesimais.

Mandelbrot chegou a assinalar que a aceitação de continuidade não passa de uma simples cópia, consciente ou não, dos métodos de sucesso comprovado da física newtoniana. Para demonstrar a existência de descontinuidade nas séries de preços de ativos, Mandelbrot apresentou alguns motivos, sendo que o principal consiste em alterações das variáveis que formam o preço durante o período em que o mercado de ativos permanece fechado. Tais mudanças podem gerar, na abertura do mercado, bruscas variações nos preços, caracterizando uma descontinuidade na série observada.

Além da crítica específica ao modelo apresentado por Bachelier, Mandelbrot acusa ainda alguns economistas de insistirem mesmo assim em enquadrar as séries de preços de ativos em comportamentos gaussianos. Para tal, esses "insistentes" economistas se valem, principalmente, de três métodos:

a) separar as grandes variações dos preços, que causam a descontinuidade da série, como componente não-estocástico, enquanto que as pequenas variações são analisadas como seguindo um comportamento gaussiano;

b) utilizar transformações lineares ou não-lineares (como a logaritmação) nas variáveis, de modo a encaixá-las no contexto gaussiano, como sugerido por Tukey (1957);

c) considerar que os preços seguem um processo estocástico, porém com parâmetros incontroláveis, tornando assim o modelo *ad hoc* e incontestável, em contradição com o conceito de modelo científico elaborado por Popper.

O modelo de Mandelbrot pressupõe uma variância infinita, o que torna irrelevante o caráter estacionário ou não dos preços de ativos. Em conseqüência, algumas ferramentas estatísticas, baseadas no princípio de variância finita (por exemplo, regressões do tipo mínimos quadrados), se tornam altamente imprecisas. Uma vez aceita a hipótese de Mandelbrot, os trabalhos anteriores acerca de preços especulativos, quase sempre calcados em estatísticas que assumem variância finita, passam a ter resultados duvidosos.

Além de considerar a variância infinita, Mandelbrot construiu o *princípio de escala na economia,* afirmando que não há qualquer razão suficiente para se presumir que uma escala de tempo pode ser mais relevante que outra. Exatamente o inverso dos critérios do processo de Wiener, que levam em consideração escalas de tempo diferençadas. Os processos estocásticos partem da convicção de que as pequenas modificações dinâmicas, transitórias e imprevisíveis não têm relação com as mudanças estruturais de longo prazo, diferençando assim as escalas de tempo. Mandelbrot, por outro lado, assume uma concepção de escalas de tempo em que as amplas oscilações de preços durante meses, anos ou até décadas são determinadas a partir de forças de mercado. Todas essas escalas diferentes de tempo seguem o mesmo padrão, uma simetria observada através de seus diagramas fractais.

A forma irregular com que os agentes assimilam as informações, não tomando decisões até que surjam novas tendências, pode causar um viés no passeio aleatório. Passeios aleatórios

enviesados foram estudados a fundo por Hurst na década de 40 e por Mandelbrot nas décadas de 60 e 70. Hurst elaborou uma estatística essencial para se verificar a aleatoriedade ou não de uma dada série temporal: a estatística H. Partindo do reescalonamento da série a partir da análise R/S,[4] H pode assumir valores entre zero e um. No caso de um passeio aleatório, espera-se um H de 0,5, indicando a independência das observações; caso contrário, evidencia-se a presença de correlação serial de longa memória.[5]

Quando se estima H no intervalo (0,5, 1], a estatística indica um comportamento persistente com tendência na série. A força dessa tendência é função direta do valor de H, ou seja, quanto mais próximo da unidade, mais forte será a tendência. De acordo com Mandelbrot (1983), o inverso de H é a dimensão fractal e, por isso, séries persistentes se comportam como um movimento browniano fractal (ou passeio aleatório enviesado). Vale lembrar que a estimativa de H nada sugere sobre a distribuição, ou seja, H = 0,5 não significa um passeio aleatório gaussiano; define apenas que não há um processo de longa memória. Para testar a validade e significância da estatística H, deve-se realizar o método de *Shuffle Diagnostic* desenvolvido por Scheinkman e LeBaron (1989).

Fazendo a análise R/S para o índice Standard & Poors (S&P500) da bolsa de Chicago, Peters (1991) estimou H = 0,78, e H = 0,51 após a aplicação do *Shuffle Diagnostic*. Esses resultados demonstram o comportamento persistente da série considerada, evidenciando o comportamento fractal da distribuição de probabilidade e um passeio aleatório enviesado.

4. As investigações empíricas

Muitos trabalhos chegaram a reivindicar sucesso na tentativa de evidenciar o caos determinístico em séries econômicas. Nesta seção, citaremos alguns deles, assim como as críticas que normalmente receberam. Contudo, o primeiro estudo, Mandelbrot (1963), não chegou a tentar comprovar a presença de um padrão caótico, limitando-se apenas a criticar os modelos estocásticos (críticas já apresentadas aqui anteriormente).

Geralmente, instituições de mercado tendem a amortecer dinâmicas complexas. Desse modo, cria-se a propensão a examinar casos em que as instituições de mercado são insuficientes para amortecer os efeitos de uma dinâmica complexa. Como os produtos agrícolas ainda sofrem grandes influências das condições climáticas — que são caóticas por natureza, segundo os estudos de Lorenz (1963) e Mandelbrot & Wallis (1969) —, o mercado no qual estão inseridos se mostra ideal para se tentar comprovar o caos determinístico. Como os preços do algodão eram uma fonte ideal de dados, por terem registros centralizados, completos e antigos, Mandelbrot passou a analisá-los a partir de uma série de 1.614 observações mensais do Departamento de Agricultura dos EUA, correspondentes ao período de 1814 a 1950. Tal estudo resultou em um modelo — estruturado na geometria fractal — de alto poder de previsão, porém sem qualquer indicativo quanto à natureza do movimento, isto é, do porquê dos preços de algodão exibirem tal comportamento.

O primeiro estudo completo a utilizar retornos diários foi realizado por Fama (1965), indicando *skewness* negativo e *kurtosis* alta (leptocurtose) para a série. Sharpe (1970) e Turner & Weigel (1990) encontraram resultados semelhantes em seus respectivos estudos sobre

---

[4] Ver Peters (1991).

[5] Ver Peters (1991) e Mandelbrot (1983).

volatilidade.[6] Tais características são próprias da distribuição *Stable Paretian* (ou Pareto-Levy), conhecida por apresentar tendências e ciclos, assim como mudanças abruptas e descontínuas. Desse modo, torna-se evidente que a generalização da hipótese de *random walk* e distribuição normal é indevida.

Outro modelo interessante foi proposto por Barnett & Chen (1988), analisando o grau de controle do estoque de moeda no período situado entre 1969 e 1984. O expoente máximo de Lyapunov estimado foi positivo e o coeficiente de Correlação de Dimensão baixo. Outros testes também foram adotados, como o retrato do espaço de fase e *plots* da função de autocorrelação.

Um dos primeiros artigos a tentar estimar a Entropia de Kolmogorov e a Correlação de Dimensão foi o de Scheinkman & LeBaron (1989), em que se adotou uma amostra de aproximadamente mil observações semanais de um índice de preços de ações. Como teste de significância, Scheinkman & LeBaron aplicaram o *Shuffle Diagnostic*, encontrando significativas diferenças entre a série original e a resultante do método de *Shuffle*.

Apesar dos resultados atraentes, Ramsey, Sayers & Rothman (1990), reexaminando os dados de Scheinkman & LeBaron, encontraram uma subamostra de 25 semanas que direcionava a Correlação de Dimensão para baixo. Excluindo esse período, a Correlação de Dimensão crescia consideravelmente, indicando um provável caráter não-estacionário da série.

Outros trabalhos também podem ser destacados: Frank & Stengos (1989) analisaram séries de ouro e prata; Hiemstra (1992) reexaminou o mesmo índice utilizado por Scheinkman & LeBaron (1989), mas se valeu de aproximadamente 6.400 observações diárias. Mayfield & Mizrach (1992) estimaram a Entropia de Kolmogorov, além de realizarem o *Shuffle Diagnostic* e filtragem pelo modelo GARCH, para o índice S&P500, a partir de 19.027 observações de intervalos de 20 segundos.

5. Comentários finais

Se o mercado de capitais for um sistema dinâmico não-linear, deve-se esperar os seguintes comportamentos:

a) autocorrelação e tendência de longo prazo (efeito *feedback*);

b) mercados imprevisíveis em certos momentos e condições, permitindo mais de um ponto de equilíbrio (níveis críticos);

c) uma série temporal de retornos que, dados pequenos incrementos de tempo, continue a ter características estatísticas similares (auto-similaridade);

d) previsões menos confiáveis quanto mais longo for o prazo de análise (sensibilidade às condições iniciais).

Essas características descrevem um mercado que não se enquadra no contexto da hipótese de mercado eficiente, contexto que dominou a economia financeira nos últimos 30 anos. Esse

[6] Ver Peters (1991).

paradigma de comportamento reduz a matemática a equações diferenciais lineares com uma única solução. Contudo, é evidente que o mercado não é simples e linear, mas complexo e não-linear.

Quanto ao impasse entre a utilização de processos estocásticos e modelos determinísticos, observamos a formação de duas linhas, principalmente no mercado financeiro. Atualmente é comum encontrar consultorias calcadas em CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) e Black & Sholes, critérios desenvolvidos sob a hipótese de mercado eficiente. Por outro lado, a utilização de métodos fractais e modelos caóticos para analisar os movimentos dos ativos se torna cada vez mais freqüente, principalmente nos EUA. Nesse ponto, voltamos a salientar que considerar as oscilações econômicas como integrantes de um comportamento caótico determinístico implica aceitar que os mecanismos de mercado são dinamicamente instáveis devido às forças endógenas.

Referências bibliográficas

Alexander, Sidney S. Price movements in speculative markets: trends on random walks. *Industrial Management Review*, 2(2): 7-26, 1961.

———. Price movements in speculative markets: trends on random walks, 2. In: Cootner, P. H. (ed.) *The random character of stock market prices*. Cambridge, MIT Press, 1964. p. 338-72.

Bachelier, Louis. Theory of speculation. [1990]. In: Cootner, P. H. (ed.). *The random character of stock market prices*. Cambridge, MIT Press, 1964. p. 17-78.

Barnett, W. A. & Chen, P. The aggregation-theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractors: an economic application of mathematical chaos. Barnett, W. A.; Berndt, E. R. & White, H. (eds.). *Dynamic Econometric Modelling; Proceedings of the Third International Symposium on Economic Theory and Econometrics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1988, p. 199-245.

Bollerslev, Tim. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* (31): 207-327, 1986.

Boldrin, Michele. *The impact of chaos on economic theory*. Evanston, Il., Northwestern University, 1991 (inédito).

Brock, William A. Distinguishing random and deterministic systems: abridged version. *Journal of Economic Theory, 40*: 168-95, 1986.

———; Dechert, D. W. & Scheinkman, J. *A test for independence based on the correlation dimension*. University of Wisconsin, Madison, University of Houston & University of Chicago, 1988. mimeog.

———; Hsieh, D. & LeBaron, B. *A test for nonlinear dynamics, chaos and instability*. Cambridge, MA, MIT Press, 1991.

Cootner, Paul H. Stock prices: random vs. systematic changes. *Industrial Management Review, 3*(2): 24-45, Spring 1962.

———. Introduction to part III: the random walk reexamined. In: Cootner, P. H. (ed.). *The random character of stock market prices*. Cambridge, MIT Press, 1964. p. 189-97.

Engle, Robert. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U. K. inflation. *Econometrica, 50*: 987-1.007, 1982.

Fama, Eugene F. *The distribution of changes of the logarithm of stock prices*. University of Chicago, 1963a (PhD Dissertation).

———. Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis. *Journal of Business, 36*(4): 420-9, Oct. 1963b.

———. The behaviour of stock market prices. *Journal of Business, 38*: 34-105, 1965.

Frank, M. Z. & Stengos, T. Measuring the strangeness of gold and silver rates of return. *Review of Economic Studies* (2): 103-33, 1989.

Grassberger, P. & Procaccia, I. Characterization of strange atractors. *Physical Review Letters, 50*: 346-9, 1983.

Hiemstra, C. Detection and description of nonlinear dynamics using correlation integral based estimators. 1992. mimeog.

Jaditz, T. & Sayers, C. L. *Are chaotic attractors generic in economic data?* Washington, DC, Bureau of Labor Statistics, University of Houston, 1992. mimeog.

Kendall, M. G. The analysis of economic time series, I: prices [1953]. In: Cootner, P. H. (ed.). *The random character of stock market prices*. Cambridge, MIT Press, 1964. p. 11-25.

Lorenz, Edward N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences* (20): 130-41, 1963.

Mandelbrot, Benoit B. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business* (36): 394-419, 1963.

———. *The fractal geometry of nature*. Updated and augmented Edition. New York, W. H. Freeman and Company, 1983.

——— & Wallis, J. R. Noah, Joseph and operational hidrology. *Water Resources Research, 4*: 909-18, 1969.

Mayfield, E. S. & Mizrach, B. On determining the dimension of real time stock price data. *Journal of Business and Economic Statistics, 10*(3): 367-74, 1992.

Moore, Arnold B. A statistical analysis of common stocks prices [1962]. In: Cootner, P. H. (ed.). *The random character of stock market prices*. Cambridge, MIT Press, 1964, p. 139-61.

Peters, Edgar E. *Chaos and order in the capital markets*. New York, Wiley Finance, 1991.

Ramsey, J. B.; Sayers, C. L. & Rothman, P. The statistical properties of dimension calculations using small data sets: some economic applications. *International Economic Review* (31): 991-1.020, 1990.

Scheinkman, J. A. & LeBaron, B. Nonlinear dynamics and stocks returns. *Journal of Business, 62*: 311-37, 1989.

Sharpe, William F. *Portfolio theory and capital markets*. New York, McGraw-Hill, 1970.

Tukey, J. W. On the comparative anatomy of transformations. *Annals of mathematical statistics*. 1957. p. 602-32.

Turner, A. L. & Weigel, E. J. An analysis of stock market volatility. *Russel research commentaries*. Tacoma, WA., Frank Russel, 1990.