Envelhecimento de vinho: irrelevância de taxação na solução de Faustmann

Clovis de Faro*

Considerando o clássico problema do envelhecimento de vinho, mostra-se que, ao contrário do que ocorre no caso de um horizonte finito, que conduz à chamada solução de Jevons, a introdução de uma taxação sobre o lucro contábil não altera a idade ótima de envelhecimento, tal como originalmente obtida por Faustmann, se o horizonte de programação for feito ilimitado.

1. Introdução

Um problema clássico da teoria do capital é o que se refere à determinação da idade ótima de envelhecimento de uma partida de vinho verde. Tal problema, que caracteriza um processo de produção extremamente simples, que costuma ser denominado do tipo insumo pontual — produto pontual (*point-input-point-output*), é usualmente abordado em livros de texto. Assim, entre outros autores, o assunto é estudado por Allen (1938), Baumol (1972), Henderson & Quandt (1971), Hirshleifer (1970) e Simonsen (1980).

Tradicionalmente, como se constata da leitura dos autores citados, o problema é analisado sem que se leve em conta uma possível taxação sobre o lucro contábil associado à operação de envelhecimento do vinho. Mais recentemente, entretanto, tal aspecto foi enfocado por Brenner & Venezia (1983). Todavia, somente foi considerado o caso onde o horizonte de planejamento é finito, coincidindo com o de envelhecimento de uma única partida, o que conduz à chamada solução de Jevons (cf. Baumol, 1972, p. 451).

Após uma rápida revisão do impacto de uma taxação na solução de Jevons, o propósito do presente trabalho é o de estender a análise ao caso de um horizonte infinito de programação. Como iremos mostrar, neste último caso, origi-

* Professor na Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas, no Curso de Mestrado em Engenharia da Produção da UFF e na Faculdade de Ciências Econômicas da Uerj.

R. Bras. Econ.	Rio de Janeiro	v. 40	n.º 2	p. 165-168	abr./jun. 86

nalmente estudado por Faustmann em 1849 (cf. Hirshleifer, 1970, p. 89), a duração ótima de cada ciclo de envelhecimento do vinho é independente da alíquota à qual é taxado o lucro contábil periódico.

2. A solução de Jevons

Seja o caso onde o preço do litro do vinho verde é igual a P_0, sendo que, sem que seja necessária a ocorrência de nenhum custo, após *t* períodos o preço do litro deste vinho suba para P_t. Concentrando atenção no caso onde o objetivo do empreendedor seja o de envelhecer o vinho até a idade em que se alcance o máximo da função valor atual associada à operação considerada, que corresponde ao chamado enfoque fisheriano,[1] designemos por δ a taxa instantânea de juros, suposta invariante com o tempo, que vigora no mercado de capitais. Nestas condições, sendo φ a alíquota incidente sobre o lucro contábil, $P_t - P_0$, que se verifica na data de venda do vinho envelhecido, a função que se quer maximizar é:

$$V(t) = -P_0 + \left\{ P_t - \varphi(P_t - P_0) \right\} e^{-\delta \cdot t} \tag{1}$$

A condição de primeira ordem requer que o vinho seja envelhecido até a idade *t* tal que:

$$\delta = \frac{(1-\varphi)\,P'_t}{(1-\varphi)\,P_t + \varphi \cdot P_0} \tag{2}$$

Por outro lado, observando-se que $0 < \varphi < 1$ e que só ocorre taxação se houver lucro contábil, a condição de segunda ordem exige que, no ponto *t* que seja solução da equação dada por (2), se tenha:

$$(1-\varphi)\left\{ P_t \cdot P''_t - (P'_t)^2 \right\} + \varphi \cdot P_0 \cdot P''_t < 0 \tag{3}$$

Para que se aquilate o efeito que uma variação na alíquota φ acarreta na idade ótima de venda do vinho, consideremos a diferencial total da condição de primeira ordem, fixando atenção ao caso onde a taxa de juros permanece constante. É fácil ver que:

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{P_0 \cdot P'_t}{(1-\varphi)\left\{(1-\varphi)\,[P_t \cdot P''_t - (P'_t)^2\,] + \varphi \cdot P_0 \cdot P''_t \right\}} \tag{4}$$

Logo, em face de (3), conclui-se que, se a função P_t for crescente, o que é o caso normal, um aumento (redução) na alíquota da taxação encurta (alonga) a idade ótima de envelhecimento do vinho.

[1] Para uma comparação com o denominado enfoque wicksselliano, onde o objetivo é a maximização da taxa interna de retorno, bem como outras extensões, ver Faro (1986).

3. A solução de Faustmann

Passemos agora ao exame do caso de horizonte infinito de programação. Neste caso, temos uma repetição ilimitada da operação aquisição de uma partida de vinho verde seguida de seu envelhecimento, operação esta que se denomina ciclo.

Admitindo-se que os parâmetros do modelo, P_0 φ e δ, bem como a função P_t que expressa o preço do litro do vinho com a idade *t*, sejam invariantes com o tempo, cada ciclo terá a mesma duração — digamos, *T* períodos. Nestas condições, fazendo uso do conceito que Manne (1961) denomina de "ponto de regeneração", segue-se que a função valor atual *F (T)* associada à seqüência infinita de ciclos pode ser escrita como:

$$F(T) = -P_0 + \{ P_t - \varphi(P_t - P_0) \} e^{-\delta . T} + F(T) e^{-\delta . T} \qquad \textbf{(5)}$$

$$F(T) = \frac{-P_0 + \{ P_T - \varphi(P_T - P_0 \} e^{-\delta . T}}{1 - e^{-\delta . T}} \qquad (5')$$

Procedendo-se à determinação da duração *T* do ciclo de modo que seja máximo o valor de *F (T)*, chega-se à seguinte relação, dita solução de Faustmann:

$$\delta = \frac{(1 - e^{-\delta . T}) P'_T}{P_T - P_0} \qquad (6)$$

O ponto a observar é que, ao contrário do que ocorre no caso de um único ciclo, a duração de cada ciclo, no caso de repetição indefinida, independe da alíquota φ.

4. Comparação entre as duas soluções

Designemos por $\hat{T}$ a duração do ciclo no caso da solução de Jevons, e por $\overline{T}$ a sua duração quando se considera a solução de Faustmann. Uma indagação interessante é a que diz respeito à comparação entre os valores de $\hat{T}$ e de $\overline{T}$, na hipótese de que permaneçam inalterados os demais parâmetros do problema.

Para que se efetue a comparação mencionada, observe-se que, antes de mais nada, tendo em vista a (1), a relação (5') pode ser reescrita como:

$$F(T) = V(T) / (1 - e^{-\delta . T}) \qquad (5'')$$

Partindo-se de (5''), pode-se mostrar que a solução de Faustmann é convenientemente reescrita como:

$$\delta = \frac{(1-\varphi)\,P'_{\bar{T}}}{(1-\varphi)\,P_{\bar{T}} + \varphi\,.\,P_0 + F(\bar{T})} \tag{6'}$$

Como, no caso de horizonte infinito, só faz sentido envelhecer o vinho se $F(\bar{T})>0$, resulta da comparação direta entre as relações (2) e (6') que teremos $\hat{T} \neq \bar{T}$.

Fixando atenção no caso onde na função P_T seja crescente e côncava, suponha-se, buscando uma contradição, que se tenha $\bar{T} > \hat{T}$. Então, como, por hipótese, $P'_{\bar{T}} < P'_{\hat{T}}$, o numerador da relação (2) supera o da relação (6'). Por outro lado, como $P_{\bar{T}} > P_{\hat{T}}$, o denominador da relação (6') excederá o da relação (2), o que evidencia a contradição desejada.

Por conseguinte, pode-se concluir que, nas condições especificadas, a repetição indefinida do ciclo implica uma redução na sua duração.

5. Conclusão

Evidenciou-se aqui que, diferentemente do que acontece quando se considera a solução de Jevons, que diz respeito a um único ciclo, a introdução de uma alíquota incidente sobre o lucro contábil, no caso de repetição indefinida do ciclo, não acarreta modificação na solução originalmente desenvolvida por Faustmann, para o problema clássico de envelhecimento do vinho.

Referências bibliográficas

Allen, R.G.D. *Mathematical analysis for economists*. New York, St. Martin's Press, 1938.

Baumol, William J. *Economic theory and operations analysis*. 3. ed. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1972.

Brenner, Menachem & Venezia, Itzhak. The effects of inflation and taxes on growth investments and replacement policies. *The Journal of Finance, 38*(5): 1.519-28, Dec. 1983.

Faro, Clovis de. *Capitalização contínua*; aplicações. Rio de Janeiro, Fundação Getulio Vargas, 1986. (Ensaio Econômico da EPGE, nº 70.)

Henderson, James M. & Quandt, Richard E. *Microeconomic theory*; a mathematical approach. 2. ed. New York, McGraw-Hill, 1971.

Hirshleifer, J. *Investment, interest and capital*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1970.

Manne, Alan S. Capacity expansion and probabilistic growth. *Econometrica, 29*(41): 632-49, Oct. 1961.

Simonsen, Mario Henrique. *A teoria do capital*. Rio de Janeiro, EPGE FGV, 1980. mimeogr.