

Distribuição de renda pessoal no Brasil: 1970 e 1980

J.W. Rossi*

O objetivo principal destas notas é estabelecer uma comparação entre as distribuições de renda em 1970 e 1980, com base no ajustamento estatístico de uma função da curva de Lorenz recentemente proposta por Rasche e colaboradores (1980); os dados empíricos provêm dos censos do IBGE.

O bom ajustamento obtido permitiu a estimação detalhada das distribuições, possibilitando uma comparação mais sistemática entre elas. Essa comparação indica um claro agravamento na concentração da renda, que é constatado tanto pelo uso do índice de Gini como pela participação de renda dos vários decis populacionais.

Finalmente, a posição relativa dos grupos populacionais situados na escala inferior da renda é alternativamente avaliada com base no índice proposto por Hagerbaumer (1977), o qual confirma, no caso, a deterioração da posição relativa daquele grupo já constatada com a função da curva de Lorenz utilizada.

1. Introdução; 2. A função da curva de Lorenz utilizada e os resultados obtidos; 3. Considerações sobre a posição relativa do segmento populacional mais pobre; 4. Considerações finais.

1. Introdução

O objetivo principal destas notas é comparar as distribuições de renda de 1970 e 1980, destacando, no caso, a utilidade da função da curva de Lorenz proposta por Rasche e colaboradores (1980). Não nos ocuparemos aqui com as razões das mudanças verificadas, que são tratadas em Rossi (1981).

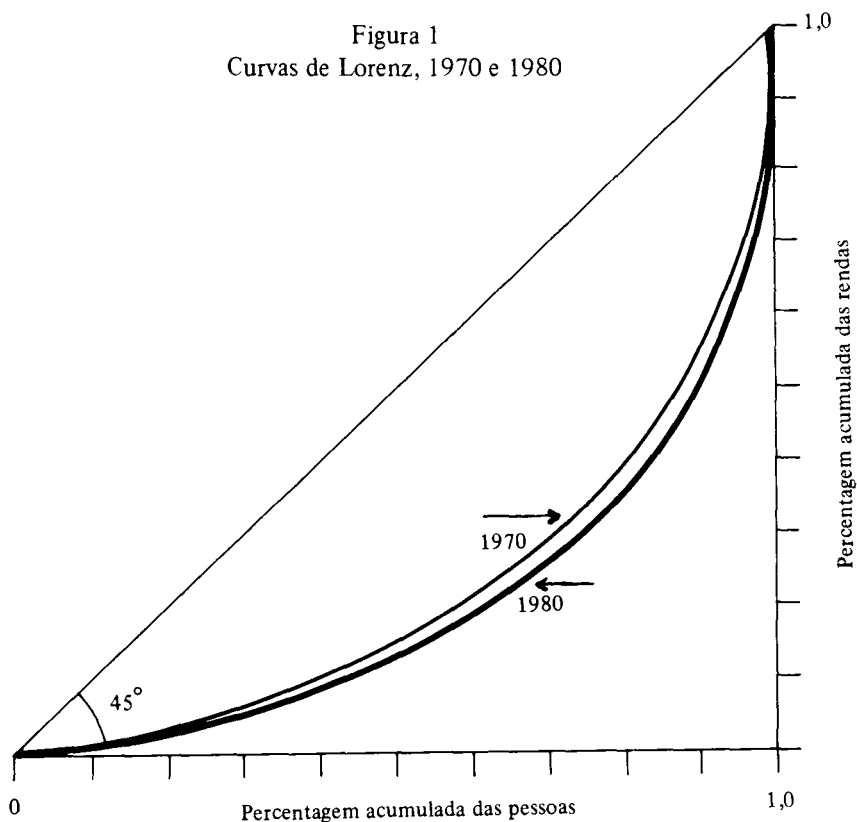
O quadro 1 mostra os dados básicos do estudo e a figura 1 apresenta as curvas de Lorenz correspondentes às duas distribuições de renda. Como é sabido, a curva de Lorenz indica a relação entre as percentagens acumuladas das pessoas (classificadas das mais pobres para as mais ricas), nas abscissas, e as correspondentes percentagens acumuladas das rendas recebidas por tais pessoas, nas ordenadas. Esse procedimento garante que a curva sempre se situe abaixo da linha de 45°, que, por motivos óbvios, é conhecida como a linha da perfeita

* Do Inpes/Ipea e da UFRJ. O autor agradece as várias sugestões de um parecerista desta revista, que muito contribuíram para melhorar esta análise.

igualdade. Assim, quanto mais a curva se afastar da linha de 45° tanto maior será a concentração existente na distribuição.

Como a curva de Lorenz para a distribuição de 1980 situa-se inteiramente à direita (ou abaixo, conforme a ótica em que é examinada) daquela para o ano de 1970, tem-se então um caso inequívoco de aumento na desigualdade das rendas.¹ Nestas circunstâncias, o índice de Gini (dado pela razão da “área entre a curva de Lorenz e a linha de 45°” e a “área sob esta última”) pode ser usado, sem qualquer objeção, para medir a mudança no grau de concentração da renda no período. Antes de efetuar, porém, a comparação entre essas distribuições, vale a pena discutir aspectos de natureza prática relacionados com a estimação da função de Lorenz, pois somente no caso de um bom ajustamento estatístico desta função será possível estabelecer uma comparação detalhada entre as distribuições. O item 2 trata dessas questões, além de analisar os resultados obtidos. O item 3 discute o uso de um índice para avaliar a posição relativa do segmento populacional mais pobre e o item 4 apresenta as considerações finais.

Figura 1
Curvas de Lorenz, 1970 e 1980



¹ Sobre esta questão ver Atkinson (1970).

Quadro 1
Distribuição de renda no Brasil —
dados dos censos de 1970 e 1980

| Classes | População(%) * | | Rendimentos (%) | |
|------------------------------|----------------|------|-----------------|------|
| | 1970 | 1980 | 1970 | 1980 |
| Até meio salário mínimo (SM) | 28,4 | 12,5 | 5,7 | 1,4 |
| Maior que meio até um SM | 32,2 | 20,8 | 15,9 | 5,7 |
| Maior que um até dois SM | 21,7 | 31,1 | 19,6 | 15,2 |
| Maior que dois até cinco SM | 12,7 | 23,6 | 24,7 | 25,7 |
| Maior que cinco até 10 SM. | 3,3 | 7,2 | 14,6 | 17,7 |
| Maior que 10 até 20 SM | 1,3 | 3,2 | 11,8 | 15,2 |
| Maior que 20 SM | 0,4 | 1,6 | 7,7 | 19,1 |

Fonte: Censos demográficos do IBGE, conforme publicado no *Jornal do Brasil*, 23 set. 1981. p. 19.

* População economicamente ativa, cujos números foram de 25,98 e 40,34 milhões de pessoas em 1970 e 1980, respectivamente.

2. A função da curva de Lorenz utilizada e os resultados obtidos

A existência de uma função matemática capaz de representar a curva de Lorenz de maneira precisa permitirá, é claro, obter maiores detalhes sobre a distribuição das rendas. Neste sentido, uma forma funcional particularmente adequada para descrever dados empíricos de renda fora proposta por Rasche e colaboradores (1980), sendo dada por

$$Y = [1 - (1 - X)^{\alpha}]^{1/\beta} \quad (1)$$

com $\alpha > 0$ e $\beta \leq 1$, onde Y e X representam, respectivamente, as percentagens acumuladas das rendas e das pessoas no diagrama de Lorenz. Como mostrado por aqueles autores, a função satisfaz as seguintes condições exigidas pela curva de Lorenz:²

- a) se $X = 0$, $Y = 0$;
- b) se $X = 1$, $Y = 1$;
- c) $Y < X$;

² É interessante notar aqui que a função de Rasche e colaboradores (1980) fora apresentada numa nota crítica sobre uma outra função de Lorenz proposta por Kakwani & Podder (1976), exatamente por esta última não atender todas essas condições de *a a d*. Entretanto, como argumentado por Kakwani (1980) e verificado por Rossi (1982c) com os mesmos dados de renda aqui utilizados, parece difícil, do ponto de vista empírico pelo menos, concluir-se pela superioridade de uma ou outra dessas funções. A evidência empírica mais recente (cf. Rossi, 1985), porém, favorece a função de Rasche e colaboradores (1980).

d) a inclinação da curva é não-negativa e monotonicamente crescente.³

Quanto ao índice de Gini, este poderá ser facilmente obtido a partir dos parâmetros da função (1). Mais precisamente, seja o índice dado por:

$$G = 1 - 2 \int_0^1 [1 - (1 - X)^\alpha]^{1/\beta} dX = 1 - \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \mu^{1/\beta} (1 - \mu)^{1/\alpha - 1} d\mu \quad (2)$$

esta última forma é obtida após adotar a transformação de variável $\mu = 1 - (1 - X)^\alpha$, proposta por Rasche e colaboradores (1980). Como a distribuição beta é definida por

$$B(1 + a; 1 + b) = \int_0^1 z^a (1 - z)^b dz$$

demonstra-se então que

$$G = 1 - \frac{2}{\alpha} B\left(\frac{1}{\beta} + 1; \frac{1}{\alpha}\right) \quad (3)$$

O ajustamento da função (1) aos dados do quadro 1 produziu os resultados do quadro 2, que fornece também o índice de Gini, G , calculado de acordo com a expressão (3).⁴

Quadro 2
Função de Lorenz de Rasche e colaboradores (1980)
ajustada aos dados do quadro 1

| Ano | Parâmetros do ajustamento | | | | | |
|------|---------------------------|---------|--------|-------|--------|--------|
| | α | β | R^2 | G_I | G | G_S |
| 1970 | 0,5055 | 0,6219 | 0,9987 | 0,545 | 0,5705 | 0,5727 |
| 1980 | 0,4936 | 0,6089 | 0,9992 | 0,565 | 0,5900 | 0,5927 |

Observe-se, inicialmente, que é muito bom o ajustamento obtido, pelo menos com relação ao tradicional coeficiente de determinação (R^2). Há ainda outras maneiras de avaliar tal ajustamento. Por exemplo, Gastwirth & Smith (1972)

³ Neste contexto, aliás, Rasche e colaboradores (1980) demonstram que se $\alpha < 1$, tem-se então que: a) a derivada primeira da função (1) quando avaliada no ponto zero é zero, e quando avaliada no ponto um é infinito; b) a derivada segunda é sempre positiva no intervalo $0 < X < 1$. Vale dizer, a função apresenta as restrições apropriadas quanto à convexidade e inclinação de modo a satisfazer as condições de a a d , no texto.

⁴ Note-se que, sendo a função intrinsecamente não-linear (isto é, não há transformação das variáveis que permita colocar a função na forma linear com relação aos seus parâmetros), a sua estimação deverá ser por métodos não-lineares. O método de estimação aqui adotado foi o proposto por Marquardt (1963).

sugerem testar a adequação da forma funcional com base no índice de Gini dela obtido. Mais especificamente, o teste de aderência consiste em determinar se o índice de Gini obtido a partir da função ajustada situa-se dentro do intervalo estabelecido por Gastwirth (1972) para aquele índice. Em linhas gerais, é o seguinte o procedimento para estabelecer tal intervalo. Como limite inferior, tem-se o índice de Gini (G_I) calculado sob a premissa de que todas as pessoas de dado estrato de renda recebam rendas idênticas (isto é, a renda média da classe) — ou seja, a desigualdade dentro do estrato é nula. Vale dizer, a área sob a curva de Lorenz é calculada através da soma dos vários trapézios formados pelos pontos da curva, cujas coordenadas são conhecidas a partir dos próprios dados empíricos; esse é, aliás, o método tradicionalmente empregado na prática para o cálculo do índice de Gini. Para limite superior do intervalo tem-se, por outro lado, o índice de Gini (G_S) obtido admitindo-se que as rendas das pessoas se polarizam nos dois extremos da classe a que elas pertencem, com o problema da alocação das pessoas num e noutro pólo resolvendo-se, é claro, após considerar-se a restrição imposta pela renda média da classe. Vale dizer, o limite superior do índice é obtido considerando-se a desigualdade máxima da distribuição dentro do estrato.⁵ O quadro 2 fornece os valores de G_I e G_S .⁶ Conforme pode-se notar, a forma funcional (1) satisfaz o teste de Gastwirth & Smith (1972), já que o índice de Gini, obtido da função ajustada, situa-se dentro do intervalo determinado por G_I e G_S . Assim, a função pode ser considerada adequada para fornecer uma descrição mais detalhada da distribuição de renda.⁷

A precisão do ajustamento da função (1) pode ser ainda avaliada em termos dos resultados do quadro 3, onde são comparadas as frequências da renda previstas pela função ajustada, com aquelas efetivamente observadas na distribuição. Note-se que também por este critério pode ser considerado bom o ajustamento obtido.

⁵ Mais formalmente esses índices são dados por: $G_S = G_I + D$, onde $D = \sum \lambda_i^2 (\mu_i - a_i - 1)(a_i - \mu_i) \div \mu(a_i - a_i - 1)$, sendo λ_i a proporção de pessoas na classe i ; a_i e $a_i - 1$ são respectivamente o limite superior e o inferior da renda na classe i ; e μ_i e μ são a renda média da classe i e a renda média total, respectivamente. Quanto a G_I , é obtido como descrito no texto. Para detalhes adicionais, ver Gastwirth (1972) ou Rossi (1982b).

⁶ Deve ser observado que o intervalo foi aqui calculado de maneira aproximada, já que: a) em vez das rendas médias das classes, usaram-se (por desconhecê-las) os seus pontos médios; b) na última classe, que é aberta, considerou-se o valor de 40 salários mínimos como limite superior da renda; c) adotou-se a mesma média para os dois anos, pois se conhece a renda média total apenas para a distribuição relativa a 1980. Note-se que as informações exigidas para o cálculo de D (ver a nota 5) obrigaram, em vista das limitações dos dados utilizados, recorrer-se a tais simplificações.

⁷ Ressalte-se aqui que se, por um lado, os poucos graus de liberdade existentes impedem uma avaliação mais adequada quanto à precisão (tanto em termos do R^2 como do intervalo de Gastwirth) do ajustamento estatístico obtido, por outro lado, a confortar-nos tem-se o fato de que uma forma funcional alternativa proposta por Kakwani & Podder (1976), com um razoável desempenho em trabalhos empíricos (cf. Kakwani, 1980), produziu, quando aplicada aos mesmos dados deste estudo, resultados semelhantes aos aqui encontrados (cf. Rossi, 1982c).

Quadro 3
As freqüências relativas da renda (observadas *versus* estimadas)
da função de Lorenz ajustada

| Classes* | Observadas | | Previstas pela função (1) | |
|----------|------------|-------|---------------------------|-------|
| | 1970 | 1980 | 1970 | 1980 |
| 1 | 0,057 | 0,014 | 0,050 | 0,011 |
| 2 | 0,159 | 0,057 | 0,157 | 0,050 |
| 3 | 0,196 | 0,152 | 0,213 | 0,161 |
| 4 | 0,247 | 0,257 | 0,251 | 0,270 |
| 5 | 0,146 | 0,177 | 0,132 | 0,169 |
| 6 | 0,118 | 0,152 | 0,100 | 0,136 |
| 7 | 0,077 | 0,191 | 0,097 | 0,204 |

* As mesmas do quadro 1.

Constatada a precisão do ajustamento da forma funcional aqui usada, o quadro 4 mostra o perfil detalhado das duas distribuições, calculado a partir da função estimada.

Quadro 4
Rendas recebidas (%) nos vários decis populacionais
segundo a função de Lorenz ajustada

| Percentagem Populacional* | Percentagem da renda total recebida | |
|------------------------------|-------------------------------------|-------|
| | 1970 | 1980 |
| 5— | 0,28 | 0,23 |
| 10— | 0,86 | 0,75 |
| 20— | 2,74 | 2,44 |
| 30— | 5,52 | 5,00 |
| 40— | 9,25 | 8,50 |
| 50— | 14,09 | 13,08 |
| 60— | 20,28 | 19,00 |
| 30+ | 71,72 | 73,25 |
| 20+ | 61,01 | 62,74 |
| 10+ | 45,22 | 47,04 |
| 5+ | 32,93 | 34,61 |
| 1+ | 15,21 | 16,35 |

* Sinais negativos e positivos indicam percentagens inferiores e superiores da distribuição, respectivamente.

Cabem aqui as seguintes considerações sobre o grau da concentração encontrada. Inicialmente, é muito elevada a concentração da renda medida pelo índice de Gini. Basta mencionar que mesmo entre os países subdesenvolvidos, sabidamente os detentores das maiores desigualdades de renda, são raros os casos com índice de Gini acima do valor 0,55.⁸ Assim, o aumento na concentra-

⁸ Para detalhes sobre os índices de Gini dos vários países, ver Jain (1975).

ção entre 1970 e 1980 assume contornos mais sérios do que a simples diferença entre os índices de Gini poderia sugerir.⁹

Ainda outros ângulos do aumento da concentração podem ser vistos no quadro 4. Note-se, por exemplo, que enquanto os 10% mais pobres recebiam apenas 0,86% da renda total em 1970, essa participação cai para 0,75% em 1980. Por outro lado, o grupo constituído pelo 1% mais rico se apossava de 15,21% da renda em 1970, e 16,35% em 1980. Particularmente constrangedora é a revelação de que enquanto os 5% mais ricos recebiam, em 1970, mais do que os 70% mais pobres, em 1980 a participação daquele grupo ficava apenas ligeiramente abaixo daquela dos 80% mais pobres. É interessante colocar, uma vez mais, o Brasil em perspectiva internacional. Enquanto os 10% mais ricos recebiam aqui, em 1980, cerca de 47% da renda, essas participações (em percentagem) para um número selecionado de países são dadas no quadro 5.¹⁰ Como se vê, o país assume uma posição de incômodo destaque no âmbito internacional.

Quadro 5
Participação na renda total dos 10% mais ricos
para um grupo selecionado de países

| | |
|---------------------------|------|
| Chile (1968) | 34,8 |
| Argentina (1970) | 35,2 |
| México (1977) | 36,7 |
| Peru (1972) | 42,9 |
| Venezuela (1970) | 35,7 |
| Índia (1965) | 35,2 |
| Japão (1969) | 27,2 |
| Inglaterra (1973) | 23,5 |
| EUA (1972) | 26,6 |
| Noruega (1970) | 22,2 |
| Suécia (1972) | 21,3 |
| Canadá (1969) | 25,1 |
| Alemanha Ocidental (1973) | 30,3 |
| França (1970) | 30,4 |
| Itália (1969) | 30,9 |
| Austrália (1969) | 23,9 |
| Turquia (1973) | 40,7 |
| Espanha (1974) | 26,7 |
| Iugoslávia (1973) | 22,5 |
| Brasil (1980) | 47,0 |

Fonte: *World development report*. Banco Mundial, 1979. (Exceto o caso do Brasil, cuja estimativa é nossa.)

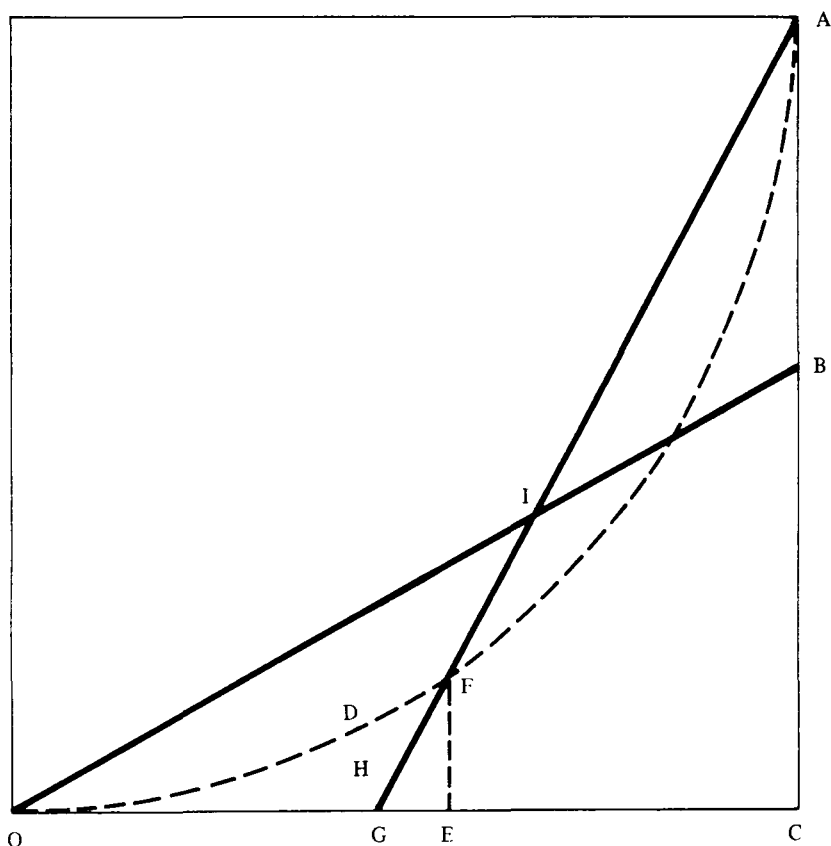
⁹ Aliás, ressalte-se aqui que a distribuição de 1970 já havia registrado um aumento dramático quando comparada com aquela de 1960. Sobre essa questão ver, por exemplo, Fishlow (1972), Langoni (1972) e Hoffmann & Duarte (1972).

¹⁰ De acordo com *World development report*, do Banco Mundial (1979), essa participação foi, no Brasil, de 50,6% em 1972.

3. Considerações sobre a posição relativa do segmento populacional mais pobre

Dos resultados do quadro 4, em particular, parece poder-se concluir pela deterioração na posição relativa dos grupos menos afortunados, entre 1970 e 1980. Seria útil, entretanto, tentar exprimir tal fato através de um índice formal. Hagerbaumer (1977) sugere uma medida que pode servir para tal propósito, isto é, o índice denominado de Menor da Concentração de Gini, dado pela razão D/B , onde $B (= D + H)$ é a área do triângulo OGI , na figura 2, que é formada pelas retas GA e OB . O argumento para essa medida é apresentado a seguir.

Figura 2
Menor da concentração de Gini = $D/(D+H)$



Na figura 2 tem-se, além da curva de Lorenz tradicional (linha pontilhada), cujo índice de Gini é G , duas outras formas (extremas) da curva de Lorenz, OGA e OBA , que têm também índice de Gini G . Enquanto a curva OGA maximiza a fração populacional com renda nula, a curva OBA mostra uma situação onde todos os indivíduos, exceto o mais rico, se apossam de maneira eqüitativa da fração BC da renda total. Portanto, a curva OBA apresenta o caso mais favorável ao segmento populacional menos afortunado, ao passo que a curva OGA mostra o caso menos favorável possível a tal grupo. Obviamente existe uma infinidade de curvas de Lorenz com mesmo índice de Gini, G , representando situações intermediárias entre tais extremos (note-se que a linha pontilhada é um membro da família representada por tais curvas.) Observe-se que todas essas curvas intermediárias cortariam o triângulo OGI . Portanto, uma medida da posição relativa dos grupos mais carentes pode ser obtida da razão das duas áreas separadas, no triângulo OGI , pela curva de Lorenz efetivamente observada.

Dessas considerações, parece claro que o Menor da Concentração seria particularmente útil para situações onde as curvas de Lorenz, apesar de possuírem formas distintas, fossem dotadas de índices de Gini aproximadamente idênticos, pois ali o Menor assumiria valores que indicariam com clareza a posição relativa distinta nas duas distribuições. Em outras situações, entretanto, a medida deve ser usada com cautela, pois há que se atentar para o fato de que a área do triângulo OGI varia com o índice G ; mais precisamente, Hagerbaumer (1977) mostra ser a área do triângulo dada por

$$B = G(1 - G) \div 2(2 - G) \quad (4)$$

Note-se que B crescerá inicialmente com G , até atingir valor máximo quando $G = 0,586$, decrescendo em seguida. Portanto, para aumentos de G à esquerda do ponto $G = 0,586$, temos que $DM > 0$ se $dD/D > dB/B$; após ultrapassar o ponto de máximo, para qualquer acréscimo de G tem-se então que $dM > 0$ se $|dD/D| > |dB/B|$, onde d significa variações diminutas e o que está entre barras representa o valor absoluto da variação. Essas informações podem ser particularmente úteis quando da análise do comportamento conjunto do índice de Gini e do Menor da Concentração numa série temporal, mas que são aqui utilizadas na comparação entre as duas distribuições mencionadas.¹¹

Observe-se que para conhecer a área de D há que se conhecerem as áreas de B e H . Enquanto B pode ser facilmente obtido a partir de (4), no cálculo de H há que se determinar primeiramente o ponto de interseção entre a curva de Lorenz observada e a reta dada por GA . A função da reta GA é dada por $Y = -G/(1 - G) + X/(1 - G)$, para $X \geq G$.¹² Quanto à função da curva de Lo-

¹¹ Para uma aplicação desse tipo, ver Rossi (1982a).

¹² Ver Hagerbaumer (1977).

renz, basta considerar a forma dada em (1). Uma vez determinadas as coordenadas da interseção de tais curvas, determina-se facilmente a área sob a curva de Lorenz à esquerda de tal ponto. Subtraindo-se em seguida a área *GEF*, na figura 2, obtém-se então a área de *H* e por extensão aquela de *D*, já que *B* é conhecido.

O quadro 6 fornece as coordenadas da interseção entre a curva de Lorenz ajustada – usando a função (1) – e a reta *GA*, para os dados de 1970 e 1980, bem como a área de *B* e o Menor da Concentração *M*. Note-se que, como a área de *B* aumentou ligeiramente no período, então para que o valor de *M* tenha aumentado é preciso que a curva de Lorenz se haja deslocado significativamente na sua base.¹³ Neste sentido, parece razoável interpretar tal fato como sendo indicativo da deterioração na posição relativa dos grupos menos privilegiados, entre 1970 e 1980, o que corrobora os resultados dos quadros 3 e 4.

Quadro 6
O Menor da Concentração de Gini e as coordenadas do ponto de interseção entre a curva de Lorenz ajustada e a reta *GA*.

| ANO | Coordenadas da interseção | | Menor da Concentração | |
|------|---------------------------|----------|-----------------------|--------------------|
| | <i>X</i> | <i>Y</i> | Área de <i>B</i> | Menor (<i>M</i>) |
| 1970 | 0,6869 | 0,2710 | 0,0857 | 0,4548 |
| 1980 | 0,6997 | 0,2676 | 0,0858 | 0,4560 |

4. Considerações finais

É evidente que dados de renda como os do quadro 1, por apresentarem detalhamento limitado, dificultam uma comparação mais efetiva entre as duas distribuições. A obtenção de maiores detalhes nas extremidades da distribuição de renda, em particular, é freqüentemente de muito interesse para os formuladores de política econômica. Nestas circunstâncias, torna-se indispensável que interpolações (e extrapolações) sejam realizadas a partir dos dados publicados. Essa tarefa é mais fácil na medida em que se dispõe de uma função matemática capaz de reproduzir com precisão a distribuição empírica da renda. A função da curva de Lorenz aqui utilizada desempenha essa tarefa com relativo sucesso, permitindo assim uma comparação mais sistemática entre as distribuições de renda em 1970 e 1980, do que aquela obtida do simples confronto das tabelas fornecidas pelos respectivos censos. A função ajustada permitiu, também, confirmar o agravamento na concentração da

¹³ Note-se que o índice assumiria valores entre zero e um conforme a distribuição seja menos favorável ou mais favorável aos grupos mais carentes.

renda no país, já constatado em outros estudos, possibilitando ainda um detalhamento da distribuição não-disponível nos outros casos.¹⁴

Referências bibliográficas

Atkinson, A.B. On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, 2(3):244-63, Sept. 1970.

Fishlow, A. Brazilian size distribution of income. *The American Economic Review*, 62:391-402, May 1972.

Gastwirth, J.L. The estimation of the Lorenz Curve and Gini Index. *The Review of Economics and Statistics*, (3):306-16, Aug. 1972.

——— & Smith, J.T. A new goodness — of — fit test. The American Statistical Association, Proceedings of the Business and Statistics Section, 1972. p. 320-2.

Hagerbaumer, J.B. The Gini concentration ratio and the minor concentration ratio: a two-parameter index of inequality. *The Review of Economics and Statistics*, (3):337-9, 1977.

Hoffmann, R. & Duarte, J.C. A distribuição de renda no Brasil. *Revista de Administração de Empresas*, 12(2):46-66, abr./jun. 1972.

Jain, S. *Size distribution of income*: a compilation of data. Washington, D.C., World Bank, 1975.
Kakwani, N.C. Functional forms for estimating the Lorenz curve: a reply. *Econometrica*, 48(4):1.063-4, May 1980.

——— & Podder, N. Efficient estimation of the Lorenz curve and associated inequality measures from grouped observations. *Econometrica*, 44(1):137-48, Jan. 1976.

Langoni, C. G. Distribuição de renda e desenvolvimento econômico do Brasil. *Estudos Econômicos*, 2(5):5-88, out. 1972.

Marquardt, D.W. An algorithm for least square estimation of non linear parameters. *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*, 2:431-41, 1963.

Rasche, R.H.; Gaffney, J.; Koo, A.Y. & Obst, N. Functional forms for estimating the Lorenz curve. *Econometrica*, 48(4):1.061-2, May 1980.

Rossi, J.W. O agravamento da concentração de renda. *Jornal do Brasil*, 22 nov. 1981, Caderno Especial, p.3.

———. Menor da Concentração de Gini aplicado a dados de distribuição de renda no Brasil. *Estudos Econômicos*, 12(2):111-5, ago. 1982 a.

———. *Índices de desigualdade de renda e medidas de concentração industrial*: aplicação a casos brasileiros. Rio de Janeiro, Zahar, 1982 b.

———. O desempenho de duas funções de Lorenz com dados de renda do Brasil. *Revista Brasileira de Economia*, 36(3):247-58, jul/set. 1982 c.

———. Notes on a new functional form for the Lorenz curve. *Economics Letters*, 17:193-7, 1985.

¹⁴ Deve ser ressaltado que a função de Lorenz aqui usada subestima as parcelas de renda dos segmentos populacionais mais pobres (tabela 4), conforme me foi sugerido por Rodolfo Hossman.