Escolha envolvendo risco: duas aplicações no mercado de títulos

Mario Henrique Simonsen*
Clovis de Faro*

Fazendo uso do ferramental teórico da teoria da escolha envolvendo risco, com base na maximização da utilidade esperada, o artigo enfoca a análise de dois casos específicos no mercado de títulos. No primeiro, é considerada a decisão entre investir em uma letra de câmbio ou em um certificado de depósito bancário. No segundo, mediante o emprego da metodologia média-variância, estuda-se o comportamento do mercado de títulos com cláusula de correção monetária.

1. Introdução

A moderna teoria da escolha envolvendo risco, tal como originalmente estabelecida, em 1944, por John Von Neumann e Oskar Morgenstern na obra clássica *Theory of games and economic behavior*, tem encontrado inúmeras e fecundas aplicações em situações que dizem respeito a transações que são efetuadas no mercado de capitais.

Assim, especificamente, um tópico que costuma ser abordado nos compêndios que tratam do assunto (cf. Arrow, 1971, cap. 3; e Simonsen, 1983, cap. 9) é o chamado problema das duas aplicações. Este problema relaciona-se com a decisão com que se defronta um certo indivíduo que, dispondo de um dado patrimônio, contempla duas possíveis alternativas de investimento: títulos de renda fixa e títulos de rendimento aleatório.

Ora, como iremos aqui discutir, a situação descrita corresponde exatamente àquela em que se encontra um investidor que, digamos, por motivos fiscais, deseja aplicar sua disponibilidade de capital em papéis ao portador. Para tanto, tendo-se dirigido a um banco comercial pertencente a um conglomerado financeiro, é infor-

*Respectivamente diretor e professor da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas.

mado pelo gerente de que seus propósitos podem ser alcançados tanto com a aquisição de uma letra de câmbio (LC), como com a de um certificado de depósito bancário (CDB). Entretanto, enquanto que no primeiro caso sua receita final é conhecida *a priori*, tal não ocorre no segundo, pois a receita final de um CDB depende da correção monetária. Ou seja, em termos aparentes (ou nominais), a LC é um título com renda fixa, e o CDB é um título com renda aleatória.

O primeiro de nossos dois objetivos no presente trabalho é o de apresentar a decisão em apreço dentro do enfoque teórico do problema das duas aplicações, buscando fornecer subsídios que possam ser úteis em situações práticas, o que será feito no item 2.

Embora, à luz da teoria da utilidade esperada, só possa ser rigorosamente justificável se for adotada uma função utilidade quadrática – o que não é palatável, por implicar que a aversão absoluta ao risco seja função crescente da renda (Pratt, 1964) – ou se todos os rendimentos aleatórios forem normalmente distribuídos – o que é formalmente impossível – a chamada análise média-variância, pioneiramente formulada por Markowitz (1952 e 1959), tem sido a base de importantes desenvolvimentos na teoria dos mercados de capitais. Seguindo esta linha de análise, o segundo objetivo de nosso trabalho será o de aplicar o método média-variância ao estudo do comportamento do mercado de títulos com cláusula de correção monetária, genericamente denominados de títulos indexados: Esta análise, de cunho iminentemente teórico, mas extremamente útil para o melhor entendimento do mercado brasileiro de capitais, constituirá o item 3.

2. Decisão entre investir em uma LC ou em um CDB

2.1 Características dos dois tipos de títulos

Conquanto possam também ser da modalidade correção monetária pós-fixada (cf. Open, 1982), as LC são usualmente emitidas com correção monetária prefixada, já embutida na chamada taxa bruta de rentabilidade à qual é negociada em mercado. Assim, sendo E o seu valor de emissão, concentremos atenção no caso de uma LC dita de renda final. Denotando-se por i_b a sua taxa bruta de rentabilidade, relativa ao seu prazo de vencimento, correntemente não podendo ser inferior a 180 dias, segue-se que, na data de resgate, o investidor receberá uma quantia, previamente conhecida, igual a $E\,(1 + i_b)$.

Todavia, em face da cobrança antecipada de imposto de renda, à alíquota t incidente sobre o rendimento contábil Ei_b, o investidor terá que desembolsar, na data de aplicação, a quantia $E\,(1 + ti_b)$. Deste modo, sendo D seu capital disponível para investimento, se todo ele for alocado na aquisição da LC, os fluxos de caixa para o investidor podem ser esquematicamente representados como na figura 1, onde o prezo de vencimento foi feito igual a um período.

Figura 1
Investimento em letra de câmbio

Logo, por unidade de capital aplicado, a taxa periódica de rentabilidade para o investidor, chamada de taxa líquida e que está sob a forma dita aparente (cf. Faro, 1982, cap. 4), será:

$$\theta_\ell' = \frac{E(1 + i_b)}{E(1 + ti_b)} - 1$$

ou

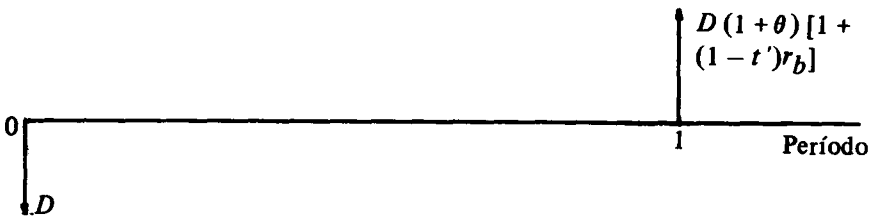
$$\theta_\ell' = \frac{(1 - t)i_b}{1 + ti_b} \tag{1}$$

Por outro lado no caso de um CDB, este é normalmente emitido na modalidade "nominativa-endossável", o que, efetivamente, o torna um título ao portador, e com correção monetária pós-fixada, idêntica à das obrigações reajustáveis do Tesouro Nacional (ORTN). Assim, representando-se por r_b a taxa bruta, "real", estabelecida para o prazo de aplicação, esta incidirá sobre o valor monetariamente corrigido do capital investido, isto é, denotando-se por θ a taxa de variação do valor nominal de uma ORTN, da época de aplicação para a de vencimento[1], os juros relativos à inversão da quantia D serão iguais a $D(1 + \theta)r_b$.

Portanto, dado que agora na época de vencimento é cobrado imposto de renda, mediante a aposição da alíquota t' sobre os juros, segue-se que, tendo em vista a correção monetária do principal aplicado, os fluxos de caixa para o investidor, no caso de um CDB com rendimento no resgate, podem ser visualizados como indicado na figura 2.

[1]Sendo U_k o valor nominal de uma ORTN na época k, temos que $1 + \theta = U_1/U_0$. A soma $1 + \theta$ é chamada de coeficiente de correção monetária relativa ao prazo de aplicação.

Figura 2
Investimento em certificado de depósito bancário



Logo, sob forma aparente, a taxa líquida periódica para o caso de aplicação em CDB será:

$$\theta'_c = \frac{(1+\theta)[1+(1-t')r_b]}{D}$$

ou

$$\theta'_c = \theta + (1+\theta)(1-t')\,r_b \qquad (2)$$

2.2 Modelo simplificado de escolha: taxa de inflação esperada versus taxa de inflação de equilíbrio

Ex post, para o caso de um prazo comum de aplicação, a análise é trivial. A melhor alternativa teria sido aquela que tivesse apresentado a maior taxa aparente de rentabilidade líquida. Entretanto, como a decisão deve ser tomada na data do investimento, a escolha deixa de ser óbvia, pois que a correção monetária do CDB não é conhecida *a priori*. Deve-se, então, levar explicitamente em conta que a taxa de inflação futura é uma variável aleatória e que, portanto, a taxa líquida θ'_c também é uma variável aleatória[2].

Em um modelo simplificado, que é suficiente para investidores que sejam neutros com relação a risco, a escolha pode ser efetuada com base no que denominaremos de taxa de inflação de equilíbrio. Esta taxa, representada por $\hat{\theta}$, é definida como a taxa de inflação para a qual, *ex post*, o investidor ficaria indiferente entre aplicar sua disponibilidade em LC ou em CDB, isto é, $\hat{\theta}$ é o particular valor de θ para o qual se tem $\theta'_\ell = \theta'_c$. Logo, tendo em vista as expressões (1) e (2), segue-se que a taxa de inflação de equilíbrio será tal que:

$$\hat{\theta} = \frac{1 + i_b}{(1+ti_b)\;[1+(1-t')\,r_b]} - 1 \qquad (3)$$

[2] Para simplificar a análise, iremos admitir aqui que a taxa de variação do valor nominal das ORTNs confunde-se com a própria taxa de inflação.

De posse do valor de $\hat{\theta}$, que depende tão-somente de parâmetros cujos respectivos valores são conhecidos na data de aplicação de seu capital,[3] tudo que o investidor tem a fazer é compará-lo com sua estimativa para o valor esperado da taxa de inflação que irá ocorrer ao longo do prazo de investimento considerado. Para tanto, por exemplo, o investidor pode fazer uso do procedimento adotado no chamado método PERT (cf. Malcom et alii, 1959), determinando a taxa de inflação esperada a partir de suas próprias estimativas subjetivas dos valores mínimo, mais provável e máximo para a taxa de inflação futura. Denotando-se estes valores respectivamente por a, m e b, a hipótese subjacente de uma distribuição beta de probabilidades acarreta com que se tenha:[4]

$$E[\tilde{\theta}] = \frac{a + 4m + b}{6} \tag{4}$$

Se $E[\tilde{\theta}] > \hat{\theta}$, será preferível aplicar em CDB; se $\hat{\theta} > E[\tilde{\theta}]$, a aplicação em LC é melhor; em caso de igualdade, a aplicação pode ser feita em qualquer uma, indiferentemente.

A título de ilustração, considerando-se taxas de captação representativas do que ora vem sendo praticado no nosso mercado de capitais, suponha-se o caso em que, para aplicações com prazo de um ano, tenham-se os seguintes valores: i_b = 180% ao ano; t = 3%; r_b = 20% ao ano; e t' = 30%. De (3) decorre então que a taxa de inflação de equilíbrio é $\hat{\theta} \simeq 133{,}03\%$ ao ano. Deste modo, se for esperado que a taxa de inflação para o período de um ano, a contar da data de investimento, seja inferior a 133%, será preferível a aplicação em LC. Caso contrário, o investidor deverá optar pelo CDB.

2.3 Formalização do modelo de decisão

A solução apresentada no item precedente, embora possa ser útil, e mesmo suficiente em certos casos, não contempla um procedimento comumente observado: o da diversificação entre os dois tipos de títulos considerados. Para que esta possibilidade seja incluída na análise, precisamos sofisticar nosso modelo de decisão, fazendo uso da teoria da escolha envolvendo risco.

Para formalizar o modelo, denotando por X a parcela da disponibilidade D que é aplicada em CDB, iremos supor que:

a) tanto i_b como r_b não dependem das quantias respectivamente aplicadas em LC e em CDB;

b) o valor mínimo de emissão de um CDB é $X_m < D$;

[3] Desde que o governo não altere as regras do jogo no que diz respeito à alíquota t'.

[4] Alternativamente, como sugerido por MacCrimmon e Ryavec (1964), pode-se adotar, com os mesmos parâmetros, a hipótese de distribuição triangular. Nesse caso, tem-se $E[\tilde{\theta}] = (a + m + b)/3$.

c) o valor mínimo de emissão de uma LC é $D - X_M > 0$.

Então, representando por $F(X)$ a quantia que o investidor terá disponível no fim do período de investimento, temos que, tendo em vista (1) e (2):

$$F(X) = \begin{cases} (1 + \theta'_\ell) D, & , 0 \leqslant X < X_m \\ (1 + \theta'_\ell) D + X(\tilde{\theta}_c - \theta'_\ell) & , X_m \leqslant X \leqslant x_M \\ (1 + \tilde{\theta}'_c) D & , X_M < X \leqslant D \end{cases} \tag{5}$$

Para levar em conta a atitude do investidor com relação a risco, iremos considerar sua função utilidade admitindo que, à Von Neumann-Morgenster, o indivíduo tome suas decisões buscando maximizar o valor esperado de sua função utilidade. Assim, denotando por $U(\cdot)$ a utilidade de sua disponibilidade final,[5] o seu valor esperado, representado por $G(x)$, será:

$$G(X) = \begin{cases} E\ [\{U\ (1 + \theta'_\ell) D\}] = \alpha & , 0 \leqslant X < X_m \\ E\ [U\ \{(1 + \theta'_\ell) + X(\tilde{\theta}'_c - \theta'_\ell)\ \}] & , X_m \leqslant X \leqslant X_M \\ E\ [\mathrm{U}\ \{(1 + \tilde{\theta}'_c) D\}] = \beta & , X_M < X \leqslant D \end{cases} \tag{6}$$

onde α e β são constantes:

O problema passa a ser, então, o de encontrar o valor de X, no intervalo $0 \leqslant X \leqslant D$, que maximiza a função $G(X)$. Derivando-se $G(X)$ duas vezes, tem-se:

$$G'(\mathrm{X}) = \begin{cases} 0 & , 0 \leqslant X < X_m \\ E\ [\ (\tilde{\theta}'_c - \theta'_\ell)\, U'\{(1 + \theta'_\ell) D + X(\tilde{\theta}'_c - \theta'_\ell)\}\ ] & , X_m \leqslant X \leqslant X_M \\ 0 & , X_M < X \leqslant D \end{cases} \tag{7}$$

e

$$G''(X) = \begin{cases} 0 & , 0 \leqslant X < X_m \\ E\ [\ (\tilde{\theta}'_c - \theta'_\ell)^2\, U''\{(1 + \theta'_\ell) D + X(\tilde{\theta}'_c - \theta'_e)\}] & , X_m \leqslant X \leqslant X_M \\ 0 & , X_M < X \leqslant D \end{cases} \tag{8}$$

[5] Alternativamente, poderíamos também trabalhar com a utilidade dos acréscimos patrimoniais. Porém, os resultados podem não coincidir. Para uma comparação, veja Lioukas e Moore (1983).

Concentremos atenção no caso, que é o do maior interesse prático, em que o indivíduo seja avesso ao risco. A hipótese de aversão ao risco, que implica que se tenha $U''(\cdot) < 0$, acarreta com que $G(X)$ seja côncava (sendo estritamente côncava para $X_m \leq X \leq X_M$).[6] Seguindo-se de perto a exposição em Simonsen (1983, cap. 9), temos os seguintes três casos a considerar:

a) $G'(X_m) \leq 0$

Nesta eventualidade, que corresponde a ter-se $E[(\theta_c' - \theta_\ell) U'\{(1+\theta_\ell)D + X_m(\tilde{\theta}_c' - \theta_\ell)\}] > 0$, somente poderá ocorrer diversificação, aplicando-se a quantia mínima em CDB, se $G(X_m) > \alpha$.

b) $G'(X_M) > 0$

Agora, poderá haver diversificação, aplicando-se a quantia mínima permissível em LC, se $G(X_M) > \beta$.

c) $G'(X_m) > 0$ e $G'(X_M) < 0$.

Nesse último caso, a função $G(X)$ assumirá seu ponto máximo no interior do intervalo (X_m, X_M). Assim, necessariamente, ocorrerá diversificação, sendo aplicada em CDB a quantia X tal que:

$$G'(X) = E\left[(\tilde{\theta}_c' - \theta_\ell) U'\left\{1 + \theta_\ell) D + \bar{X}(\tilde{\theta}_c' - \theta_\ell)\right\}\right] = 0 \tag{9}$$

2.4 Aversão ao risco decrescente: um exemplo

Como mencionado por Arrow (1971, cap. 3), o comportamento mais comum é o que corresponde à aversão absoluta a risco decrescente. Assim, fazendo-se $Y = F(X)$, examinemos agora o caso onde, sendo

$$A(Y) = -U''(Y)/U'(Y) \tag{10}$$

tenhamos $A'(Y) < 0$.

Mais especificamente, a título de ilustração, consideremos o caso em que a função utilidade do investidor seja da forma

$$U(Y) = \ell n\,(Y + \pi) \tag{11}$$

[6] Logo, basta que examinemos a condição de primeira ordem para maximização de $G(x)$.

onde π é uma constante que depende das características intrínsecas do investidor em apreço.

Por outro lado, suponhamos que, do ponto de vista do investidor, a taxa de inflação $\tilde{\theta}$ seja uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo (a,b). Precisamos, porém, para o cálculo da utilidade esperada, especificar a função de distribuição de probabilidade da taxa líquida aparente $\tilde{\theta}_c'$, que, tendo presente a (2), é uma função linear de $\tilde{\theta}$, isto é:

$$\theta_c' = c\,\theta + d \qquad (2')$$

para $d = (1-t')r_b$ e $c = 1 + d$

A função geratriz de momentos de $\tilde{\theta}_c'$ é então:[7]

$$m_{\tilde{\theta}'_c}(t) = E\,[e^{t(c\,\tilde{\theta} + d)}] = e^{td}\,E\,[e^{tc\tilde{\theta}}]$$

$$= e^{td}\, m_{\tilde{\theta}}(tc) = \frac{e^{td}\,(e^{tcb} - e^{tca})}{tc\,(b-a)}$$

$$= \frac{e^{(bc+d)t} - e^{(ac+d)t}}{t\,(bc+d - ac-d)} \qquad (12)$$

Pela unicidade da função geratriz de momentos, conclui-se, então, de (12), que $\tilde{\theta}'_c$ tem distribuição uniforme no intervalo $(ac+d=a',\ bc+d = b')$.

Portanto, fazendo-se $(1+\theta_\ell')D = \gamma$, segue-se que, no trecho não constante, a função a ser maximizada é:

$$G(X) = \int_{a'}^{b'} \frac{\ell n\,\{\gamma + \pi + X\,(\theta_c' - \theta_\ell')\}}{b'-a'}\, d\theta_c'$$

$$= \frac{1}{b'-a'} \left\{ \frac{\gamma+\pi+X(\theta_c'-\theta_\ell')}{X}\ \ell n \{\gamma+\pi+X(\theta_c'-\theta_\ell')\} - \theta_c' \right\} \Bigg]_{a'}^{b'}$$

[7] Observa-se que a função geratriz de momentos de $\tilde{\theta}$ é (cf. Larson, 1982, p. 220): $m_{\tilde{\theta}}(t) = (e^{tb} - e^{ta})/t\,(b-a)$.

$$= \frac{1}{(b'-a')\,X}\{[\gamma+\pi+X(b'-\theta_{\ell}')]\,\ell n\,\{\gamma+\pi+X(b'-\theta_{\ell}')\}$$

$$-[\gamma+\pi+X(a'-\theta_{\ell}')]\,\ell n\,\{\gamma+\pi+X(a'-\theta_{\ell}')\}] - 1 \qquad (13)$$

Em face do apresentado no item precedente, a decisão fica determinada examinando-se o comportamento da derivada

$$G'(X) = -\frac{1}{(b'-a')\,X^2}\{(\gamma+\pi+b'-\theta_{\ell}')\,\ell n\,\{\gamma+\pi+X(b'-\theta_{\ell}')\} + b'-a'$$

$$-(\gamma+\pi+a'-\theta_{\ell}')\,\ell n\,\{\gamma+\pi+X(a'-\theta_{\ell}')\}\} \qquad (14)$$

3. Títulos indexados

3.1 Caracterização dos mercados

Um título indexado é, por definição, um ativo de rendimento real constante, isto é, independente do estado da natureza. A incerteza quanto à taxa de inflação costuma estimular o desenvolvimento do mercado de títulos indexados, sobretudo nos prazos mais longos, os quais tornam mais difíceis as previsões dos preços. No Brasil, por exemplo, o mercado de hipotecas, após longos anos de virtual inatividade, ressurgiu vigorosamente após a introdução da correção monetária nos financiamentos habitacionais.

Em toda a análise que se segue, mediremos as taxas de rentabilidade segundo a praxe financeira normal, isto é, pela relação entre os rendimentos obtidos num período e os valores previamente aplicados, e não como a diferença entre os logaritmos dos valores patrimoniais no fim e no início do período. A aferição logarítmica, embora evitasse uma pequena armadilha aritmética a que nos referiremos no subitem 3.2, não se presta à análise de diversificação patrimonial que iremos explorar.

A coexistência dos dois mercados, o de títulos indexados e o de não-indexados, é um problema que requer alguma explicação. Se olharmos o mercado do ponto de vista do comprador de títulos avesso ao risco, parece natural conjecturar que a rentabilidade real esperada dos títulos não-indexados seja superior à taxa de juros real dos indexados, sem o que não haveria compradores para os primeiros. Mas, como não pode haver comprador sem que exista vendedor, cabe também formular a pergunta inversa: por que alguém, que não o Governo ou os jogadores profissionais, se endividaria por meio de um instrumento ao mesmo tempo mais oneroso e mais arriscado, em termos reais? Para responder a essa questão é preciso introduzir no circuito pelo menos mais dois tipos de ativos — o capital físico e o capital humano. Há agentes econômicos que imaginam que seus rendimentos sejam negati-

vamente correlacionados com a inflação, e que por isso se protegem dos riscos endividando-se sem indexação e comprando títulos indexados. Há outros tantos que presumem que quanto maior a inflação maior o seu rendimento real, e isso é razão para que eles comprem títulos não-indexados e se endividem com correção monetária. Independentemente desses dois fatores, os detentores de capital físico podem descarregar seus riscos vendendo ações e comprando títulos, indexados ou não. Além do mais, as expectativas e os graus de aversão ao risco podem diferir de um agente econômico para outro.

Esses fatores costumam pôr em movimento os três mercados, o de títulos indexados, o de títulos de renda nominal fixa, e o de ações. É difícil dizer *a priori* qual será o maior: se o rendimento real esperado dos títulos não-indexados ou a taxa real de juros dos títulos com correção monetária. Na maior parte dos casos, pode-se afirmar que o rendimento real esperado das ações, que são aplicações de risco, deve ser maior do que o juro real dos títulos indexados. Há, no entanto, uma hipótese que, embora remota, não pode ser totalmente descartada *a priori*. É possível que os rendimentos do capital e do trabalho sejam negativamente correlacionados. Nesse caso, endividar-se com correção monetária para comprar ações pode ser um artifício pelo qual os trabalhadores conseguem diminuir a oscilação de sua renda. Isso aumenta a procura de ações e a oferta de títulos indexados e, teoricamente, pode ir ao ponto em que o rendimento real esperado das ações caia abaixo da taxa de juros dos títulos indexados.

3.2 Uma armadilha aritmética: rendimentos reais versus rendimentos nominais

Devemo-nos precaver, a esta altura, contra uma armadilha aritmética: ainda que os títulos sem correção monetária ofereçam uma rentabilidade real esperada superior à taxa de juros dos indexados, não é certo que essa mesma hierarquia prevaleça nos rendimentos nominais: é possível que, nesse caso, a taxa nominal de juros dos títulos não-indexados seja inferior à taxa esperada de rendimento nominal dos títulos com correção monetária. Isso resulta de que a passagem de rendimentos reais para nominais se faz, num caso, por médias aritméticas, e noutro, por médias harmônicas.

Com efeito, suponhamos que, no instante em que se compram os títulos, o índice geral de preços seja $P_o = 1$, e designemos por r a taxa real de juros dos títulos indexados e por i a remuneração nominal dos não-indexados. Admitamos que, no vencimento dos títulos, possam ocorrer m estados da natureza, com probabilidades $g_1, g_2, \ldots, g_m$ (positivas, de soma 1) e com índices gerais de preços respectivamente iguais a $P_1, P_2, \ldots, P_m$. A taxa nominal de juros r_N esperada para os títulos indexados calcula-se pela fórmula:

$$1+r_N = \sum_{k=1}^{m} g_k P_k (1+r) \qquad (15)$$

e a taxa real de juros i_R esperada para os títulos não-indexados exprime-se por:

$$1+i_R = \sum_{k=1}^{m} g_k P_k^{-1} (1+i) \tag{16}$$

Designemos por:

$$P_A = \sum_{k=1}^{m} g_k P_k \tag{17}$$

e

$$P_H^{-1} = \sum_{k=1}^{m} g_k P_k^{-1} \tag{18}$$

Como os preços variam de acordo com o estado da natureza, a média harmônica P_H é inferior à média aritmética P_A. As relações anteriores implicam:

$$\frac{1+i}{1+r_N} = \frac{P_H}{P_A} \times \frac{1+i_R}{1+r} \tag{19}$$

Sendo $P_H < P_A$, é possível que, ao mesmo tempo, se tenha $i_R > r$, mas $i < r_N$.

A título de exemplo, suponhamos que os agentes econômicos acreditem que a taxa de inflação, em determinado ano, tem 50% de probabilidade de se situar em 20% e outros tantos 50% de subir a 60%. Suponhamos que a taxa de juros real dos títulos indexados seja de 5% ao ano e que, para competir com eles, os títulos sem correção monetária devem proporcionar uma expectativa de rendimento anual real de 6%. Isso significa que o rendimento nominal i dos títulos não-indexados deve ser tal que:

$$0{,}5 \ \frac{1+i}{1{,}2} + 0{,}5 \ \frac{1+i}{1{,}6} = 1{,}06$$

ou seja, $i \simeq 45{,}4\%$ ao ano. Isso é menos do que a esperança matemática de rendimento nominal dos títulos com correção monetária, igual a

$r_N = 0{,}5 \times 1{,}2 \times 1{,}05 + 0{,}5 \times 1{,}6 \times 1{,}05 - 1 = 47{,}0\%$ ao ano.

3.3 Formalização do modelo

Ressalvada a armadilha estatística descrita no item precedente, imaginemos uma economia com um único produto que sirva ao mesmo tempo como bem de consumo e bem de capital. Nesta última forma, o bem se reproduzirá à taxa z_k caso ocorra o estado da natureza k, de probabilidade g_k. O produto também se pode obter com capital humano: no estado da natureza k, uma unidade de capital humano produz x_k unidades do bem. Um governo mais ou menos responsável determina, via política monetária, o nível de preços P_k em cada estado da natureza. Não importa, a esta altura, se os g_k, z_k, x_k, P_k são igualmente estimados por todos os agentes econômicos (homogeneidade das expectativas) ou se são sujeitos a diferentes avaliações individuais.

Todos os agentes econômicos se supõem avessos ao risco. Designaremos por $U(Y)$ a função utilidade da renda real (à Von Neumann e Morgenstern) de um agente econômico genérico, com dotações iniciais B de capital físico, e H de capital humano. A função utilidade e as dotações iniciais B e H podem variar de um agente para outro.

Introduzamos um mercado financeiro com três ativos: ações, títulos indexados com juro real r e títulos não-indexados com juro nominal i. Uma unidade de qualquer desses três ativos compra-se por uma unidade do produto. Uma ação rende, no estado da natureza k, z_k unidades do produto, ou seja, o mesmo que o capital físico. Um título indexado rende r unidades do produto em qualquer estado da natureza. Um título não-indexado rende, no estado da natureza k, i_k unidades do produto, onde:

$$1 + i_k = P_k^{-1} (1+i) \tag{20}$$

No mercado financeiro não há custos de transação, incerteza moral ou possibilidade de insolvência, funcionando o regime competitivo. Isso significa que os agentes econômicos podem trocar à vontade entre si os três tipos de ativos. Designaremos respectivamente por A, R e N o número de ações, títulos indexados e títulos não-indexados comprados (ou vendidos, no caso de sinal negativo) pelo nosso agente econômico genérico. Como os ativos financeiros se trocam uns pelos outros:

$$A + R + N = 0 \tag{21}$$

Caso ocorra o estado da natureza k, a renda real Y_k do agente econômico será dada por:

$$Y_k = (B+A)z_k + Hx_k + Rr + Ni_k \tag{22}$$

Dados r e i, o agente econômico tratará de escolher A, R e N, de modo a maximizar a sua utilidade esperada $\sum_{k=1}^{m} g_k U(Y_k)$ com a restrição (21), onde m denota o número de estados da natureza.

Formando-se a correspondente função lagrangiana, as condições de primeira ordem levam às relações:[8]

$$\sum_{k=1}^{m} g_k z_k U'(Y_k) = r \sum_{k=1}^{m} g_k U'(Y_k) \tag{23}$$

$$\sum_{k=1}^{m} g_k i_k U'(Y_k) = r \sum_{k=1}^{m} g_k U'(Y_k) \tag{24}$$

As equações (20) a (24) permitem determinar, para cada agente econômico, os valores de A, R e N em função da taxa real de juros r dos títulos indexados e da taxa nominal i dos não-indexados. Para determinar r e i basta fechar o sistema: para o conjunto de todos os agentes econômicos, a soma algébrica dos A deve ser igual a zero, o mesmo acontecendo com a soma algébrica dos N. (Isto posto, a equação (21) torna supérflua a afirmação de que a soma algébrica dos R também deve ser nula.)

3.4 Análise média-variância

Particularizemos a análise do item anterior para o método média-variância de Markowitz. No caso, $\bar{z}$, $\bar{x}$ e $\bar{i}_R$ indicarão as esperanças matemáticas de rentabilidade real do capital físico, do capital humano e dos títulos não-indexados; s_z^2, s_x^2, s_i^2, s_{zx}, s_{zi}, s_{xi}, as respectivas variâncias e covariâncias. Obviamente, para os títulos indexados, a rentabilidade real média é igual a r, com variância zero.

Para um agente econômico, com dotações iniciais B de capital físico, H de capital humano, e que compre (ou emita, no caso de sinal menos) A ações, R títulos indexados, e N não-indexados, a renda Y será uma variável aleatória, cuja média $\bar{Y}$ e cuja variância $s^2(Y)$ se expressarão por:

$$\bar{Y} = (B+A)\bar{z} + H\bar{z} + R\bar{x} + N\bar{i}_R \tag{25}$$

$$s^2(Y) = (B+A)^2 s_z^2 + H^2 s_x^2 + N^2 s_i^2 + 2(B+A)Hs_{zx} + 2(B+A)Ns_{zi} + 2HNs_{xi} \tag{26}$$

[8] É suficiente que examinemos somente as condições de primeira ordem, pois, por hipótese, a função utilidade é côncava.

Tratemos de maximizar a utilidade $U(Y, s^2(Y))$ do agente econômico com a restrição $A+R+N=0$. Designando por U'_1 a derivada parcial da função utilidade em relação à renda média, e por U'_2 a derivada parcial em relação à variância, obtém-se:

$$rU'_1 = \bar{z}U'_1 + 2U'_2\left((B+A)s^2_z + Ns_{zi} + Hs_{zx}\right) \tag{27}$$

$$rU'_1 = \bar{i}_R U'_1 + 2U'_2\left((B+A)s_{zi} + Ns^2_i + Hs_{xi}\right) \tag{28}$$

Designemos por $V = -2\dfrac{U'_2}{U'_1}$ o grau de aversão ao risco do agente econômico genérico na sua posição de equilíbrio V é positivo, já que, por hipótese, a economia não abriga indivíduos propensos nem indiferentes ao risco, e as equações (27) e (28) podem ser reapresentadas na forma:

$$(B+A)s^2_z + Ns_{zi} = V^{-1}(\bar{z} - r) - Hs_{zx} \tag{29}$$

$$(B+A)s_{zi} + Ns^2_i = V^{-1}(i_R - r) - Hs_{xi} \tag{30}$$

Agreguemos as relações (29) e (30) para o conjunto dos agentes econômicos. Para tanto, designemos por B e H os totais dos capitais físico e humano na sociedade, indiquemos por K o somatório dos V^{-1} e lembremos que, quando somados algebricamente, tanto A como N se anulam. Supondo expectativas homogêneas:

$$\bar{B}s^2_z + Hs_{zx} = K(\bar{z} - r) \tag{31}$$

$$\bar{B}s_{zi} + \bar{H}s_{xi} = K(\bar{i}_R - r) \tag{32}$$

A equação (31) desdobra o prêmio de risco do rendimento acionário $\bar{z} - r$ em duas componentes: uma sempre positiva, correspondente à variância dos resultados do capital físico; outra de sinal ambíquo, correspondente à correlação entre os rendimentos reais do capital físico e do capital humano. Se esses rendimentos são negativamente correlacionados, o prêmio de risco cai, pois passa a ser interessante para os trabalhadores endividar-se em títulos para comprar ações e, com isso, diminuir a instabilidade de sua renda. No caso normal, o prêmio de risco $\bar{z} - r$ é positivo. Mas, pelo menos teoricamente, não é impossível, no caso em que os rendimentos reais do capital físico e do capital humano se correlacionem negativamente, que os trabalhadores de tal forma se endividem para comprar ações que o rendimento real esperado destas últimas caia abaixo da taxa real de juros dos títulos indexados.

A equação (32) mostra que o rendimento real esperado dos títulos sem correção monetária será superior à taxa de juros dos títulos indexados se e somente se o total dos rendimentos reais, do capital físico e do trabalho, for positivamente

correlacionado com o inverso do nível geral de preços (isto é, sejam tanto maiores quanto menor a taxa de inflação). A relação de Phillips sugere o contrário, e que portanto se tenha $r > i_R$.

Uma curiosidade descoberta por Fischer (1975) é que, no caso de só existir capital físico (ou seja $H=0$), os títulos com correção monetária expulsam do mercado os títulos com renda nominal fixa. Com efeito, tomando $H=0$ nas equações (29) e (30) obtém-se:

$$N = \frac{s_z^2 (\bar{i}_R - r) - s_{zi} (\bar{z} - r)}{V(s_z^2 s_i^2 - s_{zi}^2)} \tag{33}$$

Com expectativas homogêneas, essa expressão indica que N deve apresentar o mesmo sinal para todos os agentes econômicos. Como o somatório dos N deve ser igual a zero, segue-se que nenhum agente manterá títulos não-indexados nos seus balanços: o mercado financeiro se limitará a trocar ações por títulos com correção monetária.

No contexto do modelo, a hipótese de que não exista capital humano é menos absurda do que pode parecer à primeira vista. Ela equivale apenas a segmentar os agentes econômicos em dois grupos, os que vivem de rendas de capital e os que vivem de salários, e supor que este último grupo não disponha de acesso ao mercado financeiro. Nem a segmentação nem a suposição complementar podem ser aceitas sem sérias restrições, mas, sobretudo nos países em desenvolvimento, grande parte da população que vive dos rendimentos do trabalho não tem como operar no mercado de títulos e ações.

Ainda que se introduza o capital humano no modelo não é implausível postular que, pelo menos a longo prazo, $s_{zx}=s_{xi}=0$, isto é, que os rendimentos reais do trabalho nem se correlacionem com os do capital físico nem com o inverso do nível geral de preços. Também nesse caso valeria a fórmula (33), e os títulos nominais seriam expulsos do mercado pelos indexados.

Com expectativas heterogêneas, os dois mercados de títulos, com e sem correção monetária, podem continuar coexistindo, aida que se abstraia do modelo o capital humano. Pela aversão ao risco e pela desigualdade de Schwarz, o denominador da fórmula (33) deve ser positivo. Mas o sinal do numerador pode mudar de um agente econômico para outro, em função das suas avaliações de s_z^2 e s_{zi}. O aumento da incerteza quanto à taxa de inflação eleva diretamente a variância s_i^2 que figura no denominador da fórmula e, pelo menos a longo prazo, não deve afetar significativamente nem s_z^2 nem s_{zi}. Isso explica por que a crescente imprevisibilidade da inflação atrofia o mercado de títulos não-indexados a longo prazo.

Referências bibliográficas

Arrow, Kenneth J. *Essays in the theory of risk-bearing.* Chicago, I ll., Markham, 1971.

Faro, Clovis de. *Matemática financeira.* 9 ed. São Paulo, Atlas, 1982.

Fischer, Stanley. The demand for index bonds. *Journal of Political Economy,* June 1975, 83 (3): 509-34.

Larson, Harold J. *Introdution to probability theory and statistical inference.* 3. ed. New York, John Wiley, 1982.

Lioukas, S.K. & Moore, P.G. Incremental Evaluation of risky choices. *Journal of the Operational Research Society,* May 1983, *34* (5): 413-8.

Malcom, Donald G.; Rosenboom, John H; Clark, Charles E. & Fazar, Willard, Application of a tecnique for research and development program evaluation. *Operations Research,* 7 (5): 646-69, Sept./Oct. 1959.

MacCrimmon, Kenneth R. & Ryavec, Charles A. An analytical study of the PERT assumptions. *Operations Research, 12* (1): 16-37, Jan./Feb. 1964.

Markowitz, Harry M. Portfolio selection. *The Journal of Finance, 7* (1): 77-91, mar. 1952.

Portfolio selection: efficient diversification of investments. New Haven, Yale University Press, 1959.

Open. *Open investidor: características dos principais papéis de renda fixa transacionadas no mercado.* 2.ed. Open, 1982.

Pratt, John W. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica, 32* (1-2): 122-36, Jan./Apr. 1964.

Simonsen, Mario Henrique. *Dinâmica macroeconômica.* McGraw-Hill do Brasil, 1983.