Índices de preços: análise contínua e índices em cadeia*

Francisco de Assis Moura de Melo**

Com vistas à fundamentação conceitual dos índices em cadeia, apresentamos as principais noções de índices contínuos e demonstramos que os métodos de cálculo comumente utilizados são casos particulares do índice teórico de Divisia. Como tal, são aceitáveis teoricamente e comungam das mesmas deficiências.

Introduzimos, a partir dos pontos de vista de Fisher e Divisia, a discussão sobre a estratégia a se adotar quando da produção de séries históricas de índices de preços: base fixa ou índices em cadeia. Trata-se de fértil campo, com muitos aspectos para se explorar. Com fins ilustrativos, efetuamos uma experimentação empírica das duas estratégias para quatro fórmulas de cálculo de índices. Dada a importância assumida pelo INPC, pensamos oportuno o delineamento de um programa de atualização de suas bases numa perspectiva de índices em cadeia.

1. Considerações iniciais

Os índices de preços são analisados comumente sob a ótica bissituacional, isto é, através da comparação dos preços em dois períodos de tempo ou em duas áreas geográficas em um mesmo momento. Esse enfoque, eminentemente fisheriano, domina parte substancial da literatura onde, em alguns textos, se lhe associam aspectos de natureza prática.

Por outro lado, os trabalhos de François Divisia, ainda na década de 20, proporcionaram, além de vários desdobramentos (inclusive com aplicações nas medidas de fontes de crescimento econômico), o desenvolvimento da análise con-

* Este artigo é baseado no capítulo 2 da dissertação de mestrado *Análise dos índices de preços e estimativas de seus vieses*, submetida à Congregação da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas, em fevereiro de 1982.

** Economista, Chefe do Departamento de Estatísticas e Índices de Preços – Desip/IBGE.

R. bras. Econ., Rio de Janeiro, 36 (4): 403-28, out./dez. 1982

tínua de preços. Esta antinomia à abordagem tradicional carece, no atual estágio, de dois pontos: uma conciliação de suas conclusões com as conclusões da análise bissituacional, no plano teórico, e uma maior ligação com os aspectos da produção contínua de índices de preços, no plano prático.

Para distinguirmos nitidamente as duas abordagens, imaginemos que o índice entre o momento b e o momento t seja obtido por uma sucessão de comparações intermediárias ao invés de uma comparação direta, consoante a análise bissituacional. Esse processo, como veremos, leva ao índice teórico de Divisia; na realidade, mais genericamente, podemos dizer que lidamos com a teoria dos índices contínuos, ou com o enfoque contínuo dos índices, onde as variáveis intervenientes são funções diferenciáveis do tempo.

Uma das características marcantes da produção de índices de preços é o fato de serem calculados mês a mês, sendo as comparações de período mais longos obtidas por acumulação geométrica dos índices mensais. Expressa, no nosso entender, um processo mais aproximado ao descrito pela análise contínua do que ao descrito pela análise bissituacional. Em conseqüência, a análise contínua proporciona um aprofundamento de alguns aspectos dos índices, desde o sentido das fórmulas de cálculo até as questões relativas à montagem de séries históricas de preços e de índices de preços. Os problemas de referência temporal, acumulação de resultados, participações e influências podem ser tratados, também, à luz da referida abordagem.

Com vistas a nossos objetivos de ordem conceitual damos ênfase especial ao índice teórico de *Divisia*. Demonstramos que os índices mais comuns (de fato qualquer índice definido corretamente) – *Paasche, Laspeyres e Geométrico* – constituem casos particulares de Divisia. Fica claro, sob o enfoque contínuo, que não há superioridade de qualquer deles, porquanto as hipóteses são igualmente arbitrárias.

Além desses aspectos teóricos, mais ligados às questões de fórmula de cálculo, o próprio desenvolvimento das idéias induz-nos às discussões de ordem prática, como:

- que estratégia adotar quando da produção sistemática de índices de preços: base fixa ou índice em cadeia;
- o sentido das séries históricas montadas a partir de cada alternativa;
- que hipóteses são assumidas na prática corrente.

Constituem, ainda, objetivos deste artigo várias experimentações empíricas que ilustram as duas estratégias de produção. Para tanto estimamos quatro fórmulas de cálculo a partir de dados de orçamentos familiares e de preços no varejo relativos à área metropolitana do Rio de Janeiro no período agosto de 1974 a agosto de 1975. As informações de orçamentos familiares originam-se do Estudo Nacional da Despesa Familiar – Endef, da Fibge; os dados de preços, da pesquisa mensal da Fundação Getulio Vargas.

2. Os índices em cadeia

Suponhamos que seja calculado um índice de base fixa ao longo do período (b, t), caracterizado pelo sistema de informações e pela função I abaixo:

$$I\colon R^{4n} \to R, (p_t, p_b, q_t, q_b) \to I(p_t, p_b, q_t, q_b)$$

onde:

I é uma função de valores reais e domínio definido por (p_t, p_b, q_t, q_b);
$p_t = (p_t^1, \ldots, p_t^n)$ é o vetor de preços do período de referência;
$p_b = (p_b^1, \ldots, p_b^n)$ é o vetor de preços do período base;
$q_t = (q_t^1, \ldots, q_t^n)$ é o vetor de quantidades do período de referência;
$q_b = (q_b^1, \ldots, p_b^n)$ é o vetor de quantidades do período base;
$1, \ldots, n$ são os produtos.

O resultado deste processo de agregação – um número real maior que zero – é $I(p_t, p_b, q_t, q_b)$, simplificadamente: I_{bt}. Suponhamos ainda que o intervalo (bt) seja seccionado em K subintervalos. Necessita-se, então, ao invés de um único sistema de informações (p_t, p_b, q_t, q_b), de um conjunto de mesma natureza $(p_{b+1}\ p_b, p_{b+1}, q_b), \ldots, (p_t, p_{t-1}, q_t, q_{t-1})$.[1] Ora, pode-se aplicar em cada um destes subsistemas o mesmo processo acima, obtendo-se índices binários $I_{k-1,k}$ (sendo k um subintervalo genérico).

Define-se *índice em cadeia* da seguinte forma:

$$\bar{I}_{bt} = \prod_{k=b+1}^{t} I_{k-1,k} \quad \text{quando } t > b \qquad (1)$$
$$k = b+1, b+2, \ldots, t-1, t$$

$$\bar{I}_{bt} = 1 \quad \text{quando } t = b$$

$$\bar{I}_{bt} = 1/\prod_{k=b+1}^{t} I_{k-1,k} \quad \text{quando } t < b$$
$$k = b+1, b+2, \ldots, t-1, t$$

Isto é, a partir de uma sucessão de índices binários (quaisquer que sejam suas especificações), obtém-se um índice em cadeia através da acumulação geométrica dos resultados individuais obtidos em cada subintervalo de (bt).

[1] Fica evidente que o problema da construção dos índices em cadeia diz respeito à geração das informações necessárias para compor os subsistemas envolvidos.

Uma definição equivalente, em termos de soma de logaritmos, é apresentada a seguir:

$$\log \overline{I}_{bt} = \log I_{b,\,b+1} + \log I_{b+1,b+2} + \cdots + \log I_{t-1,\,t} \quad \text{para } t > b \tag{2}$$

$$\log \overline{I}_{bt} = -\log \overline{I}_{tb}, \quad \text{para } t < b$$

Pela forma como são definidos, os índices em cadeia constituem montagens de índices binários. É importante observar a exigência de informações para se construir séries históricas de índices em cadeia. A cada elo da série fazem-se necessários novos levantamentos de quantidades. Os subsistemas assim obtidos captam a dinâmica dos mercados, à medida que incorporam produtos novos ou produtos com novas especificações e excluem produtos que deixam de ser comercializados. Atualizam continuamente o sistema de pesos decorrentes dos vetores de quantidades.

Uma questão fundamental, nesse sentido, é que estratégia adotar na construção de séries históricas de índices: *índice de base fixa* versus *índice em cadeia*. Voltaremos a este ponto, mais adiante, no item 4.

3. O índice teórico de Divisia

3.1 *A noção de continuidade em variáveis econômicas*

Quando apresentamos os índices em cadeia, o que fizemos foi subdividir o período (bt) em vários subperíodos $(b, b+1); (b+1, b+2), \ldots, (t-1, t)$. Por definição, podemos ter tantos intervalos entre b e t quanto desejarmos. Admitamos que as variáveis econômicas *quantidades compradas* e *valor do dispêndio* sejam definidas como funções contínuas do tempo no intervalo $(t - \tau/2, t + \tau/2)$ de amplitude τ e que os valores médios e as quantidades médias sejam:

$$V_\tau^i(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} v^i(t)\, dt \tag{3}$$

$$q_\tau^i(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} q^i(t)\, dt$$

A partir das expressões acima, define-se o preço médio para o período de tempo τ:

$$p_\tau^i(t) = \frac{v_\tau^i(t)}{q_\tau^i(t)}$$

Observe-se que as três variáveis (médias) acabam tendo uma referência de ponto no tempo, justamente o ponto médio do intervalo τ, que chamaremos t_k.

3.2 *O índice de Divisia*

Uma vez definidas as variáveis acima, podemos calcular índices bissituacionais considerando-se dois intervalos sucessivos $k - 1$ e k. Seja, por exemplo, o índice de *Laspeyres*:

$$I_{k-1,k}^L = \sum_i \omega_\tau^i(t_{k-1}) \cdot r^i(t_k)$$

onde:

$$\omega_\tau^i(t_{k-1}) = v_\tau^i(t_{k-1}) / \Sigma\ v_\tau^i(t_{k-1})$$

$$r^i(t_k) = p_\tau^i(t_k) / p_\tau^i(t_{k-1})$$

Observe-se que as variáveis que compõem a fórmula de Laspeyres têm referência de ponto médio t_{k-1} e t_k de tempo no intervalo definido de amplitude τ.

O índice em cadeia para todo o intervalo (b, t), conforme (1) e (2), é:

$$\bar{I}_{bt} = \Pi_{k=b+1}^t I_{k-1,k}^L$$

ou

$$\log \bar{I}_{bt} = \Sigma_{k=b+1}^t \log I_{k=b-1,t}^L \tag{4}$$

$$k = b+1, b+2, \ldots, t-1, t$$

Se fizermos o número de intervalos entre (b, t) tender a infinito, temos as variáveis $(p, q$ e $v)$ definidas de forma contínua, e o índice em cadeira resultante também definido em (b, t) de forma contínua, igual ao índice de Divisia, ou seja:

$$\log I^D_{T_{bt}} = \lim_{K \to \infty} \log \bar{I}_{bt} = \int_b^t \sum_{i=1}^{n} \omega^i(t)\, d \log p^i(t) \tag{5}$$

Esta forma de deduzir o índice de Divisia $I^D_{T_{bt}}$ segue o desenvolvimento original do autor e a apresentação mais rigorosa de Y. Vartia.[2] Entretanto, é mais comum se encontrar, na literatura especializada, uma reconstrução feita a partir do atendimento à propriedade da reversão dos fatores.

Deve-se observar, pela seqüência de nossa apresentação dos índices, que o $I^D_{T_{bt}}$ é teórico e bastante exigente em termos de informações porquanto requer que as variáveis econômicas envolvidas sejam definidas como funções contínuas do tempo. É claro que não é possível de ser calculado, mas, definindo-se alguns intervalos (como faremos na seção 5), poderemos ter aproximações do índice teórico de Divisia. Esta é a noção precisa da afirmativa "qualquer índice é uma aproximação a Divisia". Não há sentido algum em atribuir esta propriedade a fórmulas particulares de cálculo.[3]

3.3 *Os índices de Laspeyres, Paasche, Geométrico e Törnqvist definidos a partir do índice teórico de Divisia*

No segmento anterior mostramos que uma cadeia de índices binários, quaisquer que sejam suas especificações, constitui uma *aproximação* ao índice teórico de Divisia. Demonstraremos, nesta seção, que os índices de Laspeyres, Paasche, Geométrico e Törnqvist identificam-se *exatamente* ao índice de Divisia ao admitirmos hipóteses alternativas sobre a trajetória de preços e quantidades. Estas hipóteses, em última instância, constituem redução das exigências de informações necessárias ao cálculo do índice teórico ou mesmo de sua aproximação pelos índices em cadeia.

Além das definições já comentadas, apresentaremos um resultado importante acerca do índice de valor. As demonstrações dos resultados abaixo encontram-se no Apêndice Matemático.

a) o índice de valor independe dos pontos intermediários ou da específica trajetória de preços e quantidades, isto é:

[2] Veja Divisia (1925) e Vartia (1976).

[3] Alguns autores brasileiros ainda insistem nesse erro ao atribuir ao Índice Geométrico a característica de *aproximação a Divisia* e a negarem-na ao índice de Laspeyres. No próprio original, Divisia partiu do índice de Laspeyres para inferir seu índice integral.

$$IV_{bt} = IV^D_{T_{bt}} = \frac{\sum_i p^i_t \; q^i_b}{\sum_i p^i_b \; q^i_b} \tag{6}$$

Conseqüentemente tem características semelhantes aos índices binários, atendendo a todas as propriedades atendidas por este último.

b) Laspeyres: se nos sucessivos períodos, ou ao longo da trajetória de preços e quantidades, mantiverem-se as quantidades do período base, então:

$$\bar{I}_{bt} = I^D_{T_{bt}} = \frac{\sum_i p^i_t \; q^i_b}{\sum_i p^i_b \; q^i_b} = I^L_{bt} \tag{7}$$

Ou seja, nas condições acima, o índice de Laspeyres, calculado ao longo do período (bt) é igual ao índice em cadeia e ao índice de Divisia.

c) Paasche: se nos sucessivos períodos, 2 ou ao longo da trajetória de preços e quantidades, mantiverem-se as quantidades do período de comparação, então:

$$\bar{I}_{bt} = I^D_{T_{bt}} = \frac{\sum_i \; p^i_t \;\; p^i_t}{\sum_i \; p^i_b \;\; p^i_t} = I^P_{bt} \tag{8}$$

Da mesma forma que no caso anterior, identifica-se o índice de Paasche, I^P_{bt}, fazendo constantes as quantidades envolvidas. A diferença é que, desta feita, trata-se das informações relativas ao período de comparação q^i_t.

d) Geométrico: se na expressão de Divisia

$$\int_b^t \Sigma \; \omega^i \; (t) \; d \; \log p^i \; (t),$$

considerarmos $\omega^i\,(t) = \omega^i\,(\,b\,)$ ao longo da trajetória de participações relativas, então

$$\text{exp.} \int_b^t \; \Sigma \; \omega^i\,(t) \; d \; \log p^i \; (t) = \prod_i \left(\frac{p^i\,(t)}{p^i\,(t)} \right)^{\omega^i\;(b)} = I^g_{bt} \tag{9}$$

Isto é, encontramos o índice Geométrico identificado ao índice de Divisia quando prevalecem, ao longo do período (bt), os pesos verificados em b.

e) Törnqvist: nas condições anteriores se os pesos forem

$\bar{\omega}^i\,(bt) \;=\; 1/2 \;\; [\;\omega^i\,(b) \;+\; \omega^i\,(t)\;],$ temos

$$\exp. \int_b^t \Sigma\, \bar{\omega}^i (bt)\; d \log p^i (t) = \prod_i \left(\frac{P_i (t)}{P_i (b)} \right)^{\bar{\omega}^i (bt)} = I_{bt}^T \qquad (10)$$

Ou seja, o índice de Törnqvist é igual ao índice de Divisia quando arbitramos a trajetória $\bar{\omega}^i (bt)$

É válido observar o importante aspecto das informações requeridas, em termos de quantidades, em cada caso. Törnqvist é mais exigente pois requer quantidades observadas em b e t; Paasche, em t; o índice de Laspeyres e o índice Geométrico estão no mesmo nível, a esse respeito, qualitativa e quantitativamente: exigem, apenas, as informações de quantidades verificadas em b.

Registre-se, ainda, que o fato de nos limitarmos às deduções dos índices I^L, I^P, I^G, I^T, não significa que os outros índices não possam também ser deduzidos de forma semelhante. Na verdade, pode-se inferir um número infinito de expressões, bastando estabelecer as hipóteses sobre as trajetórias de preços e quantidades.

3.4 *Ilustração gráfica*

Para ilustrarmos os diversos índices graficamente é necessário apenas fazê-lo quanto ao percurso de suas variáveis, ao domínio da função I_{bt}, já que a especificação da função índice é uma só.

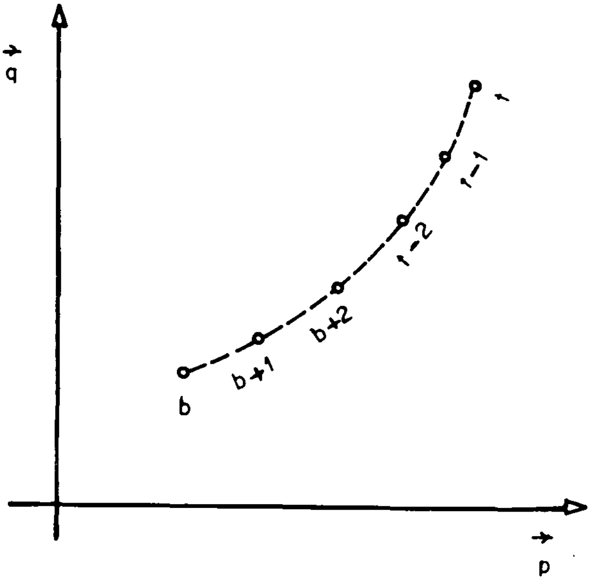
Consoante o desenvolvimento até aqui atingido, fica óbvio que cada bem ou serviço tem dois atributos com os quais trabalhamos: preço e quantidade ou preço e peso. Estes atributos podem ser representados por um sistema de coordenadas cartesianas.[4] Como o total de bens e serviços é n, forma-se um espaço de $2n$ dimensões. Nas ilustrações que se seguem, representamos o subespaço de preços $\vec{p} = (p^i, \ldots, p^n)$ no eixo das abscissas e o subespaço das quantidades $\vec{q} = (q^i, \ldots, q^n)$ no eixo das ordenadas. Antes da ilustração gráfica de nossos índices, apresentamos na figura 1 a caracterização dos três tipos de análise mencionadas neste artigo: bissituacional, em cadeia e contínua.

Os índices binários são obtidos a partir das informações relativas aos dois pontos extremos do gráfico b e t, isto é, conforme nossa definição, com base no sistema de informações (p_t, p_b, q_t, q_b); os índices em cadeia consideram também os pontos intermediários $b + 1, \ldots, t - 1$, ou seja, fazem uso dos sistemas de informações $(p_{b+1}, p_b, q_{b+1}, q_b), \ldots, (p_t, p_{t-1}, q_t, q_{t-1})$; e os índices contínuos – índices teóricos de Divisia – são calculados a partir dos dados expressos por todos os pontos entre b e t, ou seja, ao longo da trajetória Γ_{bt}.

[4] A análise gráfica utilizada se deve a Vogt (1977), que descreveu os índices de Laspeyres, Paasche e Edgeworth. Fazemos a extensão para o caso das trajetórias de pesos e generalizamos o recurso. Assinale-se que Divisia já recorrera a esse expediente, representando cada produto de *per si*.

Figura 1

Representação dos enfoques: binário, em cadeia e contínuo



Ficam ilustradas nossas principais conclusões analíticas:

a) quando o número de período da cadeia torna-se bastante grande (os intervalos entre quaisquer pontos diminuem), a cadeia aproxima-se da trajetória contínua T_{bt} (veja figura 1) e o índice confunde-se com o índice de Divisia;
b) quando arbitramos a trajetória T_{bt} $(p_t, \bar{q}_b)$ ou a trajetória T_{bt} $(p_t, \bar{q}_t)$ então os índices são, respectivamente, Laspeyres e Paasche. Na figura 2, b é o período inicial e t o período final. A trajetória que expressa Laspeyres fixa o subespaço das quantidades em $\vec{q}_b$; a que expressa Paasche, em $\vec{q}_t$;
c) quando arbitramos a trajetória T_{bt} (p_t, ω_b) ou a trajetória T_{bt} $(p_t, \bar{\omega}_t)$, então os índices são, respectivamente, o Geométrico e o de Törnqvist, ilustrados na figura 3. No presente caso as trajetórias são arbitradas em termos de participações relativas da base, e temos o índice geométrico; média entre as participações da base e do período de comparações e o índice é o de Törnqvist.

Podemos definir tantos índices *tipo Agregativo* ou *tipo Geométrico* quantos queiramos. Outros resultados podem ser visualizados pelo recurso gráfico acima. O ponto relevante a insistir é que os índices mais tradicionais (Laspeyres e Paasche) e os que competem na prática (Laspeyres e Geométrico) constituem casos particulares do índice teórico de Divisia. E quanto aos dois últimos, têm o

Figura 2

Representação gráfica dos índices de Laspeyres e de Paasche

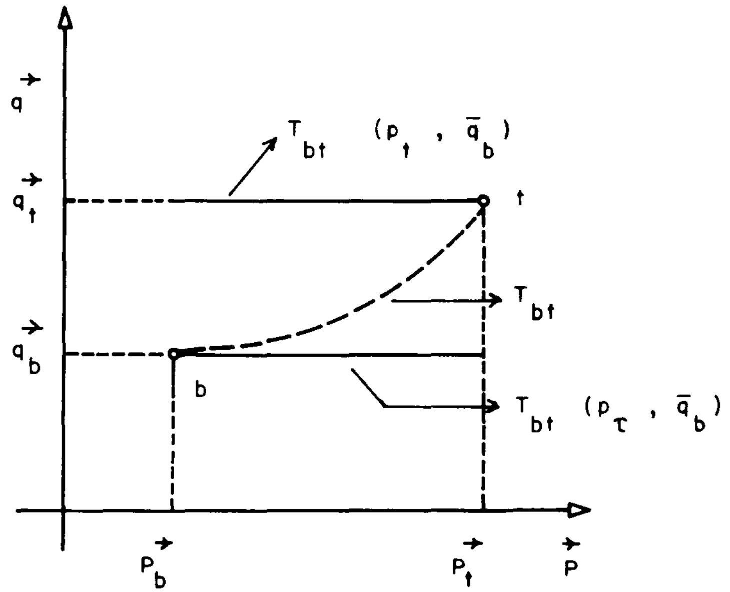
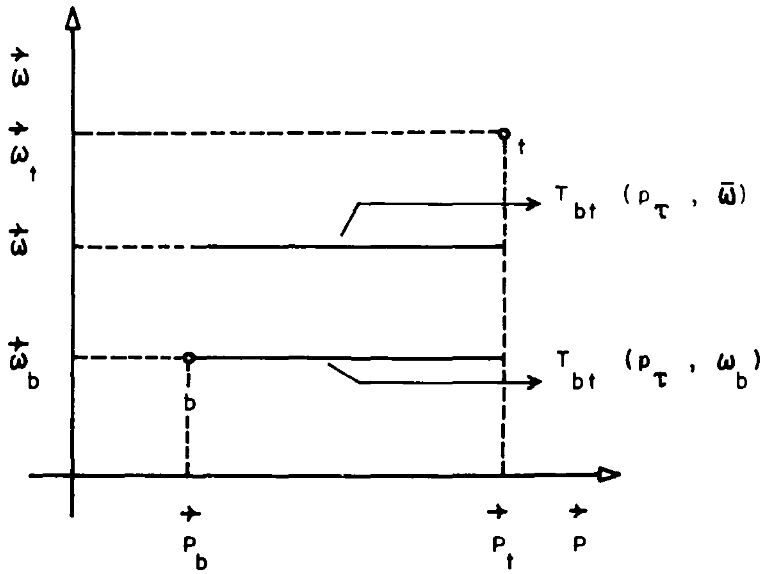


Figura 3

Representação gráfica dos índices geométrico e de Törnqvist



mesmo nível de exigência de dados – preços e quantidades no período base e preços continuamente – e distinguem-se tão-somente pelas hipóteses sobre as trajetórias de preços e quantidades.

3.5 *Principais inferências*

A partir dos resultados da seção 3.3 – para os quais o Apêndice Matemático é básico – obtemos inferências bastante relevantes, tendo em vista o desenvolvimento tradicional da teoria dos números índices:

a) a fórmula de cálculo dos índices (a especificação da função I) é *decorrente* da específica trajetória de preços e quantidades arbitradas;
b) em conseqüência, sob o prisma dos índices contínuos *não há o secular problema "a escolha da fórmula" e sim "a escolha da trajetória"*.[5] O que se mostra meridiano se ficarmos atentos para o fato de que os índices contínuos têm uma única expressão:

$$I^D_{T_{bt}} = e^{\int_b^t \sum_i \omega^i(t)\, d \log p^i(t)}$$

variando apenas a estrutura parametrizada de pesos – $\omega^i(t)$ – ao arbitrarmos particulares trajetórias de preços e quantidades!
c) escolhidos sistemas alternativos de pesos e pela aplicação do Teorema das Médias[6] às expressões derivadas, podemos deduzir todo e qualquer índice (mesmo as 134 fórmulas de Fisher!). Por exemplo, se arbitrarmos: 1. quantidades do período base; 2. quantidades do período final; 3. média geométrica das fórmulas originadas de (1) e (2), temos o índice de Fisher;
d) quando arbitramos *trajetórias em termos de quantidades* então *os índices são do tipo agregativo* (Laspeyres e Paasche, *e.g*), ou através de transformações, dos tipos aritmético e harmônico;
e) quando arbitramos trajetórias, quaisquer que sejam, em termos de *participações relativas fixas* então *os índices são do tipo geométrico*;

[5] A discussão sobre os índices sempre se iniciou por *qual a fórmula* e depois *que pesos*. Veja-se esta passagem de Fisher (1927) à p. 196: *"In the history of index numbers the first stage was to discuss the virtues of the simple index number, chiefly the arithmetic and the geometric. The next step was to assign weights supposed to be representative of the conditions prevailling in the periods concerned."*

[6] Pelo Teorema das Médias se I_i e I_j são números índices, então:

$$I_a = [\omega_i I_i^\delta + \omega_j I_j^\delta]^{1/\delta} \quad \text{e} \quad I_b = [I_i^{\omega i} \cdot I_j^{\omega j}]$$

também são números-índice. Veja Eichhorn & Voeller (1976).

f) do ponto de vista teórico, os índices que competem na prática – Laspeyres e Geométrico – calculados em periodicidade mensal, encontram-se em mesmo nível: ambos são casos particulares do índice teórico de Divisia; ambos são decorrências da escolha de específicas trajetórias de preços e quantidades. Escolha essa compulsória, dada a impossibilidade de acompanhamento de todas as variáveis econômicas intervenientes. Em suma, nada há que indique a superioridade de qualquer um deles.

Como conciliar nossas inferências com os métodos de criação de fórmulas de Fisher? Segundo Fisher o "cruzamento de fórmulas" é preferível ao "cruzamento de pesos" para a obtenção de índices "retificados", isto é, índices que atendam a um ou aos dois grandes testes de reversibilidade

"In other words, *formula crossing is a universal method of compromising between two formulae*, while weight crossing is of restricted application. We found it incapable, for instance, of rectifying some formulae by test 1. In short, weight crossing is never necessary and in some times inapplicable" (p. 196).

Pensamos que a análise de Fisher – intensamente influenciada pela descoberta de que havia uma única fórmula para a *time antitesis* e para a *factor antitesis* do índice de Laspeyres e, portanto, o processo de cruzamento garantia o atendimento aos dois testes de reversibilidade – tem pouca substância. Haja vista a existência de índices *ideais* como os de Vartia, cuja dedução não segue a orientação fisheriana. Por outro lado, é necessário deixar claro que o procedimento sintetizado sob a ótica dos índices contínuos não visa à descoberta de índices ideais, mas apenas a esclarecer e a estabelecer bases mais lógicas para o exame dos problemas relativos à *escolha dos pesos* e para o julgamento das fórmulas de cálculo, consoante exercitamos acima. Ainda, comparativamente ao método de Fisher, as fórmulas primárias seriam aquelas obtidas ao se arbitrar trajetórias de preços e quantidades ou de participações relativas; as fórmulas derivadas, aquelas originadas pela aplicação do Teorema das Médias.

4. A questão base fixa x índices em cadeia

Para melhor situar a discussão a que nos propomos, devemos atentar para a dupla finalidade dos índices: constituem medidas de determinado fenômeno tanto em prazos curtos quanto em prazos longos. Esclarecendo, há o INPC mensal, anual, bienal, etc. Evidencia-se, daí, o dilema básico na estratégia de montagem de séries históricas de índices que é a opção entre *base fixa* e *índices em cadeia*. Foi sintetizado por Fisher com mestria ímpar:

"Shall we content ourselves with the fixed base set and use that series, not only for its proper purpose of *comparing the fixed base year with each other year, but also for the theoretically improper purpose of comparing any other two years*? . . . Or shall we employ the chain system which is theoretically

proper only for comparing only two *sucessive* years but improper for comparing any other two years? " (p. 229; primeiro grifo nosso, segundo do autor).

Parece-nos perfeitamente válido identificar às duas grandes expressões da ciência dos índices – Fisher e Divisia – com os métodos *base fixa* e *índices em cadeia*, respectivamente. De fato, Fisher defendeu intransigentemente o sistema de base fixa no capítulo 14 de sua obra, em especial nos parágrafos 6 e 7, onde apresenta soluções engenhosas para os principais problemas que lhe são associados. No outro oposto, a essência das idéias de Divisia é captar a experiência histórica a cada momento:

"La comparaison direct est-elle possible? Nous crayons vraiment qu'elle n'a pas de sens et *que l'on ne peut procéder autrement que pas éléments infiniment petits successifs*" (Divisia, p. 1005; grifo do autor).

Insiste no fato de que o resultado dos índices não pode ser obtido apenas com as informações extremas, de *b* e *t* em nossa figura 1, mas também, e essencialmente, através da incorporação de todos os pontos intermediários.

"Et le résult ainsi trouvé dépendre de toutes les situation économic intermédiares. Conclusion: le valeur actualle de la raçon de François I^er^ dépend du régne de Louis XIV, des encyclopédistes et de la Revolution, de la découvert de la pomme de terre, l'invention de la vapeur . . .

En definitive, l'indice monétaire doit être logicament à base variable d'une époque à une outre" (p. 1006).[7]

É significativo que estes dois pensadores se tenham mantido tão antagônicos acerca deste importante problema. Na realidade, não há conciliar. Aspecto crucial, sem resposta precisa até hoje. Discutamos alguns pontos de cunho prático.

- exigência de dados: é claro que os índices em cadeia são mais exigentes, requerem levantamentos em menores intervalos de tempo; os índices de base fixa são atualizados a cada 10 anos na grande maioria dos países. Calculados pelo sistema em cadeia – os casos da Grã-Bretanha e da França – a atualização se faria a cada 12 meses. Nos sistemas de base fixa há, por outro lado, necessidade de informações comparáveis ao longo do período em que se mantém fixa a base. Um exemplo genuíno é o antigo Índice de Custo de Vida do Ministério do Trabalho, cuja última atualização 1967-1968 se manteve durante 12 anos.[8] Seus questionários conservaram o conteúdo fixo durante todo aquele período, acarretando sérios embaraços e problemas de coleta.
- saída e entrada de produtos: os índices em cadeia captam as variações na estrutura econômica decorrentes de inovações tecnológicas e alterações de demanda. Então, os problemas de mudança de qualidade – praticamente insuperá-

[7] O primeiro parágrafo foi citado anteriormente por Vogt (1977; 1978).

[8] Totalmente desativado em outubro de 1980. Esteve sob a responsabilidade da Fibge desde junho de 1978.

veis – atenuam-se, diferentemente do caso dos índices de base fixa, em que o surgimento de produtos novos e as alterações de qualidade constituem problemas sobremaneira complexos, não havendo métodos seguros e consistentes para sua incorporação no índice.

• base fixa mesmo? Excetuando-se a peculiaridade do Ministério do Trabalho, já comentada, não temos, na prática, índices rigorosamente de base fixa. Há maior ou menor flexibilidade de atualização das informações. No caso do INPC, as séries históricas de preços – a partir das quais são obtidas as estimativas dos movimentos de preços – originam-se de amostras de locais e produtos, *periodicamente atualizadas*; os questionários de campo, sendo mensalmente emitidos por computador, proporcionam condições de rápida adaptação. Esta situação apenas diminui o sentido de *base fixa*, porquanto não pode ir além. A base de ponderação é imutável e as alterações nos perfis de consumo no caso dos IPC's não podem ser assimiladas senão através de novas pesquisas de orçamentos familiares. Haja vista o exemplo simples de "metrô" no Rio de Janeiro, cujo surgimento é posterior à Endef e só poderá participar explicitamente da estrutura de pesos a partir da próxima pesquisa de orçamentos familiares.

• o sentido das séries históricas: qualquer que seja a alternativa, é importante compreender o significado das séries históricas. Pelo sistema de base fixa, as comparações são sempre de cada ano (ou mês) com respeito à base; no sistema em cadeia, as relações teoricamente certas existem apenas para os períodos sucessivos.

Por fim, estritamente com referência aos índices de preços ao consumidor, pensamos ser este aspecto um dos poucos em que o objetivo do índice tenha influência marcante. Se os IPC's refletem os efeitos das variações de preços nos orçamentos familiares e são utilizados como base para recompô-los, através da indexação dos salários, então é crucial que os índices sejam calculados a partir do padrão de consumo vigente. A economia brasileira testemunha, hoje, forte mudança nos hábitos de consumo em decorrência de alterações na estrutura de preços relativos e na estrutura de distribuição de renda. Significa rápida obsolescência das estrúturas de pesos obtidas anteriormente, bem como perda do significado dos índices que ainda as utilizam.

A conseqüência desta forma de pensar é que optamos – tendo em vista a irreconciliabilidade dos dois sistemas – pelo maior valor informativo do índice *no período de sua aplicação* em detrimento de seu sentido em séries históricas longas.

Resta o aspecto custo, até aqui ignorado. É indiscutível que os recursos empregados em uma ou outra alternativa constituem variável importante. Deve-se ponderar, em avaliação objetiva, o adicional necessário à montagem de um sistema em cadeia e os benefícios que lhe advêm. A situação atual do Brasil, no que respeita ao INPC, caracterizar-se-ia por uma adaptação do método de base fixa do sistema de pesos para o método em cadeia, já que os estimadores dos

movimentos de preços dos subitens têm atualização relativamente rápida. Pensamos que em um sistema produtivo de índices bem montado, em todos os seus segmentos, bases, função coleta, crítica/análise, a passagem *base fixa – índice em cadeia* acarreta acréscimos suportáveis de custo, sendo os benefícios substanciais, inclusive extra índice como a geração de séries históricas de consumo familiar a nível bastante desagregado.

5. Estimativas de índices de base fixa e em cadeia

5.1 *Objetivos*

A análise contínua, conforme nossa argumentação, apresenta os méritos de aclarar pontos de natureza prática e ter maior generalidade. Entretanto há uma contrapartida negativa quando pensamos em trabalhos empíricos. Na verdade seria um contra-senso imaginar que pudéssemos fazer estimativas a partir da expressão genérica de índice de preços, dada a exigência de dados de preços e quantidades como funções contínuas do tempo.

Mesmo assim, em situações bastante privilegiadas de disponibilidade de dados, é possível proceder a aproximações à expressão genérica dos índices através de estimativas de índices em cadeia. Nestas condições – existência de dados de preços e quantidades ao longo do tempo – basta definir alguns subperíodos, proceder aos cálculos de índices bissituacionais em cada subperíodo e acumulá-lo geometricamente em todo o intervalo.

Com o objetivo de ilustrar o processo de obtenção de índices em cadeia – *proxys* dos índices teóricos de Divisia – e de compará-los com os índices de base fixa, estimamos para o período agosto de 1974/agosto de 1975 os índices de Laspeyres, Paasche, Fisher e Geométrico pelos dois processos.

Na seção 5.2 descreveremos os dados e os procedimentos adotados; uma breve análise comparativa dos resultados compõe o item 5.3

5.2 *Dados e procedimentos*

Nossos experimentos empíricos se baseiam em informações de preços ao consumidor e despesas familiares observados na área metropolitana do Rio de Janeiro no período de agosto de 1974 a agosto de 1975.

Os dados de despesa – informação primária das estruturas de pesos – originam-se da pesquisa Estudo Nacional da Despesa Familiar – Endef, inquérito domiciliar, na linha das modernas pesquisas de orçamentos familiares, realizado pela Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística e que constitui marco fundamental da experiência brasileira com pesquisas desta

natureza. Para que pudéssemos montar os índices em cadeia, dividimos a amostra total da Endef em seis subamostras conforme o período de entrevista do domicílio, obtendo assim seis "observações" de despesas ao longo de todo o período da pesquisa. Essas subamostras configuram-se assim:

Período		Domicílios
1.º	set./out. 1974	477
2.º	nov./dez. 1974	562
3.º	jan./fev. 1975	559
4.º	mar./abr. 1975	524
5.º	maio/jun. 1975	488
6.º	jul./ago. 1975	342

Definido o arquivo em termos de despesa, o passo seguinte constitui-se na estimativa dos pesos propriamente ditos.[9] O processo de agregação dos domicílios em cada período seguiu o procedimento usual, ou seja, a composição das despesas do grupo de domicílios foi definida pela soma das despesas individuais.

Os relativos de preços – ou índices dos subitens – foram obtidos diretamente das listagens de computador do Índice de Preços ao Consumidor da Fundação Getulio Vargas. Esses dados da FGV têm a referência temporal bastante aproximada ao mês civil, de modo que para fazer a correspondência com as informações de valores da Endef bastou apenas proceder à acumulação de cada dois meses. Ademais, tivemos que proceder a pequenas adaptações porque nossas estruturas de pesos não correspondiam exatamente – em sua categorização e em raros casos de agregação – à estrutura empregada pela Fundação Getulio Vargas. O arquivo de relativos ficou referido ao tempo conforme abaixo:

Período	
1.º	out./nov. 1974
2.º	dez. 1974/jan. 1975
3.º	fev./mar. 1975
4.º	abr./maio 1975
5.º	jun./jul. 1975

[9] A definição dos dados em termos de valores, ao invés de "pesos", é necessária para permitir uma ampla aplicação de métodos de cálculo. Em nossa dissertação testamos 12 fórmulas de cálculo a partir dos arquivos descritos.

Estruturados os arquivos, conforme a hierarquia do INPC, seus registros foram definidos, combinados e agregados de acordo com cada uma das fórmulas de cálculo escolhidas e de acordo com as estratégias de produção experimentadas: base fixa ou índice em cadeia.

5.3 *Os resultados*

O período coberto por nossas simulações caracteriza-se por uma fase de crescimentos moderados de preços relativamente à experiência brasileira na década de 60, no segundo lustro dos anos 70 e no início da década de 80. Em particular, os índices do grupo Alimentação – de maior peso e ao qual se referem nossas estimativas – apresentam-se com variação inferior à variação dos demais grupos em conjunto. Assim, nos acumulados dos 10 meses, as variações oscilam entre 14% e 16,6%.

Na tabela 1, apresentamos os resultados em cada elo da cadeia (outubro/novembro de 74, dezembro de 74/janeiro de 75, fevereiro/março de 75, abril/maio 75 e junho/julho 75) e os resultados encadeados em todo o período. Na última linha os números quando os índices são calculados em base fixa.

Vejamos, agora, o comportamento dos índices no caso das acumulações contínuas, isto é, em cada ponto do tempo os resultados são os acumulados até aquele ponto de modo a ilustrar a idéia de "aproximação de continuidade" ao longo do trajeto. Para melhor visualização das trajetórias dos indicadores, apresentamos cada índice em um gráfico e ao mesmo tempo assinalamos o resultado obtido sob a estratégia base fixa.

Tabela 1

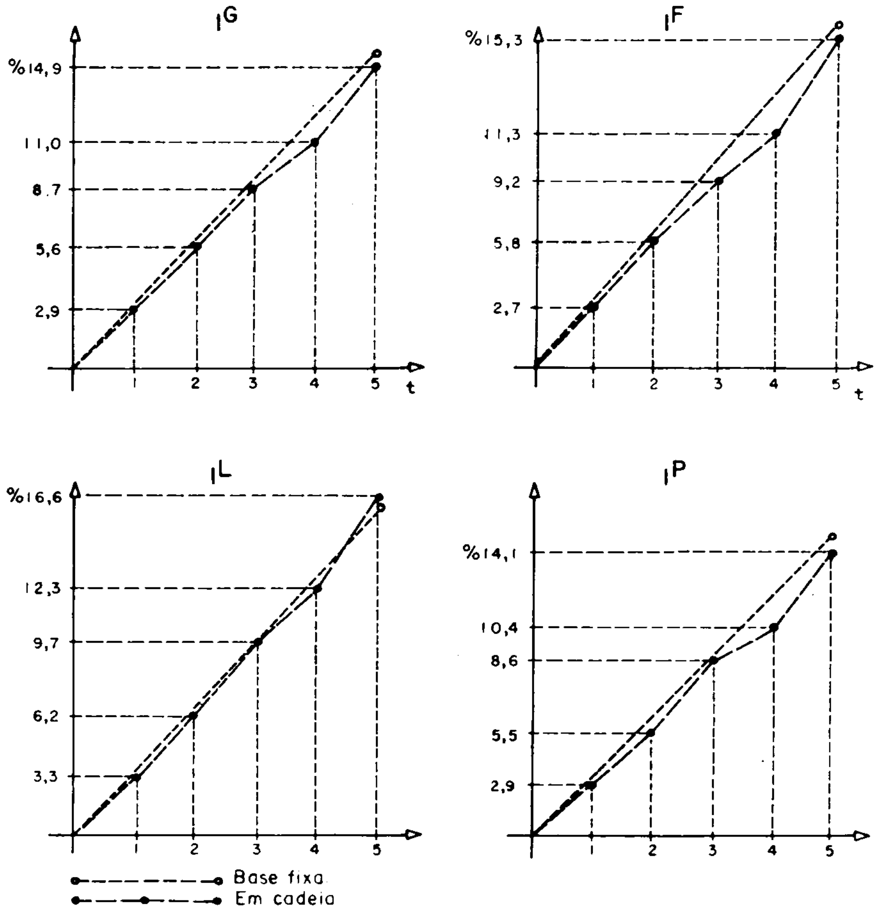
Índices em cadeia e de base fixa. Simulações com o grupo alimentação – Rio de Janeiro – out./74 a jul./75

Período \ Índices	I^L	I^P	I^G	I^F
Out./nov. 74	1.03313103	1.02874834	1.02937780	1.03093736
Dez. 74/jan. 75	1.02762784	1.02555185	1.02549425	1.02658932
Fev./mar. 75	1.03333318	1.02996273	1.03011752	1.03164658
Abr./maio 75	1.02404740	1.01572813	1.02093437	1.01987928
Jun./jul. 75	1.03783455	1.03359809	1.03507705	1.03571415
Ac. em cadeia				
Out. 74/jul. 75	1.16594973	1.14082088	1.14911979	1.15331573
Ac. em b. fixa				
Out. 74/jul. 75	1.16398740	1.15282195	1.15278538	1.15839122

Nota: Os símbolos significam: I^L: Laspeyres; I^P: Paasche;
I^G: Geométrico; I^F: Fisher.

Figura 4

Índices em cadeia e de base fixa



Apesar das pequenas discrepâncias entre as duas estratégias – decorrência do curto período de tempo das simulações – pode-se observar que dos quatro índices estimados, três deles (I^P, I^G e I^F) apresentam-se com variações mais elevadas quando calculados sob a estratégia *base fixa*. Apenas no índice de Laspeyres o resultado *em cadeia* é maior que o resultado *base fixa*, com diferença, em termos de variações, bastante diminuta, da ordem de um quinto de um ponto percentual; enquanto no índice de Paasche a variação do índice de base fixa é maior um ponto e um quinto.

É necessário resssaltar que estes resultados empíricos têm como objetivo apenas ilustrar os dois procedimentos básicos de monfagem de séries históricas de índices. Não podemos inferir, a partir deles, relações definitivas entre os resultados das duas abordagens.

6. Considerações finais

Vários aspectos relevantes dos números índices – método de cálculo, sentido das séries históricas – são tratados neste artigo sob o *approach* dos índices teóricos de Divisia, isto é, sob o *approach* da análise contínua.

A contrapartida prática do enfoque de Divisia são os índices em cadeia. De modo que pensar nesta estratégia de produção de índices de preços significa inquerir-lhe o significado à luz da análise contínua.

Neste sentido, analisamos a questão da fórmula de cálculo e nossas inferências são consentâneas com a abordagem bissituacional ao concluirmos que os índices que competem na prática são igualmente arbitrários, igualmente hipotéticos, igualmente corretos e igualmente aceitáveis conceitualmente.[10]

O processo de montagem dos índices em cadeia – construção de estruturas de pesos ao longo do tempo, cálculo de índices bissituacionais e encadeamento – é ilustrado com nossas simulações onde aplicamos quatro métodos alternativos de cálculo.

As duas estratégias de geração de séries históricas de índices de preços foram colocadas em discussão, resumindo-se os pontos de vista de Fisher e Divisia a fim de aclarar o sentido e as implicações de cada opção. Mais modernamente, os autores são unânimes em afirmar a superioridade dos índices em cadeia. As alterações tecnológicas e as mudanças nos perfis de consumo, hoje mais intensas e mais rápidas, implicam na perda da representatividade do sistema de pesos e da fidedignidade das estimativas dos movimentos de preços quando os índices são rigorosamente calculados em base fixa. Ao passo que a estratégia de produção em cadeia capta as alterações nos perfis de demanda, tornando os pesos representativos da

[10] Veja Moura de Melo (1982, capítulo 1).

realidade e propicia a inclusão das modificações de qualidade, produtos novos, etc., nas estimativas dos movimentos de preços.

Pensamos, a propósito, que o atual estágio das estatísticas brasileiras – após o evento INPC e pela iminente obsolescência de suas estruturas de ponderações – comporta o delineamento de um programa de atualização de todo o sistema de pesos numa perspectiva de índices em cadeia. Em outros termos, os pesos do INPC – obedecida sua estratificação em perfil de consumo e perfil de comercialização – deveriam ser atualizados em intervalos regulares de tempo (a cada 12 ou 24 meses) através de pesquisas contínuas de orçamentos familiares e levantamentos da realidade da comercialização via pesquisa de Local de Compras.

Apêndice matemático

Proposição A: O índice de Valor independe dos pontos intermediários ou da trajetória de preços e quantidades. Isto é:

$$IV_{bt} = IV^{D}_{\mathrm{T}_{bt}} = \frac{\sum\limits_i p_t^i \, q_t^i}{\sum\limits_i p_b^i \, q_b^i} \tag{1}$$

Demonstração: a.1 Caso discreto (em cadeia):

$$\overline{IV}_{bt} = IV_{b,\,b+1} \cdot IV_{b+1,\,b+2} \cdot \;\cdots\; \cdot IV_{t-1,\,t}$$

$$\overline{IV}_{bt} = \frac{\sum\limits_i p_{b+1}^i \, q_{b+1}^i}{\sum\limits_i p_b^i \, q_b^i} \cdot \frac{\sum\limits_i p_{b+2}^i \, q_{b+2}^i}{\sum\limits_i p_{b+1}^i \, q_{b+1}^i} \cdot \;\cdots\; \cdot \frac{\sum\limits_i p_t^i \, p_t^i}{\sum\limits_i p_{t-1}^i \, q_{t-1}^i},$$

$$\therefore \; \overline{IV}_{bt} = \frac{\sum\limits_i p_t^i \, q_t^i}{\sum\limits_i p_b^i \, q_b^i} \tag{2}$$

a.2 Caso contínuo (Divisia):

Consideremos $V_{(t)} = \sum\limits_i p^i(t)\, q^i(t)$ uma função positiva de valores reais diferenciável em t. O índice de Valor

$$IV^{D}_{T_{bt}} = \frac{V_{(t)}}{V_{(t_b)}} \tag{3}$$

também é uma função diferenciável de t.

Aplicando a diferenciação logarítmica em (3) obtemos:

$$d\left[\log IV^D_{T_{bt}}\right] = d\left[IV^D_{T_{bt}}\right] \cdot \frac{1}{IV^D_{T_{bt}}} =$$

$$= d\left[\frac{\sum_i p^i_{(t)}\, q^i_{(t)}}{\sum_i p^i(t_b)\, q^i(t_b)}\right] \frac{\sum_i p^i(t_b)\, q^i(t_b)}{\sum_i p^i(t)\, q^i(t)}$$

$$= \frac{\sum_i q^i(t)\, d\, p^i(t) + \sum_i p^i(t)\, d\, q^i(t)}{\sum_i p^i(t_b)\, q^i(t_b)} \; \frac{\sum_i p^i(t_b)\, q^i(t_b)}{\sum_i p^i(t)\, q^i(t)}$$

$$= \frac{\sum_i q^i(t)\, dp^i(t) + \sum_i p^i(t)\, dq^i(t)}{\sum_i p^i(t)\, q^i(t)}$$

A partir desta expressão que representa uma taxa instantânea de crescimento de $V_{(t)}$, pelo processo inverso da logaritmização e diferenciação temos, considerando T a variável de integração:

$$IV^D_{T_{bt}} = e^{\int_b^t \frac{\sum_i p^i(\tau)\, dp^i(\tau) + \sum_i p^i(\tau)\, dq^i(\tau)}{\sum_i p^i(\tau)\, q^i(\tau)}}$$

A expressão do expoente representa uma integral curvilínea definida na trajetória T_{bt}. No entanto, como o integrando é o diferencial logarítmico de V_t, o processo de integração independe da específica trajetória de T_{bt}, portanto, depende apenas de seus extremos. Então:

$$IV^D_{T_{bt}} = e^{\int_b^t \frac{d}{dt} \log V(t)\, dt}$$

$$\therefore \quad IV^D_{T_{bt}} = e^{[\log V(t) - \log (V_{tb})]} = \frac{V(t)}{V(t_b)} = \overline{IV}_{bt}$$

Proposição B: Quando arbitramos uma trajetória determinada, em termos das quantidades do primeiro momento, então o índice de Divisia se identifica com o índice de Preços de Laspeyres. Isto é:

$$e^{\int_b^t \frac{\sum_i q^i(b)\, dp^i(\tau)}{\sum_i p^i(\tau)\, q^i(b)}} = \frac{\sum_i p^i(t)\, q^i(b)}{\sum_i p^i(b)\, q^i(b)}$$

Demonstração: b.1 Caso Discreto

$$\bar{I}_{bt} = \prod_{k=b+1}^{t} I^L_{k-1,k} = \frac{\sum_i p^i_{b+1}\, q^i_b}{\sum_i p^i_b\, q^i_b} \cdot \frac{\sum_i p^i_{b+2}\, q^i_b}{\sum_i p^i_{b+1}\, q^i_b} \cdot \dots \cdot \frac{\sum_i p^i_t\, q^i_b}{\sum_i p^i_{t-1}\, q^i_b}$$

$$= \frac{\sum_i p^i_t\, q^i_b}{\sum_i p^i_b\, q^i_b} = I^L_{bt}$$

b.2 Caso contínuo

$$\log I^D_{\mathrm{T}_{bt}} = \int_b^t \frac{\sum_i q^i(\tau)\, dp^i(\tau)}{\sum_i p^i(\tau)\, q^i(\tau)} \tag{4}$$

quando definimos a trajetória de preços e quantidades ao longo do tempo, fixando o subespaço das quantidades em termos de q^i_b, temos:

$$\log I^D_{\mathrm{T}_{bt}} = \int_b^t \frac{\sum_i q^i(b)\, dp^i(\tau)}{\sum_i p^i(\tau)\, q^i(b)} \tag{5}$$

O integrando da expressão (5) é a diferencial total logarítmica da função $\sum_i p^i(t)\, q^i(b)$, como se pode constatar:

$$\frac{d}{dt}\left[\log \sum_i p^i(\tau)\, q^i(b)\right] dt = \frac{\sum_i q^i(b)\, dp^i(\tau)}{\sum_i p^i(\tau)\, q^i(b)}$$

Daí, temos:

$$\log I^D_{\mathrm{T}_{bt}} = \log \sum_i p^i(t)\, q^i(b) - \log \sum_i p^i(b)\, q^i(b)$$

$$\therefore \; I^D_{T_{bt}} = e^{\log [\sum_i p^i(t)\, q^i(b) - \log \sum_i p^i(b)\, q^i(b)]}$$

$$\therefore \; I^D_{T_{bt}} = I^L_{bt}$$

Proposição C: Quando arbitramos uma trajetória determinada em termos das quantidades do último momento, então o índice de Divisia se identifica com o índice de Paasche. Isto é:

$$e^{\int_b^t \frac{\sum_i q^i(t)\; dp^i(\tau)}{\sum_i p^i(\tau)\; q^i(t)}} = \frac{\sum_i p^i(t)\; q^i(t)}{\sum_i p^i_{(b)}\; q^i_{(t)}}$$

Demonstração:

Idêntica a B, basta fazer $q^i(\tau) = q^i(t)$

Proposição D: Quando arbitramos uma trajetória determinada, em termos dos pesos observados no primeiro momento, então o índice de Divisia se identifica com o índice Geométrico. Isto é:

$$e^{\int_b^t \sum_i \omega^i(b)\; d \log p^i(t)} = \prod_i \left(\frac{p^i(t)}{p^i(b)} \right)^{\omega^i(b)}$$

Demonstração: d.1 Caso discreto – idêntico a b.1

d.2 Caso contínuo

$$\log I^D_{T_{bt}} = \int_b^t \frac{\sum_i q^i(\tau) \cdot dp^i(\tau)}{\sum_i q^i(\tau) \quad p^i(\tau)} \tag{6}$$

Tomemos o integrando da expressão (6). Multiplicando e dividindo por $p^i(\tau)$, vem:

$$\sum_i \left(\frac{q^i(\tau) \cdot p^i(\tau)}{\sum_i q^i(\tau) \quad p^i(\tau)} \right) \cdot \frac{d\, p^i(\tau)}{p^i(\tau)}$$

fazendo

$$\frac{q^i(\tau)\ \ p^i(\tau)}{\sum\limits_i q^i(\tau)\ \ p^i(\tau)} = \omega^i(\tau)$$

$$e\ \mathrm{T} = b,$$

$$\log I^D_{\mathrm{T}_{bt}} = \int_b^t \sum_i \omega^i(b) \cdot \frac{d\,p^i(\tau)}{p^i(\tau)} \tag{7}$$

O integrando da expressão acima é a diferencial total logarítmica da função $f(t) = \prod\limits_i \left(p^i(t)\right)^{\omega^t(b)}$. Como podemos constatar abaixo:

$$\frac{d}{dt}\left[\log f(t)\right] dt = \frac{d}{dt}\left[\log \prod_i p^i(t)^{\omega^i(b)}\right] dt =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_i \omega^i(b)\ \log p^i(t)\right] dt$$

$$= \sum_i \omega^i(b)\ \frac{\frac{dp^i}{dt}(t)}{p^i(t)}\ dt = \sum_i \omega^i(b)\ \frac{dp^i(t)}{p^i(t)}$$

Então, retornando à expressão (7), temos:

$$\log I^D_{\mathrm{T}_{bt}} = \int_b^t d\ \log \prod_i \left(p^i(\mathrm{T})\right)^{\omega^i(b)}$$

$$= \log \prod_i \left(p^i(t)\right) - \log \prod_i \left(p^i(b)\right) = \log \prod_i \left(\frac{p^i(t)}{p^i(b)}\right)^{\omega^i(b)}$$

Assim: $I^D_{\mathrm{T}_{bt}} = I^G_{bt}$

Proposição E: Quando arbitramos uma trajetória determinada em termos de médias, aritméticas dos pesos observados no primeiro e no último momentos, então o índice de Divisia se identifica com o índice de Törnqvist. Isto é:

$$e^{\int_b^t \sum_i \bar{\omega}^t \, d \log p^i(t)} = \prod_i \left(\frac{p^i(t)}{p^i(b)} \right)^{\omega^i}$$

Demonstração: Idêntico a d, substituindo $\omega_i(b)$ por

$$\bar{\omega}^i = \left[\omega_i(b) + \omega_i(t) \right] \div 2$$

Abstract

In order to get a conceptual basis for chaining indexes, we lay the main notions of the continuous approach of the index number and show that the usual methods are particular cases of the theoretical Divisia formula. As that, they are theoretically acceptable and have the same shortcomings.

We introduce, from Fisher and Divisia point of view, a discussion about the strategy to be chosen for generation of time series of a price index: fixed base or chain systems. This is a very important aspect of index number with points to explore. To show the process in practice, we proceed and empirical experimentation taking four methods in the two system.

We think sound to define a program for updating the basis of the INPC in the line of the chain system, mainly in reason of the widespread use of the INPC as an scalator in the Brazilian economy.

Referências bibliográficas

Allen, R. G. D. *Index number in theory and practice.* London, Macmillan, 1975.

Banerjee, R. S. *Cost of living index number.* New York, Marcel Dekker, 1975.

Carvalho, J. L. Uma nota sobre números índices. *Revista Brasileira de Economia,* Rio de Janeiro, *29*: 60-8, jan./mar. 1975.

Divisia, F. L'indice monetaire et la théorie de la monnaie. *Revue d'Economie Politique, 39*: 842-61, juil./août. 1925; *39*: 980-1.008, sept./oct. 1925.

Eichhorn, W. & Voeller, J. *The ory of Price Index.* Berlin, Spring-Verlag, 1976. Lecture notes in Economics and Mathematicals Systems.

Fisher, I. *The making of index number.* 3 ed. Boston/New York, Houghton Mifflin, 1927.

Hulten, C. Divisia index numbers. *Econometrica, 4*: (6): 1.017-25, 1973.

Kirsten, J. T. *Metodologia da construção de índices de preços ao consumidor – custo de vida.* São Paulo, IPE, 1975.

________. Índice Nacional de Preços ao Consumidor: críticas e subsídios. *Estudos Econômicos*, São Paulo, *10* (2), 1980.

Moura de Melo, F. A. Custo de vida, padrão de vida e índices de preços ao consumidor. *Revista Brasileira de Estatística*, Rio de Janeiro, *37* (148): 445-56, 1976.

________. *The Brazilian consumer price index program*. Invited Paper n.º 18. 2. Manila, 42nd Session of the International Statistical Institute, 1979.

________. *Análise dos índices de preços e estimativas de seus vieses*. Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro, 1982.

Neto, C. D. *Elementos de Análise vetorial*. São Paulo, Nacional, 1976.

Psikunov, N. *Diferencial and integral calculus*. Moscow, Mir. Publichers, s.d.

Roy, R. Em torno dos números índices. *Revista Brasileira de Estatística, 10*, jul./set. 1949.

Ruist, R. *Index number. International Encyclopedia of the Social Sciences*. 1958. v. 7, p. 154-69.

Samuelson, P. A. & Suammy, S. Invariant ecónomic index number and economic duality: survey and synthesis. *The American Economic Review, 64*: 566-93, sept. 1974.

Simonsen, M. H. *Aplicações da teoria ordinal*. Rio de Janeiro, EPGE/FGV, 1980.

Theil, H. *Economics and information theory*. Amsterdam, North-Holland Publishing, 1967.

________. A new index number formula. *The Review of Economic and Statistics*, Cambridge, *55* (4): 499-503, 1973.

Törnqvist, L. The bank of Finland consumption price index. *Bank of Finland Monthly Bulletin, 10*: 1-8, 1936.

Vartia, Y. *Relative change and index number*. Helsinki, The Research Institute of the Finnish Economy, 1976.

Vogt, A. O Problema da Indexação, trad. de Zum Index Problem. Geometrische Darstellung Sowie Eine Neue Formel. *Schweizerische Zeitschrift für Statistik und Volkswirtschaft, 113* (1): 73-88, 1977.

________. Divisia indices on diferent path. *Theory and Applications of Economic Indices*. Würzburg, 1978.