A eficiência marginal do capital: as condições de Soper revisitadas *

Clovis de Faro ** e Luiz Soares ***

Resumo

Para o caso em que a vida econômica de um dado projeto de investimento não pode ser considerada como uma variável controlável, Soper (1959) desenvolveu um conjunto de condições de suficiência para a existência e unicidade da eficiência marginal do capital. No presente trabalho, fazendo uso do mesmo tipo de enfoque que o empregado por Soper, são derivadas novas condições de suficiência, as quais são evidenciadas como mais potentes do que as originais.

1. Introdução

Dado um projeto de investimento caracterizado pela seqüência de fluxos de caixa líquidos $\{-S, Q_1, \ldots, Q_n\}$, na qual $SQ_n \neq 0$ e que apresenta ao menos uma variação de sinal, reconsideremos o problema da aplicabilidade do critério da eficiência marginal do capital. Como de conhecimento generalizado, fazendo-se $p = (1 + r)^{-1}$, onde r denota taxa de juros, o critério requer a existência de uma única raiz positiva (distinta) para o seguinte polinômio em p:

$$F(p) = -S + \sum_{j=1}^{n} Q_j p^j \tag{1}$$

* Eximindo-o de responsabilidade por erros remanescentes, agradecemos os comentários de Fernando de Holanda Barbosa.

** Do Ipea/Inpes, da EPGE e professor-visitante da UFF.

*** Da Eletrobrás e professor-visitante da UFF.

Ainda mais, sendo $\hat{p}$ uma tal raiz e sendo $\bar{r}$ uma certa taxa de juros fixada para comparação, para que haja consistência com o chamado método do valor atual, é necessário que a $\hat{r} = (1 - \hat{p}) / \hat{p} \lesseqgtr \bar{r}$ corresponda $F(\bar{p}) \lesseqgtr 0$.

Em um artigo anterior (De Faro, set. 1975), no qual procedeu-se a um detalhado exame das proposições originalmente desenvolvidas por Soper (mar. 1959), evidenciou-se que uma condição de suficiência para a correta implementação do critério da eficiência marginal do capital é que, sendo $\hat{P} > 0$ tal que $F(\hat{p}) = 0$, se tenha:

$$S \geq \sum_{j=1}^{k} Q_j \hat{p}^j, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2}$$

o que só será verificado se $Q_n > 0$.

No presente trabalho, fazendo uso do mesmo tipo de enfoque empregado por Soper, iremos derivar uma nova condição de suficiência, a qual, embora mais trabalhosa, é mais potente do que a expressa por (2).

2. Restrição ao campo das taxas de juros positivas

Inicialmente, concentremo-nos no caso, que é o de real interesse prático, em que só sejam relevantes as taxas de juros positivas. Então, como discutido por De Faro e Mello e Souza (dez. 1975), é requisito indispensável que se tenha $F(1) = -S + \sum_{j=1}^{n} Q_j > 0$ e a busca de raízes de $F(p)$ fica limitada a valores $p \varepsilon (0, 1)$.

Suponha-se que $\hat{p} \varepsilon (0, 1)$ seja tal que $F(\hat{p}) = 0$. Então, se $p = 1$ for um limite inferior para as raízes positivas de

$$f(p) = \frac{F(p)}{p - \hat{p}} \tag{3}$$

segue-se que $\hat{p}$ será a única raiz de $F(p)$ em $(0, 1)$.

Ora, seguindo-se Turnbull (1957, p. 97-8), $p = 1$ será um limite inferior para as raízes reais da equação $f(p) = 0$ se $p = 1$ for um limite superior para as raízes reais da equação recíproca de $f(p) = 0$, que designaremos por $g(p)$.

Temos que:

$$g(p) = p^{n-1} f(p^{-1}) = \left\{ \frac{F(p^{-1})}{p^{-1} - \hat{p}} \right\} p^{n-1}$$

ou

$$g(p) = \frac{-Sp^n + \sum_{j=1}^{n} Q_j p^{n-j}}{1 - \hat{p}p} \tag{4}$$

Por outro lado, de acordo com a Regra de Newton (Turnbull, 1957, p. 97), para que $p = 1$ seja um limite superior para as raízes reais de $g(p) = 0$ é suficiente que $g(1) > 0$ e que as $n - 1$ primeiras derivadas de $g(p)$, quando avaliadas no ponto $p = 1$, sejam não-negativas.

Tendo em vista que

$$g(1) = \frac{-S + \sum_{j=1}^{n} Q_j}{1 - \hat{p}} > 0 \tag{5}$$

pois, por hipótese, $F(1) > 0$ e $1 - \hat{p} > 0$ se $\hat{p} \varepsilon\ (0, 1)$, decorre que, denotando-se por $g^k(1)$ a k-ésima derivada de $g(p)$ quando avaliada em $p = 1$, e em face do lema demonstrado em apêndice, basta que se tenha:

$$g^k(1) = \frac{k! \left\{ -\binom{n}{k} S + \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-j}{k} Q_j \right\} + k\hat{p}g^{k-1}(1)}{1 - \hat{p}} \geq$$

$$\geq 0, \; k = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{6}$$

onde $g^0(1) \equiv g(1)$.

3. Extensão ao campo das taxas de juros com significação econômica

Uma vez estabelecida a unicidade de uma raiz $\hat{p} \varepsilon\ (0, 1)$, vejamos agora sob que condições fica também assegurada a extensão da aplicabilidade do critério da eficiência marginal do capital ao campo das taxas de juros com significação econômica (que é definido por $r > -1$).

Antes de mais nada, observamos que tal extensão somente será possível se $Q_n > 0$. Pois, para que $\hat{p} \varepsilon$ (0, 1) seja a única raiz positiva de $F(p)$, é óbvio que não podemos ter raízes no intervalo definido por $p \geqslant 1$. Outrossim, dado que, por hipótese, $F(1) > 0$ e observando-se que o sinal de $\lim_{p \to \infty} F(p)$ coincide com o de Q_n, segue-se, da continuidade de $F(p)$, que tal só será verdade se $Q_n > 0$.

Fazendo-se uso uma vez mais da Regra de Newton, decorre que uma condição de suficiência para que $\hat{p} \varepsilon$ (0, 1) seja a única raiz positiva de $F(p)$ é que $p = 1$ seja um limite superior para suas raízes reais. Isto é, já que $F(1) > 0$, basta que $F^k(1) \geqq 0$, para $k = 1, 2, \ldots, n$; onde:

$$F^k(1) = k! \left\{ Q_k + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{j}{k} Q_j \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1 \tag{7}$$

e

$$F^n(1) = n! \, Q_n \tag{8}$$

4. Confronto com as condições de Soper

Retomemos o contra-exemplo de Karmel (dez. 1959), aqui chamado de projeto de investimento A, que é caracterizado pela seguinte seqüência de fluxos de caixa líquidos: $\{-2, 6, -5, 2\}$. Como já evidenciado por De Faro (set. 1975), é de imediata comprovação que $\hat{p} = 0{,}5$ é a única raiz real de $F(p) = -2 + 6p - 5p^2 + 2p^3$ e que, entretanto, as condições de Soper, como expressas por (2), não são satisfeitas.

Outrossim, dado que

$$g^0(1) = 1/(1 - 0{,}5) = 2,$$

fazendo-se uso de (6) teremos, sucessivamente:

$$k = 1 \rightarrow g^1(1) = \frac{-3 \times 2 + 2 \times 6 + 1(-5) + 0{,}5 \times 2}{1 - 0{,}5} = 4$$

$$k = 2 \rightarrow g^2(1) = \frac{2\{-3 \times 2 + 1 \times 6\} + 2 \times 0{,}5 \times 4}{1 - 0{,}5} = 8$$

Por conseguinte, como $g^k(1) > 0$ para $k = 0, 1, 2 = n - 1$, podemos assegurar a correta implementação do critério da eficiência marginal do capital no campo das taxas positivas. Ademais, tal aplicabilidade pode ser estendida ao campo das taxas de juro com significação econômica, posto que, face a (7), temos que:

$$k = 1 \rightarrow F^1(1) = 6 - 2 \times 5 + 3 \times 2 = 2 > 0,$$

$$k = 2 \rightarrow F^2(1) = 2\{-5 + 3 \times 2\} = 2 > 0$$

e $\quad Q_3 = 2 > 0.$

Seja agora o caso do projeto B: $\{-6, 13, -6\}$. Como $Q_n = Q_2 < 0$, as condições de Soper não são satisfeitas. Entretanto, desde que nos restrinjamos ao campo das taxas positivas, o critério da eficiência marginal do capital pode ser corretamente aplicado. Isso porque, observando-se que $\hat{p} = 2/3$ é raiz de $F(p) = -6 + 13p - 6p^2$, tem-se que:

$$g^0(1) = \frac{-6 + 13 - 6}{1 - 2/3} = 3 > 0$$

e

$$g^1(1) = \frac{-2 \times 6 + 1 \times 13 + (2/3) \times 3}{1 - 2/3} = 9 > 0.$$

Por outro lado, como formalmente demonstrado no apêndice, as condições de Soper são dominadas pelas que foram aqui derivadas.

Finalmente, cumpre ressaltar que, do mesmo modo que ocorre com as de Soper, o fato de que as novas condições deixem de ser satisfeitas não significa, necessariamente, que o critério da eficiência marginal do capital não possa ser corretamente aplicado. Assim, para o caso do projeto C: $\{-1, 6, -13, 14, -12, 8\}$, que foi estudado por De Faro (set. 1975), fazendo-se uso, por exemplo, do teorema de Vincent (Uspensky, 1948, p. 127-36), é fácil verificar que $\hat{p} = 0{,}5$ é a única raiz positiva (distinta) de $F(p)$, o que assegura a validade do critério.[1] Todavia, as

[1] A aplicação do teorema de Vincent para a análise do tipo de problema em apreço é apresentada por De Faro (1978) em artigo a ser publicado.

condições expressas por (2) e por (6) não são verificadas, posto que, respectivamente:

$$k = 1 \rightarrow S = 1 < Q_1 \hat{p} = 6 \times 0{,}5 = 3$$

e dado que $\quad g^0(1) = 2/(1 - 0{,}5) = 4$

$$g^1(1) = \frac{-5 \times 1 + 4 \times 6 - 3 \times 13 + 2 \times 14 - 1 \times 12 + 0{,}5 \times 4}{1 - 0{,}5} = -4 < 0$$

5. Conclusão

Adotando-se o mesmo tipo de ferramental de análise que o utilizado por Soper (mar. 1959), derivaram-se aqui novas condições de suficiência para a existência e unicidade da eficiência marginal do capital associado a um dado projeto de investimento. Como evidenciado, tais condições são mais poderosas do que as de Soper, assegurando a correta aplicação do critério da eficiência marginal do capital, no sentido de manter consistência com a aplicação do método do valor atual, para o caso de taxa externa $\bar{r}$ invariante com o tempo. Todavia, em face do trabalho recentemente publicado de Bernhard (mar. 1977), o leitor deve ser alertado de que, ao contrário do que ocorre com as condições originalmente apresentadas por Soper, a satisfação das novas condições não garante consistência com o método do valor atual para o caso em que a taxa $\bar{r}$ varia com o tempo.

Apêndice

Lema

Seja

$$g^0(p) \equiv g(p) = \frac{-Sp^n + \sum_{j=1}^{n} Q_j p^{n-j}}{1 - \hat{p}\, p}$$

Então, para $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, a k-ésima derivada de $g(p)$ pode ser escrita como:

$$g^k(p) = \frac{k! \left\{ -\binom{n}{k} Sp^{n-k} + \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-j}{k} Q_j p^{n-j-k} \right\} + k\hat{p} g^{k-1}(p)}{1 - \hat{p}\, p}$$

Demonstração:

Procedendo-se por indução, mostremos inicialmente que a proposição é verdadeira para $k = 1$. Temos que:

$$g^1(p) = \frac{d}{dp}\left[\frac{-Sp^n + \sum_{j=1}^{n} Q_j p^{n-j}}{1 - \hat{p}\,p}\right]$$

$$= \frac{(1 - \hat{p}p)\left\{-nSp^{n-1} + \sum_{j=1}^{n} (n-j)\,Q_j p^{n-j-1}\right\} - (1 - \hat{p}p)\, g^0(p)\,(-\hat{p})}{(1 - \hat{p}\,p)^2}$$

$$= \frac{1!\left\{-\binom{n}{1} Sp^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-j}{1} Q_j p^{n-j-1}\right\} + \hat{p}\, g^0(p)}{1 - \hat{p}p}$$

Suponha-se agora que a expressão seja válida para o caso da derivada de ordem $k - 1$. Segue-se, então, que:

$$g^k(p) = \frac{d}{dp}\left[g^{k-1}(p)\right]$$

$$= \frac{d}{dp}\left[\frac{(k-1)!\left\{-\binom{n}{k-1} S\, p^{n-k+1} + \sum_{j=1}^{n-k+1}\binom{n-j}{k-1} Q_j p^{n-j-k+1}\right\} + (k-1)\,\hat{p}\, g^{k-2}(p)}{1 - \hat{p}\,p}\right]$$

$$= \frac{(1 - \hat{p}p)\left\{(k-1)!\left[-(n-k+1)\binom{n}{k-1} S\, p^{n-k} + \sum_{j=1}^{n-k+1}(n-j-k+1)\binom{n-j}{k-1} Q_j p^{n-j-k}\right]\right.}{(1 - \hat{p}p)^2}$$

$$+ \frac{\left.(k-1)\,\hat{p}\, g^{k-1}(p)\right\} - (1 - \hat{p}\,p)\, g^{k-1}(p)\,(-\hat{p})}{(1 - \hat{p}p)^2}$$

$$= \frac{(k-1)!\left\{-(n-k+1)\binom{n}{k-1} S\, p^{n-k} + \sum_{j=1}^{n-k}(n-j-k+1)\binom{n-j}{k-1} Q_j p^{n-j-k}\right\} + k\,\hat{p}\, g^{k-1}(p)}{1 - \hat{p}p}$$

Por outro lado, observe-se que:

$$(k-1)!\,(n-k+1)\binom{n-j}{k-1} = k!\binom{n}{k}$$

e

$$(k-1)!\ (n-j-k+1)\binom{n-j}{k-1} = k!\binom{n-j}{k}$$

Logo, podemos escrever:

$$g^k(p) = \frac{k!\left\{-\binom{n}{k} S\ p^{n-k} + \sum_{j=1}^{n-k}\binom{n-j}{k} Q_j p^{n-j-k}\right\} + k\ p\ g^{k-1}(p)}{1-\hat{p}p}$$

q.e.d.

Dominação das condições de Soper

Seja $\hat{p} > 0$ uma raiz de $F(p)$ e forme-se o seguinte polinômio de grau $m = n - 1$ *em* p:[2]

$$f(p) = \frac{F(p)}{p-\hat{p}} = \frac{-S + \sum_{j=1}^{n} Q_j p^j}{p-\hat{p}} = \sum_{j=0}^{m} a_j p^j \qquad \text{(A.1)}$$

Um conjunto de condições suficientes para que $\hat{p}$ seja a única, e simples, raiz positiva de $F(p)$ é obtida se, para algum $\lambda \varepsilon [0, \infty)$, $f(\lambda) > 0$ e λ for simultaneamente um limite superior e um limite inferior para as raízes positivas de $f(p)$.

A primeira condição implica que:

$$\begin{cases} f(\lambda) > 0 \\ f^k(\lambda) \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \qquad \text{(A.2)}$$

Por outro lado, definindo-se a função recíproca de $f(p)$.

$$g(p) = p^m f(p^{-1}) = \sum_{j=0}^{m} a_j p^{m-j} \qquad \text{(A.3)}$$

[2] A análise pode ser facilmente estendida ao caso onde $\hat{p}$ é uma raiz múltipla, desde que sua multiplicidade l seja ímpar. Em tal eventualidade, $f(p)$ é obtido pela divisão de $F(p)$ por $(p-\hat{p})^l$.

a segunda condição implica que se tenha, para $\propto = 1/\lambda$:

$$\begin{cases} g(\propto) > 0 \\ g^k(\propto) \geqq 0, \; k = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{A.4}$$

Em termos dos coeficientes de $f(p)$, as condições expressas por (A.2) e por (A.4) traduzem-se, respectivamente em:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^j > 0 \\ k! \left[a_k + \sum_{j=k+1}^{m} \binom{j}{k} a_j \lambda^{j-k} \right] \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ m! \; a_m \geq 0 \Longrightarrow a_m \geq 0 \end{cases} \tag{A.2'}$$

e

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{m} a_j \; \infty^{m-j} > 0 \\ k! \left[a_{m-k} + \sum_{j=k+1}^{m} \binom{j}{k} a_{m-j} \; \infty^{j-k} \right] \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ m! \; a_0 \geq 0 \Longrightarrow a_0 \geq 0 \end{cases} \tag{A.4'}$$

Obviamente, no caso particular em que se fixe $\lambda = 0$, somente o conjunto de condições expresso por (A.2') necessita ser satisfeito.

Entretanto, esse caso, que corresponde ao examinado por Soper, somente será satisfeito se $a^0 > 0$ e $a_j \geqq 0$, j $= 1, \ldots, m$. Ora, decorre então que, em tal eventualidade, as condições expressas por (A.2') e (A.4') serão automaticamente satisfeitas para qualquer $\lambda > 0$.

Ou seja, um critério baseado em qualquer valor positivo de λ, em particular $\lambda = 1$, dominará as condições de Soper.

Caso onde $F(1) \leqq 0$

Conquanto não seja de grande interesse prático, podemos imaginar uma situação em que se deseje assegurar a existência e unicidade de uma taxa interna de retorno negativa ou nula.[3] Fixando-se atenção ao caso de raiz

[3] Posto que as condições de Soper também abrangem tal situação, a análise justifica-se, em termos de comparação, ao menos do ponto de vista teórico.

simples, para o que $Q_n > 0$ é uma condição necessária, consideremos então o caso onde $F(1) \leqq 0$.

a) $F(1) = 0$

Temos que $\hat{p} = 1$ é uma raiz de $F(p)$, do que se segue que o polinômio $f(p)$ pode ser escrito como:

$$f(p) = S + \sum_{j=1}^{n-1} \left(S - \sum_{l=1}^{j} Q_l \right) p^j \qquad \text{(A.5)}$$

Por conseguinte, uma vez que as condições expressas por (A.2') e por (A.4') sejam satisfeitas, $\hat{p} = 1$ será a única, e simples, raiz positiva de $F(p)$. Ou seja, a taxa interna de retorno do projeto considerado será nula.

b) $F(1) < 0$

Agora, sendo $\hat{p} > 1$ uma raiz de $F(p)$, segue-se que teremos $g(1) > 0$. Logo, se forem satisfeitas as condições expressas por (6), decorre que $p = 1$ será um limite inferior para as raízes reais de $f(p)$. Por outro lado, visto que $f(1) > 0$, $p = 1$ será também um limite superior se:

$$f^k(1) = \frac{F^k(1) - kf^{k-1}(1)}{1 - \hat{p}} \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad \text{(A.6)}$$

Abstract

For the case where the economic life of a given investment proposal is not allowed to be varied, Soper (1959) developed a set of sufficient conditions for the existence and uniqueness of the marginal efficiency of capital. In this paper, using Soper's own approach, a new set of sufficient conditions are derived, which are shown to be stronger than the original one.

Bibliografia

Bernhard, Richard H. Unrecovered investment, uniqueness of the internal rate, and the question of project acceptability. *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* v. 12, n. 1, p. 33-8, mar. 1977.

De Faro, Clovis. A eficiência marginal do capital e as condições de Soper: uma análise crítica. *Revista Brasileira de Economia,* v. 29, n.º 3, p. 89-107, jul./set. 1975.

______. A suficient condition for a unique nonnegative internal rate of return: further comments, programado para publicação no número de setembro de 1978 do *Journal of Financial and Quantitative Analysis.*

______. & Mello e Souza, Alberto de. O uso do critério da taxa interna de retorno e sua aplicação em investimentos educacionais. *Estudos Econômicos,* v. 5, n. 3, p. 37-62, set./dez. 1975.

Karmel, P. H. The marginal efficiency of capital. *The Economic Record,* v. 35, n. 72, p. 429-34, dec. 1959.

Soper, C. S. The marginal efficiency of capital: A further note. *The Economic Journal,* v. 69, n. 273, p. 174-7, mar. 1959.

Turnbull, H. W. *Theory of equations.* 5 ed. rev. Edinburgh, Oliver & Boyd, 1957.

Uspensky, J. V. *Theory of equations.* New York, McGraw-Hill, 1948.