Dívida externa e a estrutura do balanço de pagamentos no modelo neoclássico agregado real de crescimento ótimo

Paulo Guedes*

Formula-se para economias abertas a versão Cass-Koopmans de crescimento ótimo do modelo neoclássico agregado real de Solow Swan. Estuda-se o endividamento externo como um mecanismo de transferências de recursos reais em economias agregadas abertas com programas de crescimento ótimo. A estrutura do balanço de pagamentos e a estratégia de endividamento externo são determinadas simultaneamente por um processo de otimização dinâmica.

A trajetória ótima de equilíbrio macroeconômico consiste em financiar o déficit em transações correntes por um superávit na conta capital que implique a redução das despesas *per capita* com os juros da dívida externa. Derivam-se as regras de ouro modificadas do endividamento externo e da acumulação de capital para economias abertas em crescimento. Demonstra-se que o endividamento em bola de neve não ocorre em trajetórias ótimas de crescimento. A metodologia básica consiste no uso de técnicas de otimização dinâmica (teoria de controle ótimo): aplicação do princípio máximo de Pontryagin generalizado (isto é, incorporando as técnicas de Kuhn-Tucker para maximização condicionada estática), análise do sistema Hamiltoniano de equações diferenciais, uso de funções Liapunov para exame de estabilidade global do sistema, uso da condição de transversalidade para estabelecer condições de suficiência para otimalidade de uma trajetória de Pontryagin (supondo a existência e unicidade de uma trajetória ótima, demonstra-se que uma trajetória de Pontryagin, convergindo para o equilíbrio estacionário, é a trajetória ótima).

A existência de uma estratégia ótima de endividamento tem implicações da máxima relevância para a política econômica. É possível sustentar transitoriamente, mas não permanentemente, taxas de crescimento do PIB acima da taxa natural de crescimento através da dívida externa. O custo do crescimento presente acelerado é a redução do crescimento futuro porque pagamentos de juros e amortizações extraem recursos reais da economia nacional.

* Da Fundação Centro de Estudos do Comércio Exterior – Cecex.

Rev. bras. Econ., Rio de Janeiro, 34 (3): 313-332, jul./set. 1980

1. Introdução

A contribuição metodológica deste estudo é gerar a estrutura do balanço de pagamentos e a trajetória da dívida externa, formulando para economias abertas a versão Cass-Koopmans de crescimento ótimo do modelo neoclássico agregado real de Solow-Swan.

As contas de balanço de pagamentos e o endividamento externo resultam da trajetória de crescimento ótimo da economia nacional agregada. O processo de otimização dinâmica pode refletir planejamento centralizado ou pode ser descentralizado por firmas e consumidores posteriormente agregados *como se* o setor privado nacional maximizasse uma funcional-objetivo.

No item 2 é formulado o modelo neoclássico agregado real para economias abertas com programas de crescimento ótimo. A economia determina simultaneamente o fluxo ótimo de consumo *per capita*, as taxas ótimas de crescimento (investimento) e de endividamento externo (superávit na conta de capitais do balanço de pagamentos). As trajetórias das contas do balanço de pagamentos resultam do programa de crescimento:

a) o excesso da despesa ótima (ou absorção, definida como consumo mais investimento, que é a componente doméstica da demanda agregada) sobre o produto interno (explicado pela acumulação de capital físico e mão-de-obra) determina a trajetória do hiato de recursos (ou da balança comercial se os serviços não ligados a fatores de produção forem negligenciáveis);
b) a taxa ótima de endividamento externo bruto determina a trajetória do superávit na conta de capitais;
c) a dívida externa ótima determina o *spread* (taxa de risco) implicando a trajetória das despesas com os juros da dívida (se as remessas de lucros e dividendos e os serviços não ligados a fatores de produção forem negligenciáveis resultam as trajetórias da renda líquida enviada ao exterior e do déficit na balança de serviços). Demonstra-se que as trajetórias dos estoques ótimos de capital físico e dívida externa implicam a igualdade entre a produtividade marginal de capital e o custo marginal do endividamento durante o crescimento econômico.

No item 3 o equilíbrio estático do sistema é examinado para caracterizar as funções de controle ótimo.

No item 4 examina-se a dinâmica do sistema. Derivam-se as regras de ouro modificadas do endividamento externo e da acumulação de capital para economias abertas. Demonstra-se:

a) que o endividamento externo estacionário ótimo iguala o custo marginal da dívida à soma das taxas de crescimento demográfico e de preferência intertemporal e à produtividade marginal do capital físico acumulado internamente;
b) que o estoque estacionário ótimo de riqueza nacional determinado pelas regras de ouro modificadas é menor do que o determinado pelas regras de ouro; a

acumulação de capital físico é menor e o endividamento externo maior (conseqüentemente são maiores a produtividade marginal do capital e o custo marginal da dívida);

c) que o endividamento em bola de neve (explosão na dívida *per capita*) não ocorre em trajetórias ótimas de crescimento;

d) que a trajetória ótima de equilíbrio macroeconômica consiste em financiar o déficit em transações correntes por um superávit na conta capital que implique a redução das despesas *per capita* com os juros da dívida externa (pelo declínio na dívida *per capita* e conseqüente redução na taxa de risco).

A metodologia básica, nos itens 2, 3 e 4, consiste no uso de técnicas de otimização dinâmica (teoria de controle ótimo): aplicação do princípio máximo de Pontryagin generalizado (isto é, incorporando as técnicas de Kuhn-Tucker para maximização condicionada estática), análise do sistema Hamiltoniano de equações diferenciais, uso de funções Liapunov para exame da estabilidade global do equilíbrio estacionário, uso da condição de transversalidade para estabelecer condições de suficiência para otimalidade de uma trajetória de Pontryagin (supondo a existência e unicidade de uma trajetória ótima demonstra-se que uma trajetória de Pontryagin convergindo para o equilíbrio estacionário é a trajetória ótima).

No item 5 são discutidas as implicações da existência de uma taxa ótima de endividamento externo para a política econômica. A economia tem uma taxa natural de crescimento determinada por fatores reais como expansão demográfica, acumulação ótima de capital etc. O crescimento natural gera um déficit em transações correntes financiado pela taxa ótima de entrada de poupanças externas via superávit na conta de capitais do balanço de pagamentos. A tentativa de acelerar o crescimento e aumentar o bem-estar presente por meio da dívida externa (sustentando níveis excessivos de investimento e consumo correntes custará a desaceleração do crescimento e redução do bem-estar futuros, porque pagamentos de juros e amortizações extraem recursos reais da economia nacional.

2. O modelo neoclássico agregado real para economias abertas com programas de crescimento ótimo

Os mercados internacionais de capital são mecanismos descentralizados, por meio dos quais economias abertas praticam trocas intertemporais de recursos reais. O instrumento de otimização intertemporal usado em modelos reais (não-monetários) é a dívida externa.

O produto interno bruto (PIB) excede a renda nacional (PNB) pelos pagamentos de juros sobre o endividamento externo (supondo negligenciáveis os demais componentes da renda líquida enviada ao exterior):

$$Y(t) \equiv Y^n(t) + r(t)B(t) \tag{1}$$

em que:

$Y(t) \equiv$ produto interno bruto (PIB);
$Y^n(t) \equiv$ renda nacional;
$r(t) \equiv$ taxa de juros;
$B(t) \equiv$ dívida externa.

O produto interno é gerado pelo equilíbrio entre a oferta e a demanda agregadas no mercado de produtos e serviços não ligados a fatores de produção:

$$Y(t) \equiv F[K(t), L(t)] = C(t) + I(t) + X(t) - M(t) \qquad (2)$$

onde:

$F[K(t), L(t)] \equiv$ função de produção agregada homogênea linear;
$K(t) \equiv$ estoque de capital acumulado no país, de propriedade de nacionais e estrangeiros;
$L(t) = L(o)\, e^{nt}$: força de trabalho no período $t\, E\, [0, \infty)$
$C(t) \equiv$ consumo privado no período $t\, E\, [0, \infty)$
$I(t) \equiv \dot{K}(t)$: investimento agregado ou taxa anual de acumulação de capital físico (com financiamento interno ou externo);
$M(t) - X(t) \equiv$ hiato de recursos.

A renda nacional é distribuída entre o consumo agregado corrente e o aumento no estoque de riqueza nacional:

$$Y^n(t) = C(t) + S(t) = C(t) + \dot{W}(t) \qquad (3)$$

em que:

$S(t) \equiv \dot{W}(t)$: poupança nacional agregada;
$W(t) \equiv$ estoque de riqueza nacional.

A condição de equilíbrio de estoque no mercado de títulos (oferta de ativos financeiros igual à demanda por nacionais e estrangeiros) equivale ao balanço patrimonial agregado e denota a estrutura financeira do país (distribuição do estoque de capital entre riqueza nacional – patrimônio líquido – e dívida externa):

$$K(t) = W(t) + B(t) \qquad (4)$$

enquanto o equilíbrio de fluxo denota que as novas emissões de títulos pelas empresas para financiamento da acumulação de capital físico são absorvidas por poupadores nacionais e poupanças externas:

$$\dot{K}(t) = \dot{W}(t) + \dot{B}(t) \qquad (5)$$

Das equações (1), (3) e (5) resulta a restrição do balanço de pagamentos para uma economia real (não-monetária):

$$\dot{B}(t) - r(t)\,B(t) + F\,[K(t), L(t)] - C(t) - I(t) \equiv A_k(t) + A_s(t) + A_\tau(t) = 0 \quad (6)$$

em que:

$A_k(t) \equiv \dot{B}(t)$: superávit na conta de capital;
$A_s(t) \equiv -r(t)\,B(t)$: déficit em serviço de fatores de produção;
$A_\tau(t) \equiv F\,[K(t), L(t)] - C(t) - I(t) = X(t) - M(t)$ pela equação (2): superávit na conta comercial e serviços não ligados a fatores de produção.

Segue-se de (6) que o balanço de pagamentos como um todo é sempre zero em uma economia não-monetária; não existe problema de balanço de pagamentos em um modelo real. Se as autoridades monetárias nacionais administram corretamente a taxa de expansão do crédito doméstico ou se a taxa de câmbio é inteiramente flexível, a moeda é apenas um véu encobrindo o subjacente mecanismo de transferências reais internacionais induzido pelas transferências financeiras (empréstimos).

Reescreva a restrição do balanço de pagamentos (6) em termos *per capita*:

$$\Psi(t) - r(t)\,b(t) + f\,[\,k(t)\,] - c(t) - v(t) = 0 \quad (7)$$

onde:

$\Psi(t) \equiv \dfrac{\dot{B}(t)}{L(t)}$: aumento *per capita* no endividamento externo;

$b(t) \equiv \dfrac{B(t)}{L(t)}$: dívida externa *per capita*;

$k(t) \equiv \dfrac{K(t)}{L(t)}$: estoque de capital físico *per capita*;

$c(t) \equiv \dfrac{C(t)}{L(t)}$: fluxo de consumo agregado *per capita*;

$v(t) \equiv \dfrac{I(t)}{L(t)}$: fluxo de investimento agregado *per capita*.

Seja $r(t) = r\,[b(t)]$, $r'(\cdot) > 0$ refletindo o *spread* cobrado nos mercados internacionais de capital para cobrir o risco de inadimplência.[1]

[1] O risco é fator relevante para pequenas economias abertas. Para economias abertas de grandes dimensões $r'(\cdot) > 0$ reflete o poder de monopólio (monopsônio) na venda de títulos (levantamento de fundos): a procura internacional de títulos (oferta mundial de crédito) é imperfeitamente elástica.

Reescreva o patrimônio líquido nacional em termos *per capita*:

$$w(t) = k(t) - b(t) \tag{8}$$

onde:

$w(t) \equiv \dfrac{W(t)}{L(t)}$: estoque de riqueza nacional *per capita*, sendo as trajetórias de seus componentes descritas por:

$$\dot{k}(t) = v(t) - nk(t) \tag{9a}$$

$$\dot{b}(t) = \Psi(t) - nb(t) \tag{9b}$$

O setor privado nacional determina simultaneamente o fluxo ótimo de consumo agregado, a taxa ótima de investimento e o superávit ótimo na conta de capital (taxa ótima de endividamento externo) de modo a:

$$\underset{\{c(t),\, v(t),\, \Psi(t)\}}{\text{Max}} \quad J(c, v, \Psi) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \; U[C(t)]\, dt$$

Sugestões às restrições:

$$\Psi(t) - r[b(t)]\, b(t) + f[k(t)] - c(t) - v(t) = 0 \tag{7}$$

$$\dot{k}(t) = v(t) - nk(t) \tag{9a}$$

$$\dot{b}(t) = \Psi(t) - nb(t) \tag{9b}$$

Manipulações simples transformam o problema dando ênfase à distinção entre decisões relativas aos fluxos (acumulação ótima de riqueza nacional) e aos estoques (alocação ótima da riqueza nacional) durante o processo de crescimento.

Diferenciando (8) com relação ao tempo, encaixando (9a) e (9b) no resultado:

$$\dot{w}(t) = \dot{k}(t) - \dot{b}(t) = v(t) - \Psi(t) - nw(t) \tag{10}$$

ou seja, o aumento na riqueza nacional resulta de incrementos no estoque de capital físico através do investimento corrente $v(t)$ menos a acumulação da dívida externa determinada pelo superávit $\Psi(t)$ na conta de capital (estrangeiros financiam parte do programa de investimento interno).

Substituindo (7) em (10) resulta:

$$\dot{w}(t) = f[k(t)] - c(t) - r[b(t)]\,b(t) - nw(t) \qquad (11)$$

Na formulação mais conveniente o setor privado resolve o problema de:

$$\underset{\{c(t),\,k(t),\,b(t)\}}{\text{Max}} \quad J(c, k, b) \quad \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, U[c(t)]\,dt$$

Sujeitos a: (1.6) $w(t) = k(t) - b(t)$

$$\dot{w}(t) = f[k(t)] - c(t) - r[b(t)]\,b(t) - n\,w(t) \qquad (11)$$

$$\lim_{t \to \infty} \inf\; w(t) \geqslant 0; \text{ condição de factibilidade.} \qquad (12)$$

Suponha a existência de uma tripla ótima $[c^*(t), k^*(t), b^*(t)]$; seja $w^*(t)$ a trajetória implícita da variável de estado. Segundo o princípio generalizado do máximo de Pontryagin, existe um multiplicador $q^*(t)$ e um co-estado $\lambda^*(t)$, funções do tempo tais que, pela formação da Hamiltoniana do valor corrente:

$$H[c(t), k(t), b(t), \lambda(t), w(t)] \equiv U[c(t)] +$$
$$+ \lambda(t)\,\{f[k(t)] - c(t) - r[b(t)]\,b(t) - n\,w(t)\}$$

e da Lagrangiana associada:

$$L\,[c(t), k(t), b(t), q(t), \lambda(t), w(t)] \equiv H\,[c(t), k(t), b(t), \lambda(t), w(t)] +$$
$$+ q(t)\,[w(t) - k(t) + b(t)] = U[c(t)] +$$
$$+ \lambda(t)\{f[k(t)] - c(t) - r[b(t)]\,b(t) - n\,w(t)\} + q(t)\,[w(t) - k(t) + b(t)]$$

a solução de controle ótimo $[c^*(t), k^*(t), b^*(t), q^*(t), \lambda^*(t), w^*(t)]$ satisfaz às condições necessárias:

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial L}{\partial c}(c, k, b, q, \lambda^*, w^*) = U'[c(t)] - \lambda^* = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(c, k, b, q, \lambda^*, w^*) = \lambda^* f'[k(t)] - q(t) = 0 \qquad (13)$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{\partial L}{\partial b}(c, k, b, q, \lambda^*, w^*) = -\lambda^* \frac{d}{db}\{r[b(t)]\,b(t)\} + q(t) = 0$$

(iv) $\dfrac{\partial L}{\partial q}(c, k, b, q, \lambda^*, w^*) = w^* - k(t) + b(t) = 0$

(v) $$\dot{\lambda}^*(t) = \delta\lambda^*(t) - \frac{\partial L^o}{\partial w}(\lambda^*, w^*) \equiv \delta\lambda^*(t) -$$

$$- \frac{\partial L}{\partial w}[c^o(\lambda^*, w^*), k^o(\lambda^*, w^*), b^o(\lambda^*, w^*), q^o(\lambda^*, w^*), \lambda^*, w^*] =$$

$$= (\delta + \eta)\lambda^*(t) - q^o[\lambda^*(t), w^*(t)]$$

(vi) $$\dot{w}^*(t) = \frac{\partial L^o}{\partial \lambda}(\lambda^*, w^*) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial L}{\partial \lambda}[c^o(\lambda^*, w), k^o(\lambda^*, w^*), b^o(\lambda^*, w^*), q^o(\lambda^*, w), \lambda^*, w^*] =$$

$$= f\{k^o[\lambda^*(t), w^*(t)]\} - c^o[\lambda^*(t), w^*(t)] -$$

$$- r\{b^o[\lambda^*(t), w^*(t)]\}\, b^o[\lambda^*(t), w^*(t)] - n\, w^*(t)$$

com a condição inicial $w(0) = w_0$ e a condição de transversalidade

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\delta t} \lambda^*(t)\, w^*(t) = 0.$$

Como $r = r[b(t)]$ é o preço de oferta da dívida externa, supondo uma elasticidade constante ϵ^* da oferta de crédito externo com relação ao seu preço, defina uma função de custo marginal do endividamento externo:

$$\phi\{r[b(t)]\} \equiv \frac{d}{db}\{r[b(t)]\, b(t)\} = r[b(t)]\left(1 + \frac{dr(b)}{db}\,\frac{b}{r(b)}\right) = \tag{14}$$

$$= r[b(t)]\left(1 + \frac{1}{\epsilon^*}\right) = \Gamma\, r[b(t)]$$

onde:

$$\Gamma \equiv \left(1 + \frac{1}{\epsilon^*}\right) > 0$$

De (13)-(ii), (13)-(iii) e (14) os estoques ótimos de capital físico e dívida externa igualam a produtividade marginal do capital ao custo marginal do endividamento externo:

$$f'[k^*(t)] = \Gamma\, r[b^*(t)] \quad \forall\, t \in [0, \infty) \tag{15}$$

3. O sistema em equilíbrio estático

O co-estado $\lambda^*(t)$ e a variável de estado $w^*(t)$ são congelados em $\bar{t} \in [0, \infty)$; o equilíbrio a curto prazo é caracterizado por (13)-(i), (13)-(iv) e (15), isto é, pelas condições do princípio do máximo (13)-(i), (ii), (iii), (iv) depois de eliminar $q^*(t)$ e usar (14):

$$U' [c^o (\lambda^*, w^*)] - \lambda^* \equiv 0 \tag{16a}$$

$$f' [k^o (\lambda^*, w^*)] - \Gamma \; r [b^o (\lambda^*, w^*)] \equiv 0 \tag{16b}$$

$$w^* - k^o (\lambda^*, w^*) + b^o (\lambda^*, w^*) \equiv 0 \tag{16c}$$

Diferenciando totalmente o sistema de identidades acima, segue-se:

$$\begin{bmatrix} U''(c) & 0 & 0 \\ 0 & f''(k) & -\Gamma r'(b) \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc^* \\ dk^* \\ db^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\lambda \\ 0 \\ dw \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\Rightarrow |\Delta| = U''(c) [\Gamma r'(b) - f''(k)] < 0 \quad \because \quad U''(\cdot) < 0,$$
$$f''(\cdot) < 0 \quad \text{e} \quad r'(\cdot) > 0$$

Resolvendo o sistema resultante para as reações dos controles ótimos a mudanças nas variáveis de estado e co-estado:

$\dfrac{\partial c^*}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{|\Delta|} [\Gamma r'(b) - f''(k)] < 0$, isto é, um aumento no preço-sombra da riqueza nacional reduz o consumo nacional ótimo.

$\dfrac{\partial k^*}{\partial w} = \dfrac{1}{|\Delta|} [\Gamma r'(b) \;\; U''(c)] > 0$, isto é, um aumento na riqueza nacional eleva o estoque de capital ótimo acumulado no país.

$\dfrac{\partial b^*}{\partial w} = \dfrac{1}{|\Delta|} [U''(c) \;\; f''(k)] < 0$, isto é, um aumento na riqueza nacional reduz a dívida externa ótima.

Tais resultados são úteis no acompanhamento das trajetórias das contas do balanço de pagamentos.

Como $\frac{\partial c^*}{\partial w} = \frac{\partial k^*}{\partial \lambda} = \frac{\partial b^*}{\partial \lambda} = 0$ resultam as funções de controle ótimo expressando as estratégias do consumo, acumulação de capital e endividamento externo:

$$c^*(t) = c^o [\lambda^* (t; \lambda_o)], c'(\lambda) < 0 \tag{18}$$

$$k^*(t) = k^o [w^* (t; w_o)], k'(w) > 0$$

$$b^*(t) = b^o [w^* (t; w_o)], b'(w) < 0$$

$$k'(w) - b'(w) = \frac{U''(\cdot)}{|\Delta|} [r'(b) - f''(k)] = 1$$

4. O sistema em equilíbrio dinâmico

Pelas regras de ouro do endividamento externo e da acumulação de capital em uma economia aberta o consumo agregado nacional estacionário atinge o máximo $\bar{c} = c^o [\lambda(\bar{w})]$ quando o custo marginal do endividamento externo é igual à taxa nacional de crescimento demográfico e ao produto marginal do capital acumulado internamente. A prova é simples:

a) determine a partir de (20)-(ii) os níveis de consumo factíveis em estado estacionário:

$$c^o(\lambda) = f[k^o(w)] - r[b^o(w)]\, b^o(w) - nw \equiv F(w) \tag{19}$$

b) o consumo estacionário máximo implica $\bar{w}$ resolvendo:

$$\begin{aligned} F'(\bar{w}) &= f'(\cdot)\, k'(\cdot) - \Gamma r(\cdot)\, b'(\cdot) - n = \Gamma r(\cdot)\, [k'(\cdot) - b'(\cdot)] - n = \\ &= \Gamma r\, [b^o(\bar{w})] - n = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

mediante (15) e (18); como $F''(w) = \Gamma r'(\cdot)\, b'(\cdot) < 0$ [$\because r'(\cdot) > 0$ por hipótese e $b'(\cdot) < 0$ mediante (18)] resulta que $\bar{w}$ é um máximo.

O equilíbrio dinâmico decorre de (13)-(v), (vi) modificado por (18), isto é, avaliado ao longo da trajetória ótima $[c^o(\lambda^*), k^o(w^*), b^o(w^*)]$, o que implica que a regra (15) de endividamento ótimo pode ser aplicada:

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}^*(t) &= (\delta + n)\, \lambda^*(t) - f'\{k^o [w^*(t)]\}\, \lambda^*(t) = \\ &= (\delta + n)\, \lambda^*(t) - \Gamma r\{b^o [w^*(t)]\}\, \lambda^*(t) \end{aligned} \tag{21}$$

(ii) $\dot{w}^*(t) = f\{k^o[w^*(t)]\} - c^o[\lambda^*(t)] - r\{b^o[w^*(t)]\}b^o[w^*(t)] - nw^*(t)$

Para computar a solução de estado estacionário $(\hat{\lambda}, \hat{w})$ resolva:

$$\text{(i)} \quad f(\lambda, w) \equiv (\delta + n)\lambda - \Gamma r[b^o(w)]\lambda = (\delta + n)\lambda - f'[k^o(w)]\lambda = 0 \quad (22)$$

$$\text{(ii)} \quad g(\lambda, w) \equiv f[k^o(w)] - c^o(\lambda) - r[b^o(w)]b^o(w) - nw = 0$$

Sob restrições razoáveis,[2] tais como $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$, $\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$, $r(b) > 0$, $r'(b) > 0$, $\lim_{b \to -\infty} r(b) = 0$, $\lim_{b \to N,\ 0 \ll N < \infty} r(b) = \infty$ e aplicando $k'(w) > 0$, $b'(w) < 0$ obtidos em (18), a equação (22)-(i) tem por solução única $\hat{w}$. Substituindo $\hat{w}$ em (22)-(ii) extrai-se $\hat{\lambda}$.

Caracteriza-se a solução de equilíbrio estacionário $(\hat{\lambda}, \hat{w})$ pelas regras de ouro modificadas da acumulação de capital físico e endividamento externo para uma economia aberta em crescimento; fazendo $\hat{b} = b^o(\hat{w})$ e $\hat{k} = k^o(\hat{w})$ resultam de (22)-(i):

$$\text{(i)} \quad \delta + n = \Gamma r(\hat{b}) \quad (23)$$

$$\text{(ii)} \quad \delta + n = F'(\hat{k})$$

estabelecendo que o endividamento externo estacionário ótimo iguala o custo marginal da dívida à soma das taxas de crescimento demográfico e de preferência intertemporal e à produtividade marginal do capital físico acumulado internamente.

O estoque estacionário ótimo de riqueza nacional determinado pelas regras de ouro modificadas é menor do que o determinado pelas regras de ouro; a acumulação de capital físico é menor e o endividamento externo maior (conseqüentemente são maiores a produtividade marginal do capital e o custo marginal da dívida). É imediato gerar tais implicações:

[2] Considere o preço de oferta do crédito externo $r(b)$ como o produto marginal do capital físico externo tal que $r(b) = h'(N - b)$, onde N é um número positivo arbitrariamente grande "próximo do infinito" que denota o estoque de capital do resto do mundo (b é de propriedade do resto do mundo mas emprestado aos nacionais).

As restrições usuais quando aplicadas à função de produção dos estrangeiros são

$$h'(N - b) \equiv r(b) > 0, \quad h''(\cdot) < 0 \Rightarrow r'(b) = h''(\cdot)(-1) > 0,$$

$$\lim_{(N-b) \to \infty} h'(N - b) \equiv \lim_{b \to -\infty} r(b) = 0, \quad \lim_{(N-b) \to 0} h'(N - b) \equiv \lim_{b \to N} r(b) = \infty,$$

implicando assim as restrições para $r(b)$.

(i) pelo teorema do valor médio (TVM) existe $\theta \, E \, (0,1)$ tal que: (24)

$$F'(\overline{w}) = F'(\hat{w}) + F''\,[\theta\,\overline{w} + (1-\theta)\,\hat{w}]\,(\overline{w}-\hat{w}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma\, r\,[b^o(\overline{w})] - n = \Gamma\, r\,[b^o(\hat{w})] - n + \Gamma\, r'(\cdot)\, b'(\cdot)\,(\overline{w}-\hat{w}) \text{ [mediante (20)]}$$

$$\Rightarrow 0 = \delta + \Gamma\, r'(\cdot)\, b'(\cdot)\,(\overline{w}-\hat{w}) \quad \text{[mediante (20) e (23)-(i)]}$$

$$\Rightarrow (\overline{w}-\hat{w}) > 0 \quad [\because\ \delta > 0,\, r'(\cdot) > 0 \text{ por hipótese, } b'(\cdot) < 0 \text{ mediante (18)]}$$

(ii) pelo TVM existe $0 < \alpha < 1$ tal que:

$$b^o(\overline{w}) = b^o(\hat{w}) + b'\,[\alpha\,\overline{w} + (1-\alpha)\,\hat{w}]\,(\overline{w}-\hat{w}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^o(\overline{w}) < b^o(\hat{w}) \quad [\because\ b'(\cdot) < 0 \text{ por (18) e } (\overline{w}-\hat{w}) > 0 \text{ mediante (24)-(i)]}$$

(iii) pelo TVM existe $\mu \, E \, (0,1)$ tal que:

$$k^o(\overline{w}) = k^o(\hat{w}) + k'\,[\mu\,\overline{w} + (1-\mu)\,\hat{w}]\,(\overline{w}-\hat{w}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^o(\overline{w}) > k^o(\hat{w}) \quad [\because\ k'(\cdot) > 0 \text{ mediante (18) e } (\overline{w}-\hat{w}) > 0 \text{ por (24)-(i)]}$$

Seguindo Brock & Scheinkman, a estabilidade assintótica global (EAG) de $(\hat{\lambda}, \hat{w})$ é determinada pela função Liapunov:

$$V(\lambda^*, w^*) \equiv -\dot{\lambda}^*(t)\,\dot{w}^*(t) = -J_{ww}(w^*)\,[\dot{w}^*(t)]^2 > 0 \tag{25}$$

pois $\dot{w}^*(t; w_o) \neq 0$, $\lambda^* \equiv J_w(w^*)$, $J_{ww}(w^*) < 0$. Diferenciando (21)-(i) e (25) com relação ao tempo segue-se:

$$\dot{V}(\lambda^*, w^*) = -\left[\frac{d\dot{\lambda}^*}{dt}(t)\;\dot{w}^*(t) + \dot{\lambda}^*(t)\,\frac{d\dot{w}^*(t)}{dt}\right] = \tag{26}$$

$$= -\{[(\delta+n)\,\dot{\lambda}^*(t) - f''(\cdot)\,k'(\cdot)\,\dot{w}^*(t)\,\lambda^*(t) - f'(\cdot)\,\dot{\lambda}^*(t)]\,\dot{w}^*(t) +$$

$$+ [f'(\cdot)\,k'(\cdot)\,\dot{w}^*(t) - c'(\cdot)\,\dot{\lambda}^*(t) - \Gamma\, r\, b'(\cdot)\,\dot{w}^*(t) - n\dot{w}^*(t)]\,\dot{\lambda}^*(t)\} =$$

$$= -\{\delta\dot{\lambda}^*(t)\,\dot{w}^*(t) - f''(\cdot)\,k'(\cdot)\,\lambda^*(t)\,[\dot{w}^*(t)]^2 - f'(\cdot)\,\dot{\lambda}^*(t)\,\dot{w}^*(t) +$$

$$+ f'(\cdot)\,[k'(\cdot) - b'(\cdot)]\,\dot{w}^*(t)\,\dot{\lambda}^*(t) - c'(\cdot)\,[\dot{\lambda}^*(t)]^2\} =$$

$$= -\delta\,\dot{\lambda}^*(t)\,\dot{w}^*(t) + f''(\cdot)\,k'(\cdot)\,\lambda^*(t)\,[\dot{w}^*(t)]^2 + c'(\cdot)\,[\dot{\lambda}^*(t)]^2 =$$

$$= [\dot{\lambda}^*(t), \dot{w}^*(t)] \begin{bmatrix} c'(\lambda^*) & -\delta/2 \\ -\delta/2 & f''(\cdot)\,k'(\cdot)\,\lambda^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}^*(t) \\ \dot{w}^*(t) \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv [\dot{\lambda}^*(t), \dot{w}^*(t)] \begin{bmatrix} -H^o_{\lambda\lambda}(\lambda^*, w^*) & -\delta/2 \\ -\delta/2 & H^o_{ww}(\lambda^*, w^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}^*(t) \\ \dot{w}^*(t) \end{bmatrix}$$

Observe que:

a) a Hamiltoniana otimizada

$$H^o(\lambda^*, w^*) \equiv H[c^o(\lambda^*), k^o(w^*), b^o(w^*), \lambda^*, w^*] \equiv$$
$$\equiv U[c^o(\lambda^*)] + \lambda^* \{ f[k^o(w^*)] - c^o(\lambda^*) - r[b^o(w^*)]\, b^o(w^*) - n\, w^* \}$$

é côncava na variável de estado:

$$H_w^o(\lambda^*, w^*) = \lambda^* f'(\cdot)\, [\frac{dk}{dw}(w^*) - \frac{db}{dw}(w^*)] - n = \lambda^* f'[k^o(w^*)] - n$$

mediante (15) e (18); logo

$$H_{ww}^o(\lambda^*, w^*) = \lambda^* f''[k^o(w^*)]\, k'(w^*) < 0 \quad \because \; f''(\cdot) < 0,\; k'(\cdot) > 0.$$

b) a Hamiltoniana otimizada é convexa no co-estado:

$$H_\lambda^o(\lambda^*, w^*) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}[c^o(\lambda^*), k^o(w^*), b^o(w^*), \lambda^*, w^*] =$$
$$= U'|c^o(\lambda^*)| \frac{dc^o(\lambda^*)}{d\lambda} - \lambda^* \frac{dc^o(\lambda^*)}{d\lambda} - c^o(\lambda^*) =$$
$$= -c^o(\lambda^*) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}[c^*, k^*, b^*, \lambda^*, w^*]$$

pelo teorema da envoltória; então $H_{\lambda\lambda}^o(\lambda^*, w^*) = -c'(\lambda^*) > 0.$

Para um δ suficientemente pequeno, isto é, tal que $\delta^2 < 4\, c'(\cdot)\, k'(\cdot)\, \lambda$, a matriz acima é definida negativa, o que é suficiente para EAG, pois $\dot{V}[\lambda^*(t), w^*(t)] < 0$.

Como a solução $[\lambda^*(t), w^*(t)]$ converge para o estado estacionário $(\hat{\lambda}, \hat{w})$, segue-se que:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\delta t} \lambda^*(t)\, w^*(t) = \lim_{t \to \infty} e^{-\delta t}\, \hat{\lambda}\, \hat{w} = 0 \qquad (27)$$

isto é, a condição de transversalidade é satisfeita e pode ser usada com a concavidade da Hamiltoniana otimizada na variável de estado w a fim de estabelecer a condição de suficiência para que uma trajetória de Pontryagin[3] seja a trajetória ótima.

[3] Trajetória de Pontryagin é uma trajetória que satisfaça às condições necessárias do princípio do máximo (1.11).

Aplicando-se o teorema de suficiência usado no caso multivariado com horizonte finito por Arrow & Kurz[4] a este problema com uma variável de estado e horizonte infinito, tem-se:

$$\text{(i)} \quad H^0_{ww}(\lambda^*, w^*) = \frac{\partial^2 H}{\partial w}[c^0(\lambda^*), k^0(w^*), b^0(w^*), \lambda^*, w^*] = \tag{28}$$

$= \lambda^* f''[k^0(w^*)]\, k'(w^*) < 0$ (concavidade estrita da Hamiltoniana otimizada na variável de estado w) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow H^0(\lambda^*, w) < H^0(\lambda^*, w^*) + H^0_w(\lambda^*, w^*)(w - w^*)$$

(ii) por (13)-(i), (ii) e (iii) os controles ótimos $c^0(\lambda)$, $k^0(w)$ e $b^0(w)$ maximizam $H(c, k, b, \lambda, w)$ sujeitos a (13)-(iv); então

$$H(c, k, b, \lambda^*, w) \leqslant H[c^0(\lambda^*), k^0(w), b^0(w), \lambda^*, w] \equiv H^0(\lambda^*, w);$$

a desigualdade estrita vale para uma Hamiltoniana estritamente côncava nos controles

$$\left\{ \begin{array}{l} |H_{cc}| = U_{cc}(\cdot) < 0, \quad \begin{vmatrix} H_{cc} & H_{ck} \\ H_{kc} & H_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{cc}(\cdot) & 0 \\ 0 & f''(\cdot) \end{vmatrix} > 0, \\ \begin{vmatrix} H_{cc} & H_{ck} & H_{cm} \\ H_{kc} & H_{kk} & H_{km} \\ H_{mc} & H_{mk} & H_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{cc}(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & f''(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma r'(\cdot) \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \text{Hessiana def. neg.} \end{array} \right\}$$

(iii) De (28)-(i) e (ii) resulta

$$H(c, k, b, \lambda^*, w) < H^0(\lambda^*, w^*) + H^0_w(\lambda^*, w^*)(w - w^*) = H^0(\lambda^*, w^*) + L^0_w(\lambda^*, w^*)(w - w^*)$$

deduzindo-se a última igualdade de

$$L^0(\lambda^*, w^*) \equiv L(c^*, k^*, b^*, q^*, \lambda^*, w^*) = H(c^*, k^*, b^*, \lambda^*, w^*) \equiv H^0(\lambda^*, w^*) \quad \therefore \quad q^*(w^* - k^* + b^*) = 0$$

(Folga complementar)

[4] Arrow & Kurz (1970, p. 43-5).

(iv) de (28)-(iii) e $L_w^0 = \delta\, \lambda^*(t) - \dot{\lambda}^*(t)$ [por (13)-(v)] segue-se que:

$$H(c, k, b, \lambda^*, w) < H^0(\lambda^*, w^*) + (\delta\lambda^* - \dot{\lambda}^*)(w - w^*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U[c(t)] + \lambda^*(t)\{f[k(t)] - c(t) - r[b(t)]\, b(t) - n\, w(t)\} <$$

$$< U[c^*(t)] + \lambda^*(t)\{f[k^*(t)] - c^*(t) - r[b^*(t)]\, b^*(t) - n\, w^*(t)\} +$$

$$+ [\delta\, \lambda^*(t) - \dot{\lambda}^*(t)]\,[w(t) - w^*(t)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U[c^*(t)] - U[c(t)] > \lambda^*(t)\,[\dot{w}(t) - \dot{w}^*(t)] + [\dot{\lambda}^*(t) - \delta\lambda^*(t)]\,[w(t) - w^*(t)]$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-\delta t}\, U[c^*(t)]\, dt - \int_0^\infty e^{-\delta t}\, U[c(t)]\, dt >$$

$$> \int_0^\infty \frac{d}{dt}\{e^{-\delta t}\, \lambda^*(t)\,[w(t) - w^*(t)]\}\, dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t}\, \lambda^*(t)\,[w(t) - w^*(t)] - \lambda^*(0)\,[w(0) - w^*(0)] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t}\, \lambda^*(t)\,[w(t) - w^*(t)] \quad \because \quad w(0) = w^*(0) = w_o$$

Dados $\lambda^*(t) \equiv J_w\,[w^*(t)] > 0$ e $\lim\inf\, w(t) \geqslant 0$ pela condição de factibilidade (12) segue-se que:

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\, U[c^*(t)]\, dt - \int_0^\infty e^{-\delta t}\, U[c(t)]\, dt > P - \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t}\, \lambda^*(t)\, w^*(t)$$

onde:

$$P \equiv \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t}\, \lambda^*(t)\, w(t) \geqslant 0;$$

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\, U[c^*(t)]\, dt - \int_0^\infty e^{-\delta t}\, U[c(t)]\, dt > 0$$

isto é, na hipótese de haver uma trajetória ótima, uma trajetória de Pontryagin que convirja para o estado estacionário, satisfazendo assim à condição de transversalidade, é exatamente essa trajetória ótima.

Os estoques estacionários de capital físico e dívida externa são determinados pelos controles ótimos dados por (18) tais que:

$$\hat{k} = \lim_{t \to \infty} k^0 [w^*(t; w_0)] \quad \text{e} \quad \hat{b} = \lim_{t \to \infty} b^0 [w^*(t; w)]$$

satisfazendo (23)-(i) e (ii), isto é,

$$f'(\hat{k}) = \delta + n \quad \text{e} \quad r(\hat{b}) = \delta + n$$

A acumulação ótima de capital físico e o nível ótimo de endividamento externo decorrem da acumulação ótima da riqueza nacional pelas regras de realimentação (18):

$$\frac{dk^0}{dt} [w^*(t; w_0)] = k'(\cdot)\, \dot{w}^*(t; w_0) > 0 \tag{29a}$$

$$\frac{db^0}{dt} [w^*(t; w_0)] = b'(\cdot)\, \dot{w}^*(t; w_0) < 0 \tag{29b}$$

$\forall\, t \in [0, \infty) \quad \because \quad w_0 < \hat{w} \equiv \lim_{t \to \infty} w^*(t; w_0)$ (hipótese de crescimento econômico), $k'(\cdot) > 0,\ b'(\cdot) < 0$ [por (18)].

O problema do endividamento externo em bola de neve para uma economia em crescimento é analisado através da trajetória do custo da dívida externa em termos *per capita*:

$$\frac{A_s(t)}{L(t)} \equiv r\,[b^0(w^*)]\, b^0(w^*) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{A_s(t)}{L(t)}\right] = \tag{30}$$

$$= [r(\cdot)\, b'(\cdot) + b(\cdot)\, r'(\cdot)\, b'(\cdot)]\, \dot{w}^*(t; w_0) =$$

$$= \Gamma\, r\,[b(w^*)]\, b'(w^*)\, \dot{w}^*(t; w_0) < 0$$

$$\because \quad \Gamma > 0, \quad r(\cdot) > 0, \quad b'(\cdot)\, \dot{w}^*(t; w_0) < 0 \quad \text{[por (29b)]}$$

estabelecendo que as despesas *per capita* com os juros da dívida externa diminuem com o tempo. O custo da dívida, que implica transferências de recursos reais por

uma economia em crescimento como contrapartida do financiamento externo, é atenuado por duas razões: a) a dívida externa *per capita* diminui com o tempo; b) o *spread* de risco cobrado nos mercados internacionais de capital declina simultaneamente. O endividamento em bola de neve (explosão na dívida externa *per capita*) não ocorre na versão aberta do modelo não-monetário de Cass-Koopmans.

5. Implicações de política econômica

A estrutura do balanço de pagamentos, a trajetória da dívida externa, a determinação do *spread* na taxa de juros e o endividamento em bola de neve são objetos de análise da macroeconomia internacional. A teoria neoclássica do crescimento expandida para economias abertas trata simultaneamente de tais problemas.

As contas do balanço de pagamentos e a dívida externa resultam do crescimento econômico. A existência de uma estratégia ótima de endividamento tem implicações da máxima relevância para a política econômica. A economia tem uma taxa natural de crescimento determinada por fatores reais como expansão demográfica, a taxa ótima de investimento, avanço tecnológico etc. A acumulação de capital físico deve ser otimamente financiada por poupanças nacionais e externas. A taxa ótima de endividamento externo é o superávit na conta de capitais do balanço de pagamentos necessário ao financiamento do déficit em transações correntes inerente ao crescimento natural.

A tentativa de acelerar o crescimento e aumentar o bem-estar através da dívida externa desviam as trajetórias do investimento e consumo agregados das trajetórias ótimas, ampliando o déficit em transações correntes (excesso da despesa ou absorção sobre a renda nacional). O simultâneo desvio na trajetória do superavit na conta de capitais implica excessiva dívida externa em períodos futuros. As despesas com amortizações e juros estarão acima da trajetória ótima, forçando desaceleração do crescimento e redução do bem-estar, pois o serviço da dívida extrai recursos reais da economia nacional. O Governo terá de cortar a despesa (consumo e investimentos futuros) em relação à renda para efetuar as transferências de recursos reais requeridas pelo serviço da dívida externa.

O endividamento excessivo pode transitoriamente sustentar taxas de crescimento acima da taxa natural, mas não permanentemente.

Anexo

Para o diagrama de fase do sistema use (15) e (18) em (22)-(ii):

$$dg\,(\lambda, w)\Big|_{\dot{w}=0} = \frac{\partial g}{\partial w}\,(\lambda, w)\,dw + \frac{\partial g}{\partial \lambda}\,(\lambda, w)\,d\lambda =$$

$$= [f'(\cdot)\,k'(\cdot) - \Gamma\,r(\cdot)\,b'(\cdot) - n]\,dw - c'(\cdot)\,d\lambda =$$

$$= \Big\{\Gamma\,r(\cdot)\,[k'(\cdot) - b'(\cdot)] - n\Big\}\,dw - c'(\cdot)\,d\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\lambda}{dw}\,(\lambda, w)\Big|_{\dot{w}=0} = \frac{\Gamma\,r\,[b(w)] - n}{c'(\lambda)}$$

que, avaliado no estado estacionário $(\hat{\lambda}, \hat{w})$ tem o sinal:

$$\frac{d\lambda}{dw}\,(\hat{\lambda}, \hat{w})\Big|_{\dot{w}=0} = \frac{\Gamma\,r\,[b(\hat{w})] - n}{c'(\hat{\lambda})} < 0$$

$\because\quad c'(\hat{\lambda}) < 0$ [mediante (18)] e $\Gamma\,r\,[b(\hat{w})] - n = \delta > 0$ [mediante (22)-(i)]

avaliado na riqueza nacional estacionária de consumo máximo é:

$$\frac{d\lambda}{dw}\,(\bar{\lambda}, \bar{w})\Big|_{\dot{w}=0} = \frac{\Gamma\,r\,[b(\bar{w})] - n}{c'(\lambda)} = 0$$

$\because\quad \Gamma\,r\,[b(\bar{w})] - n = 0$ [*by* (1.19)];

e avaliado em qualquer riqueza estacionária $w > \bar{w}$ tem o sinal:

$$\frac{d\lambda}{dw}\,(\lambda, w)\Big|_{\dot{w}=0,\; w>\bar{w}} = \frac{\Gamma\,r\,[b(w)] - n}{c'(\lambda)} > 0$$

pois, pelo teorema do valor médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

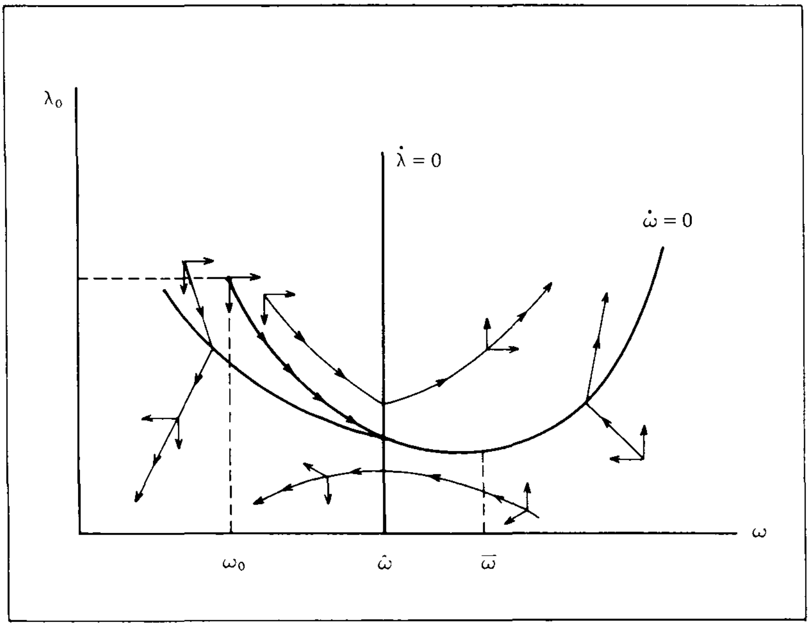
$$F'(w) - F'(\bar{w}) = F''\,[\theta\,w + (1-\theta)\,\bar{w}]\,(w - \bar{w}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(w) = \Gamma\,r\,[b(w)] - n < 0 \quad \because$$

$$\because\quad F''(\cdot) = \Gamma\,r'(\cdot)\,b'(\cdot) < 0,\quad (w - \bar{w}) > 0 \;\text{ e }\; F'(\bar{w}) = 0.$$

Usando (24)-(i) temos $\bar{w} > \hat{w}$, resultando o diagrama de fase do sistema:

Figura 1



Abstract

The Cass-Koopmans version of the Solow-Swan non monetary neoclassical model is formulated for open economies. External indebtedness is studied as a real transfers mechanism for open aggregative economies with optimal growth programs.

The balance of payments structure and the external indebtedness strategy are simultaneously determined by a dynamic optimization process.

The optimal macroeconomic equilibrium path requires the financing of the current account deficit through a superavit in the capital account such that per capita interest payments on external debt are reduced over time. The Modified Golden Rules of external indebtedness and capital accumulation for open growth models are derived. It is shown that optimal paths prevent "snowball" indebtedness.

The methodology draws on dynamic optimization techniques (optimal control theory): the "generalized" Pontryagin's Maximum principle (using the Kuhn – Tucker theory for static constrained optimization), Liapunov functions to study global assymptotic stability of the Hamiltonian System, sufficiency conditions for optimality of a Pontryagin's path etc.

The existence of an optimal external indebtedness strategy has major policy implications. The economy has a natural growth rate determined by real factors like population growth and the optimal investment rate (capital accumulation).

Such investment rate is optimally financed by domestic and external savings. Attempts of speeding up current growth (investment) or increasing current welfare (consumption) through external borrowing will cost the slowing down of future growth and a reduction in future welfare because excessive interest and amortization payments will extract real resources from the national economy. The economy will have to cut down absorption (future consumption and investment) relative to income to effect the real transfer required by the debt service.

External debt can transitorily sustain growth rates beyound the natural rate, but not permanently. Very much in the same neoclassical spirit that unanticipated inflation only transitorily reduces the unenployment rate below its natural level.

Bibliografia

Arrow, K. J. & Kurz, M. *Public investment, the rate of return and optimal fiscal policy*. Baltimore, The John Hopkins Press, 1971.

Brock, W. & Scheinkman, J. Global asymptotic stability of optimal control systems with applications to the theory of economic growth. *Journal of Economic Theory Symposium, 12*: 164-90, Feb. 1976.

______ & ______. Global asymptotic stability of optimal control systems with applications to dynamic economic theory. In: Pith Ford, J. D. & Turnovsky, S. J., ed. *Applications of control theory to economic analysis*. Amsterdam, North – Holland, 1974.

Cass, D. Optimum growth in an aggregate model of capital accumulation. *Review of Economic Studies, 32*: 233-40, July 1965.

Solow, R. M. A Contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics, 70*, Feb. 1956.