Índice de produto real e deflator implícito: fórmulas aproximadas para os índices teóricos

Fernando de Holanda Barbosa*

Este trabalho tem como objetivo apresentar novas fórmulas para os índices de produto real e deflator implícito do produto. Estes novos índices constituem aproximações para os chamados índices verdadeiros da teoria econômica. Discute-se o problema de aplicação na prática desses índices, sugerindo-se um método alternativo que é factível para uso imediato.

1. Introdução

Uma tendência recente na literatura econômica no que diz respeito à base teórica sobre a qual deve-se assentar a construção de índices de produto real, e por conseguinte de deflatores implícitos do produto, é de que estes índices devem ser calcados na teoria da produção.[1] Esta linha de desenvolvimento segue, sem dúvida alguma com uma boa defasagem, o enfoque adotado há bastante tempo na teoria dos índices de custo de vida, que passou do domínio da estatística para a teoria econômica, mais especificamente a teoria do consumidor.

* Do Instituto de Pesquisas do IPEA.

[1] Exemplos desta literatura são: Richter (1966), Fisher & Shell (1972), Samuelson & Swamy (1974).

Um problema que surge no cálculo desses índices teóricos é que não existem os dados necessários para a sua computação. Do ponto de vista prático, torna-se imperativo o uso de fórmulas aproximadas, que sejam passíveis de utilização de modo rotineiro. Em trabalho recente propusemos novas fórmulas para o cálculo dos índices de custo de vida, que requerem, além dos dados de preços e quantidades habitualmente coletados pelas instituições que elaboram tais índices, estimativas de certas elasticidades que podem ser obtidas por meio de estudos econométricos.[2]

O presente trabalho utiliza o mesmo enfoque adotado na formulação dos novos índices de custo de vida, para a obtenção de fórmulas aproximadas para os índices do produto real e deflator implícito do produto. Cabe salientar que as fórmulas aqui sugeridas são válidas também para o cálculo de índices de produção, ou de preços, de qualquer setor da economia. Portanto, a aplicabilidade destes índices é bastante ampla, não se restringindo apenas ao índice de produto real da economia ou ao deflator implícito do produto.

A organização deste estudo é a seguinte: o item 2 apresenta algumas propriedades do modelo de dois fatores e dois produtos, que não são facilmente encontrados nos livros-textos, embora sejam conhecidas na literatura econômica, e que são necessárias para a compreensão deste trabalho; o item 3 cuida das fórmulas aproximadas para o cálculo do índice de produto real, enquanto o item 4 trata das fórmulas aproximadas para os deflatores implícitos. O item 5 introduz um índice geométrico de preço, que é uma aproximação para uma média geométrica dos índices verdadeiros, e associa a este um índice implícito de quantidade. O item 6 sumaria nossas conclusões.

2. Algumas propriedades do modelo de dois fatores e dois produtos

Admita-se que dois bens são produzidos a partir das seguintes funções de produção:

$$Q_i = Q_i(K_i, L_i), \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

onde K_i é a quantidade de capital e L_i é a quantidade de mão-de-obra utilizada na produção de Q_i.

A dotação de fatores na economia é dada por K e L. Assim:

$$K_1 + K_2 = K \tag{2}$$

$$L_1 + L_2 = L \tag{3}$$

[2] Veja Barbosa (1979).

Os preços dos dois produtos são iguais a p_1 e p_2. Portanto, o valor total de produção é igual a:

$$Y = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 \tag{4}$$

Suponha-se que este valor da produção seja maximizado sujeito às restrições (1), (2) e (3). A função de Lagrange para este máximo condicionado é dada por:

$$\ell = p_1 Q_1 (K_1, L_1) + p_2 Q_2 (K_2, L_2) + w(L - L_1 - L_2) + r(K - K_1 - K_2) \tag{5}$$

onde w e r são multiplicadores de Lagrange, que podem ser interpretados como os preços unitários dos fatores.

As condições de primeira ordem para que (5) seja um máximo são fornecidas por:

$$\frac{\partial \ell}{\partial K_1} = p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial K_1} - r = 0 \tag{6.a}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial L_1} = p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial L_1} - w = 0 \tag{6.b}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial K_2} = p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial K_2} - r = 0 \tag{6.c}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial L_2} = p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial L_2} - w = 0 \tag{6.d}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial w} = L - L_1 - L_2 = 0 \tag{6.e}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial r} = K - K_1 - K_2 = 0 \tag{6.f}$$

As duas últimas condições reproduzem as restrições de dotação dos fatores, enquanto as quatro primeiras afirmam que em equilíbrio o valor da produtividade marginal de cada fator é igual ao seu preço.

As equações (6.a)-(6.f) permitem escrever, desde que as condições do teorema da função implícita sejam satisfeitas, cada variável endógena – Q_1, Q_2, L_1, L_2, K_1, K_2, w e r – como função das variáveis exógenas: p_1, p_2, L e K. Para o caso dos níveis de produção, Q_1 e Q_2, nos quais estaremos diretamente interessados temos:

$$Q_1 = f(p_1, p_2, L, K) \tag{7.a}$$

$$Q_2 = g(p_1, p_2, L, K) \tag{7.b}$$

Uma das proposições que desejamos provar neste item é que a matriz:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_2} \\ \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

é positiva semidefinida. Esta propriedade implica que a quantidade produzida aumenta com o preço do produto,

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} > 0, \quad i = 1, 2,$$

e que as condições de simetria,

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}, \quad i \neq j = 1, 2,$$

sejam satisfeitas. Ademais, as seguintes igualdades são obedecidas:

$$p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} = 0$$

$$p_1 \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} = 0$$

o que significa dizer que as equações (7.a) e (7.b) são homogêneas do grau zero nos preços dos produtos.

Com o objetivo de provar os resultados que acabamos de citar precisaremos da condição de segunda ordem para a maximização de $\mathcal{L}$. Esta condição nos diz que a matriz:

$$\begin{bmatrix} p_1 H_1 & 0 \\ \\ 0 & p_2 H_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

deve ser negativa definida para todo vetor $[X_1, X_2, -X_2, -X_2] = [X' \vdots -X']$, $X' = [X_1, X_2]$. As matrizes H_1 e H_2 que aparecem em (9) são as matrizes hessianas das funções de produção descritas em (1). Isto é:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial K_1^2} & \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial K_1 \, \partial L_1} \\ \\ \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial L_1 \, \partial K_1} & \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial L_1^2} \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial K_2^2} & \dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial K_2 \, \partial L_2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial L_2 \, \partial K_2} & \dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial L_2^2} \end{bmatrix}$$

O fato de a matriz (9) ser negativa definida para vetores do tipo $[\, X' \vdots - X' \,]$ implica que:

$$[\, X' \vdots - X' \,] \begin{bmatrix} p_1 H_1 & 0 \\ 0 & p_2 H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \cdots \\ -X \end{bmatrix} = X'(p_1 H_1 + p_2 H_2) X < 0$$

Logo, a matriz H definida por:

$$H = p_1 H_1 + p_2 H_2 \tag{10}$$

é negativa definida.

O valor da produtividade marginal de cada fator, de acordo com as equações (6.a)-(6.d), é o mesmo em ambos os setores, isto é:

$$p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial K_1} = p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial K_2} \tag{11.a}$$

$$p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial Q_2}{\partial L_2} \tag{11.b}$$

Por outro lado, das equações de dotação de fatores (2) e (3) temos que:

$$\begin{bmatrix} dK \\ dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dK_1 \\ dL_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dK_2 \\ dL_2 \end{bmatrix}$$

Alternativamente, em notação mais compacta:

$$dF = dF_1 + dF_2 \tag{12}$$

onde $dF' = [\, dK \; dL \,]$ e $dF_i = [\, dK_i \; dL_i \,]$, $i = 1, 2$.

Tomando-se as diferenciais de (11.a) e (11.b) chega-se ao seguinte resultado:

$$HdF_1 = b_2 dp_2 - b_1 dp_1 + p_2 H_2 dF \tag{13}$$

onde:

$$b_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial K_1} \\ \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial L_1} \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_2}{\partial K_2} \\ \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial L_2} \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se ambos os lados de (13) pela matriz inversa de H obtemos:

$$dF_1 = H^{-1} b_2\, dp_2 - H^{-1} b_1\, dp_1 + p_2 H^{-1} H_2\, dF \tag{14}$$

Substituindo-se o valor de dF_1 em (12) resulta:

$$dF_2 = dF - dF_1 = -H^{-1} b_2\, dp_2 + H^{-1} b_1\, dp_1 + [I - p_2 H^{-1} H_2]\, dF \tag{15}$$

Como $H^{-1}(p_1 H_1 + p_2 H_2) = I$, segue-se que $I - p_2 H^{-1} H_2 = p_1 H^{-1} H_1$. Logo, a equação anterior pode ser escrita do seguinte modo:

$$dF_2 = -H^{-1} b_2\, dp_2 + H^{-1} b_1\, dp_1 + p_1 H^{-1} H_1\, dF \tag{16}$$

Lembrando-se que as diferenciais das funções de produção (1) são dadas por:

$$dQ_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial K_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dK_1 \\ dL_1 \end{bmatrix} = b_1'\, dF_1$$

e

$$dQ_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_2}{\partial K_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dK_2 \\ dL_2 \end{bmatrix} = b_2'\, dF_2$$

os valores de dQ_1 e dQ_2 podem ser escritos, depois que (14) e (16) são substituídos nas duas equações anteriores, como:

$$\begin{bmatrix} dQ_1 \\ dQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1' H^{-1} b_1 & b_1' H^{-1} b_2 \\ b_2' H^{-1} b_1 & -b_2' H^{-1} b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dp_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2 b_1' H^{-1} H_2 \\ p_1 b_2' H^{-1} H_1 \end{bmatrix} dF \tag{17}$$

Observa-se que a matriz que premultiplica o vetor $[\, dp_1 \; dp_2 \,]'$ corresponde à matriz (8). Esta é positiva semidefinida, pois:

$$[\, z_1 \; z_2 \,] \begin{bmatrix} -b_1' H^{-1} b_1 & b_1' H^{-1} b_2 \\ b_2' H^{-1} b_1 & -b_2' H^{-1} b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -[\, z_1 b_1 - z_2 b_2 \,]'\; H^{-1}\, [\, z_1 b_1 - z_2 b_2 \,] \geqslant 0$$

O sinal da desigualdade prende-se ao fato de que a matriz H^{-1} é negativa definida. Quando $z_1\, b_1 = z_2\, b_2$, o que ocorre no caso de $z_1 = p_1$ e $z_2 = p_2$, a forma quadrática acima é igual a zero. Logo, a matriz (8) é positiva semidefinida.

Examinemos agora algumas propriedades da curva de transformação, que relaciona as quantidades máximas dos dois bens em face da dotação de fatores existente na economia.

Multiplicando-se a primeira equação de (17) por $p_2\, b_2'\, H^{-1}\, b_2$ e a segunda do mesmo sistema por $p_1\, b_1'\, H^{-1}\, b_1$, e adicionando-se então estes dois resultados, chega-se, depois de algumas manipulações algébricas, à seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
dQ_2 = &- \frac{p_2\, b_2'\, H^{-1}\, b_2}{p_1\, b_1'\, H^{-1}\, b_1}\, dQ_1 + \\
&+ \frac{(p_2^2\, b_2'\, H^{-1}\, b_2\, b_1'\, H^{-1}\, H_2 + p_1^2\, b_1'\, H^{-1}\, b_1\, b_2'\, H^{-1}\, H_1)\, dF}{p_1\, b_1'\, H^{-1}\, b_2}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

É fácil concluir-se da expressão acima que:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = - \frac{p_2\, b_2'\, H^{-1}\, b_2}{p_2\, b_1'\, H^{-1}\, b_1} < 0 \tag{19}$$

pois a matriz H^{-1} é negativa definida. A expressão acima afirma que na posição de equilíbrio a taxa marginal de transformação é negativa.

Multiplicando-se ambos os lados de (19) por $(- p_2/p_1)$ obtém-se:

$$- \frac{p_2}{p_1}\, \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = - \frac{(p_2\, b_2)'\, H^{-1}\, (b_2\, p_2)}{(p_1\, b_1)'\, H^{-1}\, (b_1\, p_1)}$$

Como em equilíbrio $p_2\, b_2 = p_1\, b_1$, segue-se que a taxa marginal de transformação é igual ao preço relativo p_1/p_2 dos produtos, isto é:

$$- \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = \frac{p_1}{p_2} \tag{20}$$

A partir da primeira equação do sistema (17) é fácil obter-se o seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,(p_1/p_2)}{(p_1/p_2)} = \frac{dp_1}{p_1} - \frac{dp_2}{p_2} = &- \frac{1}{p_1\, b_1'\, H^{-1}\, b_1}\, dQ_1 + \\
&+ \frac{p_2\, b_1'\, H^{-1}\, H_2}{p_1\, b_1'\, H^{-1}\, b_1}\, dF
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Logo, desta expressão segue-se que:

$$\frac{\partial\,(p_1/p_2)}{\partial Q_1} = - \frac{1}{p_2\, b_1'\, H^{-1}\, b_2}$$

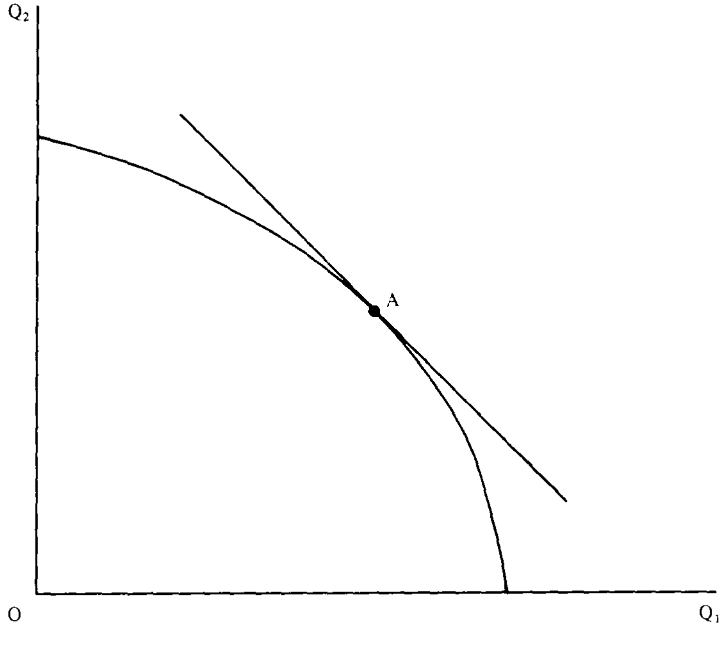
Conseqüentemente:

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial Q_1^2} = - \frac{\partial (p_1/p_2)}{\partial Q_1} = \frac{1}{p_2 \, b_1' \, H^{-1} \, b_1} < 0 \qquad (22)$$

Esta desigualdade implica que, no ponto de equilíbrio, a curva de transformação é côncava. A figura 1 apresenta uma curva de transformação para uma dada dotação de fatores. No eixo vertical marca-se a quantidade do segundo bem, Q_2, enquanto no horizontal mede-se a quantidade do primeiro bem, Q_1. A tangente no ponto A é igual à taxa marginal de transformação, que, em equilíbrio, é igual à relação de preços p_1/p_2.

Figura 1

Curva de transformação



O valor máximo da produção Y pode ser escrito como função dos preços dos produtos e da dotação de fatores existentes na economia, condicionado ao estado atual de desenvolvimento tecnológico. Com efeito, substituindo-se (7.a) e (7.b) na expressão (4) obtém-se:

$$Y = Y(p, F) \qquad (23)$$

onde p indica o vetor de preços $[p_1, p_2]$ e F representa a dotação de fatores $[F_1, F_2]$.

Cabe ainda mencionar as seguintes propriedades da função $Y(p, F)$:

a) é homogênea do primeiro grau nos preços dos produtos;

b) a derivada parcial de Y com respeito ao preço p_i é igual à quantidade ofertada Q_i:

$$\frac{\partial Y}{\partial p_i} = Q_i \tag{24}$$

c) a sua matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p_1^2} & \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p_1 \, \partial p_2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p_2 \, \partial p_1} & \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p_2^2} \end{bmatrix} \tag{25}$$

é positiva semidefinida, o que significa dizer que $Y(p, F)$ é uma função convexa.

A primeira propriedade resulta do fato de que as equações de oferta (7.a) e (7.b) são homogêneas do grau zero nos preços. A propriedade *b* pode ser facilmente verificada, levando-se em conta a homogeneidade de grau zero das equações de oferta e o fato de a matriz (8) ser simétrica. A propriedade *c* é obtida a partir do fato de que a matriz (25) é igual à matriz (8), que é positiva semidefinida.

3. Índice de produto real: fórmulas aproximadas

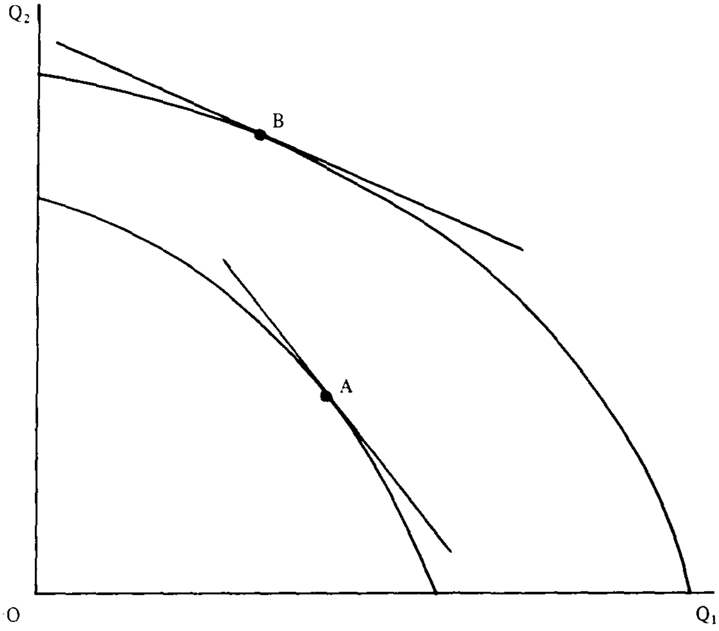
Imagine-se duas situações, A e B, como descritas na figura 2. Admita-se também que se deseja medir a variação de produção ocorrida entre estas duas situações. O índice verdadeiro de produção será definido pela relação entre o valor máximo da produção, obtido quando a curva de transformação passa por B, e o valor correspondente àquela curva de transformação que passa por A, sendo ambos os valores avaliados para um mesmo vetor de preços p, isto é:

$$V_q(p) = \frac{Y(p, F_B)}{Y(p, F_A)} \tag{26}$$

Um problema que surge no cálculo deste índice é quanto ao vetor de preços a ser escolhido como base de comparação. A seguir apresentaremos dois diferentes índices, o primeiro com base nos preços na situação A, que será identificada com o período $t-1$, e o segundo utilizando como base de referência a situação B, identificada aqui com o período t.

Figura 2

Variação do produto real



3.1 *O índice de Laspeyres modificado*

Quando o vetor de preços de referência corresponde ao período $t-1, p = p_{t-1}$, o índice (26) passa a ser escrito como:

$$V_q\,(p_{t-1}) = \frac{Y\,(p_{t-1}, F_t)}{Y\,(p_{t-1}, F_{t-1})} = \frac{\sum_i Q^*_{i,t}\, p_{i,\,t-1}}{\sum_i Q_{i,\,t-1}\, p_{i,\,t-1}} \tag{27}$$

onde $Q_{i,t-1}$ indica a quantidade produzida do bem i no período $t-1$, $p_{i,j}$ é o preço do bem i no período j e $Q^*_{i,t}$ representa a quantidade do bem i que seria produzida no período t, se os preços neste período fossem iguais aos do período anterior, $p_{i,\,t-1}$.

Em virtude das quantidades $Q^*_{i,t}$ não serem observadas, o cálculo do índice (27) torna-se impossível na prática. Todavia, um valor aproximado deste índice pode ser desenvolvido, usando-se o mesmo procedimento que adotamos em trabalho anterior (Barbosa, 1979). Com efeito, uma expansão de Taylor nos permite escrever:

$$Q^*_{i,t} = Q_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (S^t_{i,j} + S^{t-1}_{i,j}) \, \Delta p_{j,t-1} \tag{28}$$

onde $\Delta p_{j,t-1} = p_{j,t-1} - p_{j,t}$ e

$$S^t_{i,j} = \frac{\partial Q_{i,t}}{\partial p_{j,t}} \Bigg|_{F = ct}, \quad S^{t-1}_{i,j} = \frac{\partial Q_{i,t-1}}{\partial p_{j,t-1}} \Bigg|_{F = ct}$$

A notação acima indica que as derivadas parciais são calculadas mantendo-se constante a dotação de fatores e o progresso tecnológico.

O fato de a matriz (8) ser positiva semidefinida implica nas seguintes propriedades:

$$\sum_{j=1}^{n} S^t_{i,j} \; p_{j,t} = 0 \tag{29.a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} S^{t-1}_{i,j} \, p_{j,t-1} = 0 \tag{29.b}$$

$$\sum_i \sum_j S^t_{i,j} \; p_{i,t-1} \, p_{j,t-1} \geqslant 0 \tag{29.c}$$

$$\sum_i \sum_j S^{t-1}_{i,j} \, p_{i,t} \; p_{j,t} \geqslant 0 \tag{29.d}$$

As formas quadráticas (29.c) e (29.d) são nulas quando os preços em $t - 1$ são proporcionais aos preços no período t, ou seja, quando não existe mudança de preços relativos entre os dois períodos.

Substituindo-se (28) em (27) e levando-se em conta as restrições (29.a) e (29.b), chega-se ao seguinte resultado:

$$V_q \, (p_{t-1}) = \frac{\sum_i Q_{i,t} \, p_{i,t-1} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j S^t_{i,j} \, p_{i,t-1} \, p_{j,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1} \, p_{i,t-1}} \tag{30}$$

Alternativamente, a expressão anterior pode ser escrita como:

$$V_q \, (p_{t-1}) = \frac{\sum_i Q_{i,t} \, p_{i,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1} \, p_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j S^t_{ij} \, p_{i,t-1} \, p_{j,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1} \, p_{i,t-1}} \tag{31}$$

O primeiro termo do lado direito desta expressão é o índice de Laspeyres, enquanto o segundo indica a correção a ser feita no índice de Laspeyres para obter-se um valor aproximado do índice verdadeiro de produção, cujo vetor preço

de referência é aquele correspondente ao período $t-1$. Em virtude de (29.c), segue-se que:

$$V_q(p_{t-1}) > \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} = L_q$$

Esta desigualdade afirma que o índice de Laspeyres subestima o índice de produção verdadeiro, uma propriedade bastante conhecida na literatura econômica.

A fórmula (30) pode ser calculada a partir das elasticidades η_{ij}, definidas por:

$$\eta_{ij} = S_{i,j}^{t} \frac{p_{j,t}}{Q_{i,t}}$$

Com efeito, substituindo-se o valor de $S_{i,j}^{t}$ dado por esta expressão na equação (31) obtém-se:

$$V_q(p_{t-1}) = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2}\sum_i \sum_j \eta_{ij}\, Q_{it}\, p_{i,t-1} \frac{p_{i,t-1}}{p_{j,t}}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{32}$$

3.2 *O índice de Paasche modificado*

O índice de Paasche modificado é obtido quando se utiliza o vetor preço do período t como referência, na comparação entre a produção dos dois períodos. Assim, o índice (26) passa a ser expresso como:

$$V_q(p_t) = \frac{Y(p_t, F_t)}{Y(p_t, F_{t-1})} = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}^{*}\, p_{i,t}} \tag{33}$$

Este índice não pode ser calculado na prática, pois os valores de $Q_{i,t-1}^{*}$ não são observados, isto é, os níveis de produção que se teria no período $t-1$, se os preços neste período fossem iguais aos vigentes no período seguinte, não são conhecidos. Um valor aproximado pode ser obtido a partir da seguinte expressão de Taylor:

$$Q_{i,t-1}^{*} = Q_{i,t-1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (S_{ij}^{t} + S_{ij}^{t-1})\, \Delta p_{j,t} \tag{34}$$

onde $\Delta p_{j,t} = p_{j,t} - p_{j,t-1}$.

Substituindo-se (34) em (33) e levando-se em conta as restrições (29.a) e (29.b) obtém-se o seguinte resultado:

$$V_q(p_t) = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j S_{i,j}^{t-1}\, p_{i,t}\, p_{j,t}} \tag{35}$$

Alternativamente podemos escrever esta equação como:

$$V_q(p_t) = \frac{\dfrac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j S_{i,j}^{t-1}\, p_{i,t}\, p_{j,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}}} \tag{36}$$

O numerador da expressão acima é o índice de Paasche e o denominador indica a correção a ser feita neste índice para que se obtenha um valor aproximado para o índice verdadeiro de produção, que utiliza como preços de referência os preços do período t. Em virtude de a forma quadrática (29.d) ser positiva, segue-se, então, que o índice de Paasche superestima o crescimento da produção, isto é:

$$P_q = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}} \geqslant V_q(p_t)$$

O sinal de igualdade, na expressão acima, ocorre quando entre os períodos $t-1$ e t não se verificam mudanças nos preços relativos.

4. Deflator implícito: fórmulas aproximadas

O valor da produção no período $t-1$, multiplicado pelo índice de quantidade vezes o índice de preço, é igual ao valor da produção no período t, isto é:

$$V_q\, V_p \sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1} = \sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t} \tag{37}$$

onde V_q e V_p indicam índices de quantidade e preço, respectivamente. Segue-se então que, associado a cada índice de quantidade da seção anterior, existe um índice de preço denominado deflator implícito, em virtude do processo pelo qual é gerado.

4.1 *Deflator implícito – Paasche modificado*

Quando se substitui a expressão (30) em (37), obtém-se o deflator implícito do tipo Paasche modificado, isto é:

$$V_p(Q_t) = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j S_{ij}^t\, p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}} \tag{38}$$

Alternativamente, o índice acima pode ser escrito do seguinte modo:

$$V_p(Q_t) = \frac{\dfrac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1}}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j S_{ij}^t\, p_{i,t-1}\, p_{i,t-1}}{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1}}} \tag{39}$$

O numerador desta expressão é o índice de Paasche, enquanto o denominador é o fator de correção para obter-se o deflator verdadeiro. Em virtude de a forma quadrática

$$\sum_i \sum_j S_{ij}^t\, p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}$$

ser positiva semidefinida, o índice Paasche superestima o índice verdadeiro. Assim:

$$V_p(Q_t) < \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t-1}} = P_p \tag{40}$$

É interessante observar que o índice de produto real é calculado segundo o critério Laspeyres, enquanto o deflator implícito do produto é do tipo Paasche. Conseqüentemente, o índice do produto real subestima o crescimento da economia, enquanto o deflator implícito do produto superestima a taxa de inflação.

O deflator implícito (38) pode ser obtido diretamente a partir da definição do índice de preço. Este é definido pela relação entre o valor máximo da produção, quando o vetor de preços é p_t, e o valor máximo de produção, quando o vetor de preços é p_{t-1}, ambos os valores sendo avaliados para a mesma curva de transformação F, isto é:

$$V_p(F) = \frac{Y(p_t, F)}{Y(p_{t-1}, F)} \tag{41}$$

Quando a curva de transformação de referência é a curva do período t, o índice (41) passa a ser dado por:

$$V_p(Q_t) = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t}^*\, p_{i,t-1}} \tag{42}$$

Usando-se a aproximação fornecida por (28) e procedendo-se como anteriormente, obtém-se o índice (38).

4.2 *Deflator implícito – Laspeyres modificado*

Quando se substitui (33) na equação (35), obtém-se o deflator implícito do tipo Laspeyres modificado. Sua expressão analítica é:

$$V_p\,(Q_{t-1}) = \frac{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j S_{i,j}^{t-1}\, p_{i,t}\, p_{j,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{43}$$

Alternativamente, tem-se:

$$V_p\,(Q_{t-1}) = \frac{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j S_{i,j}^{t-1}\, p_{i,t}\, p_{j,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{44}$$

O primeiro termo do lado direito desta expressão é o índice Laspeyres, enquanto o segundo envolve uma forma quadrática que é positiva semidefinida. Logo, o índice Laspeyres subestima o índice de preços verdadeiro, ou seja:

$$V_p\,(Q_{t-1}) > \frac{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} = L_p \tag{45}$$

O deflator implícito do tipo Laspeyres modificado pode ser obtido também a partir da definição do índice de preços. Com efeito, quando a curva de transformação de referência é a que prevalece no período $t-1$, o índice (41) passa a ser dado por:

$$V_p\,(Q_{t-1}) = \frac{\sum_i Q_{i\,t-1}^{*}\, p_{i,t}}{\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{46}$$

Utilizando-se a expressão de Taylor (34) e levando-se em conta as restrições (29.a) e (29.b), chega-se facilmente ao índice (43).

5. Índice geométrico de preço e índice de quantidade implícito

As fórmulas dos índices propostos nos dois últimos itens requerem, além de dados de preços e quantidades, o conhecimento de certos parâmetros, que podem ser de difícil obtenção no atual estágio de desenvolvimento da econometria aplicada. Em

virtude deste fato, propomos neste item um método alternativo, que é factível para uso imediato. Este método consiste em inverter a ordem do procedimento normalmente usado, isto é, ao invés de calcular-se o índice de preço de modo implícito, propomos que se obtenha o mesmo diretamente, por meio de um índice geométrico a ser explicitado a seguir, e calcule-se, então, o índice de quantidade de maneira implícita.

Com o objetivo de mostrar que o índice geométrico de preço é uma aproximação de uma média geométrica de índices verdadeiros, comecemos por expandir em série de Taylor os logaritmos de $Y(p_t, F_t)$ e de $Y(p_t, F_{t-1})$, isto é:

$$\log Y(p_t, F_t) = \log Y(p_{t-1}, F_t) + \\ + \frac{1}{2}\sum_i \left[\left.\frac{\partial \log Y(p, F_t)}{\partial \log p_i}\right|_t + \left.\frac{\partial \log Y(p, F_t)}{\partial \log p_i}\right|_{t-1} \right] \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{47.a}$$

e

$$\log Y(p_t, F_{t-1}) = \log Y(p_{t-1}, F_{t-1}) + \\ + \frac{1}{2}\sum_i \left[\left.\frac{\partial \log Y(p, F_{t-1})}{\partial \log p_i}\right|_t + \left.\frac{\partial \log Y(p, F_{t-1})}{\partial \log p_i}\right|_{t-1} \right] \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{47.b}$$

Da expressão (2.4) é fácil concluir que:

$$\left.\frac{\partial \log Y(p, F_t)}{\partial \log p_i}\right|_t = \frac{p_{i,t}\, Q_{i,t}}{Y_t} = \omega_{i,t}$$

$$\left.\frac{\partial \log Y(p, F_t)}{\partial \log p_i}\right|_{t-1} = \frac{p_{i,t-1}\, Q^*_{i,t-1}}{Y^*_{t-1}} = \omega^*_{i,t-1}$$

$$\left.\frac{\partial \log Y(p, F_{t-1})}{\partial \log p_i}\right|_t = \frac{p_{i,t}\, Q^*_{i,t}}{Y^*_t} = \omega^*_{i,t}$$

$$\left.\frac{\partial \log Y(p, F_{t-1})}{\partial \log p_i}\right|_{t-1} = \frac{p_{i,t-1}\, Q_{i,t-1}}{Y_{t-1}} = \omega_{i,t-1}$$

Cabe ressaltar que as variáveis contendo asteriscos não são observáveis, pois representam quantidades que seriam produzidas em condições hipotéticas de preços. Substituindo-se os valores acima nas equações (47.a) e (47.b), obtém-se:

$$\log \frac{Y(p_t, F_t)}{Y(p_{t-1}, F_t)} = \frac{1}{2}\sum_i (\omega_{i,t} + \omega^*_{i,t-1}) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{48.a}$$

e

$$\log \frac{Y(p_t, F_{t-1})}{Y(p_{t-1}, F_{t-1})} = \frac{1}{2}\sum_i (\omega^*_{i,t} + \omega_{i,t-1}) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{48.b}$$

Tomando-se a média aritmética destas duas expressões, resulta:

$$\log\left[\frac{Y(p_t, F_t)}{Y(p_{t-1}, F_t)} \cdot \frac{Y(p_t, F_{t-1})}{Y(p_{t-1}, F_{t-1})}\right]^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{4} \sum_i (\omega_{i,t} + \omega_{i,t-1}^* + \omega_{i,t}^* + \omega_{i,t-1}) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{49}$$

Pode-se provar que a seguinte igualdade se verifica:[3]

$$\omega_{i,t-1}^* + \omega_{i,t}^* = \omega_{i,t} + \omega_{i,t-1} + O_2 \tag{50}$$

onde O_2 indica termos de segunda ordem nas variações dos preços. Segue-se então que, substituindo-se (50) em (49), obtém-se:

$$\log G = \sum_i \left(\frac{\omega_{i,t} + \omega_{i,t-1}}{2}\right) \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \tag{51}$$

onde:

$$G = \left[\frac{Y(p_t, F_t)}{Y(p_{t-1}, F_t)} \cdot \frac{Y(p_t, F_{t-1})}{Y(p_{t-1}, F_{t-1})}\right]^{1/2} \tag{52}$$

Denominando-se por

$$\bar{\omega}_i = \frac{\omega_{i,t} + \omega_{i,t-1}}{2} \tag{53}$$

o índice G pode ser escrito como:

$$G = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}\right)^{\bar{\omega}_i} \tag{54}$$

[3] Seguindo um procedimento usado por Theil (1975, p. 138), temos que:

$$(A) \qquad \omega_{i,t-1}^* = \omega_{i,t} + \sum_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial \log p_i}\right|_{\substack{F_t \\ p_t}} \log \frac{p_{i,t-1}}{p_{i,t}} + O_2$$

e

$$(B) \qquad \omega_{i,t}^* = \omega_{i,t-1} + \sum_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial \log p_i}\right|_{\substack{F_{t-1} \\ p_{t-1}}} \log \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} + O_2$$

Somando-se (A) e (B), temos:

$$\omega_{i,t-1}^* + \omega_{i,t}^* = \omega_{i,t} + \omega_{i,t-1} + O_2$$

pois os demais termos são de segunda ordem.

O índice de quantidade que corresponde a este índice de preço é facilmente obtido com auxílio da expressão (37). O resultado é o seguinte:

$$V_q = \frac{\sum_i Q_{i,t}\, p_{i,t}}{\left(\sum_i Q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}\right) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}\right)^{\bar{\omega}_i}} \tag{55}$$

6. Conclusão

As fórmulas dos índices de produto real e dos deflatores implícitos do produto, apresentadas nos itens 3 e 4, certamente requerem um esforço adicional de pesquisa econométrica para sua implementação na prática, em virtude de estes índices necessitarem de estimativas de elasticidades-preço para o seu computo. Todavia, o índice geométrico de preço, bem como o de quantidade implícito, apresentados no item 5, podem ser facilmente aplicados, em virtude de não necessitarem, para o seu cômputo, de estimativas de parâmetros. O índice geométrico de preço é uma contrapartida para índices verdadeiros do índice ideal de Fisher, média geométrica dos índices de Laspeyres e Paasche. Como no caso do índice de Fisher, a interpretação do índice (52) não é tão transparente, mas o seu cálculo aproximado por meio de (54) é extremamente fácil.

Abstract

The object of this paper is to present new formulas to compute indices of real product and product deflator. These new indices are an approximation for the true indices of economic theory and require knowledge of parameters which are not readily available. An alternative method applicable for immediate use is suggested.

Bibliografia

Barbosa, F. de Holanda. Índice de custo de vida: avaliação do método da Fundação Getulio Vargas e nova formulação. *Revista Brasileira de Economia, 34*: 485-99, 1979.

Fisher, F. M. & K. Shell. *The Economic theory of price indices*. New York, Academic Press, 1972.

Richter, M. Invariance axions and economic indexes. *Econometrica, 34*: 336-41, 1966.

Samuelson, P. A. & S. Swamy. Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis. *American Economic Review, 64:* 566-93, 1974.

Theil, H. *Theory and measurement of consumer demand*. Amsterdam, North-Holland, 1975.