Índice de custo de vida: avaliação do método da Fundação Getulio Vargas e nova formulação*

Fernando de Holanda Barbosa**

Este trabalho tem dois objetivos. O primeiro consiste em mostrar, do ponto de vista teórico, as limitações embutidas no índice de custo de vida (grupo alimentação) atualmente calculado pela Fundação Getulio Vargas. O segundo objetivo consiste em desenvolver novos índices de custo de vida e de renda real que se constituem em aproximações para os índices verdadeiros da teoria econômica. Os novos índices prescindem do valor de referência da função-utilidade e requerem para seu cálculo de estimativas das elasticidades-preço compensadas.

1. Introdução; 2. A teoria dos índices de custo de vida e o índice da Fundação Getulio Vargas; 3. Novas fórmulas para o cálculo do índice de custo de vida; 4. Novas fórmulas para o cálculo do índice de renda real; 5. Conclusão.

1. Introdução

Uma propriedade bastante conhecida na literatura econômica, que trata de índices de preços, é que o índice de custo de vida do tipo Laspeyres não leva em conta a substituição existente entre os diversos bens e serviços que compõem a cesta do consumidor, quando a estrutura de preços relativos se modifica. Com base neste fato, o Instituto Brasileiro de Economia – IBRE, da Fundação Getulio Vargas, introduziu, a partir de março de 1977, um novo método de cálculo para o grupo alimentação no índice de custo de vida da cidade do Rio de Janeiro.

* O autor agradece os comentários de José Luiz Carvalho.

** Do Instituto de Pesquisas do IPEA.

O índice do grupo alimentação passou a ser computado através da seguinte fórmula:[1]

$$I = \left(\frac{p_{1t}}{p_{1,t-1}}\right)^{\omega_1} \left(\frac{p_{2t}}{p_{2,t-1}}\right)^{\omega_2} \dots \left(\frac{p_{nt}}{p_{n,t-1}}\right)^{\omega_n}, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \qquad (1)$$

onde $p_{i\ell}$ é o preço do bem i no período ℓ, e ω_i é a proporção da despesa com a aquisição do bem i. A nota explicativa do IBRE, publicada na revista *Conjuntura Econômica*, menciona o fato de que a fórmula (1) admite implicitamente que as elasticidades-preço dos bens e serviços que entram no seu cálculo são iguais à unidade, e que esta escolha foi arbitrária não se baseando em nenhum estudo empírico.[2]

Este trabalho tem dois objetivos. O primeiro consiste em mostrar, do ponto de vista teórico, as limitações embutidas no índice (1). Mostraremos que o índice (1) baseia-se em um caso particular de uma função-utilidade bastante peculiar e que além das elasticidades-preço serem iguais à unidade, as seguintes hipóteses também estão implícitas no índice da FGV: a) elasticidades-renda unitárias; b) elasticidades-preço cruzadas (não-compensadas) iguais a zero; c) elasticidade-preço cruzada compensada entre o bem i e o bem j depende apenas da proporção da renda gasta com o bem j, o que significa dizer, por exemplo, que a elasticidade-preço cruzada compensada entre a abóbora e o chuchu é igual à elasticidade-preço entre o feijão e o chuchu.

O segundo objetivo deste trabalho consiste em desenvolver novos índices de custo de vida e de renda real que se constituem em uma aproximação aos índices verdadeiros da teoria econômica. Estes novos índices prescindem da especificação de uma função-utilidade e requerem, para o seu cálculo, o conhecimento de estimativas das elasticidades-preço compensadas.

O próximo item deste trabalho apresenta a crítica teórica ao novo método utilizado pela Fundação Getulio Vargas; o item 3 cuida do desenvolvimento dos novos índices de preço; o item 4 trata dos índices de renda real; e o 5 sumaria nossas conclusões.

2. A teoria dos índices de custo de vida e o índice da Fundação Getulio Vargas

A teoria econômica admite que o consumidor maximiza a função-utilidade $u(q_1, \dots, q_n)$, onde q_i é a quantidade consumida do $i^{\text{ésimo}}$ bem, com a condi-

[1] Veja nota explicativa publicada na revista *Conjuntura Econômica, 31* (6): 141, 1977.

[2] Os demais grupos que compõem o índice de custo de vida continuam a ser calculados como antes. Cabe salientar que nem sempre é possível escrever o índice de custo de vida verdadeiro como uma função dos índices dos grupos em que os diversos bens e serviços foram divididos. Para uma condição suficiente em que este tipo de desagregação é possível, veja Lloyd (1975, p. 303).

ção de que em relação aos preços p_i e à renda y a restrição orçamentária $\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = y$ seja satisfeita. Este problema de máximo condicionado produz as equações de demanda $q_i = q_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, y)$, $i = 1, \ldots, n$. Quando estas equações de demanda são substituídas na função-utilidade $u(q_1, \ldots, q_n)$ resultam na função-utilidade indireta,

$$u = u\left[q_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, y), \ldots, q_n(p_1, p_2, \ldots, p_n, y)\right] = u_i(p_1, \ldots, p_n, y) \qquad (2)$$

que associa a um dado vetor de preços p e a renda y o máximo de utilidade que o consumidor deriva dos bens e serviços por ele consumido.

Admita-se agora que os preços vigentes no mercado sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e que se deseja saber qual o menor custo para que o consumidor tenha um padrão de vida ou nível de satisfação u. O valor correspondente de y, que passaremos a denominar C para indicar custo, é então obtido a partir da função-utilidade indireta (2) e pode ser expresso, de uma maneira geral, por:

$$C = C(u, p_1, \ldots, p_n) = C(u, p) \qquad (3)$$

onde p denota o vetor de preços.

O índice de custo de vida procura medir a variação de renda que torna o consumidor indiferente entre duas situações nas quais as oportunidades que se lhe apresentam são diferentes. Assim, o índice de custo de vida verdadeiro será definido por:

$$V(u) = V(p_t, p_{t-1} / u) = \frac{C(u, p_t)}{C(u, p_{t-1})} \qquad (4)$$

onde a notação $V(p_t, p_{t-1}/u)$ indica que o índice verdadeiro depende do nível de utilidade u a ser utilizado na comparação. O índice $V(u)$ é igual à razão entre o custo de vida quando os preços são p_t, e o custo de vida quando os preços são p_{t-1}, ambos os custos sendo avaliados para o mesmo nível de utilidade u.[3]

A obtenção do índice $V(u)$ requer a especificação da função-utilidade indireta (3). Um caso particular é obtido a partir da função-utilidade direta de Klein-Rubin:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log(q_i - \gamma_i), \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 \qquad (5)$$

[3] Observe que se entre as duas situações que estiverem sendo comparadas, os gostos e preferências do consumidor tiverem mudado, este fato não traz nenhum problema para o cáculo do índice de custo de vida. Com efeito, o índice refere-se a um *dado* nível de utilidade u, e não a uma comparação intertemporal de utilidades.

onde os μ_i's e os γ_i's são parâmetros. A função (5) para ser definida requer $q_i - \gamma_i > 0$ e os valores dos μ_i têm que ser positivos para que as utilidades marginais sejam positivas. A maximização de (5), com a condição de que a restrição orçamentária $\Sigma\, p_i\, q_i = y$ seja satisfeita, produz as seguintes equações de demanda:

$$p_i q_i = p_i \gamma_i + \mu_i \left(y - \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k\right),\ i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

O sistema de equações de demanda apresentado é conhecido como o sistema de despesa linear. Os parâmetros μ_i podem ser interpretados como as propensões marginais a gastar, pois:

$$\mu_i = \frac{\partial\,(p_i q_i)}{\partial\, y}$$

Quando se admite que os γ_i's são positivos, o que é desnecessário para que a função (5) seja definida, estes parâmetros podem ser interpretados como as quantidades mínimas compradas pelo indivíduo. O consumidor aloca então a proporção μ_i do excesso de renda $(y - \Sigma\, p_k\, \gamma_k)$ na compra do $i^{\text{ésimo}}$ bem.

As equações de demanda contidas na expressão (6), quando substituídas na função-utilidade (5), resultam na função-utilidade indireta:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log \frac{\mu_i \left(y - \sum_{k=1}^{k=n} p_k \gamma_k\right)}{p_i} \tag{7}$$

O custo mínimo C é então obtido fazendo-se $y = C$ na equação (7). O resultado é:

$$C = \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k + e^{u - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log \mu_i} \prod_{i=1}^{n} p_i^{\mu_i} \tag{8}$$

Substituindo-se (8) em (4), resulta no seguinte índice de custo de vida:

$$V(p_t, p_{t-1}/u) = \frac{e^{u - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log \mu_i} \prod_{i=1}^{n} p_{it}^{\mu_i} + \sum_{k=1}^{n} p_{kt}\, \gamma_k}{e^{u - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log \mu_i} \prod_{i=1}^{n} p_{i,t-1}^{\mu_i} + \sum_{k=1}^{n} p_{k,t-1}\, \gamma_k} \tag{9}$$

Quando $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, o índice reduz-se a:

$$V\left(p_t, p_{t-1}/u\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}\right)^{\omega_i} \tag{10}$$

pois $\mu_i = \omega_i = p_i\, q_i / y$. A comparação dos índices (10) e (1) mostra claramente que eles são iguais. Logo, o índice atualmente usado pela Fundação Getulio

Vargas é um caso particular do índice de custo de vida verdadeiro, associado à função-utilidade Klein-Rubin, quando todos os γ's são iguais a zero.

As elasticidades-renda ϵ_i, as elasticidades-preço n_{ij} e as elasticidades-preço compensadas n_{ij}^c associadas ao sistema de despesa linear (6) são expressas por:

$$\epsilon_i = \frac{\partial q_i}{\partial y} \cdot \frac{y}{q_i} = \frac{\mu_i}{\omega_i} \tag{11}$$

$$n_{ij} = -1 + \frac{\gamma_i}{q_i}(1 - \mu_i), \qquad i = j \tag{12a}$$

$$n_{ij} = -\mu_i \frac{p_j \gamma_j}{p_i q_i}, \qquad i \neq j \tag{12b}$$

$$n_{ij}^c = (1 - \mu_i)\left(\frac{\gamma_i}{q_i} - 1\right), \qquad i = j \tag{13a}$$

$$n_{ij}^c = \frac{\mu_i}{p_i q_i} p_j (q_j - \gamma_j), \qquad i \neq j \tag{13b}$$

Segue-se, então, que no caso de $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, tem-se: $\epsilon_i = 1$, $n_{ii} = -1$, $n_{ij} = 0$, $n_{ii}^c = -(1 - \omega_i)$, $n_{ij}^c = \omega_j$. Ou seja: a) as elasticidades-renda são unitárias; b) as elasticidades-preço são iguais à unidade, c) as elasticidades-preço cruzadas são nulas; d) as elasticidades-preço compensadas são iguais a 1 menos a proporção da despesa com a aquisição do $i^{ésimo}$ bem; e) a elasticidade-preço cruzada compensada entre os bens i e j depende apenas da proporção da renda gasta com o bem j.

3. Novas fórmulas para o cálculo do índice de custo de vida

O índice de custo de vida verdadeiro definido na equação (4) não explicita qual o nível de utilidade que deve ser utilizado na comparação entre os períodos t e $t-1$. Em princípio, qualquer nível de utilidade pode ser usado. A seguir, usaremos dois diferentes níveis de utilidade para servirem de comparação e que darão origem a dois índices diferentes.

3.1 *O índice Laspeyres modificado*

Quando o padrão de vida ($\equiv$ nível de utilidade) usado para comparação entre os dois períodos refere-se ao período $t-1$, o índice (4) passa a ser expresso por:

$$V(u_{t-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t} \quad q_{i,t}^{*}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t-1} \, q_{i,t-1}} \tag{14}$$

onde o denominador da expressão (14) indica o custo dos bens e serviços adquiridos no período $t - 1$ aos preços do período $t - 1$, e o numerador $\sum_i p_{i,t} \, q_{i,t}^{*}$ indica o custo dos bens e serviços a que o consumidor teria de incorrer para manter o mesmo padrão de vida ($= u_{t-1}$) do período anterior aos preços vigentes em t. O problema que surge para o cálculo do índice (14) é que as quantidades $q_{i,t}^{*}$ não são observadas, pois o padrão de vida ($= u_t$) no período t é diferente do padrão no período $t - 1$ ($u_t \neq u_{t-1}$), e, conseqüentemente, $q_{i,t}^{*} \neq q_{i,t}$.

O fato de não observarmos as quantidades $q_{i,t}^{*}$ não constitui empecilho para que o índice (14) seja calculado, pelo menos aproximadamente. Com efeito, uma expansão de Taylor nos possibilita escrever:[4]

$$q_{i,t}^{*} - q_{i,t-1} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{S_{ij}^{t} + S_{ij}^{t-1}}{2} \right) \Delta p_{j,t} + O_3 \tag{15}$$

onde O_3 é um termo de terceira ordem nas variações dos preços, S_{ij}^{t} e S_{ij}^{t-1} representam os efeitos-substituição avaliados nos períodos t e $t - 1$, respectivamente, isto é:

$$\left. \frac{\partial q_{i,t}}{\partial p_{j,t}} \right|_{u = ct} = S_{ij}^{t} \tag{16}$$

$$\left. \frac{\partial q_{i,t-1}}{\partial p_{j,t-1}} \right|_{u = ct} = S_{ij}^{t-1} \tag{17}$$

[4] A expansão de Taylor que será usada neste trabalho não é a comumente apresentada nos livros-textos. Com efeito, a expansão

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{2} h' (f_x + f_{x+h}) + O_3 \tag{A}$$

resulta da combinação das seguintes expressões:

$$f(x + h) - f(x) = h' f_x + \frac{1}{2} h' F_x h + O_3 \tag{B}$$

e:

$$f_{x+h} - f_x = F_x h + O_2 \tag{C}$$

onde F_x é a matriz hessiana de $f(x)$, e f_y é o vetor de derivadas parciais de $f(x)$ avaliadas no ponto y. Premultiplicando-se (C) por h' e substituindo-se a expressão daí resultante em (B), resulta na expansão (A). Para maiores detalhes, veja Theil (1975), p. 37-8.

onde as derivadas parciais são avaliadas mantendo a renda real constante ($u = ct$) e $\Delta p_{j,t} = p_{j,t} - p_{j,t-1}$.

Sabe-se da teoria do consumidor que os efeitos-substituição têm de satisfazer às seguintes condições:

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t} \; p_{j,t} \;\; = 0 \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t-1} \, p_{j,t-1} = 0 \tag{19}$$

Em face das condições (18) e (19), é fácil verificar-se que:

$$\sum_{j=1}^{n} (S_{ij}^{t} + S_{ij}^{t-1}) (p_{j,t} - p_{j,t-1}) = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t-1} \, p_{j,t} - \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t} \, p_{j,t-1} \tag{20}$$

Desprezando-se o termo de terceira ordem, a equação (15) passa a ser escrita como:

$$q_{i,t}^{*} = q_{i,t-1} + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t-1} \, p_{j,t} - \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t} \, p_{j,t-1} \right) \tag{21}$$

Substituindo-se a expressão acima em (14) obtém-se:

$$V(u_{t-1}) = \frac{\sum_i p_{i,t} \, q_{i,t-1} + \frac{1}{2} \sum_i p_{it} \left(\sum_j S_{ij}^{t-1} \, p_{j,t} - \sum_j S_{ij}^{t} \, p_{j,t-1} \right)}{\sum_i p_{i,t-1} \, q_{i,t-1}} \tag{22}$$

Observe-se que:

$$\sum_i p_{it} \sum_j S_{ij}^{t} \, p_{j,t-1} = \sum_j p_{j,t-1} \sum_i S_{ji}^{t} \, p_{it} = 0$$

pois $S_{ij} = S_{ji}$ (simetria da matriz de Slutsky) e a condição (18) tem de ser satisfeita. Com este resultado, a equação (22) passa a ser escrita como:

$$V(u_{t-1}) = \frac{\sum_i p_{i,t} \quad q_{i,t-1}}{\sum p_{i,t-1} \, q_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t} \, p_{j,t} \, S_{ij}^{t-1}}{\sum_i p_{i,t-1} \, q_{i,t-1}} \tag{23}$$

A primeira parcela do lado direito de (23) nada mais é do que o índice de Laspeyres. Logo:

$$V(u_{t-1}) = L + \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t} \, p_{j,t} \, S_{ij}^{t-1}}{\sum_i p_{i,t-1} \, q_{i,t-1}} \tag{24}$$

onde $L = (\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t-1}) / (\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t-1})$. Como a forma quadrática

$$\sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S_{ij}^{t-1} \tag{25}$$

é negativa em virtude de a matriz de Slutsky ser negativa semidefinida, segue-se que o índice de Laspeyres superestima o índice de custo de vida verdadeiro, $L > V(u_{t-1})$, uma proposição bastante popular na literatura que trata de índices de preços. Quando os preços em t são proporcionais aos preços em $t-1$, $p_{i,t} = k\, p_{i,t-1}$, os índices $V(u_{t-1})$ e L coincidem, pois a forma quadrática (25) anula-se devido à inexistência de alteração nos preços relativos.

A elasticidade-preço compensada, avaliada no período $t-1$, é definida por:

$$n_{ij}^c = S_{ij}^{t-1}\, \frac{p_{j,t-1}}{q_{i,t-1}}$$

Substituindo-se este valor em (24), obtém-se:

$$V(u_{t-1}) = L + \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t}\, q_{i,t-1}\, n_{ij}^c\, \frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t-1}} \tag{26}$$

Alternativamente:

$$V(u_{t-1}) = \sum_i \omega_{i,t-1}\, \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \omega_{i,t-1}\, \frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}\, \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}\, n_{ij}^c \tag{27}$$

ou ainda:

$$V(u_{t-1}) = \frac{\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t-1} \left[1 + \frac{1}{2} \sum_j n_{ij}^c\, \frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}\right]}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t-1}} \tag{28}$$

As fórmulas (26), (27) e (28) mostram claramente a correção a ser feita no índice de Laspeyres para o cálculo do índice de custo de vida verdadeiro. O cálculo deste novo índice requer o conhecimento das elasticidades-preço compensadas n_{ij}^c. Cabe ressaltar que este novo índice é uma aproximação para qualquer função-utilidade, não necessitando que se introduzam hipóteses restritivas acerca do comportamento do consumidor.[5]

[5] O sentido que estamos atribuindo à afirmação de que os novos índices propostos neste trabalho prescindem da especificação de uma função-utilidade é de que estes índices não foram deduzidos a partir de uma função utilidade conhecida *a priori*. Por exemplo, o índice de custo de vida (28) consiste em uma aproximação para qualquer função-utilidade, pois, além dos dados de preços e quantidades normalmente utilizados no cômputo de índices de preços, precisa-se apenas de estimativas das elasticidades-preço compensadas num *dado ponto* das equações de demanda.

3.2 *O índice Paasche modificado*

Quando o nível de utilidade de referência para comparação entre os períodos t e $t-1$ é o nível de utilidade do período t, o índice de custo de vida (4) toma a seguinte forma:

$$V(u_t) = V(p_t, p_{t-1}/u_t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t-1}\, q^*_{i,t-1}} \tag{29}$$

isto é, o índice $V(u_t)$ é igual à razão entre o custo dos bens e serviços adquiridos no período t, aos preços do período t, e o custo dos bens e serviços, aos preços do período $t-1$, que o consumidor teria de adquirir no período $t-1$ para manter o mesmo padrão de vida do período t.

Obviamente, as quantidades $q^*_{i,t-1}$ não são observadas, o que impossibilita o cálculo do índice (29). Entretanto, é possível computar-se aproximadamente este índice. Com efeito, $q^*_{i,t-1}$ pode ser desenvolvido em série de Taylor como:

$$q^*_{i,t-1} - q_{it} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{S_{ij}^{t-1} + S_{ij}^{t}}{2} \right) \Delta p_{j,t-1} \tag{30}$$

onde desprezamos termos de terceira ordem nos Δp's. Levando-se em conta a expressão (20), podemos escrever a equação (30) do seguinte modo:

$$q^*_{i,t-1} = q_{it} + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t}\, p_{j,t-1} - \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{t-1}\, p_{j,t} \right] \tag{31}$$

Substituindo-se a equação (31) no índice (29), obtém-se:

$$V(u_t) = \frac{\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t-1} \left(\sum_j S_{ij}^{t}\, p_{j,t-1} - \sum_j S_{ij}^{t-1}\, p_{j,t} \right)} \tag{32}$$

Em virtude de:

$$\sum_i p_{i,t-1} \sum_j S_{ij}^{t-1}\, p_{j,t} = \sum_j p_{j,t} \sum_i S_{ji}^{t-1}\, p_{i,t-1} = 0,$$

pois $S_{ij} = S_{ji}$ e da condição (19) ter de ser obedecida, o índice $V(u_t)$ passa a ter a seguinte expressão:

$$V(u_t) = \frac{\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}\, S_{ij}^{t}} \tag{33}$$

Alternativamente, podemos escrever o índice (33) como:

$$V(u_t) = \frac{\dfrac{\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t}}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}\, S_{ij}^t}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t}}} \qquad (34)$$

O numerador da expressão (34) é o índice de Paasche,

$$P = \frac{\sum_i p_{i,t}\, q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t-1}\, q_{i,t}}$$

e o denominador mostra a correção a ser feita no índice de Paasche para que se obtenha o índice de custo de vida verdadeiro, cuja base de comparação é o padrão de vida no período t $(u = u_t)$.

Como a forma quadrática,

$$\sum_i \sum_j p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}\, S_{ij}^t$$

que aparece no denominador da expressão (34), é negativa em virtude de a matriz de Slutsky ser negativa semidefinida, é fácil concluir-se que $V(u_t) > P$, isto é, que o índice de Paasche subestima o índice de custo de vida verdadeiro, uma proposição bastante conhecida na literatura econômica que trata dos números-índices. [6] Quando $p_{i,t-1} = k\, p_{i,t}$, para todos os valores de i, o índice de Paasche é igual ao índice verdadeiro $V(u_t)$, pois a forma quadrática anterior é igual a zero.

4. Novas fórmulas para o cálculo do índice de renda real

O índice de renda real verdadeiro é definido através da seguinte expressão:

$$V_q\,(u_t, u_{t-1}/p) = V_q\,(p) = \frac{C\,(u_t,\ p)}{C\,(u_{t-1}, p)} \qquad (35)$$

onde $C\,(u_t, p)$ é o custo dos bens e serviços adquiridos quando o padrão de vida é u_t e o vetor de preços é igual a p, e $C\,(u_{t-1}, p)$ é o custo dos bens e serviços quando o nível de utilidade é u_{t-1} e os preços são dados pelo mesmo vetor p.

[6] Observe que é incorreto afirmar-se que $L > V > P$ a partir das desigualdades $L > V\,(u_{t-1})$ e $V\,(u_t) > P$, pois os índices $V\,(u_{t-1})$ e $V\,(u_t)$ são diferentes.

O problema que surge no cálculo do índice de renda real verdadeiro é quanto à escolha do vetor de preços que será utilizado como referência na comparação entre as situações em t e $t-1$. A escolha é, sem dúvida, arbitrária. Todavia, costuma-se usar os preços no período $t-1$ ou então os preços no período t como referência. A escolha de um ou outro vetor de preços dará margem a dois índices diferentes que serão apresentados a seguir.

4.1 *O índice Laspeyres modificado*

Quando os preços escolhidos para servirem de referência são os preços do período $t-1$, o índice de renda real verdadeiro (35) passa a ser expresso por:

$$V_q(p_{t-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i,t}^{*} p_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i,t-1} p_{i,t-1}} \tag{36}$$

Da mesma forma que nos índices de preços, o índice (36) é difícil de calcular porque as quantidades q_{it}^* não são observadas, pois elas representam as quantidades de bens e serviços que o consumidor adquiriria no período t se os preços fossem idênticos aos preços do período anterior. Obviamente, como os preços em t e $t-1$ são diferentes, as quantidades $q_{i,t}$ são diferentes das quantidades $q_{i,t}^*$. Este problema pode ser contornado através da expansão de Taylor:

$$q_{i,t}^* = q_{i,t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{S_{ij}^{t-1} + S_{ij}^{t}}{2} \right) \Delta p_{j,t-1} \tag{37}$$

onde desprezamos os termos de terceira ordem nos Δp_j's. Substituindo-se (37) em (36) e levando-se em conta a expressão (20), obtém-se:

$$V_q(p_{t-1}) = \frac{\sum_i p_{i,t-1} q_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t-1} \sum_j S_{ij}^{t} p_{j,t-1} - \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t-1} \sum_j S_{ij}^{t-1} p_{j,t}}{\sum_i q_{i,t-1} p_{i,t-1}} \tag{38}$$

Como

$$\sum_i p_{i,t-1} \sum_j S_{ij}^{t-1} p_{j,t} = \sum_j p_{j,t} \sum_i S_{ji}^{t-1} p_{i,t-1} = 0$$

segue-se que a equação (38) reduz-se a:

$$V_q(p_{t-1}) = \frac{\sum_i q_{i,t} p_{i,t-1} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t-1} S_{ij}^{t} p_{j,t-1}}{\sum_i q_{i,t-1} p_{i,t-1}} \tag{39}$$

Alternativamente, o índice (39) pode ser escrito como:

$$V_q\,(p_{t-1}) = \frac{\sum_i q_{i,t} \quad p_{i,t-1}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} + \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}\, S_{ij}^t}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} \tag{40}$$

A primeira parcela do lado direito de (40) é o índice de Laspeyres de renda real:

$$L_q = \frac{\sum_i q_{i,t} \quad p_{i,t-1}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}}$$

A segunda parcela do lado direito de (40) indica a correção a ser feita no índice de Laspeyres:

$$\frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}\, S_{ij}^t}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}} = \frac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_{i,t}\, p_{i,t-1}\, \eta_{ij}^c \,\frac{p_{j,t-1}}{p_{j,t}}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t-1}}$$

onde η_{ij}^c é a elasticidade-preço cruzada compensada avaliada no período t. Em virtude da forma quadrática

$$\sum_i \sum_j p_{i,t-1}\, p_{j,t-1}\, S_{ij}^t$$

ser negativa, o índice de Laspeyres superestima o índice de renda real verdadeiro, $L_q > V_q\,(p_{t-1})$, uma proposição familiar da teoria econômica. Quando todos os preços variam na mesma proporção, os dois índices coincidem, pois obviamente não existe substituição em virtude de os preços relativos não se terem modificado.

Da mesma forma que no índice de preços, o cálculo do novo índice de renda real requer o conhecimento das elasticidades-preço cruzadas compensadas. Cabe, também, salientar o fato de que o novo índice proposto aqui constitui-se em uma aproximação para qualquer função-utilidade, não requerendo, todavia, que se suponha uma forma específica para a função-utilidade.

4.2 *O índice Paasche modificado*

Quando os preços utilizados para comparação no índice de renda real verdadeiro referem-se ao período t, o índice (35) passa a ser expresso por:

$$V_q\,(p_t) = \frac{\sum_i q_{i,t} \quad p_{i,t}}{\sum_i q_{i,t-1}^{*}\, p_{i,t}} \tag{41}$$

onde as quantidades $q^*_{i,t-1}$ não são observadas, pois seriam as quantidades que o indivíduo consumiria se no período $t-1$ os preços fossem iguais aos preços vigentes no período t. Conseqüentemente, o valor exato do índice (41) não pode ser computado. Todavia, um valor aproximado pode ser calculado com base na seguinte expansão de Taylor:

$$q^*_{i,t-1} = q_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{S^t_{ij} + S^{t-1}_{ij}}{2} \right) \Delta p_{j,t} \qquad (42)$$

onde os elementos de terceira ordem nos Δp_j's foram desprezados. Substituindo-se (42) em (41) e levando-se em conta a expressão (20), obtém-se:

$$V_q(p_t) = \frac{\sum_i q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{it} + \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t}\, S^{t-1}_{ij}\, p_{jt} - \frac{1}{2} \sum_i p_{i,t} \sum_j S^t_{ij}\, p_{j,t-1}} \qquad (43)$$

Como

$$\sum_i p_{i,t} \sum_j S^{t-1}_{ij}\; p_{j,t-1} = \sum_j p_{j,t-1} \sum_i S^t_{ji}\; p_{i,t} = 0$$

a equação (43) reduz-se a:

$$V_q(p_t) = \frac{\sum_i q_{i,t}\, p_{i,t}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S^{t-1}_{ij}} \qquad (44)$$

Alternativamente, a expressão (44) pode ser escrita do seguinte modo:

$$V_q(p_t) = \frac{\dfrac{\sum_i q_{i,t} \quad p_{i,t}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t}}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S^{t-1}_{ij}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t}}} \qquad (45)$$

O numerador da equação (45) nada mais é do que o índice de renda real de Paasche:

$$P_q = \frac{\sum_i q_{i,t} \quad p_{i,t}}{\sum_i q_{i,t-1}\, p_{i,t}}$$

O denominador de (45) mostra a correção a ser feita no índice de Paasche para que se obtenhâ o índice de renda real verdadeiro. Observe que o valor desta correção é superior à unidade em virtude de a forma quadrática

$$\sum_i \sum_j p_{i,t}\, p_{j,t}\, S_{i,j}^{t-1}$$

ser negativa. Assim, o índice de Paasche subestima o índice de renda real verdadeiro, ou seja: $P_q < \cdot V_q\ (p_t)$. Da mesma forma que nos casos anteriores, o cálculo do índice (45) requer o conhecimento das elasticidades-preço cruzadas compensadas, avaliadas no período $t - 1$.

5. Conclusão

Neste trabalho mostramos claramente que não há necessidade de se fazer hipóteses completamente arbitrárias acerca do comportamento do consumidor com o objetivo de se calcular índices de preços, ou de quantidades, que levem em conta a substituição que ocorre entre os bens e serviços adquiridos pelo consumidor quando os preços relativos se alteram. Uma modificação bastante simples nos tradicionais índices de Laspeyres e de Paasche pode ser feita dando origem a novos índices, que para serem computados requerem estimativas das elasticidades-preço compensadas. Estes novos índices independem da função-utilidade, pois constituem-se em uma aproximação para qualquer tipo de função-utilidade.

Um dos argumentos contra a utilização dos índices propostos aqui seria o de que as instituições que computam índices de preços não dispõem de estimativas das elasticidades-preço compensadas. Obviamente, o que se deve recomendar a essas instituições, com base em nosso estudo, é que procurem estimar as elasticidades-preço necessárias ao cálculo dos índices se desejarem corrigir as distorções provocadas pela inexistência de substituição nos índices tradicionais de Laspeyres e Paasche. Acreditamos ser preferível trabalhar com valores estimados – mesmo que precários – das elasticidades do que arbitrar fórmulas que traduzem hipóteses bastante fortes acerca do comportamento dos consumidores.

Abstract

This paper has two goals. The first is to show from a theoretical point of view the assumptions underlying the cost-of-living index actually computed by the Getulio Vargas Foundation. The second is to propose new formulas to compute cost-of-living and real income indices which are approximation for the true indices of economic theory. These new indices do not require specification of a utility function. However, for its computation compensated price-elasticities estimates are necessary.

Bibliografia

Fisher, F. M. & Shell, K. *The Economic theory of price indices.* New York, Academic Press, 1972

Klein, L. R. & Rubin, H. A constant-utility index of the cost of living. *Review of Economic Studies, 15*: 84-7, 1948.

Lloyd, P. J. Substitution effects and biases in nontrue prices indices. *American Economic Review, 65*: 301-13, 1975.

Samuelson, P. A. & Swamy, S. Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis. *American Economic Review, 64*: 566-93, 1974.

Theil, H. *Theory and measurement of consumer demand.* Amsterdan, North-Holland, 1975. v. 1.