A eficiência marginal do capital e as condições de Soper: uma análise crítica

Clóvis de Faro*

1. Introdução

Um importante problema associado ao conceito de eficiência marginal do capital, também chamada de taxa interna de retorno,[1] particularmente no que tange à sua aplicação como um critério de alocação de recursos, está implícito em sua própria definição. Genericamente, considerando-se uma entidade geradora de receitas, ou projeto de investimento, à qual se associa a chamada seqüência de fluxos de caixa $\{-S, Q_1, Q_2, \ldots Q_n\}$, onde $S > 0$ é o investimento inicial, n o número de períodos de vida econômica,[2] e Q_j a receita líquida que se estima será derivada no fim do

* Do Instituto de Planejamento Econômico e Social (IPEA/INPES), e da Escola de Pós-Graduação em Economia (EPGE) da Fundação Getulio Vargas. Agradecimentos são devidos ao Prof. Edy Luiz Kogut, da EPGE, por comentários e sugestões.

[1] A primeira nomenclatura, mais usada em economia, foi cunhada por Keynes (veja Keynes, J. M. *The general theory of employment, interest and money.* London, Macmillan, 1936. p. 135), enquanto que a segunda encontra-se difundida na maioria dos textos referentes ao que se convencionou chamar de engenharia econômica (veja-se, por exemplo, referência 7, p. 208).

[2] Nossa análise limitar-se-á ao caso onde o valor de n é prefixado. Como exemplos de estudos onde a vida econômica é tomada como uma variável controlável, vejam-se as referências 1, 9, 13, 15 e 17.

j-ésimo período ($j = 1, 2, \ldots, n$), a eficiência marginal do capital relativa ao projeto de investimento é definida como a taxa de juros, $\hat{r}$, que seja raiz da seguinte equação:

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j (1 + r)^{-j} - S = 0 \tag{1}$$

Ora, para que a definição faça sentido, não só é necessário que exista uma raiz de (1) que tenha significado econômico, o que implica que a pesquisa de raízes seja restringida ao intervalo definido por $r > -1$, como ainda é preciso que tal raiz seja única. Uma vez satisfeitas estas duas condições, o projeto será dito economicamente aceitável se a sua eficiência marginal for maior ou igual a uma dada taxa de juros tomada para comparação.

A possibilidade do colapso do critério da eficiência marginal do capital fez com que vários autores fossem levados a investigar o assunto, procurando o estabelecimento de condições sob as quais seja garantida a estabilidade do critério. Assim, dentre outros, cumpre destacar os trabalhos de Bernhard (2 e 3), de Faro (5), Hammond (10), Jean (11), Kaplan (12), Karmel (13), Norstrom (14), Pitchford & Hagger (18), Soper (19), Teichroew et alii (20) e Wright (23). No presente artigo iremos nos deter na apreciação do trabalho de Soper (19), buscando, via uma análise formal, o exame crítico das condições por ele apresentadas.[8]

2. As condições de Soper

Fazendo-se $p = (1 + r)^{-1}$, a determinação da eficiência marginal do capital associada a um projeto de investimento definido pela seqüência $\{-S, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$, é equivalente à busca de uma raiz do seguinte polinômio em p:

$$F(p) \equiv \sum_{j=1}^{n} Q_j p^j - S = 0 \tag{2}$$

para $p \in [0, \infty)$.

[8] É interessante notar que as condições de Soper formam a base das extensões do critério da taxa interna de retorno que foram propostas por Duguid e Laski (8) e por Teichroew et alii (21); extensões essas que são analisadas criticamente em (6).

Partindo da análise da equação expressa pela (2), Soper (19) afirma que:

a) para que se assegure que possa existir uma raiz positiva é *necessário* que se tenha $Q_n > 0$ (isto é, o último fluxo de caixa líquido deve ser positivo);

b) sendo $Q_n > 0$ e $\hat{p}$ uma raiz positiva de (2), é condição *necessária* e *suficiente* para que $\hat{p}$ seja raiz única que se tenha

$$S > \sum_{j=1}^{k} Q_j \hat{p}^j, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3}$$

Para que possamos compreender a lógica das duas condições mencionadas, as quais aparecem transcritas, e ainda como necessárias, em DeGarmo (7, p. 210), passemos ao exame crítico de cada uma delas, buscando evidenciar os seus pontos falhos. Antes porém, convém ressaltar que, mais do que na apreciação de condições puramente matemáticas relativas à existência e unicidade de raízes positivas da equação (2), estaremos interessados em verificar suas implicações com relação à possibilidade de aplicação prática do critério da eficiência marginal do capital.

3. Análise da primeira condição

Matematicamente, tendo em vista que a determinação da eficiência marginal do capital reside tão-somente na busca de raízes positivas da equação $F(p) = 0$, o seguinte teorema (cf. MacDuffee, 16, p. 52), é relevante para a análise da condição $Q_n > 0$.

Se $F(p)$ é um polinômio tal que $F(a)$ e $F(b)$ apresentam sinais opostos, então existirá um número ímpar de raízes de $F(p) = 0$ no intervalo (a, b), *contando-se uma raiz múltipla tantas vezes quanto a sua multiplicidade*.

Ora, considerando-se a (2), tem-se que:

$$F(0) = -S < 0$$

e

$$\lim_{p \to \infty} F(p) > 0, \text{ se } Q_n > 0 \text{ (cf. 16, p. 55)}$$

Conseqüentemente, de acordo com o teorema transcrito, teremos um número ímpar de raízes positivas para a equação definida pela (2). Ora, como em contrapartida, se $Q_n < 0$, implicar-se-ia ou um número par de raízes positivas, ou inexistência, Soper (19) parece ter sido levado a concluir, erradamente, que $Q_n > 0$ é condição necessária para a existência de *uma única raiz positiva* (eficiência marginal do capital). Seu erro, parece, residiu em não ter observado a parte destacada do teorema aqui considerado. Isto é, deixou de levar em conta o fato de que $\hat{p}$ pode ser uma raiz de multiplicidade par, embora sendo o único valor de $p \in [0, \infty)$ tal que $F(p) = 0$.

Como evidência desta possibilidade, podemos apresentar o seguinte exemplo, que chamaremos de projeto A. Seja:

$$A: \{-S, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \equiv \{-4, 32, -96, 128, -64\}$$

Ora, é fácil verificar que:

$$F(p) = -4 + 32p - 96p^2 + 128p^3 - 64p^4 \equiv -64 \; (p - 0{,}5)^4$$

Conseqüentemente, segue-se que $\hat{p} = 0{,}5$ (implica $\hat{r} = 1$, ou 100% por período) é a única raiz, e ainda mais positiva, de $F(p) = 0$, muito embora sua multiplicidade seja igual a 4.

Todavia, conquanto do ponto de vista formal possamos concluir que $Q_n > 0$ não é condição necessária para a unicidade de raízes positivas de $F(p) = 0$, falta verificar sua validade com relação à possibilidade de aplicação do critério de avaliação econômica ora em consideração.

3.1 Reavaliação da condição $Q_n > 0$ face à implementação do critério da eficiência marginal do capital

Na realidade, como já dissemos, dentro do contexto econômico, a pesquisa de soluções $F(p) = 0$, para $p > 0$, está associada à determinação da eficiência marginal do capital referente a um projeto de investimento, para taxas de juros $r > -1$. Ora, dada uma taxa r^* tomada para comparação, o critério da eficiência marginal prescreve que o projeto será considerado como economicamente atrativo se a sua eficiência marginal, $\hat{r}$, for tal que $\hat{r} > r^*$. Por outro lado, quando em confronto com o método do valor atual à mesma taxa r^*, tal procedimento só será consistente se $V(r^*) > 0$, onde, para $p^* = (1 + r^*)^{-1}$,

$$V(r^*) = -S + \sum_{j=1}^{n} Q_j \, (1 + r^*)^{-j} \equiv F(p^*) \qquad (4)$$

é o valor atual do projeto à taxa r^*. Ainda mais, tendo em vista que o critério da eficiência marginal do capital só faz sentido quando $\hat{r}$ é a única taxa no intervalo considerado que anula o valor atual do projeto, segue-se que só haverá consistência quando $V(r) > 0$ para $r < \hat{r}$.

Isto posto, passemos agora a reexaminar a necessidade da condição $Q_n > 0$. Seja $\hat{p}$ a única, embora com multiplicidade $m > 1$, raiz positiva de $F(p) = 0$. Então, de acordo com o Teorema da Fatorização (cf. 16, p. 47), podemos escrever:

$$F(p) = -S + \sum_{j=1}^{n} Q_j p^j \equiv K(p - \hat{p})^m G(p) \tag{5}$$

onde K é uma constante não nula, e $G(p)$ um polinômio do grau $n - m$ em p, sendo que $G(p) \neq 0$ para $p \geqslant 0$.

Supondo-se que $Q_n < 0$ deveremos ter m igual a um número par; então, fixando-se o sinal de K de modo a que se tenha $G(p) > 0$ para $p \geqslant 0$, segue-se que:

$$F(0) = -S \equiv K(-\hat{p})^m G(0) < 0 \implies K < 0 \tag{6}$$

Por conseguinte, se $Q_n < 0$ concluímos, de (5), que teremos $F(p) \leqslant 0$ para $p \geqslant 0$, o que implica que se tenha $V(r) \leqslant 0$ para $r > -1$. Ou seja, o valor atual do projeto será não-positivo para taxas no intervalo considerado, o que acarretará o colapso do critério da eficiência marginal do capital.

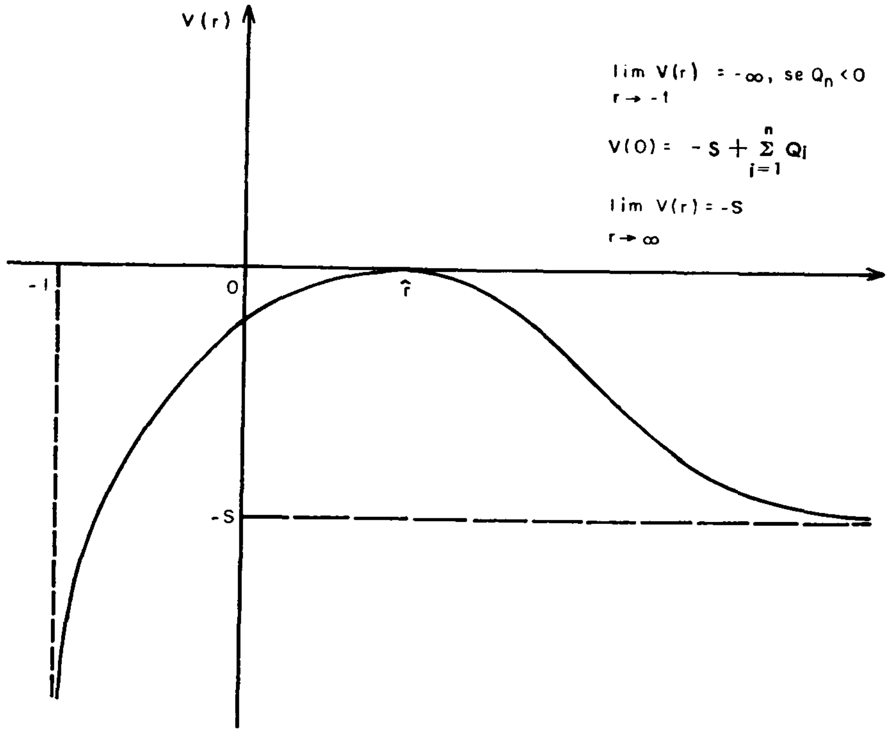
Tal é precisamente o caso do projeto apresentado como exemplo, para o qual se tem, de maneira genérica, a interpretação gráfica para a função valor atual como esquematizada na figura 1 (supondo $\hat{p} < 1 \implies \hat{r} > 0$).

Por outro lado, ainda supondo que $Q_n < 0$, as duas outras únicas possibilidades com relação a raízes positivas de $F(p) = 0$ são: a) inexistência de raiz; b) duas ou mais raízes distintas (com a soma de suas respectivas multiplicidades sendo um número par). Portanto, como para essas duas outras possibilidades o critério da eficiência marginal do capital também entra em colapso, conclui-se que $Q_n > 0$ é condição necessária para a implementação do critério, quando a análise considera taxas de juros no intervalo definido por $r > -1$. Isto é, embora por razões distintas das apresentadas em (19), a primeira condição de Soper fica reabilitada quando a análise é relativa à aplicação do critério da eficiência

marginal do capital no intervalo referente a taxas com interpretação econômica.

Figura 1

Gráfico da função valor atual para investimentos do tipo do projeto A



3.2 Restrição ao campo de taxas positivas

Na vida prática, taxas de juros negativas costumam carecer de interesse. Isto é, normalmente, os critérios de avaliação e seleção de projetos de investimento restringem seus domínios de aplicação ao caso em que $r \geqslant 0$. Conseqüentemente, com vistas à implementação prática do critério da eficiência marginal do capital, torna-se interessante que a primeira condição de Soper seja novamente reavaliada, agora detendo-se no exame do caso em que $p \in [0, 1]$.

Inicialmente, lembremos que, para que haja consistência com o método do valor atual a uma dada taxa $r^* > 0$, a adoção do critério da efici-

ência marginal do capital só fará sentido se $V(0) \equiv F(1) > 0$.[4] Então, supondo-se que a condição observada seja satisfeita, vejamos se é realmente necessário que se tenha $Q_n > 0$, para que se proceda à implementação prática do critério considerado. Ora, como $Q_n < 0$ implica ou em ausência de raiz positiva, ou que se tenha um número de raízes positivas de $F(p) = 0$ tal que a soma das suas respectivas multiplicidades seja par, poderemos ter casos em que, no evento de existência de raízes positivas, somente uma delas pertença ao intervalo (0, 1), as demais sendo todas superiores à unidade.[5] Para esses casos, o critério em consideração pode ser efetivamente aplicável, pois teremos então uma única raiz $\hat{r} > 0$ para a equação $V(r) = 0$. Um exemplo desta possibilidade é encontrado no caso do projeto que chamaremos de B. Seja:

$$B: \{-S, Q_1, Q_2\} \equiv \{-6, 13, -6\}$$

Temos que:

$$F(p) = -6 + 13p - 6p^2 \equiv -6\ (p - 3/2)\ (p - 2/3)$$

Portanto, $\hat{r} = 0{,}5$ é a única taxa positiva que anula a função valor atual, sendo que $V(r) > 0$ para $r \epsilon [0; 0{,}5)$.

Concluímos, assim, que a primeira condição de Soper não é necessária para a adoção do critério da eficiência marginal do capital no campo das taxas positivas.

4. Análise da segunda condição

Passemos agora ao exame da segunda condição, a qual, de acordo com Soper (19), seria não só suficiente mas também necessária. Inicialmente notemos que se a condição for satisfeita, isto é

$F(\hat{p}) = 0$ com $S > \sum_{j=1}^{k} Q_j \hat{p}^j$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, teremos que $Q_n > 0$.

Isso porque, para $k = n - 1$, tem-se:

$$S > \sum_{j=1}^{n-1} Q_j \hat{p}^j \Longrightarrow S - \sum_{j=1}^{n-1} Q_j \hat{p}^j > 0 \qquad (7)$$

[4] Embora necessária, a condição $F(1) > 0$ não é, em absoluto, suficiente.

[5] Observe-se que a hipótese de que se tenha $F(1) > 0$ implica a existência de ao menos uma raiz $p \varepsilon (0,1)$.

Por outro lado:

$$F(\hat{p}) = 0 \Longrightarrow -S + \sum_{j=1}^{n} Q_j \hat{p}^j = 0$$

ou

$$S - \sum_{j=1}^{n-1} Q_j \hat{p}^j = Q_n \hat{p}^n \tag{8}$$

Por conseguinte, combinando-se as relações (7) e (8), segue-se que devemos ter:

$$Q_n \hat{p}^n > 0 \Longrightarrow Q_n > 0,$$

pois que $\hat{p}^n > 0$, já que $\hat{p} > 0$ por hipótese.

Conclui-se, assim, que a primeira condição é necessária para que a segunda seja satisfeita.

Notemos agora que a segunda condição é realmente suficiente para a unicidade da raiz positiva $\hat{p}$ da equação $F(p) = 0$, mas que não é necessária para tal. Para tanto, suponhamos que $p > 0$ seja uma raiz com multiplicidade unitária da equação (2). Então, fatorando-se, temos que:

$$F(p) \equiv (p - \hat{p})\, f(p) \tag{9}$$

onde $f(p)$ é um polinômio de grau $n - 1$ em p e tal que $f(\hat{p}) \neq 0$.

Para $p \neq \hat{p}$, consideremos a equação derivada da (9):

$$f(p) = F(p) \,/\, (p - \hat{p}) = 0 \tag{10}$$

De acordo com a chamada Regra de Newton (22, p. 97), zero será um limite superior para as raízes de $f(p)$, e, portanto, tendo em vista a (9), $\hat{p}$ será a única raiz positiva da equação $F(p) = 0$, se $f(0) > 0$ e se forem também positivas as $n - 1$ primeiras derivadas de $f(p)$ no ponto $p = 0$.

Ora, é de comprovação imediata que:

$$f(0) = -F(0) / \hat{p} = S / \hat{p} > 0$$

Por outro lado, para o exame do sinal da k-ésima derivada de $f(p)$ que representaremos por $f^k(p)$, faremos uso do seguinte resultado auxiliar: [6]

Lema

$$f^k(p) = \frac{k!\left(Q_k + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{j}{k} Q_j p^{j-k}\right) - kf^{k-1}(p)}{p - \hat{p}} \tag{11}$$

com

$$f^k(0) = \frac{k!\left(S - \sum_{j=1}^{k} Q_j \hat{p}^j\right)}{\hat{p}^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{12}$$

onde $\binom{j}{k} = j!/k!\,(j-k)!$ e $f^0(p) \equiv f(p)$

Demonstração:

Procedendo-se por indução, mostremos inicialmente que as expressões são válidas para $k = 1$.

Tendo em vista a (10), tem-se que:

$$f^1(k) = \frac{d}{dp}\left[\frac{F(p)}{p-\hat{p}}\right] = \frac{d}{dp}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} Q_j p^j - S}{p - \hat{p}}\right]$$

$$= \frac{(p-\hat{p}) \sum_{j=1}^{n} j Q_j p^{j-1} - \sum_{j=1}^{n} Q_j p^j + S}{(p-\hat{p})^2}$$

$$= \frac{(p-\hat{p})\left(Q_1 + \sum_{j=2}^{n} j Q_j p^{j-1}\right) - (p-\hat{p}) f(p)}{(p-\hat{p})^2}$$

$$= \frac{1!\left(Q_1 + \sum_{j=2}^{n} \binom{j}{1} Q_j p^{j-1}\right) - f(p)}{p - \hat{p}}$$

[6] Tanto quanto sabemos, essa é a primeira vez que se apresenta uma análise completa, já que no seu trabalho Soper partiu diretamente de expressão de $f^k(0)$.

Logo, no ponto $p = 0$, segue-se que:

$$f^1(0) = \frac{Q_1 - S/\hat{p}}{-\hat{p}} = \frac{1!\left(S - \sum_{j=1}^{1} Q_j \hat{p}^j\right)}{\hat{p}^2}$$

Suponhamos agora que as expressões (11) e (12) sejam verdadeiras para o caso da $(k - 1)$-ésima derivada; então:

$$f^k(p) = \frac{d}{dp} f^{k-1}(p)$$

$$= \frac{d}{dp}\left[\frac{(k-1)!\left(Q_{k-1} + \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k-1} Q_j p^{j-k+1}\right) - (k-1) f^{k-2}(p)}{p - \hat{p}}\right]$$

$$= \left\{(p - \hat{p})\left[(k-1)! \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k-1} Q_j (j - k + 1) p^{j-k} - (k-1) f^{k-1}(p)\right]\right.$$

$$\left. - (k-1)!\left(Q_{k-1} + \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k-1} Q_j p^{j-k+1}\right) - (k-1) f^{k-2}(p)\right\} / (p - \hat{p})^2$$

Observando-se que $(j - k + 1)\binom{j}{k-1} = k\binom{j}{k}$, podemos escrever ainda:

$$f^k(p) = \frac{(p - \hat{p})\left[k! \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} Q_j p^{j-k} - (k-1) f^{k-1}(p)\right] - (p - \hat{p}) f^{k-1}(p)}{(p - \hat{p})^2}$$

$$= \frac{k!\left(Q_k + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{j}{k} Q_j p^{j-k}\right) - k f^{k-1}(p)}{p - \hat{p}}$$

Conseqüentemente, fazendo-se $p = 0$ e tendo em vista a hipótese indutiva, vem que:

$$f^k(0) = \frac{k!\, Q_k - k f^{k-1}(0)}{-\hat{p}}$$

$$= \frac{k(k-1)!\left(S - \sum_{j=1}^{k-1} Q_j \hat{p}^j\right) / \hat{p}^k - k!\, Q_k}{\hat{p}}$$

$$= \frac{k!\left(S - \sum_{j=1}^{k} Q_j \hat{p}^j\right)}{\hat{p}^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

q. e. d.

Lançando mão do lema, e como $\hat{p} > 0$, por hipótese, segue-se então que:

$$f^k(0) > 0 \Longrightarrow S - \sum_{j=1}^{k} Q_j \hat{p}^j > 0$$

ou

$$S > \sum_{j=1}^{k} Q_j \hat{p}^j, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Por conseguinte, conclui-se que a segunda condição de Soper é efetivamente suficiente para que $\hat{p}$ seja a única raiz positiva da equação $F(p) = 0$.

4.1 Falha de sua necessidade

Erroneamente, Soper (19) tomou sua segunda condição como sendo também necessária. Sua falha, parece, foi a de não observar o fato de que a Regra de Newton, da qual fez uso explícito, provê tão-somente condições de suficiência, mas não de necessidade, para limites superiores das raízes do polinômio $f(p)$. Por conseguinte, a segunda condição de Soper pode não ser satisfeita, embora $\hat{p}$ seja o único valor positivo de p que anule $F(p)$. Tal fato parece ter sido observado, pela primeira vez, por Karmel (13),[7] que apresentou o seguinte contra-exemplo, chamado aqui de projeto de investimento C. Seja:

$$C: \{-S, Q_1, Q_2, Q_3\} \equiv \{-2, 6, -5, 2\}$$

Ora:

$F(p) = -2 + 6p - 5p^2 + 2p^3 \equiv 2(p - 0{,}5)\ [p - (1 + i)]\ [p - (1 - i)]$ onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

Logo, $\hat{p} = 0{,}5$ é a única raiz positiva de $F(p) = 0$.

Por outro lado, examinando-se a segunda condição de Soper, tem-se que:

$k = 1 \rightarrow S = 2 < Q_1\hat{p} = 6 \times 0{,}5 = 3$

Donde se conclui que a segunda condição de Soper, embora suficiente, não é necessária.

[7] É interessante notar que o trabalho de Karmel passou despercebido a vários dos autores que, subseqüentemente, abordaram o assunto.

Um outro detalhe relativo à aplicação da Regra de Newton, e que também não foi percebido por Soper, é o que diz respeito a casos em que, embora sendo o único valor positivo de p que anula a função $F(p)$, $\hat{p}$ é uma raiz múltipla.[8] Ora, se $\hat{p}$ apresenta multiplicidade $m > 1$, teremos que $\hat{p}$ será também raiz do polinômio $f(p) = F(p)/(p - \hat{p})$. Conseqüentemente, zero não pode ser um limite superior para as raízes de $f(p)$ e, em vista da consideração da Regra de Newton, teremos a não-satisfação da segunda condição de Soper. Tal possibilidade é ilustrada para o caso do projeto de investimento que chamaremos de D. Seja:

$$D: \{-S, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\} \equiv \{-1,\ 6,\ -13,\ 14,\ -12,\ 8\}$$

Temos que:

$$F(p) = -1 + 6p - 13p^2 + 14p^3 - 12p^4 + 8p^5$$
$$\equiv 8(p - i)^2 (p - 0{,}5)^3$$

Logo, embora sendo tripla, a única raiz positiva de $F(p)$ é $\hat{p} = 0{,}5$; donde $\hat{r} = 1$ é a eficiência marginal do capital para o projeto considerado. Por outro lado, tem-se que:

$$S = 1 < Q_1\hat{p} = 6 \times 0{,}5 = 3$$

o que implica que, para $k = 1$, não seja satisfeita a segunda condição de Soper.

4.2 Uma generalização

Um exame mais atento da Regra de Newton permite que a segunda condição de Soper possa ser escrita de maneira um pouco mais geral. Para tanto, consideremos a apresentação em Turnbull (22, p. 97). Desenvolvendo-se $f(p)$ em série de Taylor no ponto b, temos que:

$$f(p) = f(b) + \frac{(p-b)}{1!} f^1(b) + \frac{(p-b)^2}{2!} f^2(b)$$
$$+ \dots + \frac{(p-b)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(b) \qquad (13)$$

É então de conclusão imediata que, se $f(b)$, $f^1(b)$, ..., $f^{n-1}(b)$ forem não-negativos, com ao menos um termo desta seqüência sendo estri-

[8] O caso de raízes múltiplas parece ter sido observado pela primeira vez por Bernhard (3), que deixou porém de justificar o porquê do colapso da segunda condição de Soper.

tamente positivo, teremos, de (13), que $f(p) > 0$ para $p > b$. Ou seja, b será pois um limite superior para as raízes reais da equação $f(p) = 0$.

Assim, reportando-se à dedução da segunda condição de Soper, e lembrando de que se tratava da determinação de zero como sendo um limite superior para as raízes reais do polinômio $f(p) = F(p)/(p - \hat{p})$, de modo que $f(0) = S/\hat{p} > 0$, segue-se que, tendo em vista a (12),

$$f^k(0) \geqslant 0 \Longrightarrow S \geqslant \sum_{j=1}^{k} Q_j \hat{p}^j, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{14}$$

são condições de suficiência para que $\hat{p} > 0$ seja a única raiz positiva (e com multiplicidade unitária) da equação $F(p) = 0$.

A relevância da generalização expressa por (14) pode ser comprovada pelo estudo do seguinte exemplo, que é relativo ao projeto de investimento que chamaremos de E. Seja:

$$E: \{-S, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \equiv \{-8, 6, 20, -8, 16\}$$

Ora:

$$F(p) = -8 + 6p + 20p^2 - 8p^3 + 16p^4$$

$$\equiv (p - 0{,}5)\ (16p^3 + 20p + 16)$$

Portanto $\hat{p} = 0{,}5$ é uma raiz positiva da equação $F(p) = 0$. Por outro lado, temos que:

$$k = 1 \rightarrow S = 8 > Q_1 \hat{p} = 6 \times 0{,}5 = 3$$

$$k = 2 \rightarrow S = 8 = \sum_{j=1}^{2} Q_j \hat{p}^j = 3 + 20 \times 0{,}5^2 = 8$$

$$k = 3 \rightarrow S = 8 > \sum_{j=1}^{3} Q_j \hat{p}^j = 8 - 8 \times 0{,}5^3 = 7$$

Por conseguinte, na sua forma original, como dada pela (3), a segunda condição não seria satisfeita, o que nos levaria a não garantir $\hat{p} = 0{,}5$ como a única raiz positiva de $F(p) = 0$. Porém, na sua forma generalizada, como expressa por (14), a condição é satisfeita, o que é suficiente para que possamos concluir que $\hat{r} = 1$ é a eficiência marginal do capital para o projeto E.

5. Conclusão

Para que a eficiência marginal do capital possa ser efetivamente aplicável como um critério de alocação de recursos, é necessário que certas propriedades básicas sejam satisfeitas. Na identificação da presença de tais propriedades, a segunda condição de Soper, principalmente na sua forma generalizada, é um valioso instrumento. Devido ao fato, porém, de que do ponto de vista prático, a primeira condição seja irrelevante, e de que a segunda (que implica a primeira), seja tão-somente de suficiência, mas não de necessidade, devemos ser cautelosos quando da aplicação de algoritmos que incorporem as condições de Soper em sua forma original. Assim, por exemplo, modificações fazem-se necessárias para o uso correto do algoritmo apresentado em DeGarmo (7, p. 476-77), bem como nos que dele foram derivados, como o em (4), já que as condições de Soper foram incorporadas como sendo necessárias. Em particular, com relação ao programa apresentado em (4, p. 119-29), a mensagem de advertência que precede a execução do gráfico da função valor atual ("não existe solução única..."), deve ser reinterpretada como: *não se pode garantir a existência de uma solução única...*

Referências bibliográficas

1. Arrow, Kenneth J. & Levhari, David. Uniqueness of the internal rate of return with variable life of investment. *The Economic Journal,* v. 79, n. 315, p. 560-6, Sept. 1969.

2. Bernhard, Richard H. Discount methods for expenditure evaluation: a clarification of their assumptions. *The Journal of Industrial Engineering,* v. 13, n. 1, p. 19-27, Jan./Feb. 1962.

3. ________. On the inconsistency of the Soper and Sturm-Kaplan conditions for uniqueness of the internal rate of return. *The Journal of Industrial Engineering,* v. 18, n. 8, p. 498-500, Aug. 1967.

4. Faro, Clóvis de. *Critérios quantitativos para a avaliação e seleção de projetos de investimentos.* Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1971. Monografia n.º 2.

5. ________. A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return: a comment. *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* v. 8, n. 4, p. 683-4, Sept. 1973.

6. ________. On the internal rate of return criterion. *The Engineering Economist,* v. 19, n. 3, p. 165-94, Spring, 1974.

7. DeGarmo, E. Paul. *Engineering economy*. 4. ed., New York, The Macmillan Co., 1969.

8. Duguid, A. M. & Laski, J. G. The financial attractiveness of a project: a method of assessing it. *Operational Research Quarterly,* v. 15, n. 4, p. 317-28, Dec. 1964.

9. Flemming, J. S. & Wright, J. F. Uniqueness of the internal rate of return: a generalization. *The Economic Journal,* v. 81, n. 322, p. 256-63, Jun. 1971.

10. Hammond, John S. III. *Bounding the numbers of rates of return of a project.* Work presented at the Joint National Meeting of TIMS and ORSA, Boston, Mass., 22-24 Apr. 1974.

11. Jean, William H. On multiple rates of return. *The Journal of Finance,* v. 23, n. 1, p. 187-91, Mar. 1968.

12. Kaplan, Seymour. A note on a method for precisely determining the uniqueness or nonuniqueness of the internal rate of return for a proposed investment. *The Journal of Industrial Engineering,* v. 16, n. 1, p. 70-1, Jan./Feb. 1965.

13. Karmel, P. H. The marginal efficiency of capital. *The Economic Record,* v. 35, n. 72, p. 429-34, Dec. 1959.

14. Norstrom, Carl J. A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis.* v. 7, n. 3, p. 1835-9, Jun. 1972.

15. ————. Uniqueness of the internal rate of return with variable life of investment: a comment. *The Economic Journal,* v. 80, n. 320, p. 983-4, Dec. 1970.

16. MacDuffee, Cyrus Colton. *Theory of equations.* New York, John Wiley & Sons, Inc., 1954.

17. Matsuda, Kazuhisa. A property of Flemming – Wright's generalized indicador of the profitability of the project. *The Economic Journal,* v. 84, n. 335, p. 645-6, Sept. 1974.

18. Pitchford, J. D. & Hagger, A. J. A note on the marginal efficiency of capital. *The Economic Journal,* v. 68, n. 271, p. 597-600, Sept. 1958.

19. Soper, C. S. The marginal efficiency of capital: a further note. *The Economic Journal,* v. 69, n. 273, p. 174-7, Mar. 1959.

20. Teichroew, D., Robichek, A. A. & Montalbano, M. Mathematical analysis of rates of return under certainty. *Management Science,* v. 11, n. 3, p. 395-403, Jan. 1965.

21. ————. An analysis of criteria for investment and financing decisions under certainty. *Management Science,* v. 12 n. 3, p. 151-79, Nov. 1965.

22. Turnbull, H. W. *Theory of equations.* 5. ed., Edinburgh, Oliver and Boyd Ltd., 1957 .

23. Wright, J. F. The marginal efficiency of capital. *The Economic Journal,* v. 69, n. 276, p. 812-6, Dec. 1959.

Apêndice

Derivação alternativa da forma generalizada da segunda condição de Soper

Em seu trabalho, Duguid e Laski (8) indicam, embora omitindo a demonstração formal, um modo alternativo para a dedução da forma generalizada da segunda condição de Soper. Como este trabalho parece ter passado despercebido à quase-totalidade dos autores que abordaram o assunto, julgamos ser válido que se apresente aqui uma versão detalhada de tal derivação.

Para $r > -1$, a equação (1) do texto é equivalente a:

$$- S (1 + r)^n + \sum_{j=1}^{n} Q_j (1 + r)^{n-j} = 0 \qquad (1')$$

Sendo $\hat{r}$ uma raiz de (1'), defina-se I_j como sendo o capital ainda investido no projeto na época j, isto é:[1]

$$\begin{cases} I_0 = S \\ I_j = S (1 + \hat{r})^j - \sum_{k=1}^{j} Q_k (1 + \hat{r})^{j-k}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (2')$$

sendo que, obviamente, $I_n = 0$.

Fazendo-se $x = 1 + r$, a equação (1') pode ser escrita como:

$$P (x) \equiv - Sx^n + \sum_{j=1}^{n} Q_j x^{n-j} = 0 \qquad (3')$$

Lema

Seja $\hat{x} = 1 + \hat{r} > 0$ uma solução de (3'); então:

$$P (x) \equiv - (x - \hat{x}) (I_0 x^{n-1} + I_1 x^{n-2} + \ldots + I_{n-1}) \qquad (4')$$

[1] **Observe-se que, face à terminologia clássica da matemática financeira, esta definição corresponde à do estado da dívida, quando se considera o projeto como tomador de um empréstimo inicial igual a S.**

Demonstração:

Trabalhando-se com o segundo membro de (4'), tem-se que:

$$- (x-\hat{x}) \sum_{j=0}^{n-1} I_j x^{n-j-1} = - I_0 x^n - I_1 x^{n-1} - \ldots - I_{n-1} x$$
$$+ \hat{x} I_0 x^{n-1} + \hat{x} I_1 x^{n-2} + \ldots + \hat{x} I_{n-1}$$
$$= - I_0 x^n - (I_1 - \hat{x} I_0) x^{n-1} - (I_2 - \hat{x} I_1) x^{n-2} \ldots$$
$$- (I_{n-1} - \hat{x} I_{n-2}) x + \hat{x} I_{n-1}$$

Ora, de (2') segue-se que:

$$I_0 = S$$
$$I_j = \hat{x} I_{j-1} - Q_j \Longrightarrow Q_j = - (I_j - \hat{x} I_{j-1})$$
$$I_n = \hat{x} I_{n-1} - Q_n = 0 \Longrightarrow Q_n = \hat{x} I_{n-1}$$

Logo, procedendo-se às substituições pertinentes, vem que:

$$- (x-\hat{x}) \sum_{j=0}^{n-1} I_j x^{n-j-1} = - S x^n + Q_1 x^{n-1} + Q_2 x^{n-2} + \ldots + Q_{n-1} x + Q_n = P(x)$$

q.e.d.

Corolário: derivação alternativa da segunda condição de Soper.

Se $I_j \geqslant 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, então $\hat{x}$ será a única raiz de $P(x) = 0$, no intervalo considerado.

Demonstração:

Inicialmente notemos que como $I_n = \hat{x} I_{n-1} - Q_n = 0$, e como, sem perda de generalidade, $Q_n \neq 0$ (caso contrário, $Q_n = 0$, bastava reduzir de um período a vida econômica do projeto) deveremos ter $I_{n-1} \neq 0$. Ainda mais, para que a hipótese seja verificada, devemos ter $I_{n-1} > 0$.

Portanto, se $I_j \geqslant 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, segue-se que teremos:

$$\sum_{j=0}^{n-1} I_j x^{n-j-1} > 0, \text{ para } x \geq 0.$$

Conseqüentemente, tendo em vista a (4'), conclui-se que, no intervalo considerado, $P(x) = 0$ se, e somente se, $x = \hat{x}$.

Por outro lado, considerando-se a definição expressa pela (2'), e como $I_0 = S > 0$ para o que chamamos de projeto de investimento, se $I_j \geqslant 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n - 1$, tem-se que:

$$S\,(1 + \hat{r})^j \geqslant \sum_{k=1}^{j} Q_k\,(1 + \hat{r})^{j-k}, \quad j = 1, 2, \ldots, n - 1$$

Alternativamente, fazendo-se $\hat{p} = 1/\ (1 + \hat{r}) > 0$, segue-se que as condições acima podem ser escritas como:

$$S \geqslant \sum_{k=1}^{j} Q_k\,\hat{p}^k, \quad j = 1, 2, \ldots, n - 1$$

q.e.d.