EXPECTATIVAS RACIONAIS COM INFORMAÇÃO ASSIMÉTRICA: UMA INTRODUÇÃO

Paulo Cesar Coutinho*

Resumo

Esse artigo é uma introdução à teoria de equilíbrio com expectativas racionais. Cobrimos os casos com informação simétrica e com informação assimétrica. Mostramos que com mercados complexos e um número finito de estados da natureza existe sempre equilíbrio com expectativas racionais Pareto-ótimo. Todavia podem existir outros equilíbrios com expectativas racionais Pareto dominados.

Abstract

This is an introduction to the theory of rational expectations. We cover the case of symmetric information and the case of asymmetric information. We show that with complete markets and a finite number of states there always exists a Pareto optimum rational expectations equilibrium. However, it is possible under the same circumstances to have other rational expectations equilibria that are Pareto dominated.

1. Introdução.

Este artigo é parte de um projeto maior onde pretendemos fazer um relato dos principais resultados da teoria econômica da incerteza e informação, de forma rigorosa mas sem utilização de métodos avançados de matemática. Neste artigo, cobrimos a teoria de equilíbrio competitivo em economias estocásticas com informação assimétrica. Todavia o campo ainda é vasto demais para apenas um artigo. Restringimos-nos ao estudo do principal conceito de equilíbrio que emerge nessas economias que é o de *equilíbrio com expectativas racionais* (EER). Na seção 2, estudaremos a origem do conceito de expectativas racionais e sua transformação em conceito de equilíbrio para economias estocásticas. Na seção 3, introduziremos assimetria de informação e estudaremos como o conceito de equilíbrio com expectativas racionais permite que se modele economias sujeitas à incerteza e informação assimétrica e como, pela primeira vez, podemos estudar de forma rigorosa à idéia de que os preços agregam

*IMPA, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, RJ 22460 Brasil

informação dispersa na economia. Na seção 4, construiremos um modelo de equilíbrio geral para estudarmos a existência de EER e suas propriedades de bem-estar. Na seção 5, construiremos exemplos de economias com mercados completos nos quais existe EER que não revela a informação e EER que não é Pareto Ótimo. Na seção 6, discutiremos brevemente a noção de EER em modelos macroeconômicos. Na seção 7, discutiremos outros conceitos de equilíbrios alternativos e alguns resultados adicionais.

2. Expectativas racionais como conceito de equilíbrio estocástico.

A idéia de expectativas racionais cresceu da insatisfação com modelos *ad hoc* de formação de expectativas em modelagens econométricas. Por exemplo, tornou-se prática por muitos anos (e ainda hoje é muito comum) supor que a taxa esperada de inflação é uma média ponderada das taxas de inflação prévias, como por exemplo o modelo de expectativas adaptativas de Nerlove (1958). Neste modelo, Nerlove sugere que a expectativa que um agente econômico no período $t-1$ forma a respeito do preço, no período t , p_t^e , satisfaz a equação

$$p_t^e - p_{t-1}^e = \lambda(p_{t-1} - p_{t-1}^e) \quad (1)$$

onde p_{t-1} é o preço verdadeiro no período $t-1$ e $0 < \lambda < 1$. Isto é, o preço esperado no período t é uma média ponderada entre o preço efetivamente realizado no período $t-1$ e o preço esperado no período $t-1$, com pesos iguais à λ e $(1 - \lambda)$. Substituindo p_{t-1}^e na equação acima pela expressão

$$p_{t-1}^e - p_{t-2}^e = \lambda(p_{t-2} - p_{t-2}^e) \quad (2)$$

e procedendo assim sucessivamente, obtemos o modelo de defasagens distribuídas $p_t^e = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \lambda)^i p_{t-i-1}$.

Como os estudos econométricos precisavam economizar em dados necessários para fazer a estimação, tornou-se essencial impor alguma restrição a priori na forma da estrutura de defasagem. Uma restrição sugerida por Muth (1960) era que a defasagem deveria ser racional. Com isto, Muth queria dizer que se a sequência de preços

$\{p_t\}$ é um processo estocástico, então o preço antecipado pelos agentes para o período t calculado no período $t - 1$, p_t^e deveria ser dado pela fórmula $p_t^e = E[p_t | p_{t-1}, p_{t-2}, \dots]$. Isto é, se o agente sabe a estrutura estocástica que gera os preços, então o preço que ele espera para o tempo t é a esperança condicional de p_t , dadas as realizações anteriores do processo estocástico. Para ilustrar como a hipótese de Muth difere da hipótese de expectativas adaptativas, considere o seguinte exemplo. Suponhamos que o processo estocástico de geração de preços seja

$$p_t = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq 1 \\ 2, & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

Então num processo de expectativas adaptativas (ou de defasagens distribuídas), apenas no limite o preço estimado seria igual a 2, $p_2^e = 1$, $p_3^e = 1(1 - \lambda) + 2\lambda, \dots, \lim_{t \rightarrow \infty} p_t^e = 2$. Todavia, se o agente conhece o processo estocástico, com estrutura de defasagem racional $p_t^e = 2$, $\forall t \geq 2$. O fato de que o modelo de expectativas racionais requer o conhecimento do processo estocástico pode ser abrandado pelo fato de que qualquer incerteza quanto ao verdadeiro processo estocástico pode ser modelado de um ponto de vista bayesiano.

Uma vez estabelecido o método de expectativas racionais, a pergunta seguinte é “de onde vem o processo estocástico?” Muth (1961) sugeriu que as predições dos agentes econômicos devem ser as mesmas que as predições feitas pela teoria econômica. Logo, o processo estocástico dos preços é aquele gerado pelos preços de equilíbrio quando os agentes têm expectativas racionais. *Agora, expectativas racionais não é mais uma condição de racionalidade dos agentes, mas uma noção de equilíbrio para economias estocásticas.*

Definição 1. (verbal) Um equilíbrio com expectativas racionais (EER) numa economia com incerteza é uma distribuição das alocações e uma distribuição dos preços, tal que: 1) a distribuição das alocações gera a distribuição dos preços e 2) a distribuição de alocações é ótima para a distribuição dos preços.

Para clarificar as idéias, vamos reproduzir um modelo simples (Grossman 1975). Suponhamos que a demanda por um certo bem no

tempo t é dada pela equação¹

$$\tilde{p}_t = D(Q_t, \tilde{\varepsilon}_t) \quad (3)$$

onde Q é a quantidade demandada total e $\tilde{\varepsilon}_t$ é uma variável aleatória com distribuição conhecida. Existem n firmas idênticas que produzem o bem com defasagem de um período, com a seguinte função de produção

$$\tilde{q}_t = f(l_{t-1}, \tilde{\theta}_t) \quad (4)$$

onde l_{t-1} é a quantidade de insumo utilizada no período $t-1$ para produzir o bem no período t e $\tilde{\theta}_t$ é um choque aleatório que afeta a produção do bem no tempo t , com distribuição conhecida. Como $Q_t = nq_t$, aplicando (4) em (3) observamos que $\tilde{p}_t = \tilde{p}_t(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\theta}_t)$. O preço do insumo no período t é w_t , não-estocástico. As firmas são competitivas, neutras ao risco. A decisão de produção é feita no período $t-1$, quando as firmas ainda não sabem qual a realização das variáveis aleatórias $(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\theta}_t)$. A função lucro esperado de uma firma é

$$E\Pi = E[\tilde{p}(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\theta}_t)f(l_{t-1}, \tilde{\theta}) - w_{t-1}l_{t-1}] \quad (5)$$

Para este modelo, podemos definir EER como

Definição 2. *Um EER para o modelo acima é uma quantidade $l_{t-1}^* > 0$ de insumo para cada firma, e uma distribuição de preços $\tilde{p}^*(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\theta}_t)$, tal que*

$$\tilde{p}^*(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\theta}_t) = D(nf(l_{t-1}^*, \tilde{\theta}_t), \tilde{\varepsilon}_t) \quad e \quad (6)$$

$$\begin{aligned} l_{t-1}^* &= \arg_{l_{t-1}} \max E\Pi \\ &= E[\tilde{p}^*(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\theta}_t)f(l_{t-1}, \tilde{\theta}) - w_{t-1}l_{t-1}]. \end{aligned} \quad (7)$$

a expressão (6) mostra que a distribuição das alocações gera a distribuição dos preços. A expressão (7) mostra que a distribuição das alocações é ótima para a distribuição de preços, conforme definição 1.

¹O símbolo $\sim$ acima de uma variável x significa que é variável aleatória. Realizações desta variável aleatória serão representados pela variável sem o $\sim$. Assim, se $\tilde{x}$ representa a variável aleatória, x representa uma realização desta variável aleatória.

Esse modelo deixa também bastante claro que o conceito de EER é uma generalização para economias estocásticas do conceito equilíbrio com previsão perfeita de Hicks (1939) para economias não-estocásticas. Hicks sugeriu o conceito de “equilíbrio com previsão perfeita” para a situação em que o preço que os produtores antecipavam quando tomavam decisões de produção eram os preços que de fato ocorriam como consequência das decisões de produção. No EER, a *distribuição* dos preços antecipada pelos produtores quando fazem suas decisões de produção é a *distribuição* dos preços que de fato ocorre como consequência das decisões de produção.

3. Expectativas racionais com assimetria de informação: o papel dos preços na alocação dos recursos.

Na teoria microeconômica padrão, os preços entram no problema do consumidor apenas para definir a restrição orçamentária. Todavia, é uma idéia bastante antiga Hayek (1945) que os preços têm um papel informativo importante. A década de 40 assistiu a um grande debate na literatura de planejamento econômico. Oskar Lange argumentava que um planejador podia gerar a mesma alocação que um sistema de mercado, bastando para isso que o planejador anunciasse o vetor de preços de equilíbrio de mercado como o vetor de preços da economia planejada.

Hayek argumentava que essa linha de raciocínio perdia o aspecto mais importante dos preços: que o sistema de preços numa economia de mercado gera uma fantástica economia de informação. Cada agente sabe de alguma coisa sobre si e sua vizinhança. Transacionando, essas peças de informação dispersas na economia são agregadas e transmitidas pelos preços. Essas idéias foram formalizadas em Lucas (1972) e Green (1973) e numa notável série de artigos de Grossman (1976, 1977, 1978, 1981). O *insight* fundamental, feito por Lucas é que: se os preços são função da realização de informação e os agentes econômicos sabem a relação entre preços e informação, então quando os agentes observam os preços vigentes, eles podem inferir, pelo menos parcialmente, qual a informação presente no mercado. Nessa seção, apresentaremos um modelo simples² que captura

²Desenvolvido em Grossman (1979).

os aspectos essenciais do *insight* de Lucas.

Considere a modificação do modelo da seção anterior onde a demanda no período t por um certo bem perecível é estocástica devido a choques aleatórios $\tilde{s}_t$. Suponhamos que existam n produtores com mesma tecnologia não-estocástica expressa pela função de custo crescente convexa $C(q)$, onde q é a quantidade produzida. A produção desse bem consome um período de tempo, de forma que a decisão de produção desse bem para o período t é feita no período $t - 1$. O produtor i observa, no período $t - 1$, antes de tomar sua decisão de produção, a realização da variável aleatória $\tilde{y}_{it-1}$. Seja $\tilde{y}_{t-1} = (\tilde{y}_{1t-1}, \tilde{y}_{2t-1}, \dots, \tilde{y}_{nt-1})$ o vetor de informação de todos os produtores. É de conhecimento comum³ a distribuição conjunta $(\tilde{s}_t, \tilde{y}_{1t-1}, \tilde{y}_{2t-1}, \dots, \tilde{y}_{nt-1})$. Essa distribuição conjunta é *i.i.d.* no tempo, portanto podemos escrever $(\tilde{s}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)$. Uma possível definição de equilíbrio para esse modelo é:

Definição 3. *Um equilíbrio com expectativas realizadas para o período $t - 1$ é uma função de preços $\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y})$ e uma função de quantidades $q_{it-1}^0(\tilde{y}_i)$, tal que*

$$q_{it-1}^0(y_i) = \arg \max_q E[\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y}) | \tilde{y}_i = y_i] q - C(q); e \quad (8)$$

$$\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y}) = D \left(\sum_{i=1}^n q_{it-1}^0(y_i), \tilde{s} \right) \forall (\tilde{s}, \tilde{y}). \quad (9)$$

No período $t - 1$, o preço esperado pelo produtor i para o período t é $E[\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y}) | \tilde{y}_i = y_i]$. Como a oferta do produtor i depende de $\tilde{y}_i$, o equilíbrio entre oferta e demanda implica que a distribuição de preços de equilíbrio dependa de $\tilde{y}$. Como na definição 1, a expressão (9) mostra que a distribuição das alocações gera a distribuição dos preços, a expressão (8) mostra que a distribuição das alocações é ótima para a distribuição de preços. Entretanto, uma boa definição de EER para economias com informação assimétrica requer algo mais.

³ Um fato econômico é de conhecimento comum se todos os participantes na economia o conhecem, sabem que os outros conhecem, sabem que os outros sabem que ele conhece, iterando ad infinitum.

No período t , quando os produtores observam o preço de equilíbrio realizado, eles aprendem alguma coisa sobre as informações dos outros produtores. Mas essa informação chega muito tarde. As decisões de produção foram feitas no período $t - 1$. Entretanto se $E[\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y})|\tilde{y}_i = y_i]$ for diferente entre os produtores, existem forças induzindo a que se abra mercado futuro para esse bem no período $t - 1$. Se $E[\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y})|\tilde{y}_i = y_i] > E[\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y})|\tilde{y}_j = y_j]$ para algum i e j , então existe oportunidade de trocas entre esses dois produtores no mercado futuro, pois o produtor i está disposto a pagar um preço maior que o preço esperado pelo produtor j . Mas se se abre mercado futuro, o equilíbrio da definição 3 é inadequado para analisar situações com crenças diferentes. Se p_f é o preço de equilíbrio no mercado futuro e $E[\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y})|\tilde{y}_i = y_i] > E[\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y})|\tilde{y}_j = y_j]$ para algum i e j , pelo menos uma das duas situações ocorre: $E[\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y})|\tilde{y}_i = y_i] > p_f$ ou $p_f > E[\tilde{p}^0(\tilde{s}, \tilde{y})|\tilde{y}_j = y_j]$. Como os produtores são neutros ao risco, não pode haver equilíbrio no mercado futuro se os produtores têm crenças diferentes pois demanda e/ou oferta seriam não-limitadas.

Mas com pequenas modificações podemos analisar definições de equilíbrio mais interessantes para esse modelo em mercado futuro. Para simplificar, suporemos que a demanda no mercado spot pelo bem é infinitamente elástica, isto é, não dependa da quantidade transacionada. Assim, a demanda, pode ser expressa como $\tilde{D} = D(\tilde{s})$. O produtor i é agora averso ao risco, com função de utilidade Von Neuman-Morgenstern

$$u_i(w) = 1 - e^{-a_i w}, a_i > 0,$$

onde w é a riqueza do produtor i e a_i é seu coeficiente de aversão ao risco⁴. Suporemos também que $(\tilde{D}, \tilde{y})$, a demanda pelo produto no mercado spot no período t e a informação dos produtores no período $t - 1$ tenham distribuição normal conjunta e que apenas os produtores participam do mercado futuro⁵. Seja x_i a quantidade vendida do bem pelo produtor i no mercado futuro. A função objetivo do produtor i

⁴Se $u(w)$ é a função utilidade de um agente, seu coeficiente de aversão ao risco é $-u''(w)/u'(w)$.

⁵A relação intertemporal do modelo é a seguinte. No período $t - 1$ ocorrem a realização de informações sobre a demanda spot no período t e as decisões de

é

$$\max_{q_i, x_i} E \left[u_i(p_f x_i + (q_i - x_i)\tilde{D} - C(q_i)) | y_i \right]. \quad (10)$$

Essa função objetivo é equivalente à⁶

$$\begin{aligned} \max_{q_i, x_i} E[p_f x_i + (q_i - x_i)\tilde{D} - C(q_i) | y_i] \\ - \frac{a_i}{2} \text{var}[p_f x_i + (q_i - x_i)\tilde{D} - C(q_i) | y_i] \\ = \max_{q_i, x_i} p_f x_i + (q_i - x_i)E[\tilde{D} | y_i] \\ - C(q_i) - \frac{a_i}{2}(q_i - x_i)^2 \text{var}[\tilde{D} | y_i]. \end{aligned} \quad (11)$$

As condições de primeira ordem do problema do produtor são

$$p_f - E[\tilde{D} | y_i] + a_i(q_i - x_i) \text{var}[\tilde{D} | y_i] = 0 \quad (12)$$

$$E[\tilde{D} | y_i] - C'(q_i) - a_i(q_i - x_i) \text{var}[\tilde{D} | y_i] = 0 \quad (13)$$

demandas do produto no mercado futuro no período $t - 1$ e de produções para atender as demandas do mercado futuro do período $t - 1$ e no mercado spot no período t . No período t as trocas são realizadas. De fato, essas realizações de informação, decisões e mercados são totalmente independentes do que ocorrem nos outros períodos, portanto podem ser tratados separadamente. Com isso podemos eliminar as referências ao tempo nas variáveis. Sempre que nós referirmos à informação, estamos falando da informação que chega no período $t - 1$ sobre a demanda no mercado spot no período t . Sempre que nos referirmos ao mercado futuro, estamos falando do mercado futuro no período $t - 1$ de contratos com maturação no período seguinte. Sempre que nos referirmos às decisões de produção estamos referindo-nos às decisões de produção no período $t - 1$. Sempre que nos referirmos ao mercado spot estamos falando do mercado spot no período t .

⁶Seja $w \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pela função geratriz de momentos da normal $M(t) = E[e^{tw}] = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$, onde t é a ordem do momento. Então podemos escrever

$$E[u_i] \approx 1 - \exp \left\{ -a_i \left[\mu - \frac{\alpha_i \sigma^2}{2} \right] \right\}. \quad (*)$$

Essa função é monótona crescente em $\left[\mu - \frac{\alpha_i \sigma^2}{2} \right]$ e portanto maximizar (*) é equivalente a maximizar $\left[\mu - \frac{\alpha_i \sigma^2}{2} \right]$.

A solução do sistema (12)-(13) nos dá a demanda e oferta do produtor i

$$x_i = q_i + \frac{p_f - E[\tilde{D}|y_i]}{a_i \text{var}[\tilde{D}|y_i]}, \quad (14)$$

$$C'(q_i) = p_f. \quad (15)$$

A condição de equilíbrio do mercado futuro é

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad (16)$$

Para simplificar as expressões suporemos que $C'(q_i) = cq_i$ (custo marginal linear). Nesse caso obtemos de (15) que $q_i = \frac{p_f}{c}$. Substituindo essa expressão em (14) e aplicando na condição de equilíbrio do mercado futuro (16) obtemos

$$p_f^0(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{E[\tilde{D}|y_i]}{a_i \text{var}[\tilde{D}|y_i]}}{\sum_{j=1}^n (a_j \text{var}[\tilde{D}|y_j])^{-1} + \frac{n}{c}}. \quad (17)$$

Embora alguns autores sugiram que a expressão (17) (que é um equilíbrio com expectativas realizadas) mostre como preços competitivos agregam informação, na verdade esta equação mostra o contrário. De fato há algo de errado com o equilíbrio (17). Para ver isto, imaginemos que essa economia se replique muitas vezes ao longo do tempo e que o equilíbrio (17) venha sendo obtido em cada vez. O produtor i então observará muitas realizações de $(\tilde{p}_f^0(\tilde{y}), \tilde{y}_i, \tilde{D})$. Com o passar do tempo ele aprenderá a distribuição condicional de $\tilde{D}$ dados y_i e $\tilde{p}_f^0(y)$. Ele geralmente encontrará que $E[\tilde{D}|y_i] \neq E[\tilde{D}|y_i, \tilde{p}_f^0(y)]$. $\tilde{p}_f^0(y)$ lhe revelará alguma informação adicional à sua informação privada y_i . Portanto, após observarem o preço de equilíbrio no mercado futuro, os produtores desejarão recontratar. Quando eles recontratarem possivelmente $\tilde{p}_f^0(y)$ não será mais o preço de equilíbrio

preço de equilíbrio quando eles maximizavam $E[u_i|y_i]$. Agora que

eles maximizam $E[u_i|y_i, p_f^0(y)]$ as demandas e ofertas serão diferentes. O conceito de equilíbrio correto para essa situação é o preço $\bar{p}_f^*(y)$, tal que se os produtores condicionarem a utilidade esperada em suas informações privadas e no preço de equilíbrio, eles não tenham desejo de recontratar. Este é o EER para esse modelo, que definimos formalmente abaixo.

Definição 4. *Um EER para o período $t-1$ é uma função de preços $\bar{p}_f^*(\tilde{y})$, funções de quantidades $q_i^*(\tilde{y}_i, \bar{p}_f^*(\tilde{y}))$ e $x_i^*(\tilde{y}_i, \bar{p}_f^*(\tilde{y}))$, tal que*

$$\begin{aligned} & (x_i^*(y_i, \bar{p}_f^*(y)); q_i^*(\tilde{y}_i, \bar{p}_f^*(y))) \\ &= \arg \max_{q_i, x_i} E[u_i(\bar{p}_f^*(y)x_i + (q_i - x_i)\bar{D} - C(q_i))|\tilde{y}_i] \\ &= y_i, \bar{p}_f^*(y); \end{aligned} \quad (18)$$

e

$$\sum_{i=1}^n x_i^*(y_i, \bar{p}_f^*(y)) = 0 \quad \forall \tilde{y} \quad (19)$$

Essa noção de equilíbrio é a correta para esse modelo pois após a obtenção do equilíbrio, os produtores não têm desejo de recontratar, como no equilíbrio da definição 3. Mas o EER é também uma formalização da idéia de Hayeck sobre o papel fundamental dos preços como agregador das informações dispersas no mercado.

Proposição 1.

$$p_f^e(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{E[\bar{D}|y]}{a_i \text{var}[\bar{D}|y]}}{\sum_{j=1}^n (a_j \text{var}[\bar{D}|y])^{-1} + \frac{n}{c}} \quad (20)$$

é um equilíbrio com expectativas racionais.

PROVA: A hipótese de normalidade conjunta de $(\bar{D}, \tilde{y})$ implica que $\text{var}[\bar{D}|y] = C^{te}$ (independe de y). Isto implica que $p_f^e(y)$ é uma função linear estritamente crescente de $E[\bar{D}|y]$, logo invertível. Isto é, se um produtor observa $p_f^e(y)$, invertendo a função ele pode saber

$E[\tilde{D}|y]$. Em linguagem estatística, $p_f^e(y)$ é uma estatística suficiente de $E[\tilde{D}|y]$. Isto implica que a expressão (11)

$$\max_{q_i, x_i} p_f x_i + (q_i - x_i) E[\tilde{D}|y_i] - C(q_i) - \frac{a_i}{2} (q_i - x_i)^2 \text{var}[\tilde{D}|y_i]$$

pode ser escrita para este caso como

$$\max_{q_i, x_i} p_f x_i + (q_i - x_i) E[\tilde{D}|y] - C(q_i) - \frac{a_i}{2} (q_i - x_i)^2 \text{var}[\tilde{D}|y]$$

A solução do problema acima nos dá

$$x_i^e(y) = q_i + \frac{p_f - E[\tilde{D}|y]}{a_i \text{var}[\tilde{D}|y]}; \quad (21)$$

$$C'(q_i) = p_f^e; \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^*(y) = 0. \quad (23)$$

É fácil verificar que a solução do sistema (21)-(23) nos dá (20). $\square$

O fato notável desse equilíbrio com expectativas racionais é que ele é idêntico ao equilíbrio que ocorreria na economia se os produtores possuísem toda a informação do mercado. O preço do mercado futuro no equilíbrio com expectativas racionais revela toda a informação dispersa no mercado. Na seção seguinte, construiremos um modelo de equilíbrio geral com incerteza e informação assimétrica para estudarmos a existência e propriedades de bem-estar do equilíbrio com expectativas racionais.

4. Equilíbrio geral e propriedades de bem-estar.

Consideremos uma economia de pura troca com dois períodos, período 1 e período 2 com incerteza apenas no período 2, e mercados futuros (contingentes no estado da natureza) completos. As dotações dos consumidores no período 2 dependem de um estado da natureza aleatório $\tilde{s}$ que pode assumir um número finito S de valores positivos.

Existe apenas um bem em cada estado da natureza⁷. No período 1 não existe incerteza. Existe um número finito n de consumidores. Seja $\mathbf{w}_i$ o vetor de dotações do consumidor i onde ω_{i1} é a dotação inicial do consumidor i do bem no período 1 e ω_{i2s} é a dotação inicial do consumidor i do bem no período 2 no estado da natureza s . Vamos representar o consumo do bem pelo consumidor i no período 1 por c_{i1} e o consumo do bem s pelo consumidor i no período 2 por c_{i2s} . Sua cesta de consumo planejada é $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, c_{i21}, c_{i22}, \dots, c_{i2s})$. É útil também introduzir as notações $\mathbf{w}_{i2}$ e $\mathbf{c}_{i2}$ para representar as dotações iniciais e os consumos do consumidor i no período 2. Consumidores têm preferências por consumo representados por uma função de utilidade esperada.

$$U_i(\mathbf{c}_i) = \sum_{s=1}^s u_i(c_{i1}, c_{i2s}) \pi_{is}, \quad (24)$$

onde $\pi_{is} = Pr(\bar{s} = s)$ é a probabilidade que o consumidor i associa à ocorrência do estado da natureza s no segundo período. Tomamos o bem no período 1 como numerário e representamos o preço do bem no período 2 no estado da natureza s por p_s . O vetor de preços é representado por $\mathbf{p} = (1, p_1, p_2, \dots, p_s)$. $\mathbf{p}_2$ representará o vetor de preços do bem no período 2 nos diversos estados da natureza. A assimetria de informação no modelo entra da seguinte forma. No período 1, o consumidor i obtém informações sobre a distribuição de probabilidades de $\bar{s}$ no período 2. Essa informação é a observação no período 1 de uma variável aleatória $\tilde{y}_i$ com contra-domínio Y_i . O vetor da informação presente em toda a economia é representado por $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)$, com contra-domínio $\mathbf{Y} \subset R^n$. $\tilde{\mathbf{y}}$ tem uma distribuição conjunta com $\bar{s}$ conhecida por todos $(\bar{s}, \tilde{\mathbf{y}})$.⁸ Essas informações chegam aos consumidores antes dos mercados abrirem. Para facilitar a visualização da sequência dos acontecimentos no tempo, vamos representá-la no gráfico abaixo.

⁷A hipótese de existir apenas um bem para cada estado da natureza é feita apenas para simplificar notação. É fácil verificar que todos os resultados permanecem válidos se existirem muitos bens por estados da natureza.

⁸Em linguagem mais precisa, essa distribuição conjunta é de conhecimento comum. Como todos os consumidores possuem a mesma função de probabilidade, podemos suprimir o índice i na definição desta função.

Recordando que fizemos a suposição de existência de um conjunto completo de mercadorias contingentes de Arrow-Debreu, isto é, os consumidores podem vender e comprar promessas de entrega e recebimentos de mercadorias contingentes à ocorrência do estado s no período 2, podemos definir equilíbrio Walrasiano.

Definição 5. Um equilíbrio de Arrow-Debreu (ou Walrasiano) para essa economia é, para cada realização possível de $y \in Y$, um vetor de preços $p^W(y)$ e vetores de alocações $c_i^W(y)$, um para cada i , tal que⁹

$$c_i^W(y_i) = \arg \max_{c_i} \sum_{s=1}^S u_i(c_{i1}, c_{i2s}) \pi_s(y_i) \quad s.a. \quad (25)$$

$$c_{i1}^W(y_i) + p^W(y) \cdot c_{i2}^W(y_i) \leq w_{i1} + p^W(y) \cdot w_{i2}, \forall i; \quad e$$

$$\sum_{i=1}^n c_i^W(y_i) \leq \sum_{i=1}^n w_i, \quad (26)$$

onde $\pi_s(y_i) = Pr(\tilde{s} = s | \tilde{y}_i = y_i)$. Designemos um equilíbrio Walrasiano dessa economia por $\bar{p}^W(\tilde{y})$, $\bar{c}_i^W(\tilde{y})$. Observe que as crenças dos consumidores i (a respeito de $\tilde{s}$) dependem da informação privada $\tilde{y}_i$. Portanto o vetor preços que faz com que não exista excesso de demanda depende de toda a informação da economia. Como paradigma

⁹O símbolo “ $\cdot$ ” representa “produto interno”.

para se comparar diferentes tipos de equilíbrio desse modelo, vamos definir o equilíbrio Walrasiano para uma economia artificial onde cada consumidor possui toda a informação da economia: cada consumidor observa no período 1 todo o vetor $\tilde{y}$. Nessa economia artificial, cada consumidor maximiza $E[u_i|\tilde{y}] = \sum_{s=1}^s u_i(c_{i1}, c_{i2s})\pi_s(\tilde{y})$. Seja $\tilde{p}^a(\tilde{y})$ e $\tilde{c}_i^a(\tilde{y})$ um equilíbrio Walrasiano para essa economia artificial, isto é, para cada $y \in Y$, $\tilde{p}^a(y)$ e $\tilde{c}_i^a(y)$ satisfazem (25) e (26) quando $\pi_s(y_i)$ é substituído por $\pi_s(y)$. Portanto, pelo primeiro teorema fundamental da teoria do bem-estar¹⁰, um planejador central com toda informação da economia não poderia encontrar uma alocação factível $\{\tilde{c}_i(\tilde{y})\}_{i=1}^n$, tal que

$$\begin{aligned} E[u_i(c_{i1}, c_{i2\bar{s}})|y] &\geq E[u_i(c_{i1}^a, c_{i2\bar{s}}^a)|y] \quad \forall y, \forall i \text{ e} \\ E[u_i(c_{i1}, c_{i2\bar{s}})|y] &> E[u_i(c_{i1}^a, c_{i2\bar{s}}^a)|y] \quad \text{para algum } y, i \end{aligned}$$

No entanto, o equilíbrio Walrasiano para a economia com assimetria de informação pode em geral ser Pareto dominado por um planejador central com toda informação. Pode existir $\{\tilde{c}_i(\tilde{y})\}_{i=1}^n$ factível tal que

$$\begin{aligned} E[u_i(c_{i1}, c_{i2\bar{s}}) | y] &\geq E[u_i(c_{i1}^W, c_{i2\bar{s}}^W) | y] \quad \forall y, \forall i \text{ e} \\ E[u_i(c_{i1}, c_{i2\bar{s}}) | y] &> E[u_i(c_{i1}^W, c_{i2\bar{s}}^W) | y] \quad \text{para algum } y, i. \end{aligned}$$

Definição 6. Um EER para essa economia é, para cada realização possível de $y \in Y$, um vetor de preços $p^*(y)$ e vetores de alocações $c_i^*(y, p^*(y))$, um para cada i , tal que

$$\begin{aligned} c_i^*(y_i, p^*(y)) &= \arg \max_{c_i} \sum_{s=1}^s u_i(c_{i1}, c_{i2s}) \pi_s(y_i, p^*(y)) \\ \text{s.a.} & \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} c_{i1}^*(y_i, p^*(y)) + p^*(y) \cdot c_{i2}^*(y_i, p^*(y)) &\leq \omega_{i1} \\ &+ p^*(y) \cdot w_{i2}, \forall i; \text{ e} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n c_i^*(y_i, p^*(y)) \leq \sum_{i=1}^n w_i. \quad (28)$$

¹⁰Todo equilíbrio competitivo é Pareto ótimo.

Seguindo a mesma linha de argumentação da seção anterior, vamos provar agora que um equilíbrio da economia artificial é um EER e, conseqüentemente, o EER é Pareto ótimo. Além disso, o EER tem a propriedade de agregar perfeitamente a informação presente na economia em tempo hábil para ser utilizada nas decisões econômicas dos consumidores. Observemos que

$$Pr(\tilde{s}|y) = Pr(\tilde{s}|\pi(y)). \quad (29)$$

Assim, $E[u_i|y] = E[u_i|\pi(y)]$ e podemos escrever o equilíbrio da economia artificial como $(\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y})), \tilde{c}^a(\pi(\tilde{y})))$. Existem $S + 1$ mercados e S estados da natureza. Assim, o vetor de preços de equilíbrio da economia artificial $\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y}))$ é uma função de R^{s-1} em R^s . Suponhamos que ela seja invertível. Neste caso, observar $\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y}))$ é equivalente a observar $\pi(\tilde{y})$. Isto implica que o equilíbrio da economia artificial é um EER, porque neste caso maximizar $E[u_i|y_i, p^a(y)] = E[u_i|y_i, \pi(y)] = E[u_i|\pi(y)]$ (esta última igualdade é dada por (29)). A proposição abaixo mostra que $\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y}))$ é invertível.

Proposição 2. *Suponhamos que todos os consumidores são localmente não-saciáveis, para todo i, s , $u_i(c_{i1}, c_{i2s})$ é uma função diferenciável estritamente côncava e aditivamente separável no tempo ($u_i(c_{i1}, c_{i2s}) = u_{i1}(c_{i1}) + u_{i2}(c_{i2s})$), para todo y , i $\pi_s(y) > 0$. Sejam y e $\bar{y}$ duas realizações distintas de $\tilde{y}$ que gerem $\pi(y) = \pi$ e $\pi(\bar{y}) = \bar{\pi}$ tal que $\pi \neq \bar{\pi}$. Se existir consumidor j tal que $c_j(y) \neq c_j(\bar{y})$, então $p^a(y) \neq p^a(\bar{y})$ ¹¹.*

PROVA: (Por contradição) Suponhamos que $p^a(y) = p^a(\bar{y}) = p$ e que exista um consumidor j tal que $c_j^a(y) \neq c_j^a(\bar{y})$. Sejam $c_j^a(y) = (c_{j1}, c_{j21}, c_{j22}, \dots, c_{j2s})$ e $c_j^a(\bar{y}) = (\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j21}, \bar{c}_{j22}, \dots, \bar{c}_{j2s})$. Como ambas as cestas são compráveis, por preferência revelada

$$\sum_s u_j(c_{j1}, c_{j2s})\pi_s > \sum_s u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})\pi_s. \quad (30)$$

¹¹O que estamos provando é que $p^a(\pi(y))$ é essencialmente invertível. Se para $y, \bar{y} \in Y$, $\pi(y) \neq \pi(\bar{y})$ mas $\{c_i^a(\pi(y))\}_{i=1}^n = \{c_i^a(\pi(\bar{y}))\}_{i=1}^n$, não é preciso que $p^a(\pi(y)) \neq p^a(\pi(\bar{y}))$. Ou seja, se quando informação diferente $y, \bar{y} \in Y$ leva à mesma demanda de equilíbrio, não é necessário que os preços de equilíbrio sejam distintos.

Por concavidade estrita de $u_j(\cdot, \cdot)$

$$u_j(c_{j1}, c_{j2s}) - u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s}) < \frac{\partial u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})}{\partial c_1} (c_{j1} - \bar{c}_{j1}) + \frac{\partial u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})}{\partial c_{2s}} (c_{j2s} - \bar{c}_{j2s}). \quad (31)$$

Combinando (30) e (31), obtemos

$$\sum_s \left[\frac{\partial u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})}{\partial c_1} (c_{j1} - \bar{c}_{j1}) + \frac{\partial u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})}{\partial c_{2s}} (c_{j2s} - \bar{c}_{j2s}) \right] \pi_s > 0. \quad (32)$$

Das condições de 1ª ordem do problema do consumidor j , $\exists \bar{\lambda} > 0$ tal que

$$\sum_s \left[\frac{\partial u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})}{\partial c_1} \right] \bar{\pi}_s \leq \bar{\lambda}_j, \text{ if } \bar{c}_{j1} > 0; \quad (33)$$

$$\frac{\partial u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})}{\partial c_{2s}} \bar{\pi}_s \leq \bar{\lambda}_j p_s, \text{ if } \bar{c}_{j2s} > 0.$$

Combinando (32) e (33) obtemos

$$\sum_s \frac{\partial u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})}{\partial c_1} (c_{j1} - \bar{c}_{j1}) \pi_s + \bar{\lambda}_j \sum_s p_s (c_{j2s} - \bar{c}_{j2s}) \frac{\pi_s}{\bar{\pi}_s} > 0, \quad (34)$$

onde fizemos uso do fato que se $\bar{c}_{j2s} = 0$, sabemos que $(c_{j2s} - \bar{c}_{j2s}) \geq 0$. Pela hipótese de função de utilidade aditivamente separável no tempo, temos que

$$\sum_s \frac{\partial u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})}{\partial c_1} \pi_s = \sum_s \frac{\partial u_j(\bar{c}_{j1}, \bar{c}_{j2s})}{\partial c_1} \bar{\pi}_s. \quad (35)$$

Fazendo novamente uso do fato que se $\bar{c}_{j1} = 0$, sabemos que $(c_{j1} - \bar{c}_{j1}) \geq 0$ e de que $\bar{\lambda}_j > 0$, aplicando (35) em (34), combinando com (33) e dividindo ambos os lados de (34) por $\bar{\lambda}_j > 0$, obtemos

$$\sum_s [(c_{j1} - \bar{c}_{j1}) + p_s (c_{j2s} - \bar{c}_{j2s})] \frac{\pi_s}{\bar{\pi}_s} > 0. \quad (36)$$

A desigualdade (36) vale para todo consumidor i tal que $c_i \neq \bar{c}_i$ e vale como igualdade para todo i tal que $c_i = \bar{c}_i$. Somando (36) sobre i , obtemos que

$$\sum_s \sum_i (c_{i1} - \bar{c}_{i1}) + \sum_s p_s \frac{\pi_s}{\bar{\pi}_s} \sum_i (c_{i2s} - \bar{c}_{i2s}) > 0. \quad (37)$$

Mas (37) contradiz o fato que por não-saciedade local $\sum_i c_{i1} = \sum_i \bar{c}_{i1}$ e $\sum_i c_{i2s} = \sum_i \bar{c}_{i2s}$. $\square$

Teorema 1. *Nas hipóteses da proposição 2, se existe um equilíbrio Walrasiano $(\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y})), \tilde{c}^a(\pi(\tilde{y})))$ para a economia artificial perfeitamente informada, então $(\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y})), \tilde{c}^a(\pi(\tilde{y})))$ é um EER para a economia onde cada consumidor i observa $\tilde{y}_i$.*

PROVA: Se $\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y}))$ é invertível, é então idêntico para um consumidor i maximizar $E[u_i|y_i, \tilde{p}^a(\pi(\tilde{y}))]$ ou $E[u_i|\pi(\tilde{y})]$, logo em ambos os casos terão a mesma demanda. Portanto, $(\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y})), \tilde{c}^a(\pi(\tilde{y})))$ é EER.

Suponhamos que $\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y}))$ não é invertível, ou seja, maximizar $E[u_i|y_i, p^a(\pi(\tilde{y}))]$ é diferente de maximizar $E[u_i|\pi(\tilde{y})]$ para algum consumidor i e informação y . Sejam y e $\bar{y}$ duas realizações distintas de $\tilde{y}$ onde $\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y}))$ não é invertível. Isto é, que gerem $\pi(y) = \pi$ e $\pi(\bar{y}) = \bar{\pi}$ tal que $\pi \neq \bar{\pi}$ e que $p^a(\pi(y)) = p^a(\pi(\bar{y})) = p$. Pela proposição 1 $c_j^a(y) = c_j^a(\bar{y})$. Portanto nos pontos onde $\tilde{p}^a(\pi(\tilde{y}))$ não é invertível, não importa ao consumidor saber distinguir entre as possíveis realizações de $\pi(\tilde{y})$, o que contradiz a suposição de que maximizar $E[u_i|y_i, p^a(\pi(\tilde{y}))]$ é diferente de maximizar $E[u_i|\pi(\tilde{y})]$ para algum consumidor i e informação y . $\square$

Como o equilíbrio Walrasiano da economia artificial não pode ser Pareto dominado por um planejador central que saiba de toda a informação presente no mercado, existe um EER que é Pareto ótimo. Formalmente,

Teorema 2. *Existe um EER $(\tilde{p}^*(\tilde{y}), \tilde{c}^*(\tilde{y}, \tilde{p}^*(\tilde{y})))$ tal que se $\tilde{c}_i(\tilde{y}, \tilde{p}(\tilde{y}))$ é qualquer outra alocação factível (isto é, para todo $y, \sum_i c_i(y) \leq \sum_i w_i$), então não pode ser que*

$$E[u_i(c_{i1}, c_{i2s})|y] \geq E[u_i(c_{i1}^*, c_{i2s}^*)|y_i] \quad \forall y, \forall i \text{ e}$$

$$E[u_i(c_{i1}, c_{i2s})|y] > E[u_i(c_{i1}^*, c_{i2s}^*)|y_i] \text{ para algum } y, i$$

Seria muito bom se todos os EER's revelassem toda a informação da economia, pelo menos no caso como esse com mercados completos. Infelizmente isto não é verdade como o exemplo da próxima seção ilustra.

5. Existência de equilíbrio com expectativas racionais não-ótimos.

Vamos apresentar nesta seção dois resultados: (i) nas condições do modelo da seção 4 existe um EER que não agrega a informação presente no mercado; (ii) nas mesmas condições, existe um EER que é Pareto dominado.

Para mostrar o primeiro “mau” exemplo, façamos a seguinte simplificação do modelo da seção 4. Existem apenas dois estados da natureza do período 2, denotados por s_1 e s_2 , e dois consumidores denotados por 1 e 2. O consumidor i observa a realização de uma variável aleatória $\tilde{y}_i$, que também podem assumir apenas dois valores distintos: 1 e 2. A distribuição conjunta do estado da natureza e informações é

$$\begin{aligned} Pr(s_1, i, i) &= \frac{1}{4}a, \text{ para } i = 1, 2; \\ Pr(s_1, i, j) &= \frac{1}{4}(1 - a), \text{ para } i \neq j; \\ Pr(s_2, i, i) &= \frac{1}{4}(1 - a), \text{ para } i = 1, 2; \\ Pr(s_2, i, j) &= \frac{1}{4}a, \text{ para } i \neq j. \end{aligned}$$

Não existe risco social, isto é, a dotação agregada no período é constante em todos os estados da natureza que é igual à dotação agregada no período 1. Seja $w_1 = (1/2\omega, \omega, 0)$ a dotação inicial do indivíduo 1 e $w_2 = (1/2\omega, 0, \omega)$. Assim, $\omega_{11} + \omega_{21} = \omega_{121} + \omega_{221} = \omega_{122} + \omega_{222} = \omega$.

Definição 7. *Um EER para essa economia são três vetores:*

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^*(\mathbf{y}) &= (1, p_1^*(\mathbf{y}), p_2^*(\mathbf{y})), \\ \mathbf{c}_1^*(y_1, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})) &= (c_{11}^*(y_1, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})), c_{121}^*(y_1, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})), c_{122}^*(y_1, \mathbf{p}^*(\mathbf{y}))) \text{ e} \\ \mathbf{c}_2^*(y_2, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})) &= (c_{21}^*(y_2, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})), c_{221}^*(y_2, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})), c_{222}^*(y_2, \mathbf{p}^*(\mathbf{y}))), \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} c_i^*(y_i, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})) &= \arg \max_{c_{i1}, c_{i21}, c_{i22}} u_1(c_{i1}) + u_i(c_{i21}) Pr(s_1|y_i, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})) \\ &\quad + u_i(c_{i22}) Pr(s_2|y_i, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})) \end{aligned} \quad (38)$$

s.a.

$$c_{i1} + p_1^* c_{i21} + p_2^* c_{i22} = \omega_{i1} + p_1^* \omega_{i21} + p_2^* \omega_{i22}, \quad i = 1, 2 \quad (39)$$

e

$$\begin{cases} c_{11}^* + c_{21}^* = \omega \\ c_{11j}^* + c_{21j}^* = \omega, \quad j = 1, 2 \end{cases} \quad (40)$$

Considere o vetor $\mathbf{p}^* = (1, 1/2, 1/2)$ para todo $\mathbf{y}$. Neste caso, o consumidor i encontra que $Pr(s_j|y_i, \mathbf{p}^* = (1, 1/2, 1/2)) = \frac{1}{2}$, para $j = 1, 2$. É fácil ver que $\mathbf{p}^*(1, 1/2, 1/2)$, $\mathbf{c}_i^* = (1/2\omega, 1/2\omega, 1/2\omega)$, $i = 1, 2$ é um EER. Este EER não agrega informação pois o vetor de preços é constante em $\mathbf{y}$ e portanto não revela qualquer informação. Outra maneira de ver isto é observar que $Pr(s_j|y_i, \mathbf{p}^*(\mathbf{y})) = Pr(s_j|y_i) \neq Pr(s_j|\mathbf{y})$.

Para mostrar um EER que pode ser dominado no sentido de Pareto, consideremos uma economia com uma estrutura idêntica à descrita acima, exceto por uma amplificação: agora existe produção. Especificamente, cada consumidor escolhe como sua dotação inicial um vetor na combinação convexa de $(1/2\omega, \omega, 0)$ e $(1/2\omega, 0, \omega)$. Consumidores escolhem sua dotação inicial após o fechamento do mercado futuro mas antes da resolução da incerteza.

Nesse caso, para todo $\mathbf{y}$, $\mathbf{p}^*(\mathbf{y}) = (1, 1/2, 1/2)$, $\mathbf{c}_i^*(\mathbf{y}) = (1/2\omega, 1/2\omega, 1/2\omega)$, $i = 1, 2$, $\mathbf{w}_i^*(\mathbf{y}) = (1/2\omega, 1/2\omega, 1/2\omega)$, $i = 1, 2$ continua sendo um EER. Todavia um planejador central com toda a informação da economia escolheria $\mathbf{w}_i(\mathbf{y}) = (\omega, \omega_1(\mathbf{y}), \omega - \omega_1(\mathbf{y}))$ e

$c_i(y) = w_i(y)$ tal que

$$\frac{u'_i(\omega_1(y))}{u'_i(\omega - \omega_1(y))} = \frac{a}{1-a}, \quad \text{se } y_1 = y_2, \text{ e}$$

$$\frac{u'_i(\omega_1(y))}{u'_i(\omega - \omega_1(y))} = \frac{1-a}{a}, \quad \text{se } y_1 \neq y_2,$$

que domina $c_i^* = (1/2\omega, 1/2\omega, 1/2\omega)$, $i = 1, 2$, $w_i^* = (1/2\omega, 1/2\omega, 1/2\omega)$, $i = 1, 2$ no sentido de Pareto.

6. Expectativas racionais em modelos macroeconômicos¹².

Existem dois tipos de modelos macroeconômicos com expectativas racionais: modelos com agentes maximizadores (com fundamentos microeconômicos) e modelos macroeconômicos simples, geralmente log-lineares, de relações entre variáveis macroeconômicas (renda agregada, nível de preços, oferta de moeda etc.). Nos modelos macroeconômicos com fundamentos micro, o conceito de EER é idêntico ao desenvolvido neste artigo. Vamos exemplificar aqui o conceito de EER em modelos log-lineares com um modelo simples. Seja y uma variável macro que segue a seguinte equação de expectativas

$$y_t = aE[y_{t+1}|t] + cx_t \quad (41)$$

onde $E[y_{t+1}|t]$ é a esperança condicional de y_{t+1} , mantida no período t de forma que y depende da expectativa corrente sobre o seu valor no futuro e de uma outra variável x .

Neste modelo definimos *expectativas racionais* como a esperança matemática de y_{t+1} condicional na informação disponível no tempo t . Geralmente se faz a hipótese simplificadora de que as informações disponíveis no tempo t (o *conjunto de informação*) são idênticas para todos os indivíduos nessa economia. Assim, podemos falar da esperança matemática condicional ao conjunto de informação no tempo t . Definimos $E[y_{t+1}|t]$ por

$$E[y_{t+1}|t] = E[y_{t+1}|\mathcal{I}_t] \quad (42)$$

¹² baseado no livro de Blanchard e Fisher (1989).

onde

$$I_t = \{y_{t-i}, x_{t-i}, z_{t-i}, i = 1, 2, \dots, \infty\}$$

$E[y_{t+1}|t]$ é igual à esperança matemática de y_{t+1} condicional ao conjunto de informação I_t . O conjunto de informação contém os valores correntes e defasados das variáveis y e x e de outras variáveis incluídas no vetor z_t que, embora não apareçam diretamente na equação (41), podem ajudar a prever os valores de y e x .

7. Outros conceitos de equilíbrio e alguns resultados adicionais.

Alguns economistas consideram que o EER impõe muitas restrições sobre o conhecimento que os agentes possuem sobre a economia. Um conceito de equilíbrio alternativo comumente usado e que impõe menos restrições sobre o conhecimento dos agentes é o conceito de *equilíbrio temporário*, conceito também introduzido por Hicks e desenvolvido sistematicamente em Grandmont (1974) e Stigum (1969, 1972), com uma excelente resenha em Grandmont (1982). Este conceito de equilíbrio só faz sentido em economias com mercados intertemporalmente incompletos, isto é, no período t não existem mercados futuros completos para os bens nos períodos posteriores a t . Um equilíbrio temporário pode ser descrito como: dadas as crenças dos indivíduos, eles agem no mercado *spot* e nos mercados futuros existentes; todavia não se requer que as crenças dos indivíduos sejam consistentes entre si, nem com a verdadeira distribuição de probabilidade dos diversos estados da natureza nos períodos seguintes.

Um conceito de equilíbrio muito relacionado com o de EER é o de equilíbrio com manchas solares ou equilíbrio com incerteza extrínseca.¹³ A diferença básica entre os dois conceitos de equilíbrio é que enquanto no EER a incerteza é gerada por fundamentais¹⁴ da economia, no equilíbrio com manchas solares a incerteza é gerada “na cabeça das pessoas”. Os agentes acreditam que uma variável

¹³Esta é uma literatura muito grande atualmente. Referências seminais são Azariadis (1981), Shell (1977), Cass and Shell (1983) e uma recente resenha é Chiappori e Guesnerie (1991).

¹⁴Por fundamentais entendemos as variáveis que afetam a estrutura da economia como dotações iniciais, tecnologia, preferências.

aleatória tenha influência sobre a economia, como por exemplo a ocorrência ou não de manchas solares. Embora manchas solares não afetem dotações preferenciais e tecnologias, (não estamos aqui fazendo um juízo sobre se de fato manchas solares afetam ou não os fundamentais da economia. Manchas solares aqui significam qualquer variável aleatória que não afete os fundamentais da economia) elas passam a afetar os preços e possivelmente as alocações finais, simplesmente porque os agentes crêem que tais manchas afetem algumas variáveis relevantes para suas decisões econômicas, como por exemplo os preços. As definições de equilíbrio são as mesmas nos dois modelos, a diferença entre eles é que em EER os estados da natureza são exógenos, enquanto que em equilíbrio com manchas solares os estados da natureza são gerados endogenamente.

Utilizando-se de métodos mais avançados de matemática, Allen (1981) e Radner (1979) mostram, num contexto de um contínuo de estados da natureza, que existe genericamente EER que revela toda a informação da economia se a dimensão do espaço das informações privadas for menor que a dimensão do espaço dos preços.

Kreps (1977) mostra que nem sempre pode-se garantir a existência de EER. Kreps constrói uma economia com dois tipos de agentes: informados e não-informados. A não-existência de EER é devido à seguinte característica do modelo. Suponhamos que exista equilíbrio e que os preços de equilíbrio revelem a informação dos informados para os não-informados. Neste caso todos ficam igualmente informados. Mas pelos dados do problema, se todos são igualmente informados, os preços de equilíbrio não revelam nenhuma informação. Logo, o equilíbrio não pode existir.

Anderson e Sonnenchein (1982, 1983), desenvolvem modelos de existência de equilíbrios com expectativas racionais, modificando um pouco o conceito de EER. Nos modelos de Anderson e Sonnenchein os agentes estão incertos sobre as relações entre suas informações privadas e as variáveis da estrutura da economia, mas possuem uma classe de modelos dentro da qual acredita que um deles é o verdadeiro modelo da relação entre suas informações e as variáveis da economia. Um EER é um vetor de modelos (um para cada agente), tal que se os agentes acreditam neles então depois de observarem a realização

de mais informações eles não mudam de modelo.

Um outro problema muito importante é o da convergência para equilíbrio com expectativas racionais. Se os agentes da economia começam com expectativas quaisquer, eventualmente convergiriam eles para expectativas racionais? Bray (1982) descreve um modelo muito interessante onde estimação por mínimos quadrados leva ao EER. Blume e Easley (1982) estudam o sistema dinâmico das expectativas geradas por um modelo simples de equilíbrio geral sobre o qual os agentes consideram um número finito de modelos. Cada modelo especifica uma relação entre informação e preços de equilíbrio. Um desses modelos é uma correta descrição de um EER. Como os agentes não sabem qual é o modelo correto de equilíbrio, eles usam uma média ponderada desses modelos. Eles mostram que se os agentes começam “perto” do equilíbrio com expectativas racionais (colocando peso alto para o modelo EER), eles eventualmente convergirão para ele. Todavia, se os agentes começarem longe do EER pode ocorrer que eles converjam para um equilíbrio que não é EER. Mais recentemente Araújo e Sandroni (1991) mostram que se os agentes concordam sobre os eventos com probabilidade zero, começando com distribuições *a priori* Guassianas arbitrárias, eles eventualmente convergirão para expectativas racionais; começando com distribuições *a priori* arbitrárias eles convergem para expectativas racionais com probabilidade positiva.

Finalmente, uma literatura mais recente tenta estabelecer uma relação entre EER e teoria dos jogos¹⁵. O EER deixa de ser um problema de inferência estatística de informação e passa a ser um problema onde os agentes passam a ter comportamento estratégico.

Submetido em junho de 1992. Revisado em março de 1993.

Referências

Allen, B. 1981. “Generic existence of completely revealing equilibria for economies with uncertainty when prices convey information.” *Econometrica* 49: 1173–99.

¹⁵Evans (1985), Guesnerie (1992), Simonsen (1986, 1988), Townsend (1978), entre outros.

- Anderson, R. & Sonnenschein, H. 1982. "On the existence of rational expectations equilibrium." *Journal of Economic Theory* 26:261-278.
- 1985. "Rational expectations equilibrium with econometric models." *Review of Economic Studies* 52:359-369.
- Araújo, A. & Sandroni, A. 1991. "On convergence of bayesian priors to rational expectations in complete markets." Mimeo, IMPA, Rio de Janeiro.
- Azariadis, C. 1981. "Self-fulfilling prophecies." *Journal of Economic Theory* 25:380-396.
- Blanchard, O. & Fisher, S. 1989. *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, Mass: Mit Press.
- Blume, L. E., & Easley, D. 1982. "Learning to be rational." *Journal of Economic Theory* 26:340-351.
- Bray, M. 1982. "Learning estimation and the stability of rational expectations." *Journal of Economic Theory* 26:318-39.
- Cass, D. & Shell, K. 1983. "Do sunspots matter?" *Journal of Political Economy* 91:193-227.
- Chiappori, P. & Guesnerie, R. 1991. "Sunspot equilibria in sequential market models." In Hildenbrand, M.L., & Sonnenschein, H., eds., *Handbook of Mathematical Economics IV*. Amsterdam: North Holland.
- Evans, G. 1985. "Expectational stability and multiple equilibrium problem in linear rational expectations models." *Quarterly Journal of Economics* 100:1217-33.
- Guesnerie, R. 1992. "An exploration of the eductive justifications for the rational-expectations hypothesis." *American Economic Review* 85:1254-78.
- Grandmont, J. 1974. "On the short-run equilibrium in a monetary economy." In Dreze, J., ed., *Allocation under Uncertainty, Equilibrium, and Optimality*. London: MacMillan.
- 1982. "Temporary general equilibrium theory." In Arrow, K. & Intrigator, M., eds., *Handbook of Mathematical Economics volume II*. Amsterdam: North-Holland.
- Grossman, S. 1975. "Rational expectations and the econometric modeling of markets subject to uncertainty." *Journal of Econometrics* 3:255-272.

- _____. 1976. "On the efficiency of competitive stock markets where traders have diverse information." *Journal of Finance* 31: 573-585.
- _____. 1977. "The existence of futures markets, noisy rational expectations and informational externalities." *Review of Economic Studies* 44: 431-449.
- _____. 1978. "Further results on the informational efficiency of competitive stock markets." *Journal of Economic Theory* 18: 81-101.
- _____. 1979. "Rational expectation and the theory of resources allocation under asymmetric information: a survey.." CARESS Working Paper n^o 79-18, University of Pennsylvania.
- _____. 1981. "An introduction to the theory of rational expectations under asymmetric information." *The Review of Econometric Studies* 48: 541-560.
- Hayek, F. H. 1945. "The use of knowledge in society." *American Economic Review* 35: 519-530.
- Hicks, J. 1939. *Value and Capital*. London: Oxford University Press.
- Kreps, D. 1977. "A note on 'fulfilled expectations' equilibria." *Journal of Economics Theory* 14: 32-43.
- Lucas, R. 1972. "Expectations and the neutrality of money." *Journal of Economics Theory* 4: 103-124.
- Muth, J. R. 1960. "Optimal properties of exponentially weighted forecasts." *Journal of the American Statistical Association* 55: 229-305.
- _____. 1961. "Rational expectations and the theory of price movements." *Econometrica* 24: 315-335.
- Nerlove, M. 1958. *The Dynamics of Supply: Estimation of Farmers' Response to Price*. Baltimore: John Hopkins Press.
- Radner, R. 1979. "Rational expectations equilibrium: generic existence and the information revealed by price." *Econometrica* 47: 655-78.
- Shell, K. 1977. "Monnaie et allocation intertemporelle." Mimeo, Séminaire d'Econométrie. Paris: Roy-Malinvaut.
- Simonsen, M. 1986. "Rational expectations income policies and game theory." *Revista de Econometria* 6: 7-46.

- _____. 1988. "Rational expectations, game theory and inflationary inertia." In Arrow, K., ed., *The Economy as an Evolving Complex System*,. New York: McGraw Hill.
- Stigum B. 1969. "Competitive equilibria under uncertainty." *Quarterly Journal of Economics* 83: 533-561.
- _____. 1974. "Competitive resource allocation over time under uncertainty." In Balch, M., McFadden, D. & Yu, S., eds., *Essays on Economic Behavior under Uncertainty, Contributions to Economic Analysis*. Amsterdam: North-Holland.
- Townsend, R. 1978. "Market anticipations, rational expectations and bayesian analysis." *International Economic Review* 19: 481-94.