ESTRUTURA ESTRATÉGICA DE UM SIMPLES MERCADO DE COMPRA E VENDA

Marilda Sotomayor*

Resumo

Consideramos o jogo de mercado cooperativo estudado em Sotomayor (1999-a), onde objetos idênticos e indivisíveis estão para ser vendidos por um único vendedor para compradores potenciais. As preferências dos agentes são descritas por valores de reserva e todos os compradores podem comprar até uma dada cota de objetos. O mecanismo de compra e venda é um leilão de lance lacrado. Os lances submetidos determinam um intervalo $[p_*, p^*]$ do qual um preço de equilíbrio competitivo pode ser selecionado. O preço p é $\lambda p_* + (1 - \lambda)p^*$, onde cada escolha de $\lambda \in [0, 1]$ e de uma regra de matching definem um mecanismo diferente. Cada um desses mecanismos induz um jogo não cooperativo cuja estrutura estratégica é então analisada. Usando hipóteses plausíveis mostramos que esses jogos não cooperativos podem ser vistos como um processo competitivo para alcançar alocações cooperativas: todo payoff de equilíbrio é um equilíbrio competitivo para o jogo de mercado cooperativo. Respostas precisas podem então ser dadas às questões estratégicas levantadas.

Abstract

We consider the cooperative market game studied in Sotomayor (1999-a), where identical and indivisible items are to be sold by only one seller to potential buyers. Agents' preferences are described by a reservation value and all buyers can buy up to their quota of objects. The buying and selling mechanism is a sealed bid auction. Submitted bids determine an interval $[p_*, p^*]$ from where a market-clearing price can be selected. The price p is $\lambda p_* + (1 - \lambda)p^*$, where each choice of $\lambda \in [0, 1]$ and of a matching rule define a different mechanism. Each of these mechanisms induces a non-cooperative game whose strategic structure is then analysed. Under reasonable assumptions we show that these non-cooperative games can be regarded as a competitive process for achieving a cooperative outcome: every equilibrium payoff is a competitive equilibrium for the cooperative market game. Precise answers can be given to the strategic questions raised.

Palavras-Chave: Mechanism, auction, competitive price .

Código JEL: C78, D78 .

*Universidade de São Paulo; Departamento de Economia, Av. Prof. Luciano Gualberto, 908; Cidade Universitária, 05508-900 São Paulo, SP, Brasil, e-mail: marildas@usp.br

1. Introdução

Este trabalho constitui a segunda parte de um estudo sobre um simples jogo de mercado de dois lados, iniciado em Sotomayor (1999-a). Esse jogo consiste de um mercado de compra e venda, com um único vendedor interessado em vender vários objetos indivisíveis e idênticos, e um conjunto de compradores, cada um dos quais está interessado em comprar até uma dada cota de objetos. Cada agente coloca um valor monetário sobre cada um dos itens. Estes são os valores de reserva dos objetos para os agentes. O valor de reserva de um comprador significa a quantia máxima pela qual ele aceitaria comprar qualquer um dos bens. O valor de reserva do vendedor representa o preço mínimo pelo qual ele aceitaria vender qualquer um dos objetos. É considerado o caso mais simples, em que o valor de reserva de um comprador para um objeto não depende de quantos objetos ele obterá. Assim os valores de reserva dos objetos para um dado agente são iguais.

Uma interpretação para este mercado é a seguinte. O vendedor tem em mãos uma oferta de $\$s$ para cada um dos objetos, proveniente de algum agente não pertencente ao mercado, que comprará qualquer quantidade de objetos que lhe seja oferecida, por esse preço. Cada comprador j (que pode ser pensado como um intermediário em vez de um consumidor final do objeto) tem em mãos uma oferta de $\$a_j$, por objeto, de um cliente que se compromete a comprar qualquer quantidade $k \leq r_j$ de objetos, se esta quantidade lhe for oferecida pelo comprador (por exemplo, o cliente tem uma agência de carros que só tem espaço para mais r_j carros). Desde que o vendedor sabe que pode ganhar no mínimo $\$s$ por objeto, ele não venderá nenhum objeto a um preço inferior a $\$s$. Desde que cada comprador j sabe que, comprando qualquer quantidade de objetos menor ou igual que r_j (mas não mais) ele poderá revender todo o lote pelo preço de $\$a_j$ cada unidade, ele não comprará nenhum objeto por um preço maior

que $\$a_j$ e não comprará mais do que r_j objetos.

Assim se o vendedor vende $k_j \leq r_j$ objetos a cada comprador j , por $\$p$ cada unidade, ele ganha $\$(k_j p)$ de cada comprador j ; cada comprador j ganha $\$k_j(a_j - p)$.

A função do mercado é encontrar uma alocação factível: um matching e um preço factíveis. Um matching factível é uma alocação dos objetos para os compradores que designa a cada comprador, no máximo, a sua cota de objetos e tal que cada objeto é alocado, no máximo, uma única vez. Um preço factível é um número que é maior ou igual ao preço de reserva do vendedor e é o mesmo para todos os objetos.

A condição de todos os objetos serem vendidos pelo mesmo preço é razoável, visto que existe um único vendedor e todos os objetos são idênticos. Entretanto existem situações economicamente naturais em que o vendedor discrimina, especificando diferentes preços para diferentes compradores. Esta é, por exemplo, a situação com que nos deparamos num mercado de trabalho. Aqui os vendedores são trabalhadores que vendem seus serviços às firmas, por salários. Cada trabalhador dispõe de uma cota de horas de trabalho por semana que ele poderá distribuir entre as várias firmas que por ventura o empregarem. Cada firma poderá contratar até uma certa cota de unidades de homens-hora de trabalho por semana. Um dado trabalhador pode ser contratado por diferentes firmas, por diferentes salários-hora. Mas dentro de uma mesma firma ele recebe o mesmo pagamento por cada hora de trabalho semanal. O nosso modelo corresponde ao caso em que o número de trabalhadores é igual a um. Neste caso o valor de reserva da firma j é o salário-hora máximo que ela pagaria ao trabalhador. Naturalmente, o salário-hora mínimo que o trabalhador aceitaria para trabalhar numa dada firma poderá variar dependendo da atividade que ele realizará na firma.

A regra do jogo de mercado é que qualquer comprador pode

efetuar uma transação, juntamente com o vendedor, e dividir entre si os ganhos da transação da forma que desejarem; um comprador é livre de não comprar nenhum objeto e o vendedor é livre de não vender nenhum de seus objetos.

A pergunta economicamente natural é: *Que alocações podemos prever que ocorrerão neste mercado?*

Como foi argumentado em Sotomayor (1999-a), parece razoável esperar que somente alocações Pareto eficientes e livres de inveja ocorrerão (uma alocação é livre de inveja se todo mundo prefere fracamente a sua alocação à alocação de qualquer outro agente). Na literatura, uma alocação Pareto eficiente e livre de inveja é chamada justa. O conceito solução que captura esta idéia de justiça é a de equilíbrio competitivo: *Um dado preço p é um preço de equilíbrio competitivo se é factível e se existe um matching factível x tal que (a) p é o preço de reserva do vendedor se houver algum objeto não designado por x e (b) se $k \geq 0$ objetos são designados a um comprador por x , então, dado p , nenhuma outra quantidade dará a este comprador um ganho total maior do que o que ele obtém com a quantidade k .*

Neste caso dizemos que (p, x) é um equilíbrio competitivo e que x é compatível com p .

Em Sotomayor (1999-a), é mostrado que se (p, x) é um equilíbrio competitivo então x é um matching ótimo e que todo matching ótimo é compatível com qualquer preço de equilíbrio. A idéia de um matching ótimo é a seguinte. Se k objetos são designados a um comprador j então o valor do par (j, k) é k vezes o valor de reserva de j menos k vezes o preço de reserva do vendedor. Dado um matching factível, a soma dos valores de todos os pares (j, k) , onde k é o número de objetos designados ao comprador j , é chamada de valor do matching. *Um matching é ótimo (ou a alocação dos objetos é eficiente) se ele tem o valor máximo dentre todos os matchings factíveis.*

É possível que em um matching ótimo alguns objetos não sejam alocados. Pode, também existir mais de um matching ótimo. Isto ocorre quando dois ou mais compradores têm os mesmos valores de reserva. Por exemplo, se existem dois compradores com cota 2 e o mesmo valor de reserva igual a V , e dois objetos com preço de reserva menor que V , então é ótimo alocar um objeto para cada comprador ou alocar dois objetos para um deles e nenhum objeto para o outro. Nestes dois últimos casos dizemos que o matching ótimo é *simples*. (A definição precisa de um tal matching será dada no texto).

Este modelo de mercado é uma generalização do caso bem conhecido em que todos os compradores têm cota igual a um e tem sido amplamente explorado na literatura de leilões de múltiplos objetos idênticos. Em geral se supõe que os compradores podem comprar todos os objetos ou que existe uma limitação sobre o número de objetos imposta pelo mercado, que é a mesma para cada comprador. Ele está, também, relacionado com o jogo de designação múltipla (ver Sotomayor, 1992 e Crawford e Knoer, 1981). A diferença é que num jogo de designação de múltiplos parceiros os preços podem ser distintos mesmo que os valores de reserva dos objetos sejam os mesmos por parte dos compradores. Isto é porque, em contraste com o nosso modelo, pode haver mais de um vendedor, cada um possuindo um objeto. Assim, mesmo no caso dos objetos terem o mesmo valor para os compradores, será razoável, algumas vezes, esperar preços distintos. Por exemplo, se existem dois objetos e somente um comprador cuja cota é 2 e cujos valores de reserva sejam iguais a 3, então se os objetos têm preços 1 e 2, por exemplo, o comprador demanda os dois objetos. No nosso modelo esses preços não podem ser de equilíbrio, pois não são considerados factíveis.

Tendo as alocações justas para este mercado sido caracterizadas como os equilíbrios competitivos, a idéia então é desenhar mecanismos de compra e venda para produzir estas alocações. Com este

intuito propomos uma classe de leilões de lance lacrado. Em qualquer desses mecanismos, cada comprador escolhe um lance que é entregue ao leiloeiro. Um equilíbrio competitivo é então encontrado pelo leiloeiro de acordo com alguma regra de leilão, que consiste de uma regra de preço e uma regra de matching, que será denominada de regra de desempate. A regra de preço é dada por uma combinação convexa da regra que produz o preço mínimo de equilíbrio e da regra que produz o preço máximo de equilíbrio. A regra de desempate se processa em duas etapas. Na primeira o leiloeiro determina o conjunto dos matchings ótimos e simples correspondentes aos lances submetidos. Dentre estes matchings ele seleciona aqueles que alcançam o verdadeiro valor mais alto. Na segunda etapa é escolhido um matching deste conjunto. Quando existe um único objeto a ser vendido, este critério é equivalente a requerer que o leiloeiro venda o objeto ao ofertante que tem a avaliação mais alta dentre aqueles com o mais alto lance.

A idéia de usar equilíbrios competitivos como um mecanismo para fazer alocações com propriedades desejáveis de eficiência e justiça tem sido amplamente explorada na literatura. Um procedimento semelhante ao usado aqui é considerado em Sotomayor (1999-b) para o mercado de múltiplos objetos distintos e cota unitária. Cada ofertante submete um lance lacrado listando sua avaliação para todos os itens. A regra do leilão associa, a cada conjunto de lances declarados, um equilíbrio competitivo para o mercado correspondente. A análise se concentra nos casos em que a regra de leilão não é a que produz o preço mínimo de equilíbrio. Para estes casos é feita uma análise estratégica do jogo de informação completa que se inicia quando os compradores são chamados a declarar os seus lances, e é provado que os ofertantes podem sempre forçar o preço mínimo de equilíbrio via estratégias de equilíbrios de Nash.

Demange (1982) e Leonard (1983) consideraram um mecanismo

de alocação que é uma generalização do leilão de segundo preço de um único objeto para o caso de itens distintos onde os compradores têm cota unitária. O leilão de segundo preço foi primeiro descrito por Vickrey (1961), para um mercado com um objeto e onde os compradores têm cota unitária. No leilão de Vickrey os compradores submetem lances lacrados para o objeto, que é vendido ao ofertante com o mais alto lance a um preço igual ao segundo maior lance. Podemos pensar no resultado do leilão de segundo preço como um equilíbrio competitivo ordinário. Ao dado preço, o objeto é demandado por somente um comprador, o de mais alto lance, e, como existe somente um objeto, isto produz balanço entre a oferta e a demanda. A importante propriedade do segundo lance mais alto é que ele é o preço mínimo de equilíbrio, desde que para qualquer preço menor ao menos dois licitantes demandariam o objeto. Um resultado análogo é obtido para o modelo de mercado onde os objetos são idênticos e as cotas dos compradores são unitárias: se o número de objetos é n , o número de compradores é m , e $k = \min \{m, n\}$, então k objetos são alocados, um para cada um dos k compradores com os k mais altos valores. O preço de cada objeto é o $(n + 1)$ -ésimo valor mais alto, se $n < m$ e 0 caso contrário.

O mecanismo de leilão de múltiplos objetos distintos e cota unitária de Demange (1982) e Leonard (1983) requer que cada ofertante submeta um lance lacrado listando sua avaliação para todos os itens. O leiloeiro então aloca os objetos de acordo com o preço mínimo competitivo. Estes artigos provam que a importante propriedade de compatibilidade de incentivos do leilão de Vickrey generaliza para o caso de múltiplos objetos, significando que declarar a verdadeira avaliação é uma estratégia dominante para os compradores. Mais geralmente (Demange e Gale, 1985) nenhum subconjunto de compradores pode, usando de não sinceridade na revelação de suas avaliações, melhorar o resultado para todos os seus

elementos. (Ver Roth e Sotomayor, 1990).

Em Demange, Gale e Sotomayor (1986) são apresentados dois mecanismos dinâmicos de leilões para um mercado de múltiplos objetos distintos. Um deles produz, num número finito de etapas, o preço mínimo de equilíbrio. O outro chega a uma alocação final que converge para o equilíbrio competitivo mínimo, e é um caso especial do algoritmo de Crawford e Knoer (1982).

Vários autores têm olhado para outros simples mecanismos de alocação que levam a equilíbrios competitivos. Dentre estes mecanismos encontram-se os leilões duplos, em que ambos compradores e vendedores agem estrategicamente. Para o mercado de objetos não idênticos e demanda unitária, Demange e Gale (1985) mostram que se os vendedores podem manipular seus preços de reserva e o mecanismo produz o equilíbrio competitivo mínimo, os vendedores podem forçar o preço máximo de equilíbrio via equilíbrios de Nash, enquanto é uma estratégia dominante para os compradores revelar a verdade. Se o mecanismo produz o equilíbrio competitivo máximo, então é ótimo para os vendedores revelar seus verdadeiros preços de reserva enquanto os compradores podem forçar o preço mínimo de equilíbrio por equilíbrios de Nash.

Em Sotomayor (1999-a) é sugerido um mecanismo que consiste de uma reformulação do leilão dinâmico padrão de preços ascendentes. O seu aspecto principal é que ele produz, num número finito de etapas, o preço mínimo de equilíbrio competitivo. Este mecanismo é estrategicamente equivalente ao leilão de lance lacrado que produz um equilíbrio competitivo mínimo. A análise estratégica do jogo induzido pelo mecanismo em questão mostra que é uma estratégia dominante para os compradores revelar as verdadeiras avaliações quando todos os licitantes têm a mesma cota e o número de objetos é um múltiplo dessa cota é maior que o número desses agentes. (Observe que esta condição é obviamente satisfeita quando a cota

é unitária). Foi observado aí que, sem esta hipótese, este resultado não é necessariamente verdadeiro.

No presente trabalho procedemos à análise do comportamento estratégico dos compradores nos jogos, com informação completa, induzidos pelos leilões propostos. Esses jogos serão chamados aqui de *jogos de leilão*. Um exemplo mostra que a estratégia sincera não é dominante no jogo induzido por qualquer desses mecanismos. I. e., existe um comprador que faz melhor em não revelar seu verdadeiro valor de reserva sob qualquer regra de leilão. Isto sugere perguntar pela existência de equilíbrios de Nash num dado jogo de leilão: uma estratégia conjunta com a propriedade de que uma vez adotada não exista vantagem para nenhum comprador em se desviar dela. Um teorema de existência responde afirmativamente a esta pergunta.

Porém, o interesse central neste artigo é a análise estratégica de situações em que os compradores não conhecem como o leiloeiro escolherá a alocação final dos objetos em caso de empates. Em tais circunstâncias pode ocorrer que o leiloeiro, depois de ter usado a primeira etapa da regra de desempate, se depare com mais do que uma escolha. Então os payoffs para os compradores podem depender do matching escolhido pelo leiloeiro. Isto é, uma mesma estratégia conjunta poderia produzir payoffs diferentes para os compradores sob diferentes regras de desempate, embora sob as mesmas regras de preço. Neste caso o jogo não é bem definido e a noção de equilíbrio será dada no texto precisamente via os conceitos de equilíbrio de Nash nos sentidos fraco e forte. A idéia é a seguinte. Suponha que os compradores sabem que se eles jogarem uma certa estratégia conjunta b , o leiloeiro escolherá o matching x . Dada a regra de preço, pode haver vários jogos diferentes em que as regras de desempate escolhem x quando os compradores jogam b . Dizemos que b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco (respectivamente forte) para x se b é um equilíbrio de Nash para alguns desses (respectivamente

todos esses) jogos. Numa situação extrema os compradores não conhecem o que o leiloeiro fará se eles jogarem b . Dizemos que b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco (respectivamente forte) se para todo matching x que o leiloeiro possa selecionar, b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco (respectivamente forte) para x . Assim se os compradores jogarem um equilíbrio de Nash no sentido fraco (respectivamente forte), eles terão alguma chance (respectivamente eles estarão certos) de estarem jogando um equilíbrio de Nash no sentido usual. Concluímos daí que, independentemente do conhecimento da regra de desempate, será ótimo para os compradores jogar b quando b for um equilíbrio de Nash no sentido forte. Motivados pelos resultados e exemplos apresentados em Sotomayor (1999-a), restringimos a nossa análise aos leilões que não produzem o preço mínimo de equilíbrio e ao caso em que todos os licitantes têm a mesma cota c e $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Sob estas condições mostramos que existe uma estratégia conjunta, b^* , que é um equilíbrio de Nash para todos os jogos de leilão. I. e. , b^* não depende da regra de preço nem da regra de desempate. Além disso a alocação de equilíbrio de Nash correspondente é o equilíbrio competitivo mínimo.

Quando existe mais de um payoff de equilíbrio de Nash, pode existir um conflito de interesses entre os compradores com respeito às suas escolhas estratégicas. Assim seria interessante que o equilíbrio competitivo mínimo fosse a única alocação de equilíbrio de Nash para qualquer regra de desempate. Entretanto este não é o caso. Um exemplo mostra que podem existir equilíbrios de Nash no sentido forte diferentes de b^* e que podem existir alocações de equilíbrio de Nash diferentes do equilíbrio competitivo mínimo. A solução para este problema é devida a um poderoso resultado: *Qualquer alocação de equilíbrio de Nash é um equilíbrio competitivo segundo às verdadeiras avaliações*. Desta forma, agindo estrategicamente, os com-

pradores podem obter um payoff do núcleo¹ do jogo de mercado definido com as verdadeiras avaliações. Além disso a alocação dos objetos é um ótimo matching segundo às verdadeiras avaliações. Isto é, todo leilão desta classe é eficiente. Nesse sentido podemos pensar nos jogos de leilões como um processo competitivo para alcançar um resultado cooperativo² Desde que alguns compradores terão incentivos em não revelar suas verdadeiras avaliações, é surpreendente que, mesmo no equilíbrio, as alocações resultantes sejam competitivas com respeito às verdadeiras avaliações.

Para ver como o resultado acima resolve o problema do conflito de interesses suponha que algum ofertante prefira alguma alocação ao equilíbrio competitivo mínimo. Então o vetor de preços desta alocação, obviamente, não será um preço de equilíbrio competitivo segundo às verdadeiras avaliações, e portanto não provirá de uma estratégia de equilíbrio de Nash, pelo resultado acima. Consequentemente não existe nenhum payoff de equilíbrio de Nash que seja preferido por algum comprador ao equilíbrio competitivo mínimo. Assim, a estratégia b^* , a que nos referimos anteriormente, pode ser olhada como a melhor maneira de jogar para os compradores, desde que (a) é um equilíbrio de Nash em todos os jogos de leilões, logo nenhum comprador será tentado a se desviar dela em nenhum desses jogos; (b) dentre todas as estratégias de equilíbrio de Nash ela dá aos

¹É fácil ver que os preços dos objetos podem ser diferentes nos vetores-payoff do núcleo e que este contém propriamente o conjunto dos vetores-payoff correspondentes a preços de equilíbrio. O núcleo seria o conceito solução adequado para este mercado se não estivéssemos nos restringindo aos vetores-payoff onde os preços dos objetos são iguais.

²A idéia de produzir alocações competitivas via um jogo não cooperativo foi também usada em Wilson (1977), mas numa abordagem diferente da apresentada aqui. Este artigo considera uma economia de troca com bens divisíveis, em que as negociações são organizadas como um jogo de lances. Sob várias hipóteses de regularidade (que não se aplicam ao nosso modelo) é mostrado que este jogo tem um equilíbrio que produz uma alocação do núcleo do correspondente jogo cooperativo de troca. Os compradores são replicados e no limite esta alocação do núcleo é um equilíbrio competitivo.

compradores o mais alto payoff possível. Isto significa que no caso dos compradores desconhecerem a regra do leilão (regra de preço e regra de desempate), a seleção desta estratégia continua lhes garantindo um equilíbrio de Nash com o mais alto payoff possível.

Um exemplo ilustra que o payoff total verdadeiro de um comprador pode depender da segunda etapa da regra de desempate. Entretanto um de nossos teoremas mostra que este não é o caso quando os compradores usam estratégias de equilíbrios de Nash no sentido fraco. Mais especificamente, provamos que em leilões com a mesma regra de preço, as estratégias de equilíbrio de Nash no sentido fraco não dependem da escolha particular feita pelo leiloeiro na segunda fase da regra de desempate, e os preços dos objetos e os payoffs totais verdadeiros dos compradores são os mesmos, qualquer que seja a alocação dos objetos produzida pelo mecanismo. Seria porém desejável que, para selecionar um equilíbrio de Nash para um dado jogo, os compradores não necessitassem considerar a regra de desempate usada no jogo. Isto é feito possível após o resultado que mostra a equivalência entre os dois conceitos de equilíbrios de Nash. Desses dois resultados derivamos o teorema desejado: se uma estratégia conjunta é um equilíbrio de Nash para algum jogo de leilão com uma certa regra de preço, então ela será um equilíbrio de Nash para todo jogo de leilão com a dada regra de preço.

Informação incompleta tem sido o enfoque de investigação de inúmeros autores que têm estudado procedimentos de leilão para múltiplos objetos e sua relação com os equilíbrios Walrasianos e/ou alocações eficientes. Dentre eles citamos A. Rustichini et al (1994) e Ausubel (1997). O primeiro artigo apresenta uma classe de leilões duplos que produzem preços de equilíbrio. Cada regra de leilão é definida por uma combinação convexa dos preços mínimo e máximo de equilíbrio. Neste mercado cada vendedor possui um único objeto e cada comprador deseja comprar, no máximo, um único objeto.

Estes autores estabelecem resultados que podem classificar alguns dos mecanismos dessa classe de acordo com a rapidez com que a ineficiência esperada converge a zero. O segundo artigo propõe um leilão ascendente para um mercado de objetos idênticos em que os compradores podem comprar mais de um objeto. A função payoff de cada comprador é sub aditiva. Assim sendo os preços dos objetos não necessitam ser os mesmos. Neste leilão um comprador ganhador não paga necessariamente o preço final. O autor analisa o jogo induzido por este leilão e mostra que ele produz resultados eficientes.

Embora o tratamento sob o enfoque de informação incompleta seja o mais realista ainda muito pouco se conhece sobre a estrutura estratégica destes mercados. Por outro lado estamos convencidos de que um completo entendimento das operações dos mercados com informação incompleta deve ter por base uma análise do caso com informação completa. Assim o modelo com informação completa constitui o ponto de partida.

Na seção 2 descrevemos o modelo cooperativo apresentado em Sotomayor (1999-a) e enunciamos alguns de seus resultados que serão utilizados nas seções seguintes. Na seção 3 descrevemos os leilões de lance selado. A seção 4 é devotada à análise das possibilidades estratégicas dos compradores em qualquer dos mecanismos de leilão e a seção 5 conclui o artigo.

2. Modelo Cooperativo Formal

Existem m compradores: $1, 2, \dots, m$ e n objetos indivisíveis e idênticos. O conjunto de compradores será denotado por P e um comprador genérico por j ou k . O conjunto de objetos será denotado por Q e um objeto genérico por q . O valor de cada objeto para o comprador j é $a_j \geq 0$. Cada comprador tem uma cota r_j , representando o número máximo de objetos que está interessado em comprar, onde r_j é um número inteiro maior ou igual a zero. Nor-

malizando, consideraremos que o preço de reserva de cada objeto para o vendedor é 0. Assim o mercado é dado por $M = (P, Q, r, a)$.

Definição 1 : *Um **matching factível** para $M = (P, Q, r, a)$ é um vetor $x = (x_1, \dots, x_m)$ de coordenadas inteiras não negativas tais que $\sum_{j \in P} x_j \leq n$ e $x_j \leq r_j$.*

Se $x_j = c$ (c pode ser zero) diremos que c objetos são designados para o comprador j pelo matching x ou que o comprador j compra c objetos segundo x . Se um matching x é factível então segue da Definição 1 que $\sum_{j \in P} x_j \leq \min\{n, \sum_{j \in P} r_j\}$.

Definição 2 : *Um preço **factível** é qualquer número real $p \geq 0$.*

O par (p, x) onde p é um preço factível e x é um matching factível é chamado de alocação factível. Se o comprador j compra c objetos pelo preço p então o seu payoff total será $c(a_j - p)$. Neste caso dizemos também que (p, x) aloca c objetos para j ao preço p .

Definição 3 : *O conjunto de demanda de j ao preço p , que será denotado por $D_j(p)$, é dado por*

$$D_j(p) = \{c \text{ inteiro}; 0 \leq c \leq r_j \\ \text{e } c(a_j - p) \geq c'(a_j - p) \forall c', \text{ com } 0 \leq c' \leq r_j\}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} D_j(p) &= \{r_j\} && \text{se } a_j > p; \\ D_j(p) &= \{0, 1, 2, \dots, r_j\} && \text{se } a_j = p \text{ e} \\ D_j(p) &= \{0\} && \text{se } a_j < p. \end{aligned}$$

$D_j(p)$ é o conjunto das quantidades de objetos que maximizam o payoff total de j ao preço p . Portanto não só j é indiferente entre duas quaisquer quantidades demandadas, como também ambas lhes dão o payoff total mais alto possível.

Definição 4 : O preço p é chamado **competitivo** se existe um *matching* factível x tal que $x_j \in D_j(p)$, para todo comprador j . Neste caso x é dito ser **compatível** com p .

Assim, dado um preço competitivo, cada comprador pode comprar alguma quantidade demandada por ele ao preço dado.

Definição 5 : A alocação (p, x) é um **equilíbrio competitivo** se p é competitivo, x é compatível com p e além disso $p = 0$ se houver algum objeto não vendido.

Se (p, x) é um equilíbrio competitivo então p é chamado de **preço de equilíbrio** e x é chamado **matching competitivo**.

Isto é, a equilíbrios competitivos, não somente todo comprador obtém uma quantidade de objetos do seu conjunto de demanda, mas também todo objeto com preço superior ao seu preço de reserva é vendido, posto que se existir algum objeto não vendido então todos os preços são iguais ao preço de reserva.

Suponha que $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$. Então $a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots, a_m, \dots, a_m$ é uma ordenação decrescente dos valores de reserva dos compradores onde cada a_j é repetido r_j vezes. Um *matching* ótimo associa os K objetos com os K primeiro valores da ordenação, onde $K = \min \{n, \sum_{j \in P} r_j\}$. Esta ordenação pode não ser única no caso em que há empates nos valores de reserva dos compradores. Nestes casos várias outras formas de ordenar de modo decrescente esses valores podem ser consideradas para se conseguir um *matching* ótimo. Por exemplo, se existem 3 compradores, cada um com cota 2, $a_1 > a_2 = a_3$ e existem 4 objetos, então se considerarmos a ordenação

$a_1, a_1, a_2, a_3, a_3, a_2$, alocaremos os 4 objetos para os 4 primeiros valores, obtendo-se o matching $x = (2, 1, 1)$. Existem outros matchings ótimos para este mercado: $(2, 2, 0)$ e $(2, 0, 2)$. Por razões técnicas nos concentraremos nos matchings ótimos em que há, no máximo, um comprador que recebeu algum objeto e não preencheu a sua cota, como os dois últimos do exemplo acima. Esta restrição equivale a considerar apenas os matchings ótimos que pertencem a uma classe especial de matchings que serão chamados de matchings simples. A definição de um matching simples é dada na Definição 7 abaixo. Formalmente um matching ótimo é:

Definição 6 : *O matching x é ótimo para o mercado M se é factível e $\sum_j a_j x_j \geq \sum_j a_j x'_j$ para todo matching factível x' .*

O valor de um matching x é o número $\sum_j a_j x_j$. Portanto x é ótimo se, dentre todos os matchings factíveis, possui o maior valor. Como o número de matchings factíveis é finito, existe sempre, no mínimo, um matching ótimo.

Observação 1 : Se existir algum objeto não designado e algum comprador j que não tenha preenchido sua cota num matching factível, com $a_j = 0$, então se alocarmos o objeto para j não alteramos o valor de x . Assim sendo, não perderemos nada em assumir que, sempre que existir algum objeto não alocado a nenhum comprador por um matching factível, então todo comprador j com $a_j = 0$ terá preenchido sua cota segundo este matching.

Se $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ nos referiremos a $(a_1, \dots, a_m)$ como uma ordenação.

Definição 7 : *O matching x é simples para a ordenação $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_m)$ se é factível e $\forall j, k \in P$, com $a_j = a_k$ e $j < k$,*

tem-se que $x_j = \min\{r_j, x_j + x_k\}$. O matching x é **simples** se é simples para alguma ordenação dos a_j 's.

Por exemplo, se $a_1 = 6$, $a_2 = 7$, $a_3 = 8$, $a_4 = 7$ temos duas ordenações possíveis: (a_3, a_4, a_2, a_1) e (a_3, a_2, a_4, a_1) . Suponha que existam 4 objetos no mercado e que cada comprador tenha cota 2. Então o matching $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ é ótimo mas não é simples. O matching $x'_1 = 1$, $x'_2 = 2$, $x'_3 = 1$, $x'_4 = 0$ é simples para a segunda ordenação mas não é ótimo. Os únicos matchings ótimos e simples são: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 2$ e $y'_1 = 0$, $y'_2 = 2$, $y'_3 = 2$, $y'_4 = 0$.

Decorre da Definição 7 que se x é simples e $a_j = a_k$ com $j < k$ e $x_j < r_j$ então $x_j = x_j + x_k$, donde $x_k = 0$. Consequentemente se $x_k > 0$ então $x_j = r_j$.

Definição 8 : p^* é o **preço máximo de equilíbrio** se $p^* \geq p$ para todo preço de equilíbrio p ; p^* é o **preço mínimo de equilíbrio** se $p^* \leq p$ para todo preço de equilíbrio p .

Definição 9 : Seja (p, x) um equilíbrio competitivo. O **vetor de payoffs associado a (p, x)** é o vetor $u = (u_1, \dots, u_m)$ onde $u_j = \max\{0, a_j - p\}$, $\forall j \in P$. O **payoff total de $j \in P$ associado a (p, x)** é dado por $x_j u_j$.

Os seguintes resultados estão demonstrados em Sotomayor (1999-a) e serão utilizados nas seções seguintes.

Proposição 1*: Seja x um matching ótimo. Então $\sum_j x_j = \min\{n, \sum_j r_j\}$.

Proposição 2*: Seja x um matching simples para a ordenação $(a_1, \dots, a_m)$. O matching x é ótimo se e somente se (a) $\forall j, k$ com

$j < k$, se $x_j < r_j$ então $x_k = 0$ (consequentemente $\forall j, k$ com $j < k$, se $x_k > 0$ então $x_j = r_j$) e (b) $\sum_j x_j = \min\{n, \sum_j r_j\}$.

Proposição 3*: *Seja x um matching ótimo. Então existe no máximo um comprador que não preencheu a sua cota e recebeu algum objeto se e somente se x é simples.*

Proposição 4*: *Seja (p, x) um equilíbrio competitivo. Então x é um matching ótimo.*

Proposição 5*: *Seja x um matching ótimo e p um preço de equilíbrio. Então x é compatível com p .*

Se (p, x) é um equilíbrio competitivo e u é o vetor de payoffs associado a (p, x) , então,

$$\begin{aligned} u_j &\geq 0 \text{ e } u_j \geq a_j - p \quad \forall j \in P, \\ u_j &= a_j - p \text{ se } x_j > 0 \text{ e} \quad (*) \\ u_j &= 0 \text{ se } x_j = 0. \end{aligned}$$

Proposição 6*: *Seja (p, x) um equilíbrio competitivo. Seja u o vetor de payoffs associado a (p, x) . Seja $j \in P$. Se $u_j > 0$ então j completa sua cota em todo matching ótimo. Neste caso o payoff total de j é $r_j u_j$.*

Seja x um matching ótimo e simples. Defina:

$$\begin{aligned} A_x &= \{j \in P; x_j = r_j\}, B_x = \{j \in P; 0 < x_j < r_j\} \\ \text{e } C_x &= \{j \in P; x_j = 0\}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3* $|B_x| = 0$ ou $|B_x| = 1$.

Teorema 1* : *Seja x um matching ótimo e simples. (a) Se $B_x = \{j\}$ então existe um único preço de equilíbrio dado por $p = a_j$; (b) se $B_x = \emptyset$, seja $a_t = \min\{a_k; k \in A_x\}$ e $a_{t'} = \max\{a_k; k \in C_x\}$ se $C_x \neq \emptyset$. Então o conjunto dos preços de equilíbrio é dado por*

- i) $[a_{t'}, a_t]$ se $C_x \neq \emptyset$,*
- ii) $[0, a_t]$ se $C_x = \emptyset$ e $n = \sum_j r_j$ e*
- iii) $\{0\}$ se $C_x = \emptyset$ e $n > \sum_j r_j$.*

Corolário 1* : *Seja x um matching ótimo e simples. Então*

- (i) $p^* = p_* = a_j$ se $B_x = \{j\}$;*
- (ii) $p^* = \min\{a_j; j \in A_x\}$ e $p_* = \max\{a_j; j \in C_x\}$, se $B_x = \emptyset$ e $C_x \neq \emptyset$;*
- (iii) $p^* = \min\{a_j; j \in A_x\}$ e $p_* = 0$ se $B_x = \emptyset$, $C_x = \emptyset$ e $n = \sum_j r_j$ e*
- (iv) $p^* = p_* = 0$ se $B_x = \emptyset$, $C_x = \emptyset$ e $n > \sum_j r_j$.*

Proposição 7*: *Sejam a' e $a'' \in R_+^n$. Sejam p'^*, p'^*, p''^* e p''^* os preços mínimo e máximo de equilíbrio para $M' = (P, Q, r, a')$ e $(M'' = (P, Q, r, a''))$, respectivamente. Se $a' \geq a''$ então $p'^* \geq p'^*$ e $p'^* \geq p''^*$.*

Teorema 2* : *(a) se um conjunto de compradores adicionais entra no mercado, então p^* e p_* não decrescem. (b) Se um conjunto de objetos adicionais entra no mercado, então p^* e p_* não crescem.*

3. Mecanismos de Leilão Simultâneo de Lance Lacrado

Nesta seção interpretaremos P como um conjunto de ofertantes. Descreveremos uma classe de leilões simultâneos de lance lacrado para o mercado $M = (P, Q, r, s, a)$, onde s é o preço de reserva de

cada objeto e para todo comprador j , $a_j = \alpha_j - s$, é o verdadeiro valor de um objeto para j . Os agentes podem comunicar-se entre si de tal forma que r , s e a são de conhecimento comum entre eles. Sem perda da generalidade podemos assumir que $a_j \geq 0$ para todo comprador j , desde que, caso contrário o comprador não participará do leilão. Num primeiro estágio, cada comprador j deposita a quantia correspondente a r_j vezes o preço de reserva do objeto. Isto implica que o leiloeiro irá alocar, no máximo, r_j objetos para j . Na etapa seguinte cada ofertante j seleciona um lance $b_j \geq 0$, que é encerrado num envelope e entregue ao leiloeiro. Denotaremos por b o vetor $(b_1, \dots, b_m)$.

De posse de b o leiloeiro encontra um preço $p(b)$ e um matching $x(b)$, de acordo com a *regra do leilão* $(p(\cdot), x(\cdot))$. A primeira componente é chamada *regra de preço de equilíbrio* e determina para cada vetor de lances b um preço de equilíbrio $p(b)$ para o mercado $M(b) = (P, Q, r, b)$. Denotando por $p^*(\cdot)$ e $p_*(\cdot)$ as regras que produzem o preço mínimo e o preço máximo de equilíbrio, respectivamente, a regra de preço $p(\cdot)$ é dada por $p(\cdot) = \lambda p^*(\cdot) + (1 - \lambda)p_*(\cdot)$, para algum $\lambda \in [0, 1]$. A segunda componente é chamada de *regra de desempate*. Ela se processa em duas etapas. O que difere uma regra de desempate de outra é a segunda etapa. Na primeira o leiloeiro encontra $\Sigma(b)$, o conjunto de todas as alocações ótimas que sejam simples para alguma ordenação dos b_j 's. Portanto, pela Proposição 3*, ele encontra todos os matchings ótimos em que existam no máximo um comprador que não preencheu a sua cota e recebeu algum objeto. Então se, digamos, $\Sigma(b) = \{x^1, \dots, x^t\}$ o leiloeiro determina o conjunto das alocações $x^* \in \Sigma(b)$ tal que $\sum_j a_j x_j^* = \max\{\sum_j a_j x_j^1, \dots, \sum_j a_j x_j^t\}$. Este conjunto será denotado por $\Sigma^*(b)$. Assim $\Sigma^*(b)$ é o conjunto das alocações que alcançam o valor mais alto em M dentre todas as alocações ótimas e simples para $M(b)$. Na segunda etapa o leiloeiro escolhe $x(b) \in \Sigma^*(b)$. O fato de que $x(b)$ e $p(b)$ são compatíveis

segue da Proposição 5*.

Se t objetos são alocados para o ofertante j , então $0 \leq t \leq r_j$. O comprador j pagará $tp(b)$ ao leiloeiro e receberá de volta o valor $s(r_j - t)$. Assim o leiloeiro receberá o total $t(p(b) + s)$ de j . O payoff total de j será $t(a_j - p(b))$.

Assumiremos que a regra de preço de equilíbrio e a primeira etapa da regra de desempate são conhecidas por todos os agentes antes do primeiro estágio do leilão.

Denotamos por LPCm (resp. LPCM) um leilão de lance lacrado cuja regra de preço de equilíbrio é a *regra de preço mínimo de equilíbrio* (resp. *regra de preço máximo de equilíbrio*). Em um LPCm (resp. LPCM) o leiloeiro aloca os objetos de acordo com o preço mínimo de equilíbrio $p^*(b)$ (resp. preço máximo de equilíbrio $p^*(b)$) e alguma regra de desempate $x(b)$. Assim dois LPCm (resp. LPCM) diferem apenas na segunda etapa da regra de desempate. Os preços $p^*(b)$ e $p^*(b)$ podem ser computados usando a regra dada no Corolário 1*.

O Exemplo 1 abaixo ilustra nossos mecanismos.

Exemplo 1. Seja $M = (P, Q, r, s, a)$ onde $P = \{p_1, p_2, p_3\}$, Q tem 3 objetos, $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, $a_3 = 7$, $s = 0$ e $r_j = 2$ para todo $j = 1, 2, 3$. Suponha que os compradores lançam b , com $b_1 = b_2 = b_3 = 6$. As alocações ótimas e simples para alguma ordenação são as seguintes: $x^1 = (2, 1, 0)$, $x^2 = (1, 2, 0)$, $x^3 = (0, 1, 2)$, $x^4 = (0, 2, 1)$, $x^5 = (1, 0, 2)$ e $x^6 = (2, 0, 1)$.

Usando a primeira etapa da regra de desempate o leiloeiro considera os valores dessas alocações no mercado M :

$$\sum_j a_j x_j^1 = 23, \sum_j a_j x_j^2 = 22, \sum_j a_j x_j^3 = 21, \sum_j a_j x_j^4 = 21, \sum_j a_j x_j^5 = 22, \sum_j a_j x_j^6 = 23.$$

O máximo é atingido em x^1 e x^6 . A segunda etapa da regra de

desempate escolhe uma dessas duas alocações. Suponha que x^1 é a alocação selecionada. Existe um único preço de equilíbrio competitivo em $M(b)$, que é 6. Logo $p(b) = 6$ para qualquer regra de preço de equilíbrio. Desta forma ao preço 6, dois objetos são alocados para p_1 e um objeto é alocado para p_2 . O payoff total verdadeiro de p_1 é 4, de p_2 é 1 e de p_3 é 0. Se a alocação selecionada tivesse sido x^6 , então p_1 teria um payoff total verdadeiro de 4, p_2 teria 0 e p_3 teria 1.

Este exemplo ilustra o fato de que o payoff total verdadeiro dos compradores pode depender da alocação escolhida na segunda etapa da regra de desempate. Veremos que, sob certas condições, este não é o caso para uma classe especial de estratégias conjuntas.

4. Incentivos com que se Deparam os Compradores

Quando a segunda etapa da regra de desempate de um leilão é também conhecida por todos os agentes, o mecanismo induz um jogo na forma estratégia que se inicia após o conhecimento de s e tão logo os compradores sejam chamados a declarar os seus valores. As verdadeiras avaliações dos licitantes, dadas pelo vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, são de conhecimento comum. A função resultado desse jogo é dada pela regra do leilão e uma estratégia para o jogador j é um número (lance) $b_j \geq 0$. Assim o conjunto de estratégias de um jogador j é $[0, \infty]$. Um jogo deste tipo será chamado de jogo de leilão. Algumas vezes chamaremos um vetor de números $b = (b_1, \dots, b_m) \in R_+^m$ de *perfil* compradores, sem referência a um jogo específico de leilão. Usaremos a seguinte notação:

$M = (P, Q, a, r)$ é o mercado original onde, para todo comprador j , $a_j = \alpha_j - s$ e α_j é o verdadeiro valor de um objeto para j .

p^* é o preço mínimo de equilíbrio para M .

p^* é o preço máximo de equilíbrio para M .

u^* (resp. u^*) é o vetor de payoffs dos compradores associado a p^* (resp. p^*).

$\sum(M)$ é o conjunto das alocações ótimas e simples para M .

$E(M)$ é o conjunto dos preços de equilíbrio para M .

Se b é uma estratégia conjunta para os compradores:

$$M(b) = (P, Q, b, r).$$

$p^*(b)$ é o preço mínimo de equilíbrio para $M(b)$. É o preço produzido em um LPCm se os compradores lançam b .

$p^*(b)$ é o preço máximo de equilíbrio para $M(b)$. É o preço produzido em um LPCM se os compradores lançam b .

$u^*(b)$ (resp. $u^*(b)$) é o vetor de payoffs dos compradores associado a $p^*(b)$ (resp. $p^*(b)$).

$\sum(b)$ é o conjunto das alocações ótimas e simples para $M(b)$.

$\sum^*(b)$ é o conjunto das alocações ótimas e simples para $M(b)$ obtidas com a aplicação da primeira etapa de uma regra de desempate qualquer. (I. e. , se $x \in \sum^*(b)$ então $\sum_j a_j x_j \geq \sum_j a_j x'_j$, para toda $x' \in \sum(b)$).

$x(b)$ é a alocação de $\sum^*(b)$ determinada com a aplicação da segunda etapa da regra de desempate $x(\cdot)$.

$p(b)$ é o preço produzido segundo as regras de preço de equilíbrio $p(\cdot)$. I. e. , $p(b) = \lambda p^*(b) + (1 - \lambda)p^*(b)$ para $\lambda \in [0, 1]$.

$u(b)$ é o vetor de payoffs dos compradores associados a $p(b)$.

$E(b)$ é o conjunto de preços de equilíbrio para $M(b)$.

Definição 10. *Seja $x(b) \equiv x$. O payoff verdadeiro do comprador j associado ao resultado $(p(b), x)$ é: $U_j(b, x) = a_j - p(b)$ se*

$x_j > 0$ e $U_j(b, x) = 0$ se $x_j = 0$. O **payoff total verdadeiro** de j associado a $(p(b), x)$ é $x_j U_j(b, x)$.

O vetor $U(b, x) = (U_1(b, x), \dots, U_m(b, x))$ é chamado de *payoff verdadeiro* associado a $(p(b), x)$. Denotaremos por $U^*(b, x)$ (resp. $U^*(b, x)$) o payoff verdadeiro associado a $(p^*(b), x)$ (resp. $(p^*(b), x)$).

Como foi observado no Exemplo 1, quando existem várias alocações ótimas simples em $\Sigma^*(b)$, o payoff verdadeiro de um comprador pode depender da alocação determinada pela segunda etapa da regra de desempate, mas este não é o caso quando ele declara sua verdadeira avaliação.

É bem conhecido que no caso especial onde existe somente um objeto para ser leilado, dizer a verdade é uma estratégia dominante para cada comprador no jogo induzido pela regra de leilão de qualquer LPCm. O seguinte exemplo mostra que a estratégia sincera pode não ser a melhor política em qualquer leilão de lance lacrado de preço de equilíbrio, inclusive no de preço mínimo de equilíbrio.

Exemplo 2. Considere $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $|Q| = 3$, $r_j = 2 \forall j \in P$, $a = (8, 7, 6, 5)$. O único equilíbrio competitivo aloca dois objetos para o comprador 1 e um objeto para o comprador 2, ao preço $p = 7$. Suponha agora que o comprador 2 lance 6 em vez de 7. I. e., $b = (8, 6, 6, 5)$. Usando a regra do desempate o único equilíbrio competitivo para $M(b)$ aloca dois objetos para o comprador 1 e um objeto para o comprador 2, ao preço $p(b) = 6$. Desta forma é mais vantajoso para o comprador 2 não usar de sinceridade na revelação de seu preço de reserva e declarar 6.

Pelo exemplo 2 a estratégia sincera não é a melhor política em qualquer leilão. No entanto, no caso especial em que todos os compradores têm a mesma cota c e $n > mc$ ou n é múltiplo de c , Sotomayor (1999-a) mostra que:

Teorema 3*: *Se todos os compradores têm a mesma cota c e $n > mc$ ou n é um múltiplo de c , então é uma estratégia dominante para os compradores revelar suas verdadeiras avaliações em qualquer leilão de preço mínimo de equilíbrio.*

Em Sotomayor (1999-a) são apresentados exemplos que mostram que se as hipóteses do Teorema 3* são violadas então a estratégia sincera pode não ser dominante para os compradores em qualquer leilão de preço mínimo de equilíbrio. O Exemplo 3 mostra que, mesmo sob essas condições, a estratégia sincera pode não ser uma estratégia dominante para os compradores quando a regra de preço do leilão não for a de preço mínimo de equilíbrio.

Exemplo 3. Considere $P = \{1, 2\}$, $r_j = 1$, $n = 1$ e $a = (8, 6)$. O conjunto dos preços de equilíbrio deste mercado é dado por $[6, 8]$ e a alocação ótima e simples correspondente é $x = (1, 0)$. Suponha que a regra de preço de equilíbrio do leilão não seja a de preço mínimo de equilíbrio. Então se o comprador $j = 1$ lançar $b_1 = 6$, o único preço de equilíbrio correspondente a $b = (6, 6)$ será $p(b) = 6$, e a única alocação ótima e simples de $M(b)$ será $x(b) = (1, 0)$, usando a primeira etapa da regra de desempate. O payoff de $j = 1$ associado a um dado preço de equilíbrio que não seja o mínimo, quando ele revela a verdade, é menor que $(8 - 6) = 2$, enquanto o seu payoff verdadeiro associado a $(p(b), x(b))$ é $U(b, x) = (8 - 6) = 2$. Desta forma não é uma estratégia dominante para $j = 1$ revelar sua verdadeira avaliação.

Os lances conjuntos que podemos predizer que serão submetidos são os equilíbrios de Nash.

Definição 11: *O perfil de estratégias b é um equilíbrio de Nash do jogo de leilão com regra $(p(\cdot), x(\cdot))$. se para nenhum j existe b'*

com $b'_t = b_t$ para todo $t \neq j$, tal que para $x = x(b)$ e $y = x(b')$, $y_j U_j(b', y) > x_j U_j(b, x)$.

O Teorema 1 mostra que existem sempre equilíbrios de Nash em qualquer jogo de leilão.

Teorema 1. *O conjunto dos equilíbrios de Nash de um dado jogo de leilão é não vazio.*

Demonstração. Seja a regra de leilão $\varphi = (p(\cdot), x(\cdot))$. Seja $x(a) = x \in \sum(M)$. Sem perda da generalidade podemos supor $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$. Se $C_x = \emptyset$ então podemos ver facilmente que a estratégia conjunta b , onde $b_k = a_k$ se $k \neq m$ e $b_m = 0$, é um equilíbrio de Nash para o jogo de leilão de regra φ . Se $C_x \neq \emptyset$ seja $a_q = \max\{a_k; k \in C_x\}$ e $a_j = \min\{a_k; k \notin C_x\}$. Suponha por contradição que não existe um equilíbrio de Nash para o jogo de leilão dado. Defina $b_k = a_k$ se $k \neq j$ e $b_j = a_q$. Pelo Corolário 1* $p(b) = a_q$. É claro que $x(b) = x$. De fato, se $a_j > a_q$ então, pela primeira etapa da regra do desempate $x = x(b)$; se $a_j = a_q$ então $a = b$ e $x(b) = x(a) = x$. Como b não é um equilíbrio de Nash então existe um comprador $k(1)$ que pode melhorar desviando-se de b . Isso só acontecerá se $k(1) \notin C_x$ e $k(1)$ conseguir melhorar pagando um preço menor do que a_q , mesmo que isto lhe custe receber um número menor de objetos do que $x_{k(1)}$. Seja p^1 o preço com esta propriedade que lhe dá o maior payoff total verdadeiro (é fácil ver que por causa da primeira etapa da regra de desempate as possibilidades para p^1 são finitas e deverá ser algum número no conjunto $\{a_{q+1}, a_{q+2}, \dots, a_m, 0\}$). Assim $0 \leq p^1 \leq a_{q+1}$. Neste caso substitua $a_{k(1)}$ por p^1 e mantenha as estratégias dos outros compradores para obter b^1 . Então $k(1)$ não tem nenhum incentivo a se desviar de b^1 . Seja $y(1) = x(b^1)$. Como $k(1)$ melhora submetendo o lance $b^1_{k(1)} = p^1$ implica que q preenche a sua cota em b^1 (pois $p^1 < a_q$), donde $k(1)$ não pode estar preenchendo a sua cota em

b^1 , e portanto $p(b^1) = p^1$ pelo Corolário 1*. Como b^1 não é um equilíbrio de Nash então existe um comprador $k(2)$ tal que $k(2)$ tem incentivo em desviar-se de b^1 . Isso só acontecerá se $k(2) \notin C_{y(1)}$ e conseguir melhorar pagando um preço menor do que p^1 , mesmo que isto lhe custe receber um número menor de objetos. Seja p^2 o preço com esta propriedade que lhe dá o maior payoff total verdadeiro (p^2 será algum número no conjunto $\{a_{q+2}, a_{q+3}, \dots, a_m, 0\}$). Assim $0 \leq p^2 \leq a_{q+2}$. Neste caso substitua $a_{k(2)}$ por p^2 e mantenha as estratégias dos outros compradores para obter b^2 . Assim, $k(2)$ não tem nenhum incentivo em desviar-se de b^2 . Seja $y(2) = x(b^2)$. Como $k(2)$ melhora submetendo o lance $b_{k(2)}^2 = p^2 < a_{q+1}$ implica que $q+1$ preenche a sua cota em b^2 (pois $p^2 < a_{q+1}$), donde $k(2)$ não preenche a sua cota em b^2 , e portanto $p(b^2) = p^2$ e assim sucessivamente. Este processo termina num número finito de etapas, pois tão logo quando $0 \leq p^t \leq a_{q+t} = a_m$ teremos $p^t = 0$, se $a_m = 0$, ou $p^{t+1} = 0$, se $a_m > 0$. Em qualquer caso o preço final será 0. Denotemos por t' a última etapa do processo. Nesta etapa $k(t')$ não pode melhorar desviando-se de $b^{t'}$. Todos os compradores que submetem um lance maior que 0 em $b^{t'}$ preencherão sua cota ao preço 0 e portanto também não têm incentivo em desviar-se de $b^{t'}$. Se $j \neq k(t')$ e $b_j^{t'} = 0$, então $a_j = 0$ por construção de $b^{t'}$. Neste caso j também não tem nenhum incentivo em se desviar de $b^{t'}$. Então $b^{t'}$ é um equilíbrio de Nash do jogo dado, contradição. Logo o conjunto dos equilíbrios de Nash do jogo de leilão de regra φ é não vazio donde o resultado desejado segue e a demonstração está completa. ■

No que segue estaremos considerando a classe de leilões determinada por uma regra arbitrária de preço de equilíbrio, $p(\cdot)$, diferente da regra de preço mínimo de equilíbrio. Um perfil de estratégias será portanto um vetor de lances para qualquer um dos leilões desta classe.

Definição 12: O perfil de estratégias b é um **equilíbrio de Nash no sentido fraco** (resp. **forte**) para algum matching $x \in \Sigma^*(b)$, se é um equilíbrio de Nash para o jogo $(v(\cdot), x(\cdot))$, para alguma (respectivamente **toda**) regra de desempate $x(\cdot)$, com $x(b) = x$. (Isto é, se b é um **equilíbrio de Nash no sentido fraco** (resp. **forte**) para algum matching $x \in \Sigma^*(b)$, então, para nenhum j , existe b' com $b'_t = b_t$ para todo $t \neq j$, tal que para todo (resp. algum) matching $y \in \Sigma^*(b')$, $y_j U_j(b', y) > x_j U_j(b, x)$).

A estratégia conjunta b é um **equilíbrio de Nash no sentido fraco** (resp. **forte**) se b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco (resp. forte) para todo matching $x \in \Sigma^*(b)$.

Definição 13. Se b é um equilíbrio de Nash no sentido forte (resp. fraco) para $x \in \Sigma^*(b)$, dizemos que $(U(b, x), p(b))$ é o **payoff de equilíbrio no sentido forte** (resp. **fraco**) em relação a x e correspondente a b .

Assim, um payoff de equilíbrio no sentido forte (resp. fraco) em relação a x é o payoff em M correspondente às transferências obtidas de um equilíbrio de Nash no sentido forte (resp. fraco) para x . Segue da Definição 12 que todo equilíbrio de Nash no sentido forte é um equilíbrio de Nash no sentido fraco. Além disso, fixada uma regra de preço, b é um equilíbrio de Nash no sentido forte se e somente se b é um equilíbrio de Nash de todos os jogos de leilão com a dada regra de preço. Para provarmos a existência de equilíbrios de Nash no sentido forte necessitamos dos seguintes resultados.

Lema 1. Para cada ofertante j seja b_j definido tal que $b_j = a_j$ se $a_j < p^*$ e $p^* \leq b_j \leq a_j$ caso contrário. Então $\Sigma(M) = \Sigma^*(b)$.

Demonstração: Provaremos primeiro que $\Sigma(M) \subseteq \Sigma^*(b)$. Então seja $x \in \Sigma(M)$. Mostraremos inicialmente que x é ótimo para $M(b)$.

A idéia é mostrar que (p^*, x) é um preço de equilíbrio competitivo para $M(b)$. Aí o resultado segue da Proposição 4*. Então seja $j \in P$. Denote por $D_j^b(p^*)$ o conjunto de demanda de j ao preço p^* no mercado $M(b)$.

1º caso : $x_j = r_j$. Então temos pela Definição 3 que $a_j - p^* \geq 0$, donde $b_j - p^* \geq 0$ por definição de b_j . Se $b_j - p^* > 0$, $D_j^b(p^*) = \{r_j\}$, donde $x_j \in D_j^b(p^*)$; se $b_j - p^* = 0$, $D_j^b(p^*) = \{0, 1, \dots, r_j\}$, donde $x_j \in D_j^b(p^*)$.

2º caso : $0 < x_j < r_j$. Então $a_j - p^* = 0$ pela Definição 3, donde $p^* \leq b_j \leq a_j = p^*$, donde $b_j - p^* = 0$, donde $D_j^b(p^*) = \{0, 1, \dots, r_j\}$ e portanto $x_j \in D_j^b(p^*)$.

3º caso : $x_j = 0$. Então $a_j - p^* \leq 0$ pela Definição 3, donde $b_j = a_j$ pela definição de b , donde $b - p^* \leq 0$. Se $b_j - p^* = 0$, $D_j^b(p^*) = \{0, 1, \dots, r_j\}$ e se $b_j - p^* < 0$, $D_j^b(p^*) = \{0\}$. Em qualquer caso $x \in D_j^b(p^*)$.

Logo $x_j \in D_j^b(p^*) \forall j \in P$ e por conseguinte x é compatível com p^* em $M(b)$, o que mostra que (p^*, x) é um equilíbrio competitivo para $M(b)$.

Para ver que x é simples em $M(b)$ basta provar que existe, no máximo, um comprador j tal que $0 < x_j < r_j$, pela Proposição 3*. Mas isto decorre imediatamente do fato de que x é simples em M . Logo $x \in \sum(b)$.

Para provar que $x \in \sum^*(b)$, suponha que existe uma alocação $x' \in \sum^*(b)$ tal que $x' \neq x$. Então, pela primeira etapa da regra de desempate,

$$\sum_j a_j x'_j \geq \sum_j a_j x_j. \quad (1)$$

Além disso x' é factível para M . Da otimalidade de x em M segue que

$$\sum_j a_j x_j \geq \sum_j a_j x'_j. \quad (2)$$

Por (1) e (2) obtemos que $\sum_j a_j x'_j = \sum_j a_j x_j$ e portanto $x \in \sum^*(b)$. Logo $\sum(M) \subseteq \sum^*(b)$.

Na outra direção, suponha que $y \in \sum^*(b)$ e seja $x \in \sum(M)$. Pela primeira parte da demonstração, $x \in \sum^*(b)$. Então $\sum_j a_j y_j = \sum_j a_j x_j$, donde segue que $y \in \sum(M)$. Portanto $\sum(M) \supseteq \sum^*(b)$ e o resultado desejado segue. ■

Lema 2. a) *Seja x um matching ótimo para M . Seja b tal que, $\forall j \in P$, $b_j = a_j$ se $a_j < p^*$ e $p^* \leq b_j \leq a_j$ caso contrário. Então se $(p^1, x) \in E(b)$ temos que $(p^1, x) \in E(M)$.*

b) *Seja $(p^2, x) \in E(M)$. Seja b tal que, $\forall j \in P$, $b_j = a_j$ se $a_j < p^2$ e $p^2 \leq b_j \leq a_j$ caso contrário. Então $(p^2, x) \in E(b)$.*

Demonstração: a) Queremos demonstrar que x é compatível com p^1 em M . Por hipótese $(p^1, x) \in E(b)$, logo x é compatível com p^1 em (Mb) . Seja $j \in P$. Temos três casos.

1º caso : $x_j = r_j$. Então $b_j - p^1 \geq 0$ pela Definição 3, donde $a_j \geq b_j \geq p^1$, donde $a_j - p^1 \geq 0$, donde $r_j \in D_j(p^1)$ pela Definição 3. Logo $x_j \in D_j(p^1)$.

2º caso : $0 < x_j < r_j$. Então $b_j - p^1 = 0$ pela Definição 3, donde $a_j \geq b_j = p^1$, donde $a_j - p^1 \geq 0$. Afirmamos que $a_j \geq p^*$ e portanto $b_j \geq p^*$. De fato, se $a_j < p^*$ então como x é compatível com p^* em M pela Proposição 5*, implica que $x_j = 0$, contradição. Então se $a_j - p^1 > 0$ teremos que $a_j > p^1 = b_j \geq p^*$, donde $a_j - p^* > 0$, o que implica que $x_j = r_j$, contradição. Logo $a_j - p^1 = 0$ e $x_j \in D_j(p^1)$.

3º caso : $x_j = 0$. Então $b_j - p^1 \leq 0$, donde $b_j \leq p^1$. Afirmamos que $a_j \leq p^*$ e portanto $b_j = a_j$. De fato, se $a_j > p^*$ então $a_j - p^* > 0$, e como x é compatível com p^* em M implica que $x_j = r_j > 0$, contradição. Então $a_j = b_j \leq p^1$, donde $a_j - p^1 \leq 0$, donde $x_j \in D_j(p^1)$.

b) Por hipótese x é compatível com p^2 em M . queremos mostrar

que x é compatível com p^2 em $M(b)$. Seja $j \in P$.

1º caso : $x_j = r_j$. Então $a_j - p^2 \geq 0$ pela Definição 3, donde $p^2 \leq b_j \leq a_j$ pela definição de b_j , donde $b_j - p^2 \geq 0$, donde $r_j \in D_j^b(p^2)$, o conjunto de demanda de j ao preço p^2 em $M(b)$. Logo $x_j \in D_j^b(p^2)$.

2º caso : $0 < x_j < r_j$. Então $a_j - p^2 = 0$ pela Definição 3, donde $p^2 \leq b_j \leq a_j = p^2$, donde $b_j - p^2 = 0$ e portanto $x_j \in D_j^b(p^2)$.

3º caso : $x_j = 0$. Então $a_j - p^2 \leq 0$, donde $b_j = a_j$. Então $b_j - p^2 \leq 0$, donde $x_j \in D_j^b(p^2)$.

Em qualquer caso portanto $x_j \in D_j^b(p^2)$, como queríamos demonstrar. ■

No que segue faremos uso da seguinte observação:

Observação 2: Sejam $P = \{1, \dots, m\}$, $|Q| = n$ e $r_j = c \forall j \in P$. Se $n > mc$ ou n é um múltiplo de c , então é fácil ver que, para todo mercado $M(b)$ e para toda alocação $x \in \sum^*(b)$, $x_j = c$ ou $x_j = 0$. Isto é, para todo mercado $M(b)$, $B_x = \emptyset \forall x \in \sum^*(b)$.

Proposição 1. *Para cada $j \in P$ seja b_j uma estratégia onde $b_j = a_j$ se $a_j < p^*$ e $p^* \leq b_j \leq a_j$ caso contrário. Suponha que $r_j = c \forall j \in P$. Além disso $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Se $|E(b)| = 1$ então b é um equilíbrio de Nash no sentido forte (e consequentemente no sentido fraco). Além disso (u^*, p^*) é o correspondente payoff de equilíbrio segundo qualquer matching de $\sum^*(b)$.*

Demonstração. Argumentando por contradição, suponha que b não é um equilíbrio de Nash no sentido forte para algum matching $x \in \sum^*(b)$. I. e., existe um comprador j , um perfil de estratégias b' , com $b'_t = b_t$ se $t \neq j$, tal que para algum matching $x' \in \sum^*(b')$,

$$x'_j U_j(b', x') > x_j U_j(b, x). \quad (1)$$

Lema 1 implica que $x \in \sum(M)$. Pelo Lema 2-a), $(p(b), x) \in E(M)$, donde

$$p(b) \geq p^* \quad (2)$$

pela minimalidade de p^* . Pela Observação 2, $x_j = c$ ou $x_j = 0$. Se $x_j = c$ então $U_j(b, x) = a_j - p(b) = a_j - (b_j - u_j(b)) = (a_j - b_j) + u_j(b)$. Se $x_j = 0$ então $a_j \leq p^*$, pois x é compatível com p^* , donde $b_j = a_j$. Além disso $u_j(b) = 0$. Logo, se $x_j = 0$, $U_j(b, x) = 0 = (a_j - b_j) + u_j(b)$. Portanto, em qualquer caso, temos que $U_j(b, x) = (a_j - b_j) + u_j(b)$, donde

$$U_j(b, x) - (a_j - b_j) = u_j(b) \quad (3)$$

e como $a_j \geq b_j$ segue que

$$U_j(b, x) \geq u_j(b) \quad (4)$$

Por (1) e (4) segue que $x'_j U_j(b', x') > x_j U_j(b, x) \geq x_j u_j(b) \geq 0$. Logo

$$x'_j U_j(b', x') > x_j u_j(b), \quad (5)$$

e $x'_j U_j(b', x') > 0$, o que implica que $U_j(b', x') > 0$ e

$$x'_j = c. \quad (6)$$

Como $|E(b)| = 1$, temos que

$$u_j(b) = u_j^*(b). \quad (7)$$

De (5) e (7) segue que

$$x'_j U_j(b', x') > x_j u_j^*(b). \quad (8)$$

Denotemos por $U'_j(b', x')$ a transferência associada a $(u(b'), p(b'); x')$ em $M(b)$. Como $x'_j = c$ por (6) devemos ter $U'_j(b', x') = b_j - p(b')$. Assim, $U'_j(b', x') = (a_j - p(b')) - (a_j - b_j) = U_j(b', x') - (a_j - b_j)$. Se $x_j = c = x'_j$ então $x'_j U'_j(b', x') = x'_j U_j(b', x') - x'_j (a_j - b_j) > x_j U_j(b, x) - x'_j (a_j - b_j) = x_j [U_j(b, x) - (a_j - b_j)] = x_j u_j(b) = x_j u_j^*(b)$, onde a primeira desigualdade segue de (1); a penúltima igualdade segue de (3) e a última de (7). Se $x_j = 0$ então $a_j \leq p^*$, então $b_j = a_j$, donde $x'_j U'_j(b', x') = x'_j (a_j - p(b')) = x'_j U_j(b', x') > x_j u_j^*(b)$, onde na última desigualdade usou-se (8). Portanto

$$x'_j U'_j(b', x') > x_j u_j^*(b). \quad (9)$$

Denotando por $U_j^*(b', x')$ a transferência associada a $(u^*(b'), p^*(b'); x')$ em $M(b)$ obtemos que $x'_j U_j^*(b', x') = x'_j (b_j - p^*(b')) \geq x'_j (b_j - p(b')) = x'_j U'_j(b', x') > x_j u_j^*(b)$, onde a primeira desigualdade segue da minimalidade de $p^*(b')$ em $M(b')$ e a última de (9). Portanto $x'_j U_j^*(b', x') > x_j u_j^*(b)$, o que contraria o Teorema 3* que implica que revelar b_j é uma estratégia dominante para j em $M(b)$. Logo b é um equilíbrio de Nash no sentido forte para todo $x \in \sum^*(b)$.

Para ver que (u^*, p^*) é o payoff de equilíbrio correspondente a b , use o Lema 2-b), com $p^2 = p^*$, para obter que $(p^*, x) \in E(b)$. Como $|E(b)| = 1$ obtemos que $p^* = p(b)$. Então, $\forall j \in P$, $U_j(b, x) = a_j - p^* = u_j^*$ se $x_j = r_j$ e $U_j(b, x) = 0 = u_j^*$ se $x_j = 0$. Assim, $U_j(b, x) = u_j^* \forall j \in P$. Portanto, $(U(b, x), p(b)) = (u^*, p^*)$ e a demonstração está completa.

Sem a condição " $n > mc$ ou n é um múltiplo de c " não podemos garantir que a estratégia definida na Proposição 1 é um equilíbrio

de Nash no sentido forte, mesmo que todos os ofertantes tenham a mesma cota. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo 4. Considere $P = \{1, \dots, 4\}$, $n = 5$, $r_j = 2 \forall j \in P$, $a = (8, 7, 5, 2)$. O único preço de equilíbrio para este mercado é $p^* = 5$. O único matching ótimo e simples é $x = (2, 2, 1, 0)$. Suponha que exista um perfil de estratégias b que seja um equilíbrio de Nash no sentido fraco para algum $y \in \sum^*(b)$ e que, $\forall j \in P$, $b_j = a_j$ se $a_j < p^*$ e $p^* \leq b_j \leq a_j$ caso contrário. Então $b_3 = 5$ e $b_4 = 2$. Seja $b' = (b_1, b_2, 3, 2)$. Como $a_1 \geq 5$ implica que $b_1 \geq 5$; como $a_2 \geq 5$ implica que $b_2 \geq 5$. Portanto $b_1 > b'_1$ e $b_2 > b'_2$. Assim x é o único matching ótimo e simples para $M(b')$, donde $p(b') = 3$. Por outro lado, o Lema 1 implica que $y = x$. Portanto $U_3(b', x) = 5 - 3 = 2 > 0 = U_3(b, x)$, donde b não é um equilíbrio de Nash no sentido fraco. Consequentemente b não é um equilíbrio de Nash no sentido forte.

O Exemplo 5 ilustra o fato de que, se b não é do tipo descrito na Proposição 1 então b não é necessariamente um equilíbrio de Nash no sentido forte, mesmo que as outras condições dessa proposição sejam satisfeitas.

Exemplo 5. Seja $P = \{1, 2\}$, $|Q| = 1$, $r_1 = r_2 = 1$, $a = (9, 7)$. Seja $b_1 = b_2 = 10$. Neste caso $|E(b)| = 1$, todos os compradores têm a mesma cota e n é múltiplo dessa cota. No entanto, pode facilmente ser verificado que b não é um equilíbrio de Nash em nenhum dos dois sentidos e para qualquer $x \in \sum^*(b)$.

Proposição 2: *Se b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para algum $x \in \sum^*(b)$ então $|E(b)| = 1$.*

Demonstração: Seja b um equilíbrio de Nash no sentido fraco para $x \in \sum^*(b)$. Suponha que exista mais de um preço de equilíbrio em

$M(b)$. Então existe algum $j \in P$ tal que $u_j^*(b) > u_j(b) \geq 0$. Então $u_j^*(b) > 0$. Como x é compatível com $p^*(b)$ implica que j deve ter preenchido sua cota em x . Seja $\lambda > 0$ tal que

$$u_j^*(b) > \lambda > u_j(b) \quad (1)$$

Seja $b'_j = b_j - \lambda$, $b'_k = b_k \forall k \neq j$. Por (1) e pelo fato de que $b_j \geq u_j^*(b)$ temos que $b'_j = b_j - \lambda \geq u_j^*(b) - \lambda > 0$. Desta forma b'_j pertence ao conjunto de estratégias de j . Afirmamos que j completou sua cota em qualquer matching ótimo de $M(b')$. De fato, $p^*(b) = b_j - u_j^*(b) < b_j - \lambda = b'_j$. Por outro lado, como $b \geq b'$, temos pela Proposição 7* que $p^*(b) \geq p^*(b') \geq 0$. Então $b'_j > p^*(b) \geq p^*(b')$, donde $u_j^*(b') = b'_j - p^*(b') > 0$, o que implica que j completou sua cota em qualquer matching ótimo para $M(b')$. Assim se $x' \in \sum^*(b')$, temos que $x'_j = r_j$. Então $p(b') \leq b'_j = b_j - \lambda < b_j - u_j(b) = p(b)$, onde na última desigualdade foi usado (1). Portanto $U_j(b', x') = a_j - p(b') > a_j - p(b) = U_j(b, x)$. Como j preenche a sua cota em x' e em x implica que o payoff total de j submetendo b'_j é maior do que submetendo b_j , o que contradiz a hipótese de que b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para x . Então $|E(b)| = 1$. ■

Teorema 2. *Seja p um preço de equilíbrio para M . Para cada $j \in P$ seja $b_j = p$ se $a_j \geq p$ e $b_j = a_j$ caso contrário. Então (a) se b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para algum $x \in \sum^*(b)$ então $p = p^*$ e (b) Suponha que $r_j = c \forall j \in P$. Além disso $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Se $p = p^*$ então b é um equilíbrio de Nash no sentido forte e (u^*, p^*) é o payoff de equilíbrio.*

Demonstração. Para provar (a) suponha que b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para algum $x \in \sum^*(b)$. É fácil ver que a definição de b satisfaz as hipóteses do Lema 1, donde $x \in \sum(M)$. Por outro lado o Lema 2-b) e o Teorema 1* aplicado a (p, x) e (p^*, x)

implica que (p, x) e (p^*, x) são equilíbrios competitivos para $M(b)$. Porém $|E(b)| = 1$ pela Proposição 2. Portanto $p = p^*$.

Para a demonstração de (b) suponha que $p = p^*$. Seja $p' \in E(b)$ e $x \in \sum^*(b)$. Lema 2-a) implica que (p', x) é um preço de equilíbrio competitivo de M . A minimalidade de p^* em M implica que $p' \geq p^*$. Por outro lado, $0 \leq b_j \leq p^* \forall j \in P$, pela definição de b . Portanto se $p^* < p'$ teremos que $b_j < p' \forall j \in P$, o que implica que $x_j = 0 \forall j \in P$. Neste caso, ao preço p' , nenhum objeto é vendido. Por outro lado $p' > p^* \geq 0$, donde $p' > 0$, o que contraria o fato de que (p', x) é um equilíbrio competitivo. Logo $p' = p^*$. Desta forma $|E(b)| = 1$. Agora use a Proposição 1 para concluir que b é um equilíbrio de Nash no sentido forte e (u^*, p^*) é o payoff de equilíbrio correspondente. ■

Observe que o item a) do Teorema 2 não requer a hipótese de que todos os compradores tenham a mesma cota e o número de objetos seja um múltiplo dessa cota ou maior que o produto dessa cota pelo número de compradores.

Corolário 1. *Para cada comprador j seja $b_j = p^*$ se $a_j \geq p^*$ e $b_j = a_j$ caso contrário. Suponha que $r_j = c \forall j \in P$. Além disso $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Então b é um equilíbrio de Nash para todo jogo de leilão. Além disso o payoff (u^*, p^*) é o payoff de equilíbrio correspondente.*

Podemos ter mais de um payoff de equilíbrio. Veja o seguinte exemplo

Exemplo 6. Seja $P = \{1, 2\}, |Q| = 1, r_1 = r_2 = 1, a = (9, 7)$. Então $u_1^* = 2, u_2^* = 0, p^* = 7$ e o único matching ótimo e simples aloca o objeto para o comprador 1. Podemos facilmente verificar que $b = (8, 8)$ é um equilíbrio de Nash no sentido forte com payoff $u_1 = 1, u_2 = 0, p(b) = 8$, que é diferente de (u^*, p^*) .

O teorema abaixo soluciona o problema de conflito de interesses entre os compradores discutido na sessão 1.

Teorema 3: *Suponha que todos os compradores têm a mesma cota c e $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Se b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para algum $x \in \sum^*(b)$, então $(p(b), x)$ é um equilíbrio competitivo para M . Consequentemente $U_j(p(b), x) \geq 0 \forall j \in P$.*

Demonstração. Seja b um equilíbrio de Nash no sentido fraco para $x \in \sum^*(b)$. Suponha que $(p(b), x)$ não seja um equilíbrio competitivo para M . Então existe $j \in P$ tal que $x_j \notin D_j(p)$. Temos dois casos.

1º caso : $x_j = r_j$ e $U_j(b, x) = a_j - p(b) < 0$.

Então defina b' tal que $b'_k = b_k$ se $k \neq j$ e $b'_j = a_j$. Se $x' \in \sum^*(b')$ temos que $U_j(b', x') = 0$ ou $U_j(b', x') = a_j - p(b') = b'_j - p(b') = u_j(b') \geq 0$. Em qualquer hipótese $U_j(b', x') > U_j(b, x)$, o que contradiz o fato de que b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para x .

2º caso : $x_j = 0$ e $a_j - p(b) > 0$.

Neste caso $U_j(b, x) = 0 < a_j - p(b)$. Portanto, para algum $\lambda > 0$

$$p(b) < a_j - (U_j(b, x) + \lambda) \quad (1)$$

Agora defina b' tal que: $b'_k = b_k$ se $k \neq j$ e $b'_j = a_j - \lambda$. Mostraremos que $y_j = r_j \forall y \in \sum^*(b')$, e então $U_j(b', y) = a_j - p(b') \geq a_j - b'_j = \lambda > 0 = U_j(b, x)$, o que contradiz o fato de que b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para x .

De fato, suponha por contradição que $y_j = 0$. Como b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para x , $|E(b)| = 1$ pela Proposição 2 e portanto $p^*(b) = p^*(b) = p(b)$. Segue então do Corolário 1* que $p(b) = \min\{b_k; k \in A_x\} = \max\{b_k; k \in C_x\}$ (estou usando aqui que $j \in C_x$ e portanto $C_x \neq \emptyset$).

Seja $q \in A_x$ tal que $b_q = p(b)$. Por (1) e da definição de b' temos que $b'_j > b'_q$, donde $y_q = 0$, pois estamos assumindo que $y_j = 0$. Mas então $q \in C_y$. Por outro lado, para todo $k \in C_x$ temos que $k \in C_y$, pois $j \in C_y$ e para todo $k \in C_x - \{j\}$ implica que $b'_k = b_k \leq b_q = b'_q$. Assim $C_y \supseteq C_x \cup \{q\}$, o que é impossível visto que $|C_y| = |C_x|$. (Este fato decorre de que pela Observação 2 $B_x = B_y = \emptyset$). Portanto $y_j = c$ e $(p(b), x)$ é um equilíbrio competitivo para M . Que $U_j(p(b), x) \geq 0 \forall j \in P$ segue do fato de que, sendo $(p(b), x)$ um equilíbrio competitivo, $a_j - p \geq 0$ toda vez que $x_j > 0$. Logo a demonstração está completa. ■

O seguinte resultado é imediato do Teorema 3 e da Observação 2.

Corolário 2. *Suponha que todos os compradores têm a mesma cota c e $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Se b é um equilíbrio de Nash no sentido usual para $(p(.), x(.))$ então $(p(b), x(.))$ é um equilíbrio competitivo para M . Consequentemente $U_j(p(b), x(b)) \geq 0 \forall j \in P$.*

Consequentemente não existe nenhum payoff de equilíbrio que seja preferido por algum comprador ao preço mínimo de equilíbrio competitivo, em relação às verdadeiras avaliações. Portanto, como discutido na sessão 1, a estratégia descrita no Teorema 2 pode ser considerada como a melhor maneira de jogar para os compradores.

Sem a condição “ $n > mc$ ou n é um múltiplo de c ” a conclusão de Teorema 3 não é verdadeira. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo 7. Considere $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $|Q| = 3$, $r_j = 2 \forall j \in P$, $a = (8, 7, 6, 6)$. O único equilíbrio competitivo aloca dois objetos para o comprador 1 e um objeto para o comprador 2, ao preço $p = 7$. Suponha agora que os compradores submetem o lance $b = (8, 6, 5, 6)$. Usando a regra do desempate (primeira etapa) o único equilíbrio

competitivo para $M(b)$ aloca dois objetos para o comprador 1 e um objeto para o comprador 2, ao preço $p(b) = 6$. É fácil verificar que b é um equilíbrio de Nash em ambos os sentidos. Entretanto $p(b)$ não é um preço de equilíbrio para M .

O Teorema 4 mostra que os compradores não necessitam conhecer a regra de desempate que será usada num leilão para computar um equilíbrio de Nash no sentido fraco ou no sentido forte.

Teorema 4. *Suponha que todos os compradores têm a mesma cota c e $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Se b é um equilíbrio de Nash no sentido forte (resp. fraco) para algum $x \in \Sigma^*(b)$, então b é um equilíbrio de Nash no sentido forte (resp. fraco) para todo $x \in \Sigma^*(b)$.*

Demonstração. Sejam x e x' em $\Sigma^*(b)$. Então $\sum_j a_j x_j = \sum_j a_j x'_j$. Logo $\sum_j x_j U_j(b, x) + np(b) = \sum_j a_j x_j = \sum_j a_j x'_j = \sum_j x'_j U_j(b, x') + np(b)$. Assim

$$\sum_j x_j U_j(b, x) = \sum_j x'_j U_j(b, x') \quad (1)$$

Suponha que b é um equilíbrio de Nash no sentido forte (resp. fraco) para x . O Corolário 2 (resp. Teorema 3) implica que $(p(b), x)$ é competitivo para M . Consequentemente $a_j - p(b) \geq 0$ se $x_j \geq 0$ e $a_j - p(b) \leq 0$ se $x_j = 0$, donde decorre facilmente que

$$U_j(b, x) \geq U_j(b, x') \forall j \in P \quad (2)$$

(É suficiente verificar o caso em que $x_j = 0$ e $x'_j > 0$. Neste caso $U_j(b, x) = 0 \geq a_j - p(b) = U_j(b, x')$. Os outros casos são imediatos).

Afirmamos que $x_j U_j(b, x) \geq x'_j U_j(b, x') \forall j \in P$. De fato, decorre da Observação 2 que $B_x = B_{x'} = \emptyset$. O caso em que $x_j \geq x'_j$ é

trivial. Então suponha que $x_j = 0$ e $x'_j = r_j$. Como $p(b, x)$ é competitivo para M temos que $a_j - p(b) \leq 0$. Como $x'_j = r_j$ temos que $U_j(b, x') = a_j - p(b)$. Logo $U_j(b, x') \leq 0$. Por outro lado o fato de que $x_j = 0$ implica que $U_j(b, x) = 0$. Assim, $x_j U_j(b, x) = 0 \geq x'_j U_j(b, x')$. Portanto

$$x_j U_j(b, x) \geq x'_j U_j(b, x') \forall j \in P \quad (3)$$

Por (1) e (3) segue que

$$x_j U(b, x) = x'_j U_j(b, x') \forall j \in P \quad (4)$$

O resultado desejado segue facilmente de (4) e da Definição 10. ■

O Corolário 3 mostra que o payoff de equilíbrio é o mesmo, independentemente da escolha do leiloeiro.

Corolário 3. *Suponha que todos os compradores têm a mesma cota c e $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Seja b um equilíbrio de Nash no sentido forte (resp. fraco). Sejam x e x' em $\Sigma^*(b)$. Então o payoff de equilíbrio no sentido forte (resp. fraco) correspondente a x é igual ao payoff de equilíbrio no sentido forte (resp. fraco) correspondente a x' .*

Demonstração. Usando primeiro que b é um equilíbrio de Nash no sentido forte (resp. fraco) para x , segue da demonstração do Teorema 4, expressão (2) que $U_j(b, x) \geq U_j(b, x') \forall j \in P$. Invertendo-se os papéis entre x e x' obtemos que $U_j(b, x') \geq U_j(b, x) \forall j \in P$. Logo $U_j(b, x) = U_j(b, x') \forall j \in P$ e a demonstração está completa. ■

Seria desejável porém que, para selecionar um equilíbrio de Nash para um dado jogo, os compradores não necessitassem considerar a

regra de desempate. Este resultado faz uso do Lema 3, que fornece a equivalência entre dois conceitos de equilíbrios de Nash.

Lema 3. *Suponha que $r_j = c \forall j \in P$. Além disso $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Se b é em equilíbrio de Nash no sentido fraco para $x \in \sum^*(b)$ então b é um equilíbrio de Nash no sentido forte para $x \in \sum^*(b)$.*

Demonstração. Suponha que b não é um equilíbrio de Nash no sentido forte para $x \in \sum^*(b)$. Então existe uma regra de desempate $x(\cdot)$, com $x(b) = x$, tal que b não é um equilíbrio de Nash no sentido usual para o jogo de regra $(p(\cdot), x(\cdot))$. Isto é, existem um comprador j e b' com $b'_t = b_t$ para todo $t \neq j$, tais que para $y = x(b')$,

$$y_j U_j(b', y) > x_j U_j(b, x) \geq 0, \quad (1)$$

onde a última desigualdade segue do Teorema 3, donde

$$y_j = c. \quad (2)$$

Vou mostrar que $z_j U_j(b', z) > x_j U_j(b, x)$ para todo $z \in \sum^*(b')$, o que contraria a hipótese de que b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para x . De fato suponha, por contradição, que existe $z \in \sum^*(b)'$ tal que

$$z_j U_j(b', z) \leq x_j U_j(b, x). \quad (3)$$

Por (1) e (3) segue que $z_j U_j(b', z) < y_j U_j(b', y)$. Então $z_j = 0$, pois caso contrário teríamos que $z_j = y_j = c$, por (2) e $U_j(b', z) = a_j - p(b') = U_j(b', y)$, contradição. Se $x_j = c$ então teríamos por (1) e usando (2) que $a_j - p(b') > a_j - p(b)$, donde

$$p(b') < p(b). \quad (4)$$

Como b é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para x , a Proposição 2 implica que $|E(b)| = 1$, donde $p(b) = p^*(b)$. Aplicando o Teorema 3* para o mercado $M(b)$ temos que b_j é uma estratégia dominante para j em qualquer leilão com regra de preço dada pelo preço mínimo de equilíbrio. Assim dado que $x_j = y_j = c$, $b_j - p(b) = b_j - p^*(b) \geq b_j - p^*(b') \geq b_j - p(b')$, donde $p(b) \leq p(b')$, o que contraria (4). Logo $x_j = 0$.

Observe agora que de $y_j = c$ implica que $b'_j - p(b') \geq 0$ e $z_j = 0$ implica que $b'_j - p(b') \leq 0$, donde $b'_j - p(b') = 0$, donde

$$p(b') = b'_j. \quad (5)$$

Então $j \in A_y - A_z$ e $j \in C_z - C_y$. Como $|A_y| = |A_z|$ e $|C_z| = |C_y|$ segue que existe k tal que $k \in C_y - C_z$ e $k \in A_z - A_y$. Então lembrando que $b_k = b'_k$, obtemos com um argumento análogo ao usado acima que

$$p(b') = b_k. \quad (6)$$

Por (5) e (6) segue que

$$p(b') = b'_j = b_k \quad (7)$$

Como $x_j = 0$, não será diminuindo o valor do seu lance que j ganhará algum objeto segundo y . Assim $b'_j > b_j$, donde $b_j < b_k$, por (7).

Afirmo que $b_k \geq p(b)$. De fato se $k \in C_x$, como $k \in A_z$, então existe $q \in A_x$ tal que q foi deslocado para C_z . Então $b_q \geq b_k$ e $b_k \geq b_q$, donde $b_q = b_k$. Logo $p(b) = b_k$ pelo Corolário 1*. Se $k \in A_x$ então $b_k \geq p^*(b) \geq p(b)$. Logo em qualquer caso

$$b_k \geq p(b) \quad (8)$$

Assim, como $U_j(b', y) > 0$, implica que

$$a_j - p(b') > 0. \quad (9)$$

Entretanto $b_k = p(b')$ por (6), donde $p(b') \geq p(b)$ por (8), donde usando também (9), $a_j - p(b) \geq a_j - p(b') > 0$. Assim $a_j - p(b) > 0$. Porém $(p(b), x)$ é competitivo para M e $x_j = 0$, o que implica que $a_j - p(b) \leq 0$, contradição.

Logo $z_j U_j(b', z) > x_j U_j(b, x)$ para todo $z \in \sum^*(b')$, e a demonstração está completa. ■

Podemos agora enunciar e demonstrar o resultado desejado.

Teorema 5. *Suponha que $r_j = c \forall j \in P$. Além disso $n > mc$ ou n é um múltiplo de c . Se b é um equilíbrio de Nash no sentido usual para algum jogo de regra de preço $p(\cdot)$ então b é um equilíbrio de Nash para todo jogo de regra de preço $p(\cdot)$. Consequentemente o payoff de equilíbrio é o mesmo para todo jogo de regra $p(\cdot)$.*

Demonstração. Se b é um equilíbrio de Nash para o jogo de regra $(p(\cdot), x(\cdot))$ então ele é um equilíbrio de Nash no sentido fraco para $x = x(b)$. Pelo Lema 3, b é um equilíbrio de Nash no sentido forte para x . Pelo Teorema 4, b é um equilíbrio de Nash no sentido forte para todo $y \in \sum^*(b)$, e consequentemente b é um equilíbrio de Nash no sentido usual para todo jogo de regra de preço dada por $p(\cdot)$. A segunda afirmação é imediata do Corolário 3. ■

5. Conclusão

Modelamos um jogo de mercado de compra e venda onde objetos idênticos e indivisíveis estão para ser vendidos por um único vendedor para compradores potenciais, que podem comprar até uma dada cota de objetos. Cada comprador tem um preço máximo que estaria

disposto a pagar por um objeto; o vendedor tem um preço mínimo pelo qual aceitaria vender qualquer dos objetos. Qualquer comprador pode efetuar uma transação com o vendedor se ambos concordarem e ninguém é compelido a comprar ou vender. Os agentes podem comunicar-se uns com os outros. Ofertas e contra-ofertas são feitas terminando com uma alocação dos objetos para os compradores, que respeita as cotas de cada agente, e com um preço para os objetos. É razoável imaginar que uma transação entre um comprador e o vendedor ocorrerá somente quando ambos os agentes estiverem certos de que nada mais favorável existe para eles no mercado.

Que transações podemos predizer que ocorrerão?

Estamos diante de um jogo cooperativo e portanto as regras do jogo não especificam os detalhes de como as transações são feitas.

Em Sotomayor (1999-a) identificamos o conceito solução adequada para este jogo como sendo o de equilíbrio competitivo e mostramos que equilíbrios competitivos sempre existem. Como obtê-los? É fácil imaginar que um mercado descentralizado como o exposto acima nem sempre será eficiente devido a falhas na sua organização. A idéia então é usar um mecanismo de compra e venda centralizado que produza essas alocações. Em Sotomayor (1999-a) sugerimos um leilão dinâmico ascendente que produz o preço mínimo de equilíbrio. Com as hipóteses de que todos os compradores têm a mesma cota e o número de objetos é um múltiplo dessa cota ou é maior que a quantidade total das cotas, provamos que este leilão é à prova de estratégia. Desta forma os compradores só necessitam conhecer o seu próprio preço de reserva.

Sob as mesmas hipóteses acima propusemo-nos, neste trabalho, a analisar uma classe de leilões de lance lacrado sob informação completa. O conjunto dos lances submetidos $b = (b_1, \dots, b_m)$ determina um intervalo $[p^*(b), p^*(b)]$ do qual um preço de equilíbrio competitivo pode ser selecionado. O preço $p(b)$ é $\lambda p^*(b) + (1 - \lambda)p^*(b)$,

onde cada escolha de $\lambda \in [0, 1]$ juntamente com uma escolha de uma regra de matching define um mecanismo diferente. Cada um desses mecanismos induz um jogo não cooperativo cuja estrutura estratégica é então analisada. Destacamos vários aspectos comuns e surpreendentes a todos estes jogos. Um deles é que cada um destes mecanismos pode ser visto como um processo competitivo para se alcançar um resultado cooperativo: se os lances formam um equilíbrio de Nash então o correspondente payoff de equilíbrio, além de ser um equilíbrio competitivo para o mercado correspondente aos lances submetidos, é também um equilíbrio competitivo para o mercado das verdadeiras avaliações.

Para esses jogos encontramos uma estratégia conjunta que é um equilíbrio de Nash em qualquer dos jogos de leilão considerados. Além disso o payoff de equilíbrio correspondente é o menor preço de equilíbrio competitivo para o mercado das verdadeiras avaliações.

Analizamos as questões estratégicas com que se deparam os compradores, não somente num jogo particular, mas especialmente nas situações em que a segunda etapa da regra de desempate não é de seu pleno conhecimento. Mostramos que, neste último caso, esta falta de informação não altera o comportamento estratégico dos compradores. Especificamente, se eles têm uma estratégia de equilíbrio de Nash b para algum jogo de leilão com regra $(p(\cdot), x(\cdot))$, então b é um equilíbrio de Nash para todo jogo de leilão de regra de preço $p(\cdot)$.

O modelo tratado aqui usa a hipótese de informação completa sobre as verdadeiras avaliações dos compradores por parte de todos os agentes, inclusive do leiloeiro. A idéia subjacente é muito simples e aplica-se aos modelos em que, conhecendo-se o uso que um comprador dará para um dado objeto, seja possível estimar quanto ele ganhará possuindo o objeto e daí deduzir o valor do objeto para o dado comprador. Ou seja, assumimos que o perfil dos compradores

seja de conhecimento comum, o que não é uma hipótese forte. Para ilustrar consideremos a seguinte situação. Um terreno está para ser leilado. Existem três compradores potenciais. O primeiro é uma Universidade que deseja melhorar a qualidade de ensino dos seus cursos de pós-graduação. O terreno seria usado para a construção de salas para a instalação de equipamentos modernos. O segundo comprador é uma escola de segundo grau privada, que usaria o terreno para construir dez salas de aula para receber mais seiscentos estudantes. O terceiro comprador é um pastor da Igreja Universal, que deseja usar o terreno para construir uma igreja e receber 1000 fiéis. É perfeitamente claro aqui quão distintos são os valores de reserva do terreno para os três compradores. Esses valores podem ser determinados, com uma boa aproximação, com a ajuda de mais algumas informações fáceis de serem obtidas por qualquer agente⁴.

Acreditamos que a modelagem e análise desenvolvida aqui possam ser úteis para o estudo de vários problemas que consideramos de interesse. Basicamente estes problemas consistem em analisar a estrutura estratégica do mercado de objetos idênticos, sob informação completa, quando 1) as funções payoff dos compradores não são necessariamente aditivas, i. e. , dependem também do número de objetos comprados. 2) as funções payoff dos compradores dependem continuamente dos seus preços de reserva mas não são necessariamente lineares; 3) existe mais de um vendedor, cada um possuindo único objeto. 4) Cada vendedor possui mais de um objeto.

Submetido em julho de 1999. Revisado em dezembro de 1999.

⁴ Agradeço a Maurício Bugarin por ter me apontado esta interpretação.

Referências Bibliográficas

- Ausubel, L. 1997. "An efficient ascending-bid auction for multiple objects", Working paper, 97-06.
- Crawford, V. P & Knoer, E. L. 1981. "Job matching with heterogeneous firms and workers". *Econometrica* **49**: 437-450.
- Demange, G. 1982. "Strategyproofness in the assignment market game". Preprint. Paris: École Polytechnique, Laboratoire d'Économetrie.
- Demange, G. & Gale, David 1985. "The strategy structure of two-sided matching markets". *Econometrica* **53**:873-83.
- Demange, G., Gale, David & Sotomayor, Marilda 1986. "Multi-item auctions", *J.P.E.* **94**:863-872.
- Leonard, Herman B. 1983. "Elicitation of honest preferences for the assignment of individuals to positions". *J.P.E.* **91**:461-79.
- Shapley, Lloyd S., & Shubik Martin 1972. "The assignment game I: The core". *International Journal of Game Theory* **1**(2):111-130.
- Sotomayor, M. 1992. "The multiple partners game", *Equilibrium and Dynamics: Essays in Honor to David Gale* ; editado por M. Majumdar. Publicado por Macmillian ; 322-336.
- _____.1999-a. "Um simples mercado de compra e venda", mimeo.
- _____.1999-b. "Market clearing sealed-bid auctions for non-identical objects with single-unit demands", mimeo.
- Roth, A. & Sotomayor Marilda 1990. "Two-sided matching. A study in game theoretic modeling and analysis", *Econometric Society Monograph Series* , **18**, Cambridge University Press.
- Rustichini, A., Satterhwaite Mark & Williams Steven 1994. "Convergence to efficiency in a simple market with complete information", *Econometrica* **62**(5):1041-1063.

- Vickrey, W. 1961. "Counterspeculation, auctions and competitive sealed tenders", *J. Finance* **16**:8-37.
- Wilson, R. 1977. "A bidding model of perfect competition", *Review of Economic Studies*, 44(3):511-518.