

**Textos para  
Discussão**

**312**

Julho  
de 2012

**CEQEF  
Working  
Paper Series**

**02**

Julho  
de 2012



MUDANÇAS DE REGIME E PERSISTÊNCIA DOS  
CHOQUES SOBRE A VOLATILIDADE PARA A SÉRIE DE  
PREÇOS DO PETRÓLEO: UMA ANÁLISE COMPARATIVA  
DA FAMÍLIA GARCH E MODELOS COM MUDANÇA DE  
REGIME MARKOVIANA – MSIH E SWARCH

**Pedro Luiz Valls Pereira  
André Barbosa Oliveira**



Os artigos dos *Textos para Discussão da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas* são de inteira responsabilidade dos autores e não refletem necessariamente a opinião da FGV-EESP. É permitida a reprodução total ou parcial dos artigos, desde que creditada a fonte.

Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas FGV-EESP  
[www.eesp.fgv.br](http://www.eesp.fgv.br)

# Mudanças de Regime e Persistência dos Choques sobre a Volatilidade para a Série de Preços do Petróleo: Uma Análise Comparativa da Família GARCH e Modelos com Mudança de Regime Markoviana – MSIH e SWARCH

André Barbosa Oliveira<sup>1</sup>  
Pedro L. Valls Pereira<sup>2</sup>

## Resumo

*A previsão dos preços do petróleo é fundamental para o planejamento energético e oferece subsídio a tomada de decisões de longo prazo, que envolvem custos irre recuperáveis. No entanto, os preços do petróleo são muito instáveis sujeitos a choques como resultado de questões geopolíticas, poder de mercado da OPEP (Organização dos Países Exportadores de Petróleo) e pressões de demanda resultando numa série sujeita a quebras estruturais, prejudicando a estimação e previsão de modelos de série temporal. Dada a limitação dos modelos de volatilidade da família GARCH, que são instáveis e apresentam elevada persistência em séries com mudanças estruturais, este trabalho compara a previsão da volatilidade, em termos de intervalos de confiança e persistência, dos modelos de volatilidade com mudança de regime markoviana em relação aos modelos de volatilidade determinísticos. Os modelos de volatilidade com mudança de regime considerados são o modelo SWARCH (Markov Switch ARCH) e introduz-se o modelo MSIH (Markov Switch Intercept Heteroskedasticity) para o estudo da volatilidade. Como resultado as previsões de volatilidade dos modelos com mudança de regime permitem uma estimação da volatilidade que reduz substancialmente a persistência em relação aos modelos GARCH.*

**Palavras Chave:** Volatilidade; Mudança de Regime Markoviana; MSAR; SWARCH.

**Classificação JEL:** C22; G17.

**Área 7:** Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças.

## Abstract

*The forecast of oil prices is crucial for energy planning and offers support for long-term decisions that involve sunk cost. However, oil prices are very unstable because are subject to shocks as a result of geopolitical questions, significant market power of OPEC (Organization of Petroleum Exporting Countries) and pressures of demand resulting in a time series with structural breaks, implying in problems in the econometric estimation and forecasting if the breaks are not been taken into account. Given the limited capacity of GARCH models which are unstable and show high persistence in case of structural change, this paper compares volatility forecasting, in terms of confidence intervals and persistence, of volatility models with change of regime and the deterministic volatility models. The volatility models with change of regime considered are SWARCH (Markov Switching ARCH) and the model MSIH (Markov Switching Intercept Heteroskedasticity). As a result the estimates of volatility models with change of regime allow a volatility estimation that substantially reduces the persistence compared to GARCH models.*

**Key-words:** Volatility; Markov Switching Models; GARCH models.

**Classification JEL:** C22; G17.

---

<sup>1</sup> Doutorando em Economia (EESP/FGV-SP). E-mail: andreabosn@hotmail.com

<sup>2</sup> Professor Titular da EESP/FGV-SP e Coordenador do CEQEF/FGV-SP. E-mail: Pedro.valls@fgv.br

## 1. Introdução

O petróleo é uma importante fonte de energia como uma das principais bases para a matriz energética de diferentes países. A previsão dos preços do petróleo é um elemento fundamental para o planejamento energético. Dadas as características de instabilidade destes preços e sua posição como insumo de inúmeros produtos tendo impacto sobre níveis de preços e mesmo podendo causar recessão econômica, como pelo primeiro e segundo Choques do Petróleo, reorientando o consumo final e a matriz energética dos países, é necessário um constante monitoramento destes preços. A conjuntura acerca dos preços do petróleo vão orientar decisões de longo prazo com custos irrecuperáveis como a viabilidade de exploração de determinada reserva de petróleo – *on-shore* ou *off-shore* – bem como sobre política de transporte e eficiência energética.

Os modelos de séries temporais são úteis para indicar trajetórias factíveis para as cotações do petróleo e os modelos de volatilidade permitem uma análise de risco, com intervalos de confiança mais precisos em relação a intervalos de confiança fixos, e estabelecem limites para os preços mínimos com dado nível de confiança, como na análise do valor em risco – *VaR* (*Value at Risk*).

A estimação de modelos para a previsão dos preços do petróleo frequentemente resulta em baixo desempenho na estimação e previsão, relacionado aos períodos de quebra estrutural. A quebra estrutural da série temporal prejudica a estimação do modelo econométrico tanto para a equação da média quanto para a equação da variância. A estimação de modelos econométricos para variáveis sujeitas a mudanças estruturais resultam em modelos com instabilidade, com estimativas dos parâmetros diferentes para cada subamostra (Kim & Nelson (1999)). Ademais, os modelos de volatilidade tradicionais da família GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) resultam em elevada persistência e desempenho preditivo limitado sob quebra estrutural (Lamoureux & Lastrapes (1990); Hamilton & Susmel (1994) e Hwang & Valls Pereira (2006)). Nestas circunstâncias a utilização destes modelos para análise de risco fica prejudicada.

A volatilidade dos ativos financeiros se altera ao longo do tempo, algumas vezes os mercados são estáveis e em outros momentos voláteis, correspondendo a diferentes regimes para a volatilidade condicional ao longo do tempo. De tal forma que sinaliza a especificação de mudança de regime para modelos de volatilidade.

Os modelos de série temporal com mudança de regime Markoviana (*Markov Switching Models*) é uma abordagem que modela a série temporal, em que a transição entre regime é feita através de uma variável aleatória não observada, seguindo um processo de Markov. Os modelos com mudança de regime Markoviana são bastante flexíveis podendo ser utilizados para os modelos de volatilidade, sendo as quebras estruturais endógenas ao modelo (Hamilton (1994)).

Este trabalho compara os modelos de volatilidade GARCH e com mudança de regime usando a série de preços do petróleo Brent, que consiste numa das principais cotações de referência para esta mercadoria. Como esta série é sujeita a quebras estruturais associadas a grandes variações das cotações do petróleo, e a limitação dos modelos de volatilidade determinísticas nestas condições, o trabalho estuda a persistência dos choques dos preços sobre a volatilidade comparando os modelos GARCH com os modelos, que superariam estas limitações, que usam a abordagem de mudança de regime Markoviana. Além da estimação do modelo SWARCH (*Markov Switch ARCH*) introduz-se para a análise da volatilidade o modelo MSIH (Modelo de mudança de regime no intercepto

heteroscedástico), e estuda-se a relação entre eles. Ainda, dadas às características do preço do petróleo Brent, que apresenta quebras estruturais ao longo de sua série histórica, pretende-se identificar os diferentes regimes subjacentes às observações desta série temporal.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Após esta introdução a seção 2 apresenta os modelos de volatilidade: na subseção 2.1 discutem-se os modelos da família GARCH e são enfatizadas as suas limitações; a subseção 2.2 faz uma apresentação geral dos modelos de mudança de regime e nas subseções seguintes o enfoque é direcionado aos modelos de volatilidade com mudança de regime, na subseção 2.2.1 temos o modelo MSIH e na subseção 2.2.2 o modelo SWARCH. A seção 3 caracteriza a série estudada, considerando os fatores que afetam as cotações do petróleo, os choques sobre os preços e a análise de viés para a persistência dos modelos GARCH. A seção 4 trata da estimação dos modelos e sua comparação para persistência e intervalos de confiança. Na seção 5 são feitas as considerações finais.

## **2. Modelos de Volatilidade: GARCH, MSIH e SWARCH**

Os modelos de volatilidade são especialmente adequados para modelar o comportamento de séries financeiras que possuem pouca correlação nas observações dos retornos, porém apresenta correlação nos quadrados dos retornos. As séries temporais financeiras possuem características que outras séries temporais não exibem, correspondentes aos fatos estilizados dos retornos financeiros: imprevisibilidade na média condicional e média não condicional próxima de zero, correlação pequena ou ausente na média; agrupamento de volatilidade, alternância de períodos de alta e baixa volatilidade que se agrupam e se intercalam no tempo; assimetria, maior volatilidade quando os preços dos ativos estão diminuindo do que quando os preços estão subindo; a densidade ajustada aos retornos é aparentemente simétrica e com excesso de kurtose, maior probabilidade de valores extremos em relação a distribuição normal (Tsay (2005) e Enders(2004)). Os modelos de volatilidade descrevem estas características dos retornos financeiros.

As séries financeiras apresentam mudança no comportamento da volatilidade ao longo do tempo. Em alguns momentos o mercado está mais instável com mais choques e turbulência, em outros instantes os retornos dos ativos se alteram lentamente ao longo do tempo. Uma especificação possível para descrever esta situação é um modelo de mistura de distribuições, com distinta distribuição associada a cada regime da série financeira.

Os modelos de volatilidade podem ser classificados em dois tipos, os modelos de volatilidade determinística e os modelos de volatilidade estocástica. Na abordagem de volatilidade determinística temos uma equação determinística descrevendo a volatilidade com parâmetros fixos, esta classe inclui os modelos da família GARCH que geralmente apresentam elevada persistência e baixa capacidade de previsão. Nos modelos de volatilidade estocástica a equação que descreve a volatilidade é estocástica, esta classe inclui os modelos de volatilidade estocástica e os modelos de volatilidade com mudança de regime.

A subseção seguinte, 2.1 apresenta os modelos da família GARCH e discute as suas limitações. Na subseção 2.2 após uma introdução dos modelos de mudança de regime Markoviana, temos o modelo MSIH e em seguida é apresentado o SWARCH que é modelo ARCH com mudança de regime Markoviana.

## 2.1 Modelos da Família GARCH

A volatilidade de um ativo é uma variável não observável, na família GARCH ela é representada pela variância condicional nas observações passadas e é especificado da seguinte forma:

$$r_t = u_t = h_t * v_t, v_t \sim NI(0,1)$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + H(\sum_{i=1}^r u_{t-i}^2, \sum_{j=1}^s h_{t-j}^2; \theta).$$

, onde  $r_t$  representa o retorno de um ativo.

Quando a série temporal for homoscedástica a equação da volatilidade condicional será constante e os termos da expressão da equação da variância são não significativos exceto  $\alpha_0$ . Diversas especificações para os modelos de volatilidade podem ser consideradas dependendo da expressão para a função  $H$ .

Quando  $v_t \sim N(0,1)$ , os retornos tem média zero, a variância condicional varia no tempo segundo a equação acima e a variância incondicional é constante:

$$i) E(u_t | F_{t-1}) = E(h_t * v_t | F_{t-1}) = h_t * E(v_t | F_{t-1}) = 0, \text{ pois } E(v_t) = 0;$$

$$ii) VAR(u_t | F_{t-1}) = E(u_t^2 | F_{t-1}) = E(h_t^2 * v_t^2 | F_{t-1}) = h_t^2 * E(v_t^2 | F_{t-1}) = h_t^2;$$

$$iii) VAR(u_t) = \frac{\alpha_0}{1-H(\theta)},$$

onde  $H(\theta)$  representa a soma dos coeficientes dos retornos defasados e variâncias defasadas e  $F_{t-1}$  é o conjunto de informação até o instante  $t - 1$ .

Os modelos de volatilidade da família GARCH incluem diversas formulações para a volatilidade, que geralmente são uma adaptação do modelo GARCH. O modelo GARCH (Generalizado ARCH) descreve a volatilidade como função dos retornos passados e a própria volatilidade prévia. De forma geral, seja a série de retornos for não correlacionado o modelo GARCH(r,s) será dado por:

$$r_t = u_t = h_t * v_t; v_t \sim NI(0,1)$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}^2$$

Onde os erros  $v_t$  podem ser gaussianos,  $N(0,1)$ , ou ter uma distribuição t-Student com  $n$  graus de liberdade,  $t_n$ , ou qualquer outra distribuição paramétrica. Seja no modelo GARCH(r,s),  $s=0$  então temos o modelo ARCH(r).

Os modelos ARCH e GARCH respondem de forma simétrica a retornos positivos ou negativos, enquanto é de se esperar que um aumento dos preços dos ativos provoque menor volatilidade que uma diminuição do preço de mesma magnitude (*efeito alavancagem*). Outras especificações incluem o modelo GARCHL (ou TGARCH), que incorpora assimetria dos retornos sobre a volatilidade de maneira determinística, empregando uma variável dummy para os retornos negativos. O modelo EGARCH por modelar o logaritmo da variância não precisa das restrições de não negatividade nos coeficientes da equação da volatilidade. Apesar de diversas especificações para a volatilidade pelos modelos da família GARCH, um resultado comum a muitas séries financeiras é que o modelo GARCH(1,1) é escolhido, sendo mais parcimonioso que um modelo ARCH que em geral tem uma ordem alta.

A previsão da volatilidade do modelo GARCH corresponde à esperança da volatilidade condicional ao conjunto de informação do período anterior, dependendo do quadrado do retorno e volatilidade dos períodos anteriores. Portanto temos que a previsão da volatilidade um passo a frente para um modelo GARCH(1,1):

$$E(h_{t+1}^2 | u_t, h_t^2) = E(\alpha_0 + \alpha_1 u_t^2 + \beta_1 h_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(u_t^2 | F_t) + \beta_1 E(h_t^2 | F_t)$$

$$E(h_{t+1}^2 | u_t, h_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 h_t^2 + \beta_1 h_t^2$$

A solução desta equação de diferenças tem como fator de decaimento  $\lambda = \alpha_1 + \beta_1$ , que é a persistência. A persistência no modelo de volatilidade é uma medida de permanência de impacto de um choque sobre a volatilidade (Almeida & Valls Pereira (1999)). No modelo GARCH a persistência é dada pela soma dos coeficientes ARCH e GARCH,  $\lambda = \sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j$ , o modelo TGARCH inclui o termo  $\frac{\xi}{2}$ , onde  $\xi$  é o coeficiente da dummy sobre retornos negativos assumindo que a distribuição das inovações é simetria.

Os modelos GARCH, apesar de descrever as características dos retornos dos ativos, na presença de quebra estrutural possuem como principais limitações: a elevada persistência e o baixo desempenho preditivo (Hamilton & Susmel (1994)). Neste caso um choque sobre os retornos tem efeito que se propaga sobre a volatilidade após grande período de tempo. Isto leva a previsões limitadas, sobretudo para períodos de análise após mudança estrutural, pois a persistência estimada resulta numa estimação da volatilidade que é geralmente maior que a real.

Os modelos da família GARCH freqüentemente apresentam uma persistência muito alta para a volatilidade, sobretudo os modelos GARCH. A persistência estimada muitas vezes é próxima da unidade sugerindo os modelos IGARCH – GARCH integrado, o qual impõe a restrição da soma dos coeficientes ARCH e GARCH ser igual a unidade o que implica em apresentar a variância incondicional infinita. Por exemplo, no modelo GARCH(1,1) para a especificação IGARCH o segundo momento é infinito.

A volatilidade tem um padrão de comportamento que se altera ao longo do tempo, em determinados períodos a volatilidade é maior que outros. Estudos de simulação mostram que os modelos GARCH têm persistência muito elevada quando há quebra estrutural na variância incondicional (Lamoreaux & Lastrapes (1990); Laurini & Portugal (2003)) ou na variância condicional (Hwang & Valls Pereira (2006) e Hwang & Valls Pereira (2008)). Se considerarmos a mudança de patamar da volatilidade, controlando com uma variável dummy na equação da volatilidade do modelo GARCH, podemos diminuir a persistência.

A grande persistência da volatilidade com viés sobre os parâmetros estimados esta associada à quebra estrutural na variância não condicional. A volatilidade muda seu comportamento no tempo e se não modelarmos esta alteração de comportamento, como mudança de patamar, os parâmetros estimados acabam viesados com superestimação da persistência da volatilidade.

Uma forma de adaptar os modelos GARCH para uma correta estimação da persistência seria pela estimação de um modelo GARCH com variáveis dummies para os momentos de maior volatilidade,  $t > t^*$  como em Valls Pereira et alli (1999.) Sendo o modelo GARCH com variáveis dummy:

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_{0,i} * d_{i,t} + \sum_{i=1}^r \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}^2$$

Isto permite captar a mudança de patamar da volatilidade correspondendo a quebra estrutural na variância incondicional, que apresenta um processo com duas variâncias incondicionais:

$$VAR(u_t) = \begin{cases} \frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j)} & , \text{no período de baixa volatilidade } t < t^* \\ \frac{\alpha_0 + \alpha_{0,i}}{1 - (\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j)} & , \text{no período de alta volatilidade } t > t^* \end{cases}$$

No entanto, isto é uma solução ad-hoc e também determinística. A solução de variáveis dummies no modelo GARCH compensa a incapacidade do modelo de alterar o nível da volatilidade, correspondendo à alteração na variância incondicional. O modelo tenta capturar este efeito alterando os coeficientes sobre os retornos passados e volatilidade anterior, cuja soma mais próxima da unidade alteram o patamar da variância não condicional.

Como colocam Hamilton & Susmel (1994) “... *conventional ARCH models fail to forecast well because large and small shocks have different effect*”. Assim, a dificuldade dos modelos GARCH resulta do fato que eles têm de se ajustar aos períodos de alta e baixa volatilidade com uma mesma equação estimada.

## 2.2 Modelos de Séries Temporais com Mudança de Regime Markoviana

Os modelos de série de temporal com mudança de regime consistem em modelos de série de tempo que se caracterizam por dois processos que descrevem a série temporal: um modelo de série temporal, geralmente um modelo autoregressivo; e um processo estocástico para a descrição do estado subjacente ao regime da série temporal.

O modelo de série temporal com mudança de regime Markoviana é um modelo dinâmico, com parâmetros variantes no tempo, de acordo com o estado em que o processo se encontra. Um modelo autoregressivo de ordem p, AR(p), para N estados para os regimes possíveis,  $s_t \in \{1, 2, \dots, N\}$ , denotado por MS(N)-AR(p) é dado por:

$$y_t = v_{st} + \alpha_{1,st}y_{t-1} + \alpha_{2,st}y_{t-2} + \dots + \alpha_{p,st}y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{st}^2)$$

$$P\{S_{t+1} = j | S_t = i\} = p_{i,j}$$

$$\sum_{j=1}^N p_{i,j} = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad p_{i,j} \geq 0, \forall i, j$$

O modelo de série de tempo com mudança de regime é bastante flexível e podemos considerar como parâmetros dependentes do regime: a média<sup>3</sup>  $\mu_{st}$ ; o termo de intercepto,  $v_{st}$ ; os coeficientes autoregressivos,  $\alpha_{p,st}$ ; e a variância,  $\sigma_{st}^2$  (Krolzig (1997)). Em geral nas aplicações empíricas alguns parâmetros do modelo apresentam mudança de regime enquanto outros componentes são invariantes ao regime.

No modelo com mudança de regime os estados assumidos pela série temporal ao longo do tempo,  $s_t$ , são descritos por uma cadeia de Markov. Num processo de Markov a transição entre os estados ao longo das realizações do processo estocástico dependem apenas do estado presente e do estado a ser assumido no próximo período, e é independente dos estados passados (Ross (2007)).

<sup>3</sup> Na análise de modelos de mudança de regime existe uma relação entre os modelos com média e intercepto. O modelo autoregressivo ajustado pela média é dado por:  $(y_t - \mu_{st}) = \alpha_{st}(y_{t-1} - \mu_{st-1}) + \varepsilon_t$ , enquanto o modelo com intercepto tem a forma  $y_t = v_{st} + \alpha_{st}y_{t-1} + \varepsilon_t$ . Assim,  $\mu_{st} = (1 - \alpha_{st})v_{st}$ . A dinâmica de ajuste de modelo com mudança de regime com mudança na média é abrupta, após a transição de regime, enquanto o modelo com intercepto implica uma dinâmica de ajuste mais lenta.



$$P\{S_{t+1} = j | S_t = i, S_{t-1} = i_{n-1}, \dots, S_1 = i_1\} = P\{S_{t+1} = j | S_t = i\}$$

A previsão do modelo com mudança de regime é feita pela esperança da série temporal  $l$  passos à frente condicionada ao conjunto de informação do período corrente,  $E[y_{t+l}|y_t, s_t; \theta]$ . Para o modelo com mudança de regime a previsão da observação da série temporal e de sua variância, um passo a frente, são expressas como:

$$E(y_{t+1}|y_t, s_t; \theta) = \sum_{st=1}^N y_{t+1} * P\{s_{t+1}|y_t; \theta\} \text{ e}$$

$$E(\sigma_{t+1}^2|y_t, s_t; \theta) = \sum_{st=1}^N \sigma_{st+1}^2 * P\{s_{t+1}|y_t; \theta\}.$$

A estimação do modelo de mudança de regime Markoviana é feita pela maximização da função de verossimilhança usando o algoritmo EM (Hamilton (1994); Kim & Nelson (1999)).

### 2.2.1 Modelo de Mudança de Regime no Intercepto e na Variância (MSIH)

Séries financeiras freqüentemente possuem heterocedasticidade condicional, em que a variância da série é variante no tempo, uma variância constante seria grande demais para alguns períodos e muito estreita para outros. O modelo MSIH permite maior flexibilidade para descrever séries financeiras que geralmente possuem quebras na estrutura da média condicional e variância incondicional no processo gerador dos dados, mas não apresenta uma regra de formação para a variância condicional.

Para a análise das cotações do petróleo sobre a perspectiva de modelos de mudança de regime uma especificação de interesse é o modelo MSIH, que permite a mudança no nível para a série estimada e variância, ambas se alterando no tempo de acordo com o regime representando o estado da série temporal. A especificação do modelo MSIH(N)-AR(p) é:

$$y_t = v_{st} + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{st}^2)$$

O modelo MSIH segue as propriedades do modelo com mudança de regime markoviana geral apresentado na subseção anterior.

Este trabalho considera os modelos de série de tempo com mudança de regime na variância incondicional para a estimação da volatilidade. Outro trabalho que faz uma análise da volatilidade por variância incondicional com mudança de regime pela estrutura de modelo de série de tempo com mudança de regime markoviana é Pagan & Schwert (1990), contudo por uma abordagem de variância dos erros de previsão para estimação da volatilidade.

A volatilidade condicional no modelo MSIH é dada pela previsão da variância condicional ao conjunto de informação do período anterior. A volatilidade condicional um passo a frente sendo:

$$E(\sigma_{t+1}^2|y_t, s_t; \theta) = \sum_{st=1}^N \sigma_{st}^2 * P\{s_{t+1} = s_t | y_t; \theta\}.$$

Embora os modelos MSIH não estejam diretamente associados a medidas de volatilidade, não apresentando especificação de desvio padrão condicional como os modelos GARCH e SWARCH, seu processo gerador dos dados apresenta uma variância que muda de regime um comportamento que caracteriza a volatilidade. No modelo MSIH chegamos a uma especificação de volatilidade, desvio padrão condicional, a partir da esperança da variância do próximo período, que incorpora a probabilidade do estado no próximo período a qual é dependente dos dados,  $P\{s_t = j | s_{t-1}, y_{t-1}; \theta\}$ . A probabilidade

do regime é obtida a partir de um filtro não linear que permite a estimação dos parâmetros e fazer previsão (Hamilton (1988)).

## 2.2.2 Modelos ARCH com Mudança de Regime - SWARCH

A volatilidade tem seu comportamento caracterizado por uma dinâmica que se altera ao longo do tempo, com períodos de estabilidade seguidos de períodos de instabilidade se alternando no tempo. Os modelos de volatilidade com mudança de regime permitem que a volatilidade condicional se altere ao longo do tempo de acordo com o regime da série temporal. Aqui é apresentado o modelo SWARCH de Hamilton & Susmel (1994), para uma discussão ampla de modelos de volatilidade com mudança de regime ver Dueker (1997) e Franses & Van Dijk (2000).

No modelo SWARCH temos um processo ARCH com mudança de regime que altera a escala da volatilidade, com transição entre  $N$  regimes possíveis,  $s_t = \{1, 2, \dots, N\}$  governadas por uma cadeia de Markov de primeira ordem. O modelo SWARCH( $N, r$ ), sob dois regimes  $N=2$ , com um processo ARCH( $r$ ) de ordem  $r$ , é formulado como:

$$u_t = \sqrt{g_{s_t}} * \tilde{u}_t$$

$$\tilde{u}_t = h_t * v_t$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{u}_{t-i}^2$$

$$P\{S_{t+1} = j | S_t = i\} = p_{i,j}$$

$$\sum_{j=1}^N p_{i,j} = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad p_{i,j} \geq 0, \forall i, j$$

O fator que multiplica o processo ARCH,  $\sqrt{g_{s_t}}$ , para o primeiro regime,  $s_t=1$ , é  $\sqrt{g_1}$ ; e  $\sqrt{g_2}$ , para o regime dois,  $s_t=2$ . O fator para o primeiro regime é normalizado na unidade,  $g_1 = 1$ , tal que os demais regimes exibem maior volatilidade,  $g_{s_t} \geq 1$ , para  $s_t = \{1, 2, \dots, N\}$ .

O modelo SWARCH é sensível ao comportamento do mercado financeiro que transita entre estabilidade e instabilidade ao longo do tempo. Sob choques pequenos, para  $r$  períodos de estabilidade e probabilidade de se manter no estado 1 alta, provocam volatilidade reduzida. Um dado choque elevado a partir do instante seguinte leva a volatilidade ao estado de alta volatilidade. Assim, temos um modelo similar a mistura de distribuições transitando-se entre estabilidade e instabilidade descrevendo o comportamento da volatilidade ao longo do tempo, com dependência de Markov de primeira ordem que governa o regime para a volatilidade.

Seja o modelo ARCH com mudança de regime, a variância da série temporal depende dos últimos  $r$  estados e retornos passados, de acordo com a ordem  $r$  do processo ARCH. Para os retornos com média zero,  $E(u_t) = 0$ , e variância dos erros unitária, então a variância é dada por:

$$E(u_t^2 | s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-r}; u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-r}) = E(u_t^2 | F_t)$$

$$E(u_t^2 | F_t) = E \left[ \left( \sqrt{g_{s_t}} * \tilde{u}_t * v_t \right)^2 \middle| F_t \right]$$

$$E(u_t^2 | F_t) = g_{s_t} * E(h_t^2 | F_t)$$

$$E(u_t^2 | F_t) = g_{s_t} * E \left( \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i \left( \frac{u_{t-i}^2}{g_{s_{t-i}}} \right) \right) = \sigma_t^2(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-r}),$$

onde  $F_t$  é o conjunto de informação do período corrente.

O modelo SWARCH corresponde a uma especificação para a variância não condicional com mudança de regime ao longo do tempo. A mudança de regime provoca um aumento repentino da variância quando se entra no estado de instabilidade. A mudança de regime para a volatilidade esta associada a um processo gerador dos dados para a série temporal com mudança de regime, sendo a variância não condicional um parâmetro com quebra estrutural.

A previsão da volatilidade no modelo SWARCH consiste na esperança  $l$  passos a frente de horizonte de previsão condicional aos estados passados e retornos passados.

A previsão da volatilidade um passo a frente é expressa por:

$$E(u_{t+1}^2 | s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-r}; u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-r}) = \sum_{st=1}^N g_{st} * P\{s_{t+1} = s_t\} * E(h_{t+1}^2 | u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-r})$$

A estimação do modelo ARCH com mudança de regime inclui para uma dada especificação de distribuição dos erros as distribuições, normal ou t-Student, para os retornos e a variância depende de todos os  $r$  últimos retornos e regimes. O procedimento de estimação segue a especificação da distribuição marginal das observações e a função da verossimilhança (Hamilton & Susmel (1994)). O modelo SWARCH é um modelo de volatilidade com mudança de regime parcimonioso, uma especificação GARCH introduziria a dependência sobre todos os estados passados, pelo componente GARCH<sup>4</sup>, e torna a estimação dificultada e somente é possível por métodos de aproximação (Dueker (1997)).

### 3. Cotações do Petróleo: Choques Sobre os Preços e Viés da Persistência Para os Modelos GARCH

Esta seção descreve e caracteriza a série de preços do petróleo e faz uma análise de viés para a persistência dos modelos GARCH. Para o estudo dos modelos de volatilidade a série de preços do petróleo Brent entre 20/05/1987 e 28/07/2009 é considerada, cobrindo 5641 observações de cotações para os dias de negociação. Os preços do petróleo Brent é uma das principais cotações desta *commodity*.

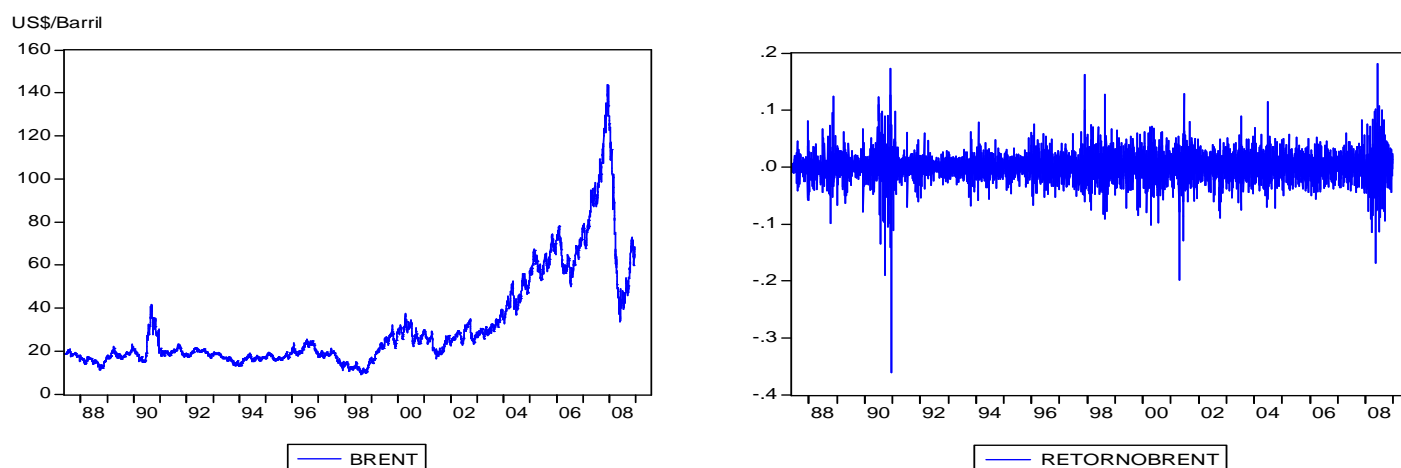
Os preços do petróleo têm sua evolução marcada principalmente por questões geopolíticas; de oferta, com atuação importante da OPEP com poder de mercado significativo; demanda relacionada ao crescimento/recessão dos países (Jr. Pinto, Fernandes (1998)). A questão geopolítica começa a ser relevante para a determinação dos preços do petróleo a partir do movimento de nacionalização das reservas petrolíferas e formação de empresas estatais, que passam a usar os recursos petrolíferos para a viabilização de estratégias de desenvolvimento nacionais, a partir de 1960 com a criação da OPEP que substitui o cartel privado internacional que vigorava. O primeiro e segundo choques do petróleo tiveram motivação geopolítica com a OPEP atuando para aumentar os preços em retaliação a movimentos bélicos dos EUA na região do Oriente Médio. A atuação da OPEP por ora leva a pressões altistas outras baixistas, devido a dificuldade de alinhamento de interesses dos membros com violações das quotas do cartel. Outro fator importante é a dinâmica da indústria, que tem passado por um movimento de eficiência energética e surgem fontes alternativas de energia.

---

<sup>4</sup> Um modelo GARCH após sucessivas recursões resulta num modelo ARCH de ordem infinita.

A presença de fatores geopolíticos, além dos movimentos usuais de oferta e demanda, leva a um comportamento muito instável desta série como pode ser observada no Gráfico 1. Em geral sua evolução é marcada por um movimento de cotação mais baixo, inicialmente cerca de 20 US\$/Barril, que é interrompido com um salto em 1990 com a Guerra do Golfo após invasão do Kuwait pelo Iraque, a atuação bélica americana rápida permite uma estabilização dos preços. No período de 1994 a 1998 o mercado se apresenta estável, com quedas dos preços em 1998 com um quadro recessivo no Sudeste Asiático e Rússia. A partir de 1998, a OPEP diminui a produção para elevar os preços e a recuperação econômica contribui para a elevação dos preços. Em 2001 ocorre um vale na série. A trajetória de expansão nos preços permanece a partir de 2003 com a economia aquecida com importante atuação da China para a demanda por petróleo. A crise econômica do Sub-prime faz os preços caírem vertiginosamente com a apreensão de redução da demanda no quadro recessivo da economia mundial, porém os preços voltam a aumentar com a sinalização de recuperação econômica de vários países.

**Gráfico 1 – Cotações e Retornos do Petróleo Brent (1987/2009)**



O comportamento instável dos preços com efeito de choques geopolíticos, choques de demanda e oferta faz com que os retornos para as cotações Brent sejam muito instáveis (Gráfico 1). Como resultado os retornos para o petróleo tipo Brent apresenta “clusters” de volatilidade, com grupamentos de instabilidade e estabilidade se adensando ao longo do tempo, similar as séries financeiras. Os retornos do petróleo exibem características comuns aos retornos financeiros.

Conforme os inúmeros choques sobre as cotações do Petróleo Brent e seu retorno sobre o período analisado os modelos de série temporal apresentam um ajuste limitado devido às quebras estruturais. Na presença de mudança estrutural no processo gerador da variância os modelos GARCH apresentam uma elevada persistência (Almeida & Pereira (1999); Laurini & Portugal (2002), Hwang & Valls Pereira (2006) e Hwang & Valls Pereira (2008)).

Os modelos GARCH apresentam persistência superestimada quando o processo da variância incondicional possui quebra estrutural, mudança do nível da volatilidade e a quebra estrutural na variância incondicional. Como discutido na seção 2.1 para se adaptar a mudança da variância incondicional ao longo das realizações da série financeira a

persistência pode se elevar ou o termo da constante da equação da variância. A estimação dos modelos GARCH em subamostras permite o intercepto e persistência distinta sobre as subamostras em relação ao modelo estimado sobre a série inteira. O uso de dummies para os períodos de subamostras é uma alternativa para permitir a variância condicional e incondicional se alterar sobre a série como em Valls Pereira et alii (1999).

A tabela 1 apresenta os resultados da estimação dos modelos GARCH em subamostras e amostra completa. Podemos observar que a persistência difere entre o modelo para a amostra completa e subamostra de forma importante caracterizando o viés de persistência. A primeira subamostra, 1987-1991, corresponde a um período de instabilidade relacionado a problemas geopolíticos do petróleo, justificando a alta instabilidade e persistência,  $\lambda = 1.013$ , para esta subamostra há evidências que o modelo adequado seria um IGARCH. A segunda subamostra, 1991 a 1998 se sobrepõe no período com menos choques, no entanto a persistência permanece elevada, 0.99. A terceira subamostra, 1998-2001, indica uma menor persistência estimada, 0.90 a despeito de eventos desestabilizadores como a atuação da OPEP para aumentar os preços. No quarto período de subamostra, 2001-2004, os preços estão se elevando devido ao aumento da pressão de demanda, no entanto a persistência é 0.91 e a instabilidade menor. No ultimo período, 2004-2009, engloba a crise subprime e momento de recessão indo de elevada queda da cotação até uma tendência de recuperação, onde os agentes estão “tateando” os preços em busca de determinar seu valor fundamental justificando a maior persistência, 0.99.

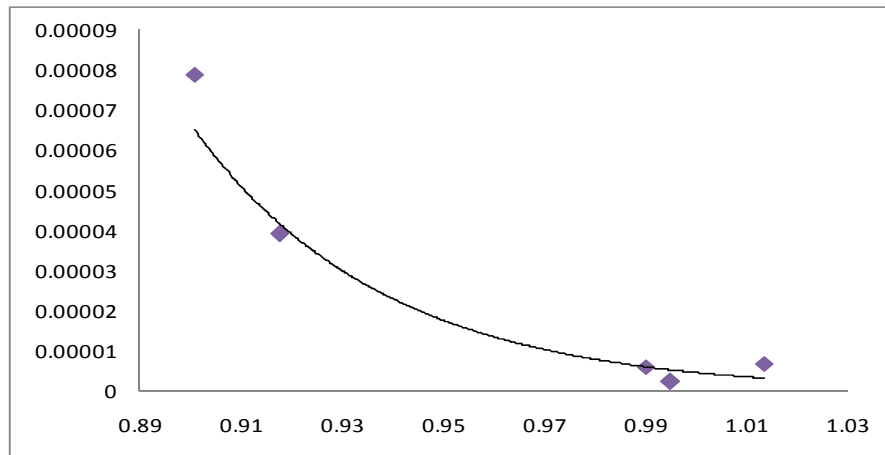
Pela análise da volatilidade dos modelos GARCH e a persistência estimada dos choques, os preços do petróleo saíram de um período de menor instabilidade/volatilidade se desenhando um mercado mais estável para as amostras mais recentes, e essa tendência se manteria se não fosse a crise subprime que começou no segundo semestre de 2008. Ainda existe uma relação inversa entre a persistência e a constante da equação da variância (Gráfico 2).

**Tabela 1 – Persistência para os Modelos GARCH(1,1): Amostra e Subamostras**

Período	1987-2009	1987-1991	1991-1998	1998-2001	2001-2004	2004-2009
c	0.00000527 (0.0000)	0.00000679 (0.0000)	0.00000229 (0.0097)	0.0000788 (0.0014)	0.0000391 (0.0265)	0.00000611 (0.0053)
$\alpha_1$	0.079505 (0.0000)	0.162329 (0.0000)	0.051051 (0.0000)	0.095091 (0.0000)	0.046793 (0.0035)	0.044403 (0.0000)
$\beta_1$	0.914733 (0.0000)	0.851076 (0.0000)	0.943953 (0.0000)	0.805602 (0.0000)	0.870703 (0.0000)	0.945996 (0.0000)
$\lambda$	0.994238	1.013405	0.995004	0.900693	0.917496	0.990026
AIC	-4.879518	-4.78876	-5.348839	-4.37179	-4.818807	-4.718006
BIC	-4.873634	-4.764083	-5.333792	-4.346378	-4.789557	-4.694529
OBS.	5640	993	1832	957	801	1057

**Nota:** Os períodos de subamostra são 21/05/1987 a 12/03/1991; 13/03/1991 a 19/03/1998; 20/03/1998 a 19/11/2001; 20/11/2001 a 14/12/2004 e 15/12/2004 a 28/07/2009.

**Gráfico 2 – Diagrama de Dispersão: Persistência ( $\lambda$ ) X Constante da Equação da Variância ( $\alpha_0$ ) ( Estimativas em Subamostras – Tabela 1)**



A mudança de intercepto para a equação da variância ajuda a diminuir a persistência mais isto não foi suficiente para uma melhor estimativa da persistência nos modelos. A escolha das subamostras referentes aos períodos de maior volatilidade foi baseada na informação histórica e observação do comportamento da série, um procedimento ad-hoc. A identificação de períodos de mais alta e mais baixa volatilidade deve ser feita por inferência usando os dados, se tivermos certeza acerca deles e sua transição mesmo o modelo de volatilidade determinístico usando subamostras poderia dar uma estimativa correta da persistência.

O propósito desta seção foi mostrar que os modelos de volatilidade GARCH resultam em estimação enviesada da persistência quando a série temporal tem mudança do patamar da volatilidade em suas observações. Esta alteração da volatilidade corresponde a um processo gerador dos dados com variância incondicional que se altera sobre os regimes, os modelos de volatilidade GARCH tentam capturar isto alterando o nível do termo de intercepto e os coeficientes, mas a especificação correta é um modelo de mudança de regime.

#### 4. Estimação dos Modelos de Volatilidade

Esta seção trata da estimação dos modelos com mudança de regime, os modelos com processo gerador dos dados com mudança de regime na média e na variância (MSIH) e ARCH com mudança de regime (SWARCH). Para permitir a comparação dos modelos não lineares, de mudança de regime, com especificações sem mudança de regime são estimados também alguns modelos GARCH.

A série de cotações do petróleo Brent é não estacionária e se torna estacionária após primeira diferença em logaritmo. No processo de estimação uso os log retornos,  $r_t = \ln(P_{Brent,t}) - \ln(P_{Brent,t-1})$ . A correlação dos quadrados dos retornos indica a presença de heterocedasticidade condicional.

Para a estimação dos modelos GARCH são usados os modelo GARCH(1,1) e o modelo TGARCH(1,1) (Tabela 2). A série de preços de retorno se caracteriza por uma alta persistência na volatilidade para ambos os modelos, próxima da unidade, e possui

assimetria dos retornos com coeficiente do efeito *alavancagem* significativo. O ajuste dos modelos é similar com todos os coeficientes significativamente diferentes de zero e elimina a correlação.

**Tabela 2 – Modelos de Volatilidade GARCH e GARCHL**

(1) $r_t = 0.000519 + 0.045739r_{t-1}$ (0.0377) (0.0012) $h_t^2 = 0.00000527 + 0.079505u_{t-1}^2 + 0.914733h_{t-1}^2$ $\lambda = 0.994238$ (0.0000) (0.0000) (0.0000)				
<b>Statistics</b>				
Q(10) = 9.9007 (0.359), Q(20) = 27.321 (0.097) ; Q_2(10) 20.632 (0.014) , Q_2(20) = 29.35 (0.061) ; ARCH-LM(12) = 23.6518 (0.022675) ; Log likelihood= 13765.24, AIC = -4.879519, SBC -4.873634				
(2) $r_t = 0.000437 + 0.045506r_{t-1}$ (0.0964) (0.0013) $h_t^2 = 0.00000546 + 0.072162u_{t-1}^2 + 0.913869h_{t-1}^2 + 0.015354d_t * u_{t-1}^2$ $\lambda = 0.993708$ (0.0000) (0.0000) (0.0000) (0.0176)				
<b>Statistics</b>				
Q(10) = 9.9175 (0.357), Q(20) = 27.083 (0.103) ; Q_2(10) 19.944 (0.018) , Q_2(20) = 28.388 (0.076) ; ARCH-LM(12) = 23.06892 (0.027147) ; Log likelihood= 13766.57, AIC = -4.879634, SBC -4.872573				
<b>Nota:</b> ( ) p value; Q_k( ), estatística Q Ljung-Box, k=1, para os resíduos, k=2 para os resíduos ao quadrado.				

Seja a seleção do modelo com mudança de regime pelos critérios de informação de Akaike e Schwarz (tabela 3). Pelo AIC o modelo que apresenta melhor ajuste é o de 5 regimes, enquanto o SBC sugere 3 ou 4 regimes, sendo preferível o modelo MSIH(3)-AR(1), por simplicidade.

**Tabela 3 – Seleção de Modelo de Mudança de Regime**

Modelo	critérios de Informação		
	AIC	SBC	Log-Likelihood
MSIH(2)-AR(1)	-4.8498	-4.8415	13683.3373
MSIH(3)-AR(1)	-4.9067	-4.8914	13849.8997
MSIH(4)-AR(1)	-4.9200	-4.8953	13895.3693
MSIH(5)-AR(1)	-4.9223	-4.8858	13911.7542
MSIH(6)-AR(1)	-4.9199	-4.8692	13916.9799

O modelo estimado MSIH(3)-AR(1) (Tabela 4) caracteriza-se por apresentar um primeiro regime de maior volatilidade com menor retorno médio<sup>5</sup> - 0.0034 e maior variância 0.0026, um segundo regime de calmaria com variância 0.00014 e o terceiro regime de estabilidade com variância 0.0004. Onde o mesmo retorno médio 0.0006 pode vigorar tanto no regime de estabilidade quanto de calmaria. Tratando-se de retornos, que em geral tem média zero, sua média não é significativa e a principal distinção é entre a volatilidade dos períodos.

<sup>5</sup> Para o retorno médio sendo,  $\mu_{st} = (1 - \sum_{j=1}^p \alpha_{j,st})^{-1} * v_{st}$ .

**Tabela 4 – Estimação do Modelo MSIH(3)-AR(1)**

**(A)- Modelo - MSIH(3)-AR(1)**

	Coef	StdError	t-stat
$v_1$	-0.0032	0.0022	-1.4156
$v_2$	0.0006	0.0004	1.5911
$v_3$	0.0006	0.0004	1.5695
RetornoBrent_1	0.0407	0.0137	2.9759
$\sigma_1^2$	0.0025943		
$\sigma_2^2$	0.0001356		
$\sigma_3^2$	0.0004474		

**(B)- Matrix of Transition Probabilities**

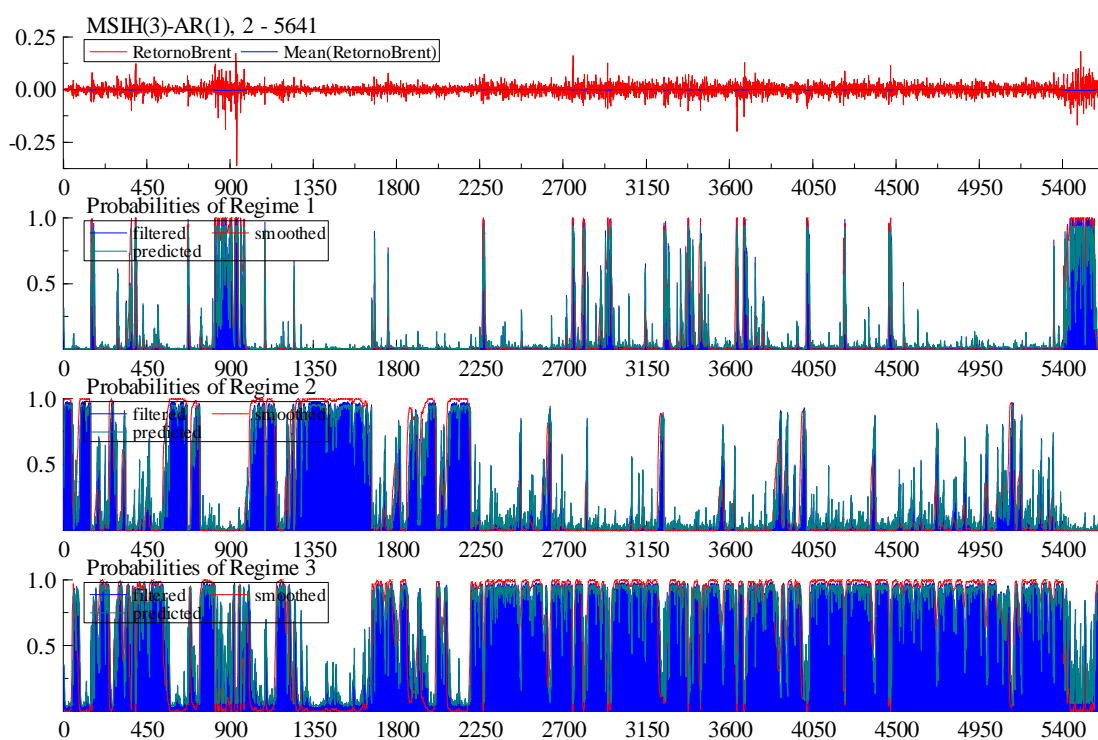
	Reg.1	Reg.2	Reg.3	nObs	Prob.	Duration
Reg.1	0.939	0.003	0.058	563.5	0.1001	16.41
Reg.2	0.0044	0.9791	0.0164	1452	0.2524	47.95
Reg.3	0.0077	0.0077	0.9846	3624.6	0.6476	65.09

**(C)- Statistics**

AIC	-4.9067	SC	-4.8914	log-likelihood	13849.9
Q(2) = 1.9168	(0.384)	Q(5) = 6.3211	(0.276)	Q(10) = 20.129	(0.028)

Nota: ( ) p-value.

**Gráfico 3 – Probabilidades Suavizadas, Filtradas e Previstas – MSIH(3)-AR(1)**





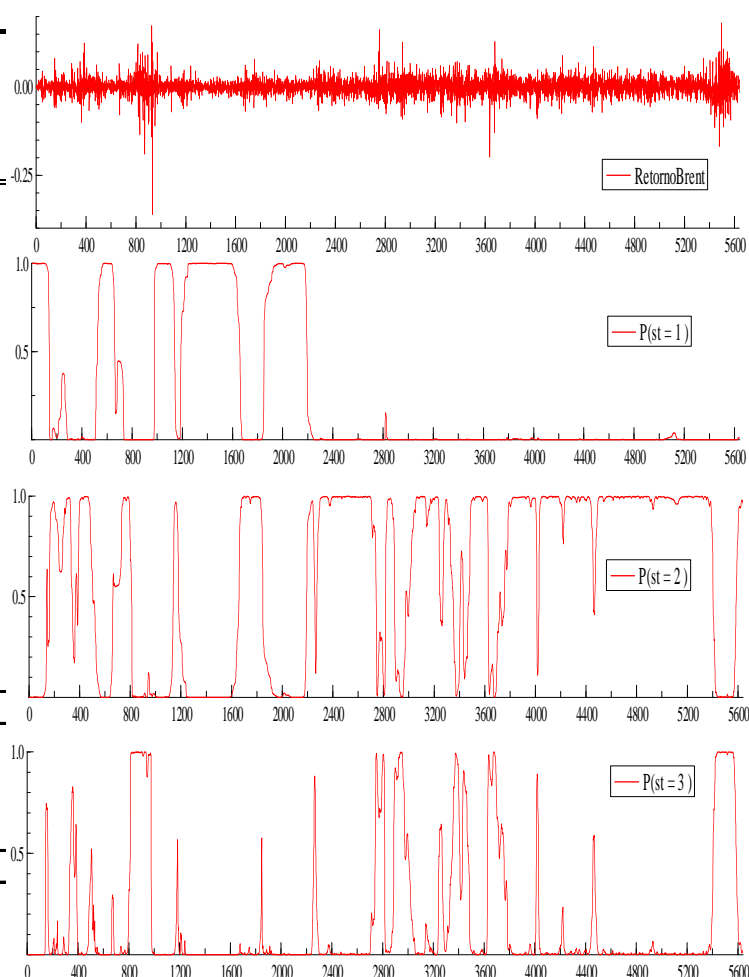
Pela análise da matriz de transição [Tabela 4(B)] os regimes são persistentes, com duração de 16, 47 e 64 períodos para os regimes 1, 2 e 3 respectivamente. Pela análise das probabilidades dos regimes (Gráfico 3) o regime de volatilidade média vigora pela maior parte do tempo. A série inicia-se com mais instabilidade até 1990, segue-se por um período mais estável até 1998, após o que se tem maior estabilidade intercalada por períodos de alta volatilidade associados a choques sobre os preços do petróleo Brent em virtude de ações da OPEP para elevar os preços, bem como crises como no final do período em recessão mundial. Como o período de calmaria caracteriza extenso intervalo de tempo entre 1990-1998, a matriz de probabilidade de transição nos indica que a probabilidade de sair do regime 1 ou 3 para o regime 2 é pequena. Ainda, a ausência de correlação dos erros pela estatística Q de Ljung-Box indica que o modelo está corretamente especificado. [Tabela 4 (C)].

**Tabela 5 – Modelo SWARCH(3,2)-t**

(A)- Modelo SWARCH(3,2)t		
$c$	0.0465	
	(0.02362)	$t = 1.9687$
$\phi_1$	0.03785	
	(0.01322)	$t = 2.8631$
<hr/>		
$g_1$	1	
$\hat{g}_2$	2.7453	
	(0.2184)	$t = 12.5679$
$\hat{g}_3$	9.3193	
	(1.8948)	$t = 4.9181$
$\alpha_0$	0.00014749	
	(0.000009)	$t = 16.028$
$\alpha_1$	0.01376	
	(0.015908)	$t = 0.8649$
$\alpha_2$	0.0511	
	(0.01711)	$t = 2.8655$
$\xi * d_t$	0.02699	
	(0.02647)	$t = 1.019$
$n$	7.1116	
<hr/>		
(B)- Matrix of Transition Probabilities		
$P_{ij} =$	$\begin{bmatrix} 0.9957 & 0.0043 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9938 & 0.0062 \\ 0.0063 & 0.0163 & 0.9773 \end{bmatrix}$	
<hr/>		
(C)- Statistics		
Log likelihood: -12076.652		
número de iterações BFGS até convergência: 36		
Strong convergence		

Nota: ( ) standard erros.

**Gráfico 4 – Probabilidade Suavizada SWARCH(3,2)-t**



Para o resultado da estimação do modelo ARCH com mudança de regime (Tabela 5), a significância do termo da constante da equação da média é fraca; na equação da variância o termo ARCH de primeira ordem é não significativo assim como o efeito “*leverage*”, embora o termo ARCH de segunda ordem demonstre-se altamente significativo. O efeito *alavancagem* está associado a uma característica de mudança de regime (maior volatilidade sob retornos negativos que positivos). Todos os demais coeficientes são significantes.

No modelo SWARCH sob o estado de média volatilidade,  $S_t = 2$ , esta se torna cerca de 3 vezes maior em relação ao estado de baixa volatilidade,  $S_t = 1$ , enquanto que a volatilidade é 9 vezes maior sob regime de alta volatilidade. Esta relação de escala da volatilidade entre os períodos tem alguma aproximação ao modelo MSIH, onde sob o regime de média volatilidade a variância é 3.29 vezes maior em relação ao período de baixa volatilidade, a maior diferença está entre o regime de alta volatilidade e baixa volatilidade onde a variância é 19.13 vezes maior que sob regime calmaria. Por sua vez considerando o comportamento dos regimes temos resultado similar ao modelo MSIH.

Desta forma pela análise da série, que possui efeito ARCH, por diferentes modelos caracterizamos a presença de diferentes regimes de volatilidade. No entanto os modelos GARCH, MSIH e SWARCH têm diferente capacidade para descrever a volatilidade. Os modelos GARCH criticados pela sua elevada persistência e pobre predição motiva o modelo SWARCH de Hamilton & Susmel (1994), para descrever a mudança de comportamento da volatilidade sobre o tempo pela abordagem de mudança de regime. Neste trabalho introduzo o modelo MSIH para o estudo da volatilidade.

Seja a volatilidade, desvio padrão condicional, para os modelos de volatilidade determinística e com mudança de regime (Gráfico 5), mesmo o modelo GARCH(1,1) demonstra a mudança de comportamento da volatilidade sobre o tempo, marcando intervalos de baixa e alta volatilidade. Porém, pela construção dos modelos de volatilidade como a heterocedasticidade condicional, isto corresponde a períodos de mudança da variância incondicional associados a alteração da volatilidade condicional. A volatilidade GARCH reproduz a alta persistência de choques que se propagam por um longo período, com vários picos com suavização lenta.

A volatilidade dos modelos ARCH com mudança de regime permite atenuar a persistência dos choques sobre a volatilidade, com alterações de maiores magnitude na volatilidade contemporâneos a variações bruscas nos retornos mas que rapidamente voltam ao comportamento dos retornos, enquanto o modelo GARCH propaga por maior período de tempo um choque de variações bruscas nos retornos que a série de retornos não exhibe mais – os retornos após um choque brusco apesar de manter um certo adensamento da volatilidade esta se reduz. A discrepância entre os modelos GARCH e o comportamento da série de retornos é mais forte após outliers. Os modelos SWARCH após um choque, apesar de apresentarem uma volatilidade outlier, se alinham mais rapidamente ao comportamento da série. Assim o modelo GARCH descreve uma trajetória suavizada para a volatilidade e o modelo SWARCH uma trajetória que combina suavização e saltos repentinos, os quais se devem a mudança de patamar da volatilidade.

Por sua vez a volatilidade do modelo MSIH<sup>6</sup> comporta ao longo de todos os momentos, seja de choques aberrantes ou observações normais uma trajetória alinhada ao movimento dos retornos. Não temos volatilidades aberrantes como nos modelos GARCH e SWARCH, os momentos em que os choques outliers ocorrem estes saltos se alinham a

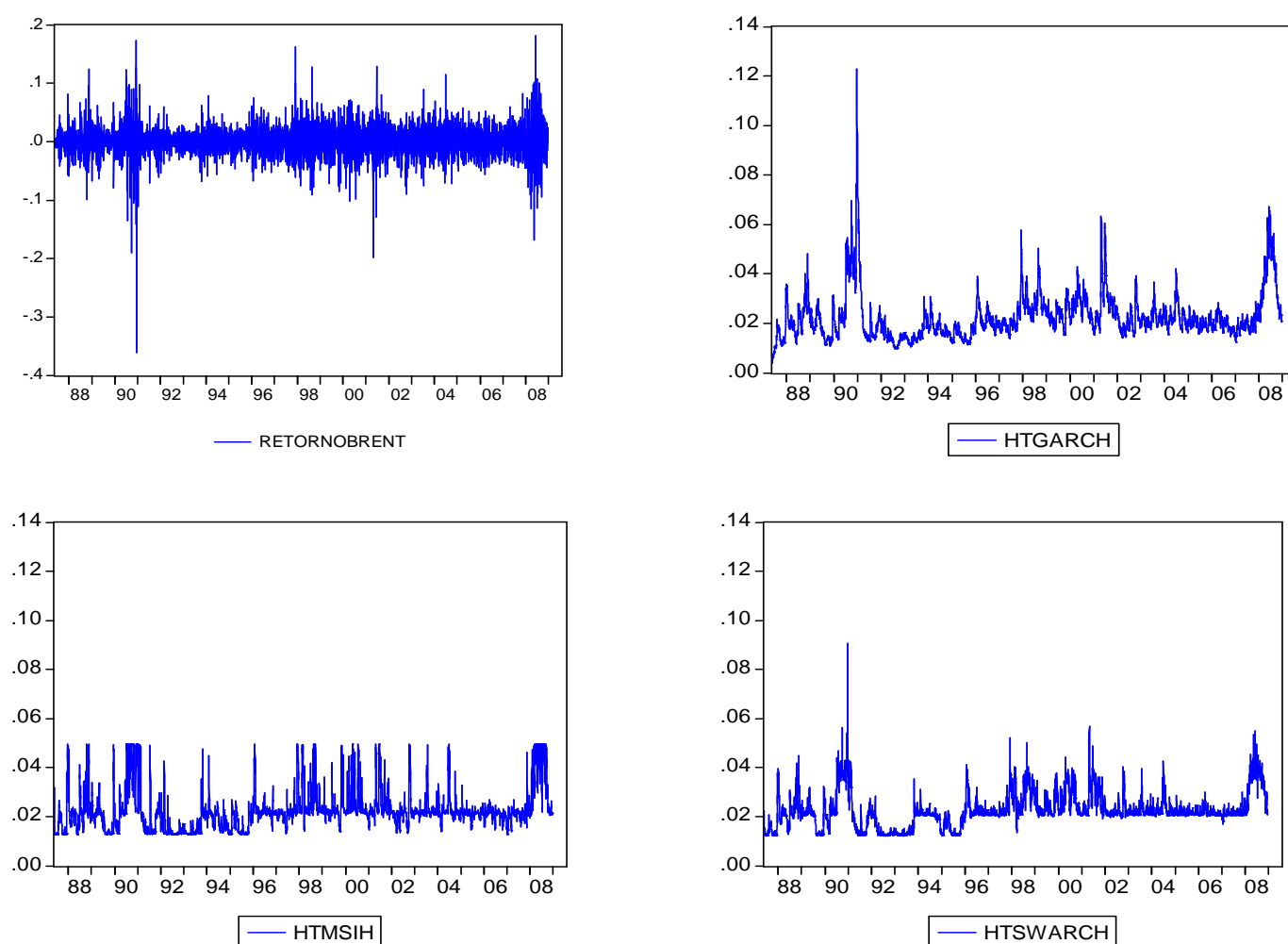
---

<sup>6</sup> Considerando a probabilidade prevista do regime.

uma trajetória mais bem comportada no comportamento da série. Assim as volatilidades extraídas pelo MSIH estão associadas a um movimento alinhado a série com mudanças sucessivas de níveis de volatilidade.

O modelo MSIH se sobrepõe a análise do modelo GARCH descrevendo saltos repentinos na volatilidade correspondentes a mudança da variância incondicional. O modelo SWARCH captura o mesmo efeito, com saltos repentinos na volatilidade, mas numa abordagem que explicita a mudança de nível da volatilidade e não da variância incondicional.

**Gráfico5 – Desvio Padrão Condicional: GARCH(1,1), MSIH(3)AR(2) e SWARCHL(3,2)**

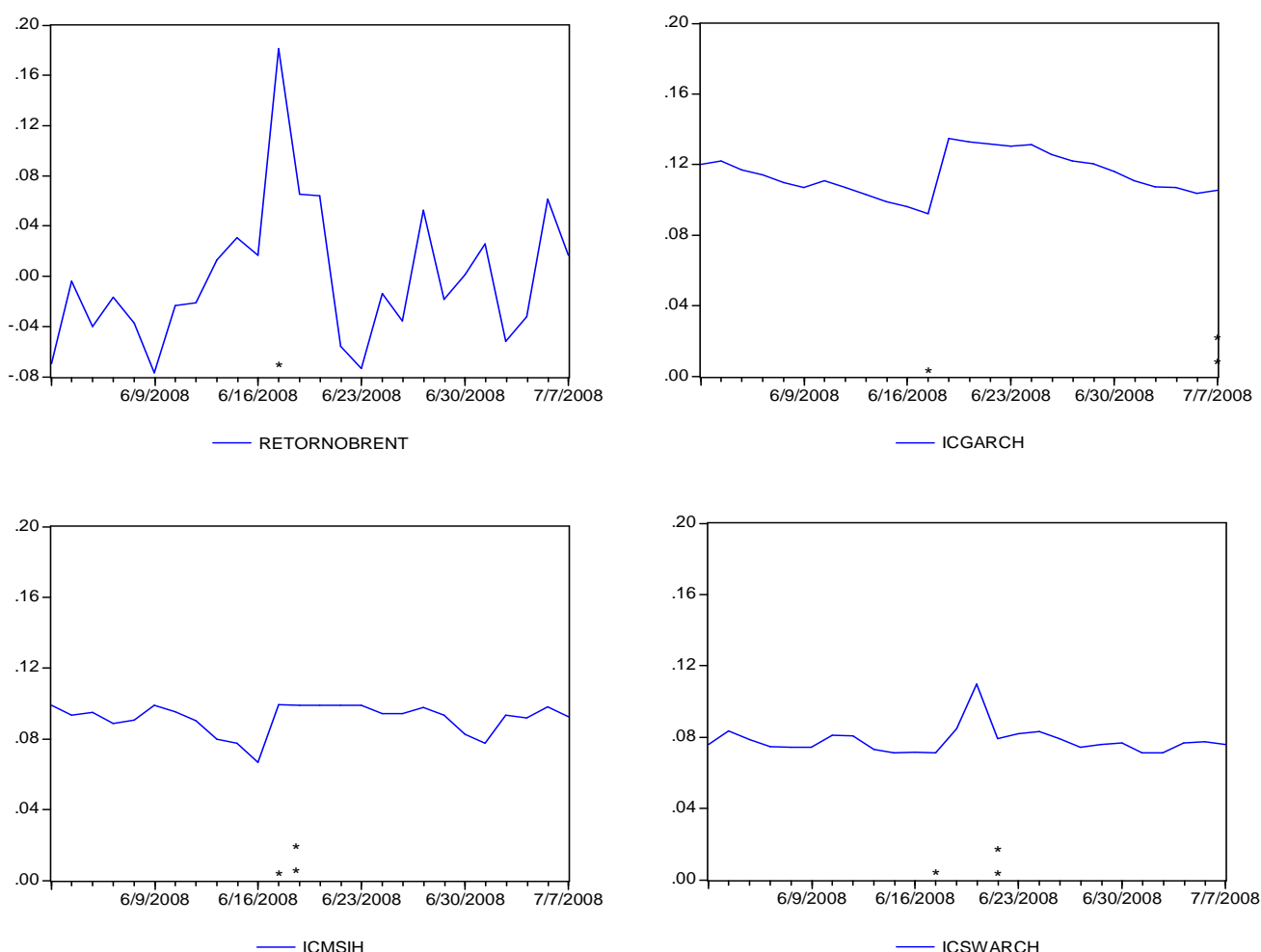


Para um estudo mais rigoroso da persistência da volatilidade o Gráfico 6 mostra um choque sobre os retornos recente, no período da crise Sub-prime que começou no segundo semestre de 2008, e a dinâmica da trajetória dos intervalos de confiança associadas aos modelos após este retorno de maior magnitude. Para o modelo GARCH, o retorno aberrante é traduzido pelo modelo como um choque sobre a volatilidade e que tem alta persistência, caracterizando um intervalo de confiança com um pico o qual é suavizado e somente no final do período (14 dias passados do choque) se alinha ao retorno verificado subsequente

ao choque. A especificação da série pelo modelo com mudança de regime na média e na variância, MSIH, descreve uma volatilidade e intervalo de confiança num patamar do retorno que se mantêm ao período imediatamente após o choque até o final do período, é como se ignorasse a observação outlier. Por fim, o modelo SWARCH se assemelha ao modelo MSIH, porém com alguma propagação do choque (que se dissipa após 3 períodos) e volta a trajetória da série dos retornos.

Como a medida de volatilidade é usada para análise de risco, diferentes modelos permitem um melhor diagnóstico e desempenho distinto. No modelo GARCH teríamos 14 dias de desorientação e no modelo SWARCH 3 dias. Enquanto o modelo MSIH, para estas observações e para esta magnitude de choque, é um bom guia mesmo após o evento desestabilizador.

**Gráfico 6 – Persistência dos Choques Sobre a Volatilidade: GARCH, MSIH e SWARCHL**



**Nota: (1) Intervalos de confiança superior com coeficiente confiança de 95% elaborados a partir de dois desvios padrões do desvio padrão condicional,  $IC_{(95\%)} = 2 * \hat{\sigma}_{t|t-1}$ .**

**(2) \* indica a data do retorno outlier, \*\* o momento em que o intervalo de confiança volta a seguir a trajetória dos retornos.**

## 5. Considerações Finais

Este trabalho fez um estudo dos modelos de volatilidade considerando a especificação do modelo GARCH e abordagens de volatilidade com mudança de regime usando os modelos de série temporal com mudança de regime no intercepto e na variância (MSIH) e o modelo ARCH com mudança de regime (SWARCH). A partir da discussão da literatura, que coloca como principais limitações do modelo GARCH a sua persistência elevada e previsão limitada, investigou-se a natureza de suas limitações e as alternativas que as superariam. Para o exercício empírico foi utilizada a série de cotações do petróleo tipo Brent.

A série de preços do petróleo tipo Brent é caracterizada por inúmeros choques, como resultado de fatores econômicos e geopolíticos, apresentando um processo com mudança de regime. Como indicado pela estimação dos modelos com mudança de regime, a série de retornos Brent possui um processo gerador dos dados com mudança de regime na estrutura da variância, com uma variância não condicional se alterando ao longo da série.

Verificou-se a longa propagação dos choques sobre a volatilidade no modelo GARCH, que apresenta viés para a persistência para séries com quebra na variância incondicional (Almeida e Valls Pereira (1999); Laurini e Portugal (2002)). O modelo SWARCH é uma alternativa disponível com menor persistência que o modelo GARCH, mas com prolongamento dos choques frente a retornos aberrantes. Por outro lado, a estimação da volatilidade usando o MSIH demonstrou comportamento alinhado a série, mesmo frente a variações extremas dos preços dos ativos. O modelo MSIH, na forma proposta para estimação da volatilidade, apresentou uma estimação da volatilidade similar ao modelo GARCH e SWARCH, porém com a menor persistência dos choques sobre a volatilidade e com características desejáveis para estimação da volatilidade em períodos de crise.

Por fim, ao lado a comparação dos modelos de volatilidade, a série Brent estimada pelos modelos com mudança de regime apresenta um período inicial de maior volatilidade até 1990, quando ocorre a Guerra do Golfo, seguindo-se um período de baixa volatilidade até 1998, quando a atuação ativa da OPEP e mudança de cenários de oferta de demanda indica o período até o final da série de maior volatilidade. Este resultado difere da estimação dos modelos GARCH, que na estimação em subamostras indica a passagem de um período inicial de maior volatilidade para período de menor volatilidade interrompido somente com aumento da volatilidade com a crise subprime.

## Referências Bibliográficas

ALMEIDA, N. M. C. G.; VALLS PEREIRA, P. L.. *Mudança de Regime em Volatilidade: Os Modelos SWGARCH*. São Paulo: IBMEC. Finance lab Working Paper, 1999.

CUTHBERTSON, K.; HALL, S. G.; TAYLOR, M. P. *Applied Econometric Techniques*. UK, Harvester Wheatsheaf, 1992.

DUEKER, M. J. Markov Switching in GARCH Processes and Mean Reverting Stock Market Volatility. *Journal of Business and Economic Statistics*, Jan., 1997.

- ENDERS, W. *Applied Econometric Time Series*. John Wiley & Sons, Inc. second edition, 2004.
- FRANSES, P. H.; VAN DIJK, D. *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge University Press, 2000.
- HAMILTON, J. D.; SUSMEL, R. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime. *Journal of Econometrics*, 64, p. 307-333, 1994.
- HAMILTON, J. D. A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, vol.57, n.2, March, p.357-384, 1989.
- HAMILTON, J. D. *Times Series Analysis*. Oxford, 1994.
- HWANG, S, & VALLS PEREIRA, P. L. Small sample properties of GARCH estimates and persistence. *European Journal of Finance*, 12(6-7), p. 473-494, Oct, 2006.
- HWANG, S. & VALLS PEREIRA, P. L. The effects of structural breaks in ARCH and GARCH parameters on Persistence of GARCH models. *Communications in Statistics. Simulation and Computation*, 37 (3), p. 571-578, 2008.
- JR. PINTO, H.; FERNANDES, E. S. L. O Mercado Internacional do Petróleo e o Comportamento dos Preços. Rio de Janeiro: ANP, Nota Técnica n. 2, julho, 1998.
- KIM, C. J.; NELSON, C. R. *State-Space Models with Regime Switching*. Cambridge: The MIT Press.1999.
- KROLZIG, H. M. *Markov-Switching Vector Autoregressions: Modelling, Statistical Inference, and Applications to Business Cycle Analysis*. Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 1997.
- LAMOUREUX, C. G.; LASTRAPES, W. D. Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model. *Journal of Business & Economic Statistics*, v.8, n.2, 1990.
- LAURINI, M. P.; PORTUGAL, M. S. *Modelos para a Persistência na Volatilidade da Taxa de Câmbio R\$/US\$ - Análise Comparativa entre GARCH e Mudança Markoviana*. Texto para Discussão, n. 04/2003. Programa de Pós-Graduação Em Economia, UFRGS.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Blücher, 2004.
- PAGAN, A. R.; SCHWERT, G. W. Alternative Models for Conditional Stock Volatility. *Journal of Econometrics*, p. 267-290, 1990.
- ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. Ninth Edition, Elsevier, 2007.
- SANTANA, R. M.; BUENO, R. de L. da S. SWARCH e Volatilidade Implícita no Câmbio do Real/USD. *Revista Brasileira de Finanças*, vol. 6, n.2, p. 235-265, 2008.
- TSAY, R. S. *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, Inc. second edition, 2005.
- VALLS PEREIRA, P.L.; HOTTA, L.K.; SOUZA, L. A. R. de e ALMEIDA, N. M. C. G. (1999) Alternative Models to Extract Asset Volatility: a comparative study, *Revista de Econometria*, vol. 19, n. 1, pp. 57-109.