Nº 70

CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA: APLICAÇÕES

Clovis de Faro

CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA: APLICAÇÕES

Clovis de Faro

Fevereiro, 1986

CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA: APLICAÇÕES

1. Introdução

Tradicionalmente, o que se evidencia pela leitura de quase todos os textos que versam sobre Matemática Financeira, os quais refletem as práticas das negociações correntes, o tratamento das relações que envolvem quantias pagáveis em distintos instantes de tempo tem sido, quase que exclusivamente, segundo o chamado regime de capitalização descontínua, Neste regime, temos duas características fundamentais: a) as taxas de juros são sempre relativas a períodos discretos de tempo; b) ao menos teoricamente, sendo exemplo prático o caso das Cadernetas de Poupança, os juros só são formados no fim de cada período a que se refere a taxa de juros considerada. Deste modo, o estudo formal das relações envolvidas deveria ser efetuado, como, por exemplo, discutido no terceiro tópico em de Faro (1979), através o concurso da teoria das equações de diferenças finitas.

Entretanto, embora não seja utilizado na prática, um regime teoricamente muito mais adequado é o da denominada capitalização contínua. Neste, o tempo é explicitamente tratado como uma variável contínua, introduzindo-se o conceito de taxa instantânea de juros, o que faz com que as relações envolvidas possam ser abordadas de acordo com as muito mais ricas teorias dos cálculos diferencial e integral. Como principal vantagem, além de poder representar de uma maneira equivalente qualquer relação obtida segundo a capitalização descontínua, temos o fa-

to de que, como já a muito reconhecido pela teoria econômica, certos problemas podem ser muito mais comodamente resolvidos mediante o concurso da capitalização contínua.

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar os princípios básicos da capitalização contínua, ilustrando sua aplicação a problemas que são usualmente discutidos na chamada Teoria do Capital.

2. - A Taxa Instantânea de Juros

Em uma aplicação financeira, os juros, acréscimo de capital, que são formados, dependem não só do tempo de aplicação e do capital inicialmente aplicado, mas também de um fator básico que é denominado de taxa de juros. Por definição, a taxa de juros, que sempre é referida à determinado período de tempo, é numericamente igual à remuneração (juros) da unidade de capital, por sua aplicação em um período a que se refere a taxa.

Consideremos o caso onde a taxa de juros é relativa a um período infinitesimal de tempo. Neste caso, a taxa é dita ser instantânea e, dado que seu valor pode variar com o tempo, será representada por δ_t. Denotando-se por C_t o total de capital no instante t, e recordando que o acréscimo de capital ΔC_t confunde-se com o diferencial dC_t quando o acréscimo de tempo tende para o infinitésimo dt, da definição de taxa de juros decorre a seguinte relação:

$$\delta_t = \frac{dC_t/C_t}{dt} \qquad (1)$$

Sendo C_0 o capital inicial, a resolução da equação diferencial dada pela relação (1) nos leva a poder escrever que o total de capital, no fim de um espaço de tempo igual a T, será dado por:

$$C_T = C_0 . \exp\{ \int_0^T \delta_t . dt\} \tag{2}$$

onde $\exp\{A\} \equiv e^A$

2.1 - <u>Exemplos</u>

Para a determinação numérica do total de capital C_T, através a relação (2), é necessária a especificação do comportamento temporal da taxa instantânea de juros. A título de ilustração, iremos considerar aqui dois casos particulares:

a) caso de taxa invariante com o tempo

Suponha que a taxa instantânea de juros seja constante e igual a δ. Nesta eventualidade, teremos:

$$C_T = C_0 . e^{\delta . T} \tag{2'}$$

Observe-se que teremos o capital crescendo, constante ou diminuindo, à medida em que se decorre o tempo, conforme, respectivamente, a taxa δ seja positiva, nula ou negativa. Entretanto, a função C_T será sempre convexa.

b) caso de taxa instantânea variando linearmente.

Admita-se que $\delta_t = \alpha + \beta.t$. Neste caso, tem-se:

$$C_T = C_0.e^{\alpha.T + \beta.T^2/2} \tag{2"}$$

Agora, o comportamento de C_T depende, simultaneamente, dos valores dos parâmetros α e β.

2.2 - Relação com a Taxa Efetiva de Capitalização Descontínua.

Na hipótese em que o capital inicial C_0 é aplicado, no regime de capitalização descontínua, a uma certa taxa periódica e constante i, por um prazo igual a T períodos, sabemos que (cf. de Faro, 1982) o total de capital no fim desse prazo é dado por:

$$C_T = C_0 \ (1+i)^T \tag{3}$$

Deste modo, comparando-se as relações (2') e (3), a taxa instantânea e constante δ que, no regime de capitalização contínua, produzisse o mesmo resultado que a taxa i, dita efetiva, deve ser tal que:

$$\delta = \ell n \ (1+i) \tag{4}$$

A relação (4) permite com que, do ponto de vista computacional, a escolha entre a adoção da capitalização des-

contínua ou contínua, no caso de taxas invariantes com o tempo,[1] que costuma ser o mais usual, é uma mera questão de gosto pessoal do analista.

2.3 - A Taxa Instantânea Interpretada como o Caso Limite de uma Taxa Nominal de Capitalização Descontínua.

Em Matemática Financeira, denomina-se de taxa nominal[2] a uma taxa de juros cujo período a que se refere não coincide com o explicitamente mencionado como o de capitalização. Regra geral, o período de uma taxa nominal é subdividir em k períodos de capitalização. Deste modo, uma taxa nominal costuma ser denotada por j_k, onde a letra j caracteriza o fato da taxa ser nominal e k indica o número de capitalizações ao longo do seu período.

Usualmente k é finito, o que caracteriza o regime de capitalização descontínua, sendo extremamente comum o caso de taxas anuais com capitalizações mensais (j_{12}). A uma dada taxa nominal j_k corresponde a taxa efetiva i, que é a que deve ser empregada na relação (3) e cujo período é o mesmo da taxa nominal, que satisfaz a seguinte relação:

$$j_k = k\,[\,(1+i)^{1/k} - 1\,] \tag{5}$$

1/ No caso em que a taxa instantânea de juros varia com o tempo, não é possível relacionar-se, independentemente do prazo T, as taxas relativas aos dois regimes de capitalização.

2/ Em Economia, o termo é usado com relação a taxas para as quais não foram ainda escoimados os efeitos da inflação. Denominaremos tais taxas de aparentes.

No caso em que o número de capitalizações for infinitamente grande, a capitalização passará a ser efetuada de uma maneira contínua, o que implica em que a taxa nominal passe a ser instantânea. Logo, formalmente, podemos escrever que:

$$\lim_{k\to\infty} j_k = \delta \qquad (6)$$

Por outro lado, decorre de (5) que

$$\lim_{k\to\infty} j_k = \ell n\ (1+i) \qquad (5')$$

Por conseguinte, a interpretação de δ como uma taxa nominal com um número infinito de capitalizações ao longo de seu período, também conduz à relação (4).

3. - O Caso de Fluxos de Pagamentos

Para certos tipos de problemas, como veremos, é mais conveniente, do ponto de vista analítico, admitir-se que receitas e despesas ocorram de uma maneira contínua. Isto é, tudo se passa como se tivessemos fluxos de receitas e despesas.

Seja $f(t)$ um fluxo de receita (ou despesa) no instante t, fluxo esse que se estende da época 0 à época T. A pergunta que queremos responder é a da determinação do valor que, na data zero, é equivalente ao fluxo considerado. Tal valor, que é chamado de atual, será determinado a partir do emprego da relação (2).

Sendo f(t).dt o total de receita (despesa) entre os instantes t e t + dt, o seu valor atual, denotado por dV, deve ser tal que:

$$dV.\exp\{\int_0^t \delta_\zeta .d\zeta\} = f(t).dt \qquad (6)$$

Portanto, mediante integração, podemos escrever que o valor atual procurado é:

$$V = \int_0^T f(t).\exp\{-\int_0^t \delta_\zeta .d\zeta\}\,dt \qquad (7)$$

Obviamente, para fins de aplicações concretas, é necessário que se especifique o comportamento temporal tanto do fluxo f(t) como da taxa instantânea δ_t. No que se segue, a título de ilustração, estudaremos alguns casos particulares.

3.1 - Fluxos Constantes

Seja o caso onde

$$f(t) = K,\ t \in [0,T] \qquad (8)$$

Então, em função do comportamento da taxa instantânea de juros, tem-se:

a) taxa invariante com o tempo ($\delta_t = \delta,\ \forall t$)

De (7) decorre que

$$V = K \int_0^T e^{-\delta . t} \, dt$$

ou

$$V = \frac{K}{\delta} (1 - e^{-\delta . T}) \qquad (9)$$

b) $\delta_t = 1/(\gamma + t)$, $\gamma > 0$, $t \geq 0$

Denotando-se por

$$J_t = \int_0^t \delta_\zeta . d\zeta \qquad (10)$$

e observando-se que, no caso,

$$J_t = \int_0^t (\gamma + \zeta)^{-1} \, d\zeta = \ell n[(\gamma + t)/\gamma]$$

decorre de (7) que:

$$V = K \int_0^T e^{-\ell n[(\gamma + t)/\gamma]} \, dt = \gamma . K \int_0^T (\gamma + t)^{-1} \, dt$$

Logo

$$V = \gamma . K . \ell n [(\gamma + T)/\gamma] \qquad (11)$$

3.2 - Fluxos Linearmente Crescentes (Decrescentes)

Admita-se que

$$f(t) = \alpha + \beta . t \ , \ \alpha \geq 0 \text{ e } t \geq 0 \qquad (12)$$

a) $\delta_t = \delta$

Temos, agora, que:

$$V = \int_0^T (\alpha + \beta.t)e^{-\delta.t}\,dt$$

Lançando mão do método de integração por partes, fazendo-se $t = u \Rightarrow dt = du$ e $e^{-\delta.t}dt = dv \Rightarrow v = -e^{-\delta.t}/\delta$, e usando o resultado dado por (9), tem-se:

$$V = \frac{\alpha}{\delta}\,(1 - e^{-\delta.T}) + \frac{\beta}{\delta}\,(-T.e^{-\delta.T} + \int_0^T e^{-\delta.t}\,dt)$$

ou

$$V = \frac{\alpha}{\delta}\,(1-e^{-\delta.T}) + \frac{\beta}{\delta}\,(\frac{1-e^{-\delta.T}}{\delta} - T.e^{-\delta.T}) \qquad (13)$$

b) $\delta_t = 1/(\gamma + t)$

Fazendo-se uso do resultado visto no item 3.1, parte b, tem-se:

$$V = \gamma \int_0^T (\alpha + \beta.t)(\gamma + t)^{-1}\,dt$$

ou, lançando mão da tabela de integrais em CRC (1971, pg. 397)

$$V = \gamma.\alpha.\ln[(\gamma+T)/\gamma] + \gamma.\beta\{T + \ln[\gamma/(\gamma+T)]^{\gamma}\} \qquad (14)$$

3.3 - Fluxos Exponenciais

Vejamos, finalmente, o caso onde

$$f(t) = \mu e^{\rho.t}, \quad t \geq 0 \qquad (15)$$

Em função do comportamento temporal da taxa de juros, tem-se:

a) $\delta_t = \delta$

$$V = \int_0^T \mu e^{\rho.t} e^{-\delta.t} dt$$

$$= \mu \int_0^T e^{(\rho-\delta)} dt$$

Dependendo da igualdade, ou não, entre a taxa instantânea de juros δ e a taxa ρ de variação do fluxo, o valor atual procurado será:

$$V = \begin{cases} \delta.T \ , \text{ se } \delta = \rho \\ \frac{1}{\rho-\delta} \ (e^{(\rho-\delta)T} - 1), \text{ se } \delta \neq \rho \end{cases} \tag{16}$$

b) $\delta_t = \begin{cases} \delta \ , \ 0 \leq \ t \ \leq 1 \\ \delta + 1 - 1/t, \ t \geq 1 \end{cases}$

Tendo em vista a relação (10), tem-se que:

$$J(t) = \int_0^1 \delta.dt + \int_1^t (\delta + 1 - 1/\sigma) d\sigma$$

$$= (\delta + 1) t - \ell n t - 1$$

Logo:

$$V = \mu \int_0^T e^{\rho.t} \ e^{-\{(\delta+1) t - \ell n t - 1\}} .dt$$

$$= \mu.e \int_0^T t.e^{(\rho-\delta-1) t} .dt$$

Procedendo-se à uma integração por partes, tal como indicado na parte a do item 3.2, é fácil ver que:

$$\int x.e^{a.x} .dx = \frac{e^{a.x}}{a^2} (a.x - 1)$$

Logo, fazendo-se $a = (\rho - \delta - 1)$, tem-se que:

$$V = \mu.e \{e^{a.T} (a.T-1) + 1\}/a^2 \tag{17}$$

4. O Problema do Envelhecimento do Vinho

Como primeiro exemplo concreto da conveniência em tratar-se o tempo como uma variável contínua, consideremos o chamado problema do envelhecimento do vinho. Este problema,que é clássico na literatura econômica,[1] constitui uma ilustração do que se denomina de processo de produção do tipo insumo-pontual e produto-pontual ("point-input-point-output").

Na sua versão mais simples, consideremos o caso de um empresário que está indeciso quanto a aproveitar a oportunidade de comprar uma dada quantidade de vinho verde, envelhece-lo, sem custo, durante um certo período e, a seguir, revende-lo. O problema básico que se apresenta é o de, supondo que o preço do vinho aumente com sua idade, determinar durante quanto tempo o vinho deve ser envelhecido.

Adotando-se a terminologia empregada por Simonsen (1980),o problema pode ser resolvido segundo duas distintas óticas. Sob a primeira, dita solução de Fisher, levando-se em conta a taxa de juros prevalente no mercado, busca-se maximizar a função valor atual associada ao investimento considerado. Na segunda, denominada de solução de Wicksell, o objetivo passa a ser o da maximização da taxa interna de retorno do investimento. No que se segue, iremos cotejar estas duas soluções[2].

1/ Além de, como citado por Allen (1938, pg. 248), ter sido estudado por economistas tais como Irving Fisher e Knut Wicksell, o problema é também abordado, entre outros, por Baumol (1972), Bierman (1968), Henderson e Quandt(1971), Hirshleifer (1970) e Simonsen (1980).

2/ Estudaremos somente o caso, dito determinístico, onde todas as variáveis são conhecidas com certeza. Para tratamentos probabilísticos, vejam-se os trabalhos de Kaplan (1972), Venezia e Brenner (1979) e Venezia (1983).

4.1 - A Solução Fisheriana

Seja P_0 o preço do litro do vinho verde, e representemos por P_t o preço do litro do vinho com a idade de t períodos. Como mencionado, na solução de Fisher busca-se envelhecer o vinho de modo a que seja máximo o valor atual do empreendimento. Para tanto, faz-se necessário que se conheça o comportamento temporal da taxa de juros prevalente no mercado. Quanto a este último aspecto, iremos considerar dois casos:

4.1.1 - Caso de taxa de juros constante: fórmula de Jevons

Para motivar o entendimento do processo de solução, admita-se que o vinho verde tenha sido comprado. A questão que então se apresenta ao adquirente, é a de até quando envelhece-lo. Para fins de análise, suponha que, tendo o vinho sido comprado no instante 0, decida-se envelhece-lo durante T períodos. Nestas condições, sendo Q a quantidade de litros adquirida, o empresário terá desembolsado a quantia $Q.P_0$, na data origem,e auferido a receita $Q.P_T$, no fim de T períodos. Deste modo,o que está em pauta é a avaliação econômica do projeto de investimento esquematicamente indicado na Figura 1.

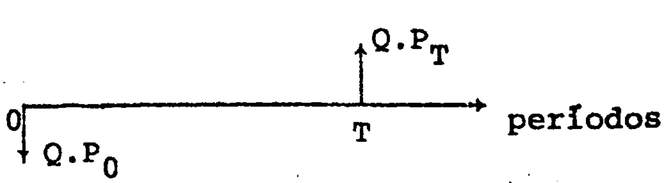

Figura 1

Envelhece-se o Vinho até a Idade T

Do ponto de vista do empresário, a alternativa de investimento à compra do vinho, é a aplicação da quantia que se

ria dispendida em sua aquisição, no mercado de capitais. Nesta última eventualidade, sendo δ a taxa periódica, com capitalização instantânea, de juros, taxa essa que é suposta invariante com o tempo, o indivíduo teria desembolsado a quantia $Q.P_0$ na mesma data origem, recebendo, no fim de T períodos, um total igual a $Q.P_0.e^{\delta.T}$. Ou seja, tal alternativa constitui-se no projeto de investimento esquematicamente representado na Figura 2.

Figura 2

Investir no Mercado de Capitais

Obviamente, dado que, em ambos os casos, o desembolso inicial é o mesmo, a alternativa comprar o vinho e envelhece-lo até a idade de T períodos será a melhor se for verificada a desigualdade:

$$Q.P_T > Q.P_0.e^{\delta.T} \tag{18}$$

Ou, como $e^{-\delta.T} > 0$, se

$$P_T.e^{-\delta.T} > P_0 \tag{18'}$$

Equivalentemente, a alternativa investimento no vi

nho será a melhor se a função

$$V(t) = - P_0 + P_t.e^{-\delta t} \tag{19}$$

dita função valor atual, for positiva no ponto $t = T$.

Ora, é de conclusão imediata que a alternativa investir no vinho será tanto melhor quanto maior for o valor de V(t). Logo, segue-se que a idade ótima de envelhecimento do vinho é aquela para a qual o valor atual V(t) é máximo.

Passemos, então, ao processo de maximização da função valor atual. Relativamente à condição de 1a. ordem, decorre que, derivando-se com relação ao tempo t:

$$V'(t) = 0 \rightarrow P_t'.e^{-\delta.t} - \delta.P_t.e^{-\delta.t} = 0 \tag{20}$$

ou

$$P_t'/P_t = \delta \tag{20'}$$

A relação (20'), que, segundo Baumol (1972, pag. 451), exprime a chamada fórmula de Jevons, nos diz que, em princípio, o vinho deve ser envelhecido até o ponto em que a taxa marginal de acréscimo (decréscimo) do preço do vinho iguale a taxa instantânea de juros.[1]

Relativamente à condição de 2a. ordem, devemos ter:

$$V''(t) < 0 \rightarrow \{P_t'' - 2.\delta.P_t' + \delta^2 P_t\}e^{-\delta.t} < 0 \tag{21}$$

1/ Usualmente, temos $\delta > 0$, o que implica em que o vinho só seja envelhecido se, na idade que satisfaz a condição de 1a. ordem, seu preço seja crescente. Se $\delta < 0$, o preço deve ser decrescente.

ou, tendo em vista (20')

$$\{P_t''.P_t - (P_t')^2\}/(P_t)^2 < 0 \qquad (21')$$

Isto é, independentemente do sinal de δ, a taxa marginal de acréscimo (decréscimo) do preço do vinho deve ser decrescente.[1]

Ilustrando as duas possibilidades apontadas, consideremos os dois seguintes exemplos numéricos:

a) $P_0 = K$, $P_t = 100.\exp\{t^{1/2}/2\}$, $t > 0$, e $\delta = 5\%$ ao ano com capitalização instantânea.

Como

$$y = \ell n(P_t) = \ell n\,100 + t^{1/2}/2$$

com

$$y' = t^{-1/2}/4 \quad > 0$$

e

$$y'' = -\,t^{-3/2}/8 \quad < 0$$

é suficiente que se considere a fórmula de Jevons.

Temos que a idade ótima será tal que:

$$\delta.P_t = P_t' \Rightarrow 0{,}05 \times 100.\exp\{t^{1/2}/2\} = 25.t^{-1/2}.\exp\{t^{1/2}/2\}$$

do que decorre que o vinho deva ser envelhecido até a idade de 25 anos.

1/ É fácil verificar que uma condição de suficiência para que a fórmula de Jevons produza a idade ótima de envelhecimento é que a função $y = \ell n(P_t)$ seja côncava e, e se $\delta > 0$ ($\delta < 0$), crescente (decrescente).

Neste ponto é interessante que se observe que a fórmula de Jevons não leva em conta o preço do litro do vinho verde P_0. Deste modo, é possível que, mesmo na idade ótima, se tenha $V(t) < 0$. Se isso acontecer, a conclusão é de que o vinho não seja adquirido.

No caso de nosso exemplo, temos:

$$V(25) = -K + 100.\exp\{25^{1/2}/2 - 0{,}05 \times 25\}$$

Conclui-se, assim, que o vinho só deva ser adquirido se o seu preço quando verde for inferior a 349,03 unidades monetárias.

b) $P_0 = K$, $P_t = \exp\{-t^2\}$, $t > 0$, e $\delta = -100\%$ a.a.c.c.i.

Como

$$y = \ln(P_t) = -t^2$$

com

$$y' = -2t < 0, \quad t > 0$$

e

$$y'' = -2 < 0$$

é suficiente fazer uso da fórmula de Jevons.

Temos:

$$\delta.P_t = P'_t \Rightarrow -1 \times e^{-t^2} = -2t.e^{-t^2} \Rightarrow t = 6 \text{ meses}.$$

Logo, o vinho deve ser adquirido, e envelhecido durante 6 meses, se o seu preço quando verde for tal que

$$V(0,5) = -K + \exp\{-0,5^2 + 1 \times 0,5\} > 0 \Rightarrow K < 1,28$$

4.1.1.1 - Efeito de uma variação na taxa de juros

Uma pergunta de interesse, é a que se refere ao que acontece com a idade ótima de envelhecimento na hipótese de que ocorra uma variação no valor da taxa de juros. Para estudar tal efeito, consideremos a fórmula de Jevons, convenientemente reescrita como:

$$P_t' - \delta . P_t = 0 \qquad (20")$$

Tomando a diferencial total da expressão (20"), tem-se:

$$(P_t'' - \delta . P_t')dt - P_t . d\delta = 0 \qquad (22)$$

Como, na idade ótima, deve ser satisfeita a igualdade dada por (20'), substituindo em (22) o correspondente valor de δ, podemos escrever:

$$\frac{dt}{d\delta} = \frac{P_t^2}{P_t . P_t'' - (P_t')^2} \qquad (22')$$

Tendo em vista (21'), conclui-se que $dt/d\delta < 0$. Assim, um acréscimo (decréscimo) na taxa de juros do mercado encurta (alonga) a idade ótima de envelhecimento do vinho.

4.1.1.2 - Efeito de uma taxação

Investiguemos, agora, o que aconteceria com a idade ótima de envelhecimento se fosse introduzida uma taxação sobre o lucro contabilmente auferido pelo empresário.

Seguindo a apresentação em Brenner e Venezia (1983), considere-se o caso onde o lucro contábil, apurado na data da venda e que é igual a $P_t - P_0$, seja taxado à alíquota φ. Nesta eventualidade, a função valor atual associada ao empreendimento passa a ser escrita como:

$$V(t) = -P_0 + \{P_t - \varphi(P_t - P_0)\}e^{-\delta.t} \tag{23}$$

A condição de 1a. ordem para a maximização de (23), implica em que o tempo ótimo de envelhecimento passe a ser tal que seja satisfeita a seguinte condição:[1]

$$\delta = \frac{(1-\varphi)P'_t}{(1-\varphi)P_t + \varphi.P_0} \tag{24}$$

Por outro lado, a condição de 2a. ordem requer que, para o instante de tempo t que satisfaz a condição de 1a. ordem, se tenha:

$$V''(t) < 0 \Rightarrow \frac{(1-\varphi)e^{-\delta.t}}{(1-\varphi)P_t + \varphi P_0} \{(1-\varphi)[P_t.P''_t - (P'_t)^2] + \varphi.P_0.P''_t\} < 0 \tag{25}$$

1/ Observe-se que, no caso particular em que $\varphi = 0$, a relação (24) reduz-se à fórmula de Jevons.

ou, dado que $0 < \varphi < 1$ e que só ocorre taxação se houver lucro contábil (i.e., se $P_t - P_0 > 0 \Rightarrow P_t - \varphi(P_t - P_0) > 0$), podemos também escrever que a condição de 2a. ordem exige que:

$$(1-\varphi)[P_t.P_t'' - (P_t')^2] + \varphi.P_0.P_t'' < 0 \qquad (25')$$

Vejamos, agora, qual o efeito que a introdução da taxação acarreta na idade ótima de envelhecimento. Para tanto, considerando a diferencial da condição de 1a. ordem, tem-se:

$$- \{(1-\varphi)P_t + \varphi.P_0\}d\delta - \delta(1-\varphi)P_t'.dt + \delta(P_t - P_0)d\varphi +$$
$$+ (1-\varphi)P_t''.dt - P_t'.d\varphi = 0 \qquad (26)$$

Observando-se que, na idade ótima, o valor de δ deve ser como dado por (24), e concentrando atenção no exame da alteração em φ (i.e., fixando-se $d\delta = 0$), segue-se que:

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{(2-\varphi)P_0.P_t'}{(1-\varphi)^2 P_t.P_t'' + \varphi(1-\varphi)P_t''.P_0 - [(1-\varphi)P_t']^2} \qquad (26')$$

Como, se P_t for uma função crescente, o numerador de (26') será positivo, decorre de (25') que o sinal da derivada $dt/d\varphi$ será também negativo. Logo, um aumento (diminuição) na alíquota da taxação encurta (alonga) a idade ótima de envelhecimento do vinho. Por conseguinte, com relação ao caso de ausência de taxação ($\varphi = 0$), a introdução do tributo tem como conseqüência a redução do período de envelhecimento.

A título de ilustrar numericamente o efeito mencionado, reconsideremos o caso do exemplo a do item 4.1.1, supondo agora que o lucro contábil seja taxado à alíquota $\varphi = 10\%$. Se o preço do litro do vinho verde for $P_0 = 250$, tem-se, de (24), a seguinte equação:

$$4{,}5 \exp\{t^{1/2}/2\} + 1{,}25 - 22{,}5 . \exp\{t^{1/2}/2\}/t^{1/2} = 0$$

Resolvendo-se, numericamente, tem-se $t \simeq 23{,}83$ anos. Visto que a condição de 2a. ordem é satisfeita, e que $V(23{,}83) > 0$, segue-se que a introdução da taxação reduziria a idade ótima de envelhecimento de 4,68%.

4.1.2 - Caso de taxa de juros variável com o tempo

Na eventualidade em que o investidor preveja um comportamento variável, mas perfeitamente especificado,[1] para a taxa de juros, tendo em vista a relação (10), a função valor atual associada ao empreendimento envelhecimento do vinho passa a ser:

$$V(t) = - P_0 + P_t . e^{-J_t} \qquad (27)$$

Considerando a condição de 1a. ordem, segue-se que a idade ótima de envelhecimento deve ser, agora, tal que:

1/ Na realidade, esta hipótese é bastante artificial. Em termos práticos, o que se costuma fazer é trabalhar com uma taxa média, recaindo-se, assim, no caso anterior.

$$V'(t) = 0 \Rightarrow P_t'.e^{-J_t} - \delta_t.P_t.e^{-J_t} = 0$$

ou

$$P_t' = \delta_t.P_t \qquad (28)$$

Analogamente ao caso de taxa de juros invariante com o tempo, a condição de 1a. ordem implica em que o vinho, caso seja adquirido, deve ser envelhecido até o ponto em que a taxa marginal de variação de seu preço iguale o valor da taxa instantânea de juros.

Quanto à condição de 2a. ordem, é fácil verificar que, no ponto que satisfaz a relação (28), devemos ter:

$$(P_t'' - \delta_t'.P_t)P_t - (P_t')^2 < 0 \qquad (29)$$

Agora, diferentemente do caso anterior, não basta que a taxa marginal de variação do preço seja decrescente. Isso porque, na eventualidade de que a taxa de juros varie com o tempo, a condição de 2a. ordem para a maximização da função valor atual depende também de como varia a taxa de juros.

A título de ilustração numérica, reconsideremos o exemplo a estudado no item 4.1.1, supondo, agora, que o comportamento da taxa periódica de juros com capitalização instantânea seja tal que $\delta_t = (1 + t^{1/2})/8$.

A condição de 1a. ordem, como dada por (28), requer que a idade ótima seja tal que:

$$12{,}5(1 + t^{1/2}).\exp\{t^{1/2}/2\} = 25.t^{-1/2}.\exp\{t^{1/2}/2\}$$

Logo, observando que a condição de 2a. ordem é satisfeita, conclui-se que o vinho, caso tenha sido adquirido, deve ser envelhecido até a idade de 1 período.

Quanto à questão de adquirir, ou não, o vinho verde, a resposta só será afirmativa se o preço K do litro seja tal que:

$$V(1) = - K + 100.\exp\{0,5 - \int_0^1 (1 + t^{1/2})dt/8\} > 0$$

Consequentemente, o vinho verde só deve ser comprado se custar menos do que 133,87 unidades monetárias, por litro.

4.1.2.1 - Introdução de taxação

Se o lucro contábil $P_t - P_0$ for taxado à alíquota φ, a função valor atual passa a ser igual a:

$$V(t) = - P_0 + \{(1-\varphi)P_t + \varphi.P_0\}e^{-J_t} \qquad (30)$$

Em decorrência, a condição de 1a. ordem implicará, agora, que a idade ótima de envelhecimento seja tal que:

$$\delta_t = \frac{(1-\varphi)P'_t}{(1-\varphi)P_t + \varphi.P_0} \qquad (31)$$

Examinando a condição de 2a. ordem, a solução de (31) dará efetivamente a idade ótima de envelhecimento se, nesta idade, tivermos:

$$(1-\varphi)P_t'' - \delta_t'\{(1-\varphi)P_t + \varphi . P_0\} - \delta_t(1-\varphi)P_t' < 0 \qquad (32)$$

Por outro lado, para que possamos avaliar o impacto acarretado pela introdução do tributo, é fácil verificar que, considerando a diferencial total da função implícita definida por (31), segue-se que:

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{P_t' - \delta_t . P_t}{(1-\varphi)P_t'' - \delta_t' \{(1-\varphi)P_t + \varphi . P_0\} - \delta_t(1-\varphi)P_t'} \qquad (33)$$

De (32), vemos que o denominador de (33) é negativo. Quanto ao sinal do numerador, observe-se que, tendo em vista (31), este é igual ao quociente entre $\varphi . P_t' . P_0$ e a receita líquida $\{(1-\varphi)P_t + \varphi . P_0\}$. Logo, no caso em que P_t seja uma função crescente, a introdução do tributo implica em uma redução no tempo ótimo de envelhecimento.

Como ilustração, retomemos o caso do exemplo do item anterior, supondo, agora, que haja uma tributação à alíquota $\varphi = 10\%$. Tomando-se $K = 80$, pode-se verificar que a idade ótima cairá para 0,93 períodos.

4.2 - <u>A Solução Wickselliana</u>

Na chamada solução de Wicksell, como anteriormente

mencionado, admite-se que o indivíduo procure envelhecer o vinho de modo a que seja máxima a taxa interna de retorno associada ao investimento. Isto é, busca-se determinar o tempo de envelhecimento de modo a que seja máximo o valor da taxa de juros δ que anula a função valor atual $V(t)$, como dada por (19).

Ora, fazendo-se $V(t) = 0$, temos:

$$P_t . e^{-\delta . t} = P_0 \qquad (34)$$

Por conseguinte, em função da idade t, a taxa interna de retorno pode ser escrita como:

$$\delta = \ell n\{P_t/P_0\}/t \qquad (35)$$

Para que δ seja maximizado, devemos ter:

$$d\delta/dt = 0 \Rightarrow - \ell n \{ P_t/P_0\}/t^2 + P_t'/(t.P_t) = 0$$

Fazendo uso de (35), a condição de 1a. ordem para a maximização de δ requer que

$$\delta = P_t'/P_t \qquad (36)$$

Portanto, a condição de 1a. ordem para a maximização de δ é, simbolicamente, exatamente igual a fórmula de Jevons. Entretanto, compre ressaltar, a igualdade é meramente simbólica, pois que, em (35), o valor de δ não é conhecido. Os valores procurados de δ e de t serão determinados resolvendo-se o sistema for-

mado pelas relações (35) e (36). Deste modo, fica então evidente que, ao contrário do que ocorre na solução de Fisher, na solução de Wicksell o tempo ótimo de envelhecimento depende do preço do litro de vinho verde, P_0.

Quanto à condição de 2a. ordem, observe-se que:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{2.t}{t^4}\,\ell n\{\frac{P_t}{P_0}\} - \frac{P'_t}{t^2.P_t} - \frac{P'_t}{t^2.P_t} + \\ + \frac{P''_t.P_t - (P'_t)^2}{t.P_t{}^2}$$

$$= -\frac{2}{t}\{-\ell n\{P_t/P_0\}/t^2 + P'_t/(t.P_t)\} + \\ + (1/t)\{P''_t.P_t - (P'_t)^2\}/P_t^2$$

Ora, no ponto que satisfaz a condição de 1a ordem, a primeira parcela da expressão acima será nula. Logo, como o envelhecimento só ocorre se $t > 0$, conclui-se que, tendo em vista a expressão (21'), a condição de 2a. ordem na solução de Wicksell é a mesma que na solução de Fisher.

Conforme visto, qualquer função preço que satisfaça as condições de maximização fisheriana, também vale para o enfoque wicksellliano.Entretanto, como se verifica retomando o caso do exemplo a do item 4.1.1, os respectivos tempos ótimos de envelhecimento, são, em geral, distintos.

No caso do exemplo considerado, devemos resolver o

sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \delta . P_t = P'_t \\ \\ P_t . \exp\{-\delta . t\} = P_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta = t^{-1/2}/4 \\ \\ 100 . \exp\{t^{1/2}/2 - \delta . t\} = K \end{array}\right.$$

Temos, então, em função de K, que é o preço do litro do vinho verde, que o tempo ótimo de envelhecimento será igual a:

$$t = [\, 4 . \ell n\{K/100\} \,]^2$$

Por conseguinte, fixando-se t = 25 anos, conclui-se que as duas ótimas consideradas somente produzirão a mesma solução se K = 349,03 unidades monetárias.[1]

Visto que, somente por uma improvável coincidência as duas soluções produzirão o mesmo tempo de envelhecimento do vinho, resta saber qual das duas soluções é a mais adequada. Posto que, como discutido no item 4.1.1, a solução de Fisher é baseada em uma clara interpretação econômico-financeira, julgamos ser esta a mais adequada. Devido a isso, no que se segue, iremos concentrar atenção no enfoque fisheriano.

4.3 - O Caso de Horizonte Infinito: fórmula de Faustmann

Até aqui, consideramos somente a situação de um in-

1/ Observe-se que, neste caso, a taxa interna de retorno coincidirá com a taxa de mercado adotada na solução de Fisher.

divíduo que, diante de uma oportunidade de investimento, desejava saber se seria ou não interessante envelhecer uma dada quantidade de vinho verde. Consideremos, agora, o caso de um empresário que se dedica ao negócio de envelhecimento de vinho. Isto é, analisemos a situação onde uma partida de vinho verde é comprada, envelhecida durante um certo período de tempo, que chamaremos de ciclo, e a seguir vendida. Na mesma data da venda, uma outra partida de vinho verde é adquirida, repetindo-se o processo.

Supondo um negócio que passe de pai para filho, analisaremos o problema de determinar o ciclo ótimo considerando um horizonte de planejamento com duração ilimitada. Este problema, que, segundo Hirshleifer (1970, pag. 89), foi originalmente resolvido por Faustmann, em um trabalho publicado em 1849, será analisado admitindo-se as seguintes condições:

a) o preço P_0 do litro do vinho verde, bem como a função P_t que fornece o preço do litro do vinho com idade de t períodos, são os mesmos em cada ciclo;

b) a cada ciclo, o lucro contábil é taxado à alíquota φ, que é invariante com o tempo;

c) a taxa instantânea periódica permanece constante e igual a δ.

Nestas condições, é óbvio que a duração de cada ciclo é a mesma;[1] digamos T períodos. Deste modo, a consideração de um horizonte infinito gera a seqüência de fluxos de caixa líqui

---

1/ No caso em que algum dos parâmetros considerados variar com o tempo, os ciclos poderão ter distintas durações. Tal fato pode acarretar com que não seja convergente a série adiante analisada.

dos esquematicamente indicada na Figura 3.

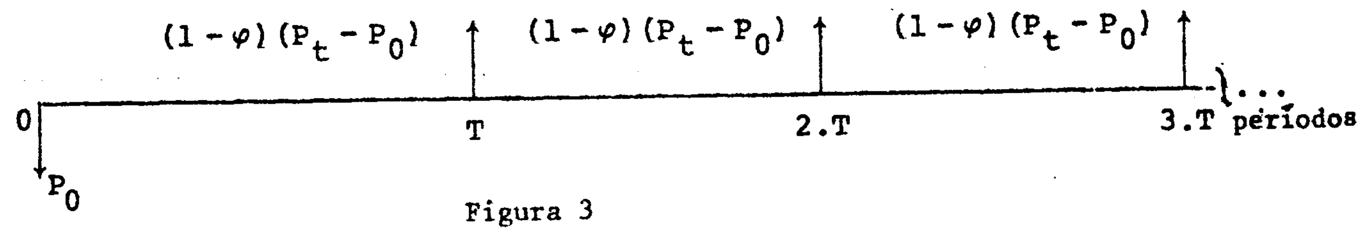

Figura 3
<u>Horizonte Infinito</u>

Denotando-se por F(T) o valor atual, a taxa δ, da seqüência considerada, tem-se que:

$$F(T) = -P_0 + (1-\varphi)(P_T - P_0)(e^{-\delta.T} + e^{-2.\delta.T} + e^{-3.\delta.T} + \ldots)$$

ou, admitindo, o que é o caso normal, que $\delta > 0$

$$F(T) = -\ P_0 + (1-\varphi)(P_T - P_0)e^{-\delta.T}/(1-e^{-\delta.T}) \qquad (37)$$

Determinando-se T de modo a que seja máximo o valor de F(T), é fácil ver que, anulando-se a derivada F'(T), a duração do ciclo ótimo deve ser tal que satisfaça a seguinte relação, dita fórmula de Faustmann:

$$P'_T = \frac{\delta(P_T - P_0)}{1 - e^{-\delta.T}} \qquad (38)$$

Cabem, aqui, duas observações. A primeira, refere-se ao fato de que a duração do ciclo independe da alíquota φ. A segunda, diz respeito à indagação se, com relação ao caso anteriormente estudado, temos um menor ou maior tempo de envelhecimento

do vinho. Para respondermos esta pergunta, note-se que, tendo em vista a relação (23), o valor atual da seqüência infinita pode ser reescrito como:

$$F(T) = V(T) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k.\delta.T}$$

ou

$$F(T) = V(T)/(1 - e^{-\delta.T}) \tag{37'}$$

Derivando-se (37') e igualando a zero a resultante expressão, podemos escrever que a duração do ciclo ótimo no caso de horizonte infinito deve ser tal que:

$$(1-\varphi)P'_T = \delta\{(1-\varphi)P_T + \varphi.P_0 + F(T)\} \tag{39}$$

Passemos, agora, a comparar as soluções relativas aos casos de um ciclo único e de um número infinito de repetições, respectivamente como derivadas das relações (24) e (39). Designemos por $\hat{T}$ o tempo de envelhecimento no primeiro caso, e por $\bar{T}$ a duração do ciclo no segundo caso. Antes de mais nada, observemos que, no caso de repetições, o negócio envelhecimento de vinho só será levado adiante se $F(\bar{T}) > 0$.[1]

Para a comparação entre $\hat{T}$ e $\bar{T}$ que, obviamente, não podem ser iguais, admitamos que a função P_T seja crescente e côncava. Então, buscando uma contradição, suponhamos que $\bar{T} > \hat{T}$. Cotejando os primeiros membros das relações (24) e (39), visto que

[1] A rigor, se $F(\bar{T}) = 0$, haverá indiferença entre entrar no negócio de envelhecimento do vinho e a aplicação no mercado de capitais.

$P'_{\bar{T}} < P'_{\hat{T}}$, temos que o primeiro membro de (24) é o maior dos dois.

Por outro lado, dado que $P_{\bar{T}} > P_{\hat{T}}$ e que $F(\bar{T}) > 0$, teremos que o segundo membro da relação (39) superará o da (24).

Por conseguinte, podemos concluir que a repetição indefinida do ciclo implicará em uma redução do mesmo.

Para que se tenha uma indicação numérica do efeito acima discutido, consideremos o caso em que $P_t = 100(1+t^{1/2})$, para $t > 0$, $\delta = (100/12)\%$ ao ano, com capitalização instantânea, e $P_0 = 140$.

Antes de mais nada, observemos que temos uma função preço que é crescente e côncava, o que implica em que a condição de 2a. ordem, como expressa por (21'), seja trivialmente satisfeita. Assim, fazendo uso da fórmula de Jevons, segue-se que a idade ótima de envelhecimento do vinho, na hipótese de um único ciclo, é tal que:

$$100(1+t^{1/2})(1/12) = 50.t^{-12}$$

Logo, conclui-se que é de 4 anos a idade ótima, com o correspondente valor da função valor atual sendo igual a $V(4) = 74{,}96$ unidades de capital.

Na hipótese de repetição indefinida do ciclo, sua duração, tendo em vista a (38), passa a ser tal que:

$$50.t^{-1/2}(1-e^{-t/12}) = (100+100.t^{1/2} - 140)/12$$

Deste modo, pode-se verificar que, nesta última eventualidade, a duração do ciclo cairá para, aproximadamente, 61%

de um ano. Sendo que o valor atual da seqüência infinita de repe ções será igual a $F(0,61) \simeq 590,67$ unidades de capital.

5. O Problema do Crescimento de Árvores

Passemos, agora, a analisar o caso de um investimento do tipo chamado de desembolso-contínuo-retorno-instantâneo(continuous-input-point-output). Ilustrativamente,seguindo Henderson e Quandt (1971, pag. 324), tal é o caso de um indivíduo que se dedica à atividade de exploração de florestas.

Na sua forma mais simples, imaginemos o caso de um indivíduo que, pagando o custo P_0 por uma semente de certa espécie de árvore, e incorrendo em um custo de cultivo representado pelo fluxo periódico C_t, espera que o vegetal possa ser vendido ao preço P_T no fim de T períodos de crescimento.[1] A pergunta que se quer responder, é a relativa à determinação da época T em que se deve cortar e vender a árvore considerada.

5.1 - Caso de Taxa de Juros Constante

Supondo que a taxa de juros de mercado, em termos instantâneos, seja de δ por período, a função valor atual associada ao investimento considerado, no caso em que a árvore cresce até a idade T, será escrita como:

$$V(T) = - P_0 - \int_0^T C_t.\exp\{-\delta.t\}.dt + P_T.\exp\{-\delta.T\} \qquad (40)$$

1/ Para uma ilustração prática da função P_t, considerando o caso de crescimento de Eucalyptus, veja-se o trabalho de Hoffmann e Vieira (1985).

Para que o valor atual seja máximo, a árvore deve ser cultivada até a idade T para a qual se tenha:

$$V'(T) = 0 \Rightarrow P'_T . e^{-\delta . T} - \delta . P_T . e^{-\delta . T} - C_T . e^{-\delta . T} = 0$$

ou

$$\delta = (P'_T - C_T)/P_T \tag{41}$$

Ou seja, a árvore deve crescer até o ponto em que a taxa marginal do acréscimo líquido de seu valor de mercado, seja igual à taxa instantânea de juros.

Quanto à condição de 2a. ordem, esta requer que, no ponto onde $V'(T) = 0$, se tenha:

$$V''(T) < 0 \Rightarrow (P''_T - \delta . P'_T - C'_T) e^{-\delta . T} - \delta (P'_T - \delta . P_T - C_T) e^{-\delta . T} < 0$$

ou, observando que a segunda parcela acima é nula, é suficiente que se tenha

$$P''_T - \delta . P'_T - C'_T < 0 \tag{42}$$

Alternativamente, tendo em vista o valor de δ como dado por (41), podemos reescrever (42) como:

$$[\ (P''_T - C'_T)\ P_T - (P'_T - C_T) P'_T\ ]/P_T > 0 \tag{42'}$$

Multiplicando-se a relação acima pelo fator $1/P_T$, que é positivo, vemos que a condição de 2a. ordem pode ser interpretada como requerendo que, no ponto em que a árvore deve ser cortada, seja decrescente a taxa marginal de acréscimo líquido de seu valor de mercado.

Observemos que, em relação ao caso estudado na seção 4, o qual, alegoricamente, foi associado à operação envelhecimento de vinho, a única diferença que temos agora é o fluxo de custo C_t. Assim, se C_t for identicamente nulo, recaíremos no caso anterior. Cabe, então, indagar qual o efeito que a introdução de um fluxo de custo acarretaria no tempo ótimo de envelhecimento do vinho. Em outras palavras, sendo $\hat{T}$ a solução derivada da relação (20'), queremos compará-la com a solução $\bar{T}$ dada por (41).

Inicialmente, notemos que a seguinte igualdade deve ser satisfeita:

$$P'_{\hat{T}}/P_{\hat{T}} = (P'_{\bar{T}} - C_{\bar{T}})/P_{\bar{T}} \tag{43}$$

No caso em que $\delta > 0$, que é o usual, devemos ter P_T sendo uma função crescente. Então, supondo que a função preço seja também côncava e que C_T seja não-decrescente, o que é suficiente para que (42) seja satisfeita, admita-se que, contrariamente ao que se quer provar, se tenha $\hat{T} < \bar{T}$. Segue-se, então, que $P_{\hat{T}} < P_{\bar{T}}$ e $P'_{\hat{T}} > P'_{\bar{T}} > P'_{\bar{T}} - C_{\bar{T}}$; pois que, obviamente, o custo deve ser positivo. Logo, o primeiro membro de (43) seria maior que o segundo; o que é um absurdo.

Conseqüentemente, a introdução de um custo de manutenção reduz a idade ótima de envelhecimento do vinho.

Com o intuito de prover uma ilustração numérica, reconsidere-se o exemplo discutido no item 4.3, supondo, agora, que $P_0 = K_1$. Então, supondo, inicialmente, que não haja custo de manutenção, i.e., $C_t = 0$, teremos, como já visto, que a idade ótima se

rá $\hat{T} = 4$ anos, com $V(4) = 214{,}96 - K_1$.

Admita-se, agora, que $P_0 = K_2$ e que o fluxo de custo de manutenção seja tal que $C_t = 2{,}5$, para $t > 0$. De acordo com a relação (41), a idade ótima $\bar{T}$ deve ser tal que:

$$\delta . P_{\bar{T}} = P'_{\bar{T}} - C_{\bar{T}} \Rightarrow (100/12)(1+t^{1/2}) = 50.t^{-1/2} - 2{,}5$$

Como é fácil verificar, teremos $\bar{T} \simeq 3{,}55$ anos. Além do mais, como, agora,

$$V(t) = - K_2 - 30(1-\exp\{-t/12\}) + 100(1+t^{1/2})\exp\{-t/12\}$$

segue-se que $V(3{,}55) \simeq 206{,}87 - K_2$

Deste modo, verifica-se não só uma redução no prazo de envelhecimento como, também, que o preço máximo do litro do vinho verde tem que ser diminuido.

5.1.1 - <u>Efeito de uma Variação na Taxa de Juros</u>

Similarmente à análise desenvolvida no item 4.1.1.1, passemos, agora, a examinar o efeito que uma variação no valor da taxa de juros acarreta na idade em que a árvore deve ser cortada.

Para tanto, observe-se que a condição de 1a. ordem requer que:

$$P'_T - C_T - \delta . P_T = 0 \qquad (41')$$

Logo, tomando a diferencial total da expressão acima,

vem que:

$$(P''_T - C'_T - \delta.P'_T)dT - P_T.d\delta = 0$$

Por conseguinte,a derivada da idade ótima com relação à taxa de juros, pode ser escrita como:

$$\frac{dT}{d\delta} = \frac{P_T}{P''_T - C'_T - \delta.P_T} \qquad (44)$$

Deste modo, tendo em vista que, no ótimo, a desigualdade expressa por (42) deve ser satisfeita, conclui-se que um aumento (decréscimo) na taxa de juros implica em uma diminuição (acréscimo) na idade em que a árvore deve ser abatida.

5.1.2 - Efeito de uma Taxação

Admita-se que, por ocasião do corte, e subseqüente venda, da árvore, o lucro contábil auferido no empreendimento seja taxado à alíquota φ. Nestas condições, a função valor atual associada ao investimento considerado passa a ser escrita como:

$$V(T) = - P_0 - \int_0^T C_t.e^{-\delta.t}.dt + \{P_T - \varphi(P_T - P_0 - \int_0^T C_t.dt)\}e^{-\delta.T} \qquad (45)$$

A condição de 1a. ordem requer que $V'(T) = 0$; o que implica em que:

$$\{(1-\varphi)(P_T' - C_T) - \delta[P_T - \varphi(P_T - P_0 - \int_0^T C_t.dt)]\}e^{-\delta.T} = 0$$

ou

$$\delta = \frac{(1-\varphi)(P_T' - C_T)}{P_T - \varphi(P_T - P_0 - \int_0^T C_t.dt)} \tag{46}$$

Por outro lado, no ponto que satisfaz (46), devemos ter $V''(T) < 0$; o que acontecerá se:

$$(1-\varphi)(P_T'' - C_T') - \delta[P_T' - \varphi(P_T' - C_T)] < 0 \tag{47}$$

Para que se possa inferir o efeito causado pela taxação considerada, observe-se que, tomando a diferencial total da função implícita definida pela expressão (46), mantendo δ constante, podemos escrever:

$$\{(1-\varphi)(P_T'' - C_T') - \delta[P_T' - \varphi(P_T' - C_T)]\}dT =$$

$$= \{P_T' - C_T - \delta(P_T - P_0 - \int_0^T C_t.dt\}\, d\varphi$$

Logo:

$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{P_T' - C_T - \delta(P_T - P_0 - \int_0^T C_t.dt)}{(1-\varphi)(P_T'' - C_T') - \delta[P_T' - \varphi(P_T' - C_T)]} \tag{48}$$

Tendo em vista a desigualdade expressa pela (47), vemos que o denominador da expressão da derivada do tempo ótimo de corte, com relação à alíquota φ do imposto, é negativo. Portanto, basta que concentremos atenção no exame do sinal do numerador. Para tanto, supondo que δ seja positivo, o que é o caso de interesse prático, note-se que, face à (46) visto que seu denominador repre-

ta o lucro líquido, que deve ser positivo para que o investimento seja rentável, teremos positiva a diferença $P_T^{\prime}-C_T$. Isto posto, denotando-se por A o lucro contábil, observe-se que o numerador de (48) pode ser reescrito como:

$$\frac{(P_T^{\prime} - C_T)[P_T - \varphi.A + (1-\varphi)A]}{P_T - \varphi.A} = \frac{\text{custo total}}{\text{lucro contábil}}$$

que, obviamente, exprime uma relação positiva.

Conseqüentemente, podemos concluir que a introdução de taxação acarreta com que seja reduzida a idade ótima de corte de árvore.

A título de ilustração numérica, reconsidere-se o caso da função preço e da taxa de juros consideradas no item 4.3. Sendo $P_0 = 140$, $\varphi=10\%$, e $C_t = 2{,}5$, a condição de 1a. ordem conduz à seguinte equação.

$$-\ 0{,}25.T^{3/2} - 90.T - 131.T^{1/2} + 540 = 0$$

cuja solução de interesse é $\bar{T} \simeq 3{,}327852$ anos, com $V(\bar{T}) \simeq 56{,}60$ unidades monetárias. Constata-se, assim, a redução mencionada.

5.2 - Caso de Taxa de Juros Variável

Se a taxa de juros variar com o tempo, segundo uma função conhecida δ_t, a função valor atual associada à oportunidade de investimento em apreço, no caso em que o lucro contábil seja

taxado à alíquota φ, será escrita como:

$$V(T) = - P_0 - \int_0^T C_t.\exp\{ - \int_0^t \delta_\xi .d\xi \} dt +$$

$$+ \{(1-\varphi)P_T + \varphi(P_0 + \int_0^T C_t.dt)\}\exp\{\int_0^T - \delta_t.dt\} \quad (49)$$

Igualando-se a zero a derivada, com relação ao tempo, da expressão acima, segue-se que a árvore deve ser cortada tão logo atinja a idade para a qual se tenha:

$$\delta_T = \frac{(1-\varphi)(P'_T - C_T)}{(1-\varphi)P_T + \varphi(P_0 + \int_0^T C_t.dt)} \quad (50)$$

que é uma relação análoga à (46).

Quanto à condição de 2a. ordem, no ponto em que a relação (50) é satisfeita, devemos ter:

$$(1-\varphi)(P''_T - C'_T) - \delta'_T \{(1-\varphi)P_T + \varphi(P_0 + \int_0^T C_t.dt)\} +$$

$$- \delta_T\{(1-\varphi)P'_T + \varphi.C_T\} < 0 \quad (51)$$

desigualdade que depende da derivada da função que exprime o comportamento temporal da taxa instantânea de juros.

Como exemplo, considere-se o caso onde $P_t = 100(1+t^{1/2})$, $C_t = 2,5$, $P_0 = 140$, $\varphi = 10\%$ e $\delta_t = 1/(1+t)$, $t \geq 0$.

Tendo em vista a relação (49) e fazendo uso do resultado expresso pela (11), a função valor atual associada ao empreendimento pode ser escrita como:

$$V(T) = -140 - 2{,}5.\ln(1+T)+\{90(1+T^{1/2})+14+0{,}25T\}/(1+T)$$

Face à (50), a função acima é maximizada na idade T que seja solução da seguinte equação:

$$\frac{1}{1+T} = \frac{0{,}9(50.T^{-1/2} - 2{,}5)}{90(1+T^{1/2})+14+0{,}25.T}$$

Como se pode verificar, a solução de interesse é, aproximadamente, igual a 0,133757 períodos. Entretanto, como,para esta idade, o valor atual é negativo, segue-se que o empreendimento não deve ser levado adiante.

5.3 - O Caso de Repetição do Ciclo

Procedendo-se de uma maneira análoga à vista no estudo do item 4.3, passemos agora à análise do caso de um horizonte infinito de programação.

Especificamente, admitindo-se o caso de repetição permanente do ciclo de plantio e posterior abate da árvore, suponha-se que:

a) a taxa periódica de juros, com capitalização instantânea, seja constante e igual a δ;

b) o preço P_0 da semente, bem como a função C_t que exprime o

fluxo de custo de cultivo e a função P_t que expressa o preço do vegetal quando alcança a idade t, são os mesmos em cada ciclo;

c) a cada ciclo, o lucro contábil é taxado à alíqüota φ, que é invariante com o tempo.

Analogamente ao visto no caso do item 4.3, teremos cada ciclo com a mesma duração de T períodos; de modo que, o valor atual da seqüência infinita de repetições será igual a:

$$F(T) = V(T)/(1-e^{-\delta . T}) \tag{37"}$$

onde, agora, V(T) é dado pela expressão (45).

Igualando-se a zero a derivada de F(T), segue-se que, agora,cada ciclo de crescimento deve ter a duração T tal que:

$$\delta = \frac{(1-\varphi)(1-e^{-\delta . T})(P'_T - C_T)}{(1-\varphi)(P_T-P_0) + \varphi \int_0^T C_t . dt - \int_0^T C_t . e^{-\delta . t} . dt} \tag{52}$$

Alternativamente, e sendo mais conveniente para fins de comparação com a duração do ciclo único, a relação (52) pode ser reescrita como:

$$\delta = \frac{(1 - \varphi)(P'_T - C_T)}{P_T - \varphi(P_T - P_0 - \int_0^T C_t . dt) + F(T)} \tag{52'}$$

Sendo $\hat{T}$, como dado por (46), a duração do ciclo de crescimento no caso em que não há repetição, e denotando-se por $\bar{T}$, co

mo dado por (52'), a duração no caso de repetição indefinida, passemos à comparação entre $\hat{T}$ e $\bar{T}$. Para tanto, suporemos, acomo no estudo do envelhecimento do vinho, que a função preço P_t seja crescente e côncava. Adicionalmente, admitiremos também que o fluxo de custo C_t seja não decrescente.

Considerando o caso, que é o de real interesse, onde $F(\bar{T}) > 0$, imagine-se que, buscando uma contradição, se tenha $\bar{T} > \hat{T}$. Então, como $P'_{\bar{T}} < P'_{\hat{T}}$ e $C_{\bar{T}} \geq C_{\hat{T}}$, teríamos que o numerador da relação (52') seria menor do que o da relação (46). Por outro lado, o denominador da relação (52') seria, então, maior do que o da (46); fazendo com que não pudessem ser iguais as duas frações consideradas. Por conseguinte, do mesmo modo que no problema do envelhecimento do vinho, a repetição do ciclo acarreta com que seja reduzida a duração do mesmo.

Como já vimos no item 5.1.2, se $P_0 = 140$, $P_t = 100(1+t^{1/2})$, $C_t = 2,5$, $\delta = (100/12)\%$ ao ano, com capitalização instantânea, e $\varphi = 10\%$, na hipótese de ciclo único teremos que a duração ótima é $\hat{T} \simeq 3.327852$ anos. Por outro lado, no caso de repetição indefinida do ciclo, pode-se verificar, fazendo-se uso da relação (52), que a duração ótima cairá para $\bar{T} \simeq 0,6091$ anos. Sendo que o valor atual da seqüência infinita de repetições será $F(\bar{T}) \simeq 490,53$ unidades monetárias.

6 - O Problema de Substituição de Equipamentos

Seguindo a apresentação em Massé (1962, pags. 54-81), comecemos a análise com o seu caso mais simples. Neste, considera-

se o caso de um empresário cuja atividade se efetua com o concurso de um único equipamento, cuja vida útil limita o seu horizonte de planejamento.

6.1 - Caso de Taxa de Juros Constante

Sendo a taxa de juros periódica, com capitalização instantânea, constante e igual a δ, imagine-se o caso de um certo equipamento cujo preço como novo é P_0. Este equipamento, engajado em dada atividade produtiva, gera um fluxo de receita líquida R_t, que suporemos ser uma função não-crescente com o tempo. Admite-se, ainda, que o equipamento em apreço, após t períodos de uso, apresente um valor residual, possivelmente como sucata, que é dado pela função não-crescente S_t.

Nestas condições, o valor atual associado ao projeto de investimento que consiste em adquirir o equipamento como novo, operá-lo até a idade de T períodos e, a seguir, revendê-lo, é expresso pela seguinte função:

$$V(T) = - P_0 + \int_0^T R_t . e^{-\delta . t} . dt + S_T . e^{-\delta . t} \tag{53}$$

Logo, igualando a zero a derivada de V(T), segue-se que o equipamento deve ser utilizado até a idade T tal que:

$$\delta = \frac{R_T + S'_T}{S_T} \tag{54}$$

Podemos interpretar a relação (54) como expressando o fato de que o empresário deve operar o equipamento até o ponto em

que seu fluxo de receita líquida R_t, deduzido do fluxo de depreciação $S'_t \leq 0$, iguale o juro instantâneo, que se obtem no mercado, correspondente à aplicação de seu valor residual S_t.

Quanto à condição de 2a. ordem, é fácil ver que, no ponto onde é satisfeita a relação (54), devemos ter:

$$(R'_T + S''_T)\, S_T - (R_T + S'_T)\, S'_T < 0 \qquad (55)$$

Dividindo-se ambos os membros da relação acima por S_T^2, que é positivo, observe-se que a condição de 2a. ordem requer que seja negativa a derivada com relação ao tempo de 2º membro da relação (54)[1].

Como ilustração numérica, seja o caso onde $P_0 = K$, $R_t = 100 - 2.t$, $t \geq 0$, $S_t = 1.000.\exp\{-0,05.t\}$ e $\delta = 6\%$ ao ano com capitalização instantânea.

Fazendo uso de (54), recai-se na seguinte equação:

$$100 - 2.T - 110.\exp\{-0,05.T\} = 0$$

Dado que $T \simeq 43,86$ anos é uma solução, e que satisfaz a desigualdade dada por (55), segue-se que este é o período de tempo ao longo do qual se deve operar o equipamento em apreço; caso o mesmo tenha sido adquirido. Tal idade é dita ser a vida econômica do equipamento.

Por outro lado, lançando mão do resultado dado por (13), tem-se que $V(43,86) \simeq 1.208,33 - K$. Logo, o equipamento só deve ser adquirido se o seu preço for inferior a 1208,33 unidades de capital.

1/ Observe-se que a relação (55) será trivialmente satisfeita se o valor residual S_t for constante e se R_t for decrescente.

Antes que se encerre esta nossa análise inicial, os seguintes casos particulares merecem ser destacados.

a) o caso onde $R_T = K_1$ e $S_T = K_2$

Como mencionado na introdução deste item, as únicas restrições colocadas sobre as funções R_T e S_T é que sejam não-decrescentes. Examinemos, então, o caso limite onde $R_T = K_1$ e $S_T = K_2$, onde K_1 e K_2 são duas dadas constantes. Como a condição de 1a. ordem, como dada por (54), deixa de ter relevância, por que independe de T, efetuemos uma análise direta.

Observe-se que:

$$V(T) = - P_0 - K_1(e^{-\delta.T} - 1)/\delta + K_2.e^{-\delta.T}$$

com

$$V'(T) = (K_1 - \delta.K_2)e^{-\delta.T}$$

Vemos, assim, que o sinal de $V'(T)$ só depende do sinal da diferença $K_1 - \delta.K_2$.

Supondo que se tenha $\delta > 0$, o que é usual, temos 3 possibilidades a considerar:

a.1) $K_1 > \delta.K_2$

Teremos a função valor atual crescente. Então, dado que $\lim_{T\to\infty} V(T) = - P_0 + K_1/\delta$, se $K_1 > \delta.P_0$, teremos uma situação, que é extremamente artificial, onde vale a pena operar a máquina indefinidamente.

a.2) $K_1 < \delta.K_2$

Como a função valor atual é decrescente, seu ponto de

máximo verifica-se para $T = 0$. Logo, não vale a pena operar o equipamento considerado.

a.3) $K_1 = \delta.K_2$

Teremos $V(T) = - P_0 + K_2$, $T \geq 0$. Como, regral geral, $K_2 \leq P_0$, também não valerá a pena operar o equipamento.

Conclui-se, portanto, que o caso limite onde tanto o fluxo de receita líquida, como o valor residual do equipamento, são invariantes com o tempo, conduz, sempre, à soluções de extremidade.

b) o caso onde $R_T = K$ e $S_T = P_0.\exp\{-\gamma.T\}$.

Seja agora o caso onde, mantendo-se constante o fluxo de receita líquida, temos o valor residual decrescendo à taxa, instantânea e constante, γ.

Fazendo-se uso da relação (54), obtem-se a solução exata

$$T = - \ell n \left\{\frac{K}{(\gamma+\delta)P_0}\right\} /\gamma \qquad (56)$$

Por outro lado, substituindo-se em (55), constata-se que a solução acima é efetivamente a vida econômica do equipamento se $\gamma^2.K < \delta\ (\gamma + \delta)$

Assim, por exemplo, se $\gamma = \delta = 5\%$ ao ano, com capitalização instantânea, com $K = 1$ e $P_0 = 100$, segue-se, imediatamente, que será de, aproximadamente, 46,05 anos a idade de substituição do equipamento considerado.

c) $R_T = \delta.S(1 + e^{-T})$ e $S_T = S$

Neste último caso particular, embora seja decrescente o

fluxo de receita líquida, temos também uma situação, admitidamente artificial, onde, como iremos verificar, é infinita a vida econômica do equipamento.

É fácil ver que

$$V(T) = -P_0 + \delta.S\{(1-e^{-\delta.T})/\delta + (1-e^{-(1+\delta)T})/(1+\delta)\} + S.e^{-\delta.T}$$

com

$$V'(T) = \delta.S.\exp\{-(1+\delta)T\} > 0$$

Logo, se

$$\lim_{T \to \infty} V(T) = -P_0 + S\{1+\delta/(1+\delta)\} > 0$$

valerá a pena operar o equipamento indefinidamente.

Concluindo o item, convém observar ainda que, no caso em $S_T = S$ seja constante e R_T decrescente, segue-se de (54) que uma condição necessária para que o equipamento seja operado é que $R_0 > \delta.S$.

6.1.1 - Efeito de uma Variação na Taxa de Juros

Tomando-se a diferencial total da expressão (54), pode-se verificar que:

$$\frac{dT}{d\delta} = \frac{S_T}{R'_T + S''_T - \delta.S_T} \tag{57}$$

Logo, observando-se que a condição de 2a. ordem, tal como expressa pela relação (55), é equivalente a que se tenha

negativo o denominador de (57), conclui-se, uma vez mais, que um aumento na taxa de juros implica em que seja abreviada a vida econômica do equipamento.

Assim, no caso do exemplo onde $R_t = 100 - 2.t$ e $S_t = 1.000.\exp\{-0,05.t\}$, se a taxa instantânea de juros subir para 10% ao ano, com capitalização instantânea, a vida econômica cairá para 39,69 anos. Ou seja, com relação ao caso anteriormente visto, teremos uma redução de mais de 9% na vida do equipamento.

6.1.2 - Introdução de Taxação

Vejamos, agora, o efeito causado pela introdução de uma alíquota φ de imposto de renda, incidente sobre o lucro contábil; em bases correntes.

Admitindo-se que, para fins fiscais, o equipamento seja linearmente depreciado,[1] teremos que o valor atual relativo à operação do equipamento até a idade T será dado por:

$$V(T) = - P_0 + (1-\varphi)\int_0^T R_t.e^{-\delta.t}.dt + \frac{\varphi}{T}\int_0^T (P_0-S_T)e^{-\delta.t}.dt +$$
$$+ S_T.e^{-\delta.T}$$

ou

$$V(T) = - P_0 + (1-\varphi)\int_0^T R_t.e^{-\delta.t}.dt + \frac{\varphi(P_0-S_T)(1-e^{-\delta.T})}{\delta.T} +$$
$$+ S_T.e^{-\delta.T} \qquad (58)$$

1/ O caso de depreciação acelerada é também tratado, de uma maneira aproximada, em Brenner e Venezia (1983).

Logo, derivando-se com relação a T, e igualando a zero a resultante derivada, segue-se que a vida econômica do equipamento deve ser tal que:

$$A_T . e^{-\delta . T} - B_T = 0 \qquad (59)$$

onde

$$A_T = (1-\varphi) R_T + \varphi (P_0 - S_T)/T + S_T' - \delta . S_T + B_T \qquad (60)$$

e

$$B_T = \varphi \, (P_0 + T . S_T' - S_T)/(\delta . T^2) \qquad (61)$$

Por outro lado, a condição de 2a. ordem requer que, no ponto em que é satisfeita a relação (59), se tenha:

$$V''(T) = \{ (1-\varphi) R_T' - \delta (A_T + B_T) + S_T'' - \delta . S_T' + C_T \} e^{-\delta . T} - C_T < 0 \qquad (62)$$

onde

$$C_T = \{ \varphi . S_T'' / \delta - 2 . B_T \} / T \qquad (63)$$

Como exemplo, considere-se o caso onde $P_0 = 1.000$, $\varphi = 30\%$, $\delta = 5\%$ ao ano, com capitalização instantânea, $R_t = 100 - 2.t$ e $S_t = 1.000 \exp\{-0{,}05.t\}$. Fazendo uso da relação (59), pode-se verificar que a vida econômica do equipamento considerado será de, aproximadamente, 33,57 anos.

Para que se aquilate o efeito de uma variação do valor da alíqüota φ sobre a vida econômica de equipamento, observe-se que, tomando-se a diferencial total da condição de 1a. ordem, como dada pela relação (59), mantendo-se constante a taxa de juros

δ, podemos escrever:

$$\frac{dT}{d\varphi} = - \frac{\{(P_0 - S_T)/T - R_T + B_T/\varphi\}e^{-\delta . T} - B_T/\varphi}{V''(T)} \tag{64}$$

Alternativamente, substituindo-se o valor de B_T/φ, como dado pela relação (59), no numerador da expressão acima, segue-se que a derivada da vida econômica com relação à alíqüota é igual a:

$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{\{R_T + S_T' - \delta . S_T\}\ e^{-\delta . T}/\varphi}{V''(T)} \tag{64'}$$

Como, face à condição de 2a. ordem, $V''(T) < 0$, e como $\exp\{-\delta . T\}/\varphi > 0$, conclui-se que o sinal de $dT/d\varphi$ é o sinal oposto ao da soma algébrica $R_T + S_T' - \delta . S_T$. Ora, tal soma representa a receita instantânea líquida (i.e., após a dedução da depreciação do equipamento), deduzida ainda do custo de oportunidade de manter o equipamento, em termos instantâneos. Como a operação do equipamento só faz sentido se a soma algébrica considerada for positiva, conclui-se que um aumento (diminuição) da alíqüota do imposto de renda encurta (alonga) a vida econômica do equipamento.[1]

Como ilustração numérica, considerando-se o caso do último exemplo, se a alíqüota for reduzida para 20% a vida econômica será prolongada para 37,83 anos.

6.2 - Caso de Taxa de Juros Variável com o Tempo

Na eventualidade em que se possa prever o comportamento

[1] Observe que a conclusão é trivial no caso em que o equipamento seja totalmente depreciado (i.e., $S_T = 0$).

temporal da taxa instantânea de juros, comportamento este especificado pela função δ_t, $t \geq 0$, o valor atual do projeto de investimento associado à aquisição e operação do equipamento, na hipótese de taxação do lucro contábil à alíqüota φ e de adoção de depreciação linear, será dado por:

$$V(T) = -P_0 + (1-\varphi)\int_0^T R_t.e^{-J_t}.dt + \frac{\varphi(P_0 - S_T)}{T}\int_0^T e^{-J_t}.dt + \\ + S_T.e^{-J_T} \qquad (65)$$

onde, recordemos, J_t é expresso pela relação (10).

A condição de 1a. ordem para a maximização de V(T), exige que a vida econômica T do equipamento seja tal que:

$$\{(1-\varphi)R_T + \varphi(P_0 - S_T)/T + S'_T - \delta_T.S_T\}\,e^{-J_T} = \\ = \frac{\varphi}{T^2}(P_0 + T.S'_T - S_T)\int_0^T e^{-J_t}.dt \qquad (66)$$

Sendo que a condição de 2a. ordem implica em que se tenha:

$$\{(1-\varphi)R'_T - \frac{2.\varphi(P_0 + T.S'_T - S_T)}{T^2} + S''_T - \delta'_T.S_T - \delta_T.S'_T\}\,e^{-J_T} + \\ -\varphi\{(T.\delta_T - 2)(P_0 + T.S'_T - S_T)/T^3 + S''_T/T\}\int_0^T e^{-J_t}.dt < 0 \qquad (67)$$

Como exemplo de cunho ilustrativo, seja o caso onde

$P_0 = 1.000$, $R_t = 100 - 2.t$, $S_t = 1.000.\exp\{-0{,}05.t\}$, $\varphi = 20\%$ e $\delta_t = 1/(1+t)$, $t \geq 0$.

Como já vimos anteriormente, teremos $J_t = \ell n(1+t)$, de modo que, face à (66), a vida econômica T deve ser solução da seguinte equação:

$$\{80-1{,}6.T + \frac{200(1-e^{-0{,}05.T})}{T} - (50 + \frac{1.000}{1+T})\, e^{-0{,}05.T}\} \frac{1}{1+T} +$$

$$- \frac{\ell n(1+T)}{T^2} \{200 - (10.T + 200)\, e^{-0{,}05.T}\} = 0$$

Resolvendo-se, numericamente, pode-se verificar que a solução de interesse é $T \cong 39{,}06$ períodos.

6.3 - O Caso de Reposição

Considerando um horizonte de planejamento ilimitado, vejamos agora o caso de uma sucessão infinita de reposições do equipamento em apreço, na hipótese em que:

a) a taxa instantânea de juros δ, bem como a alíquota φ do imposto de renda permaneçam inalteradas ao longo do tempo;

b) não haja avanço tecnológico,[1] no sentido de que o preço P_0 do equipamento como novo, a função S_t que exprime o seu valor residual após t períodos de uso, bem como o fluxo de receitas lí-

1/ Para uma análise do caso em que se leva em conta uma provisão para avanços tecnológicos, ao longo da linha desenvolvida por George Terborgh em seu clássico texto Dynamic Equipment Policy, veja-se Massé (1962, pgs. 64-69).

quidas R_t, que é associado à operação do equipamento com a idade t, sejam os mesmos para cada nova geração de equipamentos.

Na hipótese considerada, cada novo equipamento terá uma mesma vida econômica T, que será determinada maximizando-se o valor atual F(T) da seqüência infinita de substituições. Analogamente aos casos do envelhecimento do vinho e do crescimento de árvores, temos que

$$F(T) = V(T)/(1 - e^{-\delta . T}) \qquad (37''')$$

onde, agora, V(T) é dado pela expressão (58).

Convém observar aqui que, alternativamente ao desenvolvimento visto no item 4.3,a expressão para o valor atual F(T) da cadeia infinita de reposições,pode ser facilmente deduzida lançando mão do conceito que Manne (1961) denomina de "ponto de regeneração". Segundo tal conceito, basta que se observe que, digamos após a primeira reposição, efetuada no instante T, o futuro, com relação à cadeia infinita de reposições remanescentes, se nos apresenta exatamente igual ao com o que nos deparamos no instante de aquisição do primeiro equipamento; época zero. Logo, sendo V(T) o valor atual da seqüência de fluxos de caixa associados à operação do primeiro equipamento, e sendo F(T) o valor atual da sucessão infinita de reposições,tem-se que:

$$F(T) = V(T) + F(T).\exp\{-\delta.T\}$$

que é uma expressão equivalente à (37''').

Procedendo-se à maximização de F(T), segue-se que a con-

dição de 1a. ordem especifica que a vida econômica T seja tal que satisfaça a relação

$$(1-e^{-\delta.T})V'(T) - \delta.V(T).e^{-\delta.T} = 0 \qquad (68)$$

onde $V'(T) = A_T.\exp\{-\delta.T\} + B_T$, com A_T e B_T respectivamente dados pelas expressões (60) e (61).

Assim, reconsiderando-se o exemplo estudado no item 6.1.2, na hipótese de $\varphi = 30\%$, supondo-se agora uma sucessão infinita de reposições, pode-se verificar que a vida econômica cairá de 33,57 anos para 32,82 anos; ou seja, uma queda de pouco mais de 2%.

No exemplo numérico acima, verificamos que a consideração de um horizonte de planejamento infinito, ao invés de um horizonte limitado ao de operação de um único equipamento, implicou em uma redução na vida econômica do equipamento considerado. No que se segue, restringindo a análise ao caso de ausência de taxação, $\varphi = 0$, mostraremos que isso sempre é verdade.

No caso em que $\varphi = 0$, a relação (68) pode ser reescrita como:

$$\delta = \frac{R_T + S'_T}{S_T + F(T)} \qquad (68')$$

Seja $\hat{T}$ a vida econômica como determinada a partir da relação (54), que se refere ao caso de horizonte finito, e $\bar{T}$ a vida econômica relativa ao caso de horizonte infinito. Atentando-se ao fato de que a operação do equipamento, no caso de reposição inde-

finidamente, só faz sentido se $F(\bar{T}) > 0$, e que, regra geral, a função R_T é decrescente, a comparação entre $\hat{T}$ e $\bar{T}$ pode ser facilmente efetuada através uma análise gráfica. Para tanto, definindo-se $\Theta_T = \delta.S_T - S_T'$, note-se que a relação (54) implica em que $R_{\hat{T}} = \Theta_{\hat{T}}$ e que a relação (68') implica em que $R_{\hat{T}} = \Theta_{\bar{T}} + K$, onde a constante $K = \delta.F(\bar{T})$.

Por conseguinte, independentemente do fato de que a função Θ_T seja crescente ou decrescente, se $\delta > 0$ conclui-se que, como se deduz da Figura 4, $\hat{T} > \bar{T}$

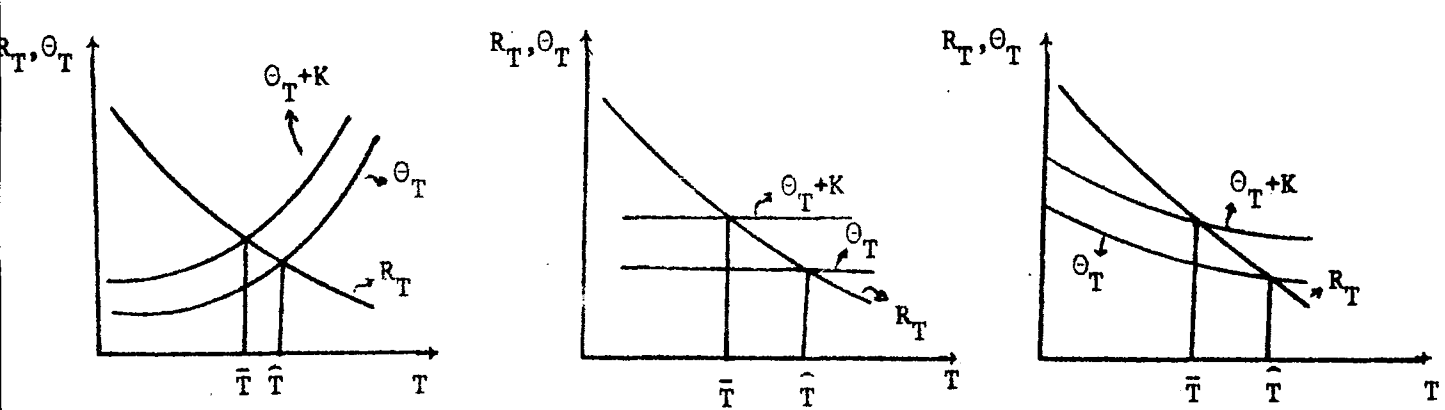

Figura 4

Confronto entre $\hat{T}$ e $\bar{T}$

6.4 - A Possibilidade de Renovação Parcial

Concluindo nossa análise, vejamos, seguindo Massé(1962, pgs. 56-59), para o caso de horizonte finito e sem taxação, a possibilidade de que o equipamento considerado sofra uma renovação parcial. Especificamente, e fixando atenção ao caso de taxa ins-

tantânea de juros constante, o empresário dispõe de duas alternativas:

a) não efetuar renovação, operando o equipamento até o fim de sua vida econômica, tal como determinada no item 6.1. O que implica em que o valor atual desta alternativa seja calculado de acordo com a expressão (53).

b) no final de Θ períodos de operação, mediante o dispêndio da quantia D_Θ, que é uma função não-decrescente de Θ, efetuar uma renovação parcial do equipamento. A esta renovação é associado um fluxo incremental de receita,[1] representado pela função $Q_{\Theta,t}$. Nesta segunda alternativa, denotando-se por $\hat{T}$ a vida econômica do equipamento, o correspondente valor atual passa a ser:

$$V(\hat{T},\Theta) = - P_0 + \int_0^{\hat{T}} R_t.e^{-\delta.t}.dt - D_\Theta.e^{-\delta.\Theta} +$$

$$+ \int_\Theta^{\hat{T}} Q_{\Theta,t}.e^{-\delta.t}.dt + S_{\hat{T}}.e^{-\delta.\hat{T}} \qquad (69)$$

Dado que $V(\hat{T},\Theta)$ é uma função das duas variáveis $\hat{T}$ e Θ, segue-se que as condições de 1a. ordem para a sua maximização são:

$$\frac{\partial V(\hat{T},\Theta)}{\partial \hat{T}} = 0 \Rightarrow (R_{\hat{T}} + Q_{\Theta,\hat{T}} + S'_{\hat{T}} - \delta.S_{\hat{T}})\, e^{-\delta.\hat{T}} = 0 \qquad (70)$$

e

$$\frac{\partial V(\hat{T},\Theta)}{\partial \Theta} = 0 \Rightarrow (\delta.D_\Theta - D'_\Theta - Q_{\Theta,\Theta})\, e^{-\delta.\Theta} +$$

1/ Massé (1962, pag. 57), sugere que $Q_{\Theta,t}$ seja uma função crescente com Θ; i.e., $\partial Q_{\Theta,t}/\partial t > 0$.

$$+ \int_{\Theta}^{\hat{T}} \frac{\partial Q_{\theta,T}}{\partial \theta} . e^{-\delta . t} . dt = 0 \qquad (71)$$

O sistema formado pelas expressões (70) e (71) nos fornecem as soluções para $\hat{T}$ e Θ; sendo que, obviamente, para que haja sentido, devemos ter $0 < \Theta < \hat{T}$. A melhor alternativa será aquela para a qual o correspondente valor atual é máximo.

Como exemplo, consideremos a situação, admitidamente simplista, onde $\delta = 5\%$ ao ano, com capitalização instantânea, $R_t = 100 - 2.t$, $D_{\Theta}=20$ e $Q_{\Theta,t} = 2.\Theta$. Então, sendo P_0 o preço do equipamento novo, e admitindo que seu valor residual seja desprezível ($S_t = 0$), teremos:

a) alternativa de não efetuar renovação

Neste caso

$$V(T) = - P_0 + 1.200(1 - e^{-0,05.T}) + 40.T.e^{-0,05.T}$$

com V(T) alcançando o valor máximo 1.265,67 - P_0 para T = 50 anos.

b) alternativa de efetuar renovação.

Agora

$$V(\hat{T},\Theta) = V(\hat{T}) - 20.e^{-0,05.\Theta} + 40.\Theta(e^{-0,05.\Theta} - e^{-0,05.\hat{T}})$$

com $V(\hat{T})$ sendo calculado como na alternativa a, e com os valores de $\hat{T}$ e de Θ sendo soluções do sistema.

$$\begin{cases} 100 - 2.\hat{T} + 2.\Theta = 0. \\ (1-2.\Theta)e^{-0,05.\Theta} + 40(e^{-0,05.\Theta} - e^{-0,05.\hat{T}}) = 0 \end{cases}$$

É fácil verificar que devemos ter Θ = 8,49 anos e

$T = 58{,}49$ anos, com $V(\hat{T},\theta)$ assumindo o valor máximo $1.452 - P_0$.

Por conseguinte, qualquer que seja o valor de P_0, a melhor alternativa é efetuar uma renovação parcial do equipamento após 8,49 anos de uso.

7. O Problema de Expansão de Capacidade

Um outro tipo de problema em que o emprego da capitalização contínua se faz valioso, é o que se refere ao aumento da capacidade das instalações de um certo complexo de prestação de serviços ou planta industrial, de modo a atender a uma demanda crescente pelos serviços ou produtos considerados.

Neste item, seguindo de perto a apresentação em Manne (1961), e focalizando somente o caso determinístico, examinaremos duas situações. Na primeira, não pode haver demanda insatisfeita. Na segunda, incorrendo-se em uma penalidade que lhe é proporcional, admite-se a ocorrência de demanda insatisfeita.

7.1 - Ausência de Demanda Insatisfeita

Imagine-se um certo serviço público, digamos coleta de lixo, para o qual, de uma maneira aproximada, estima-se que haja uma demanda linearmente crescente com o tempo.

Para que a demanda seja atendida, é necessário que sejam construídos centros coletores, nos quais o lixo coletado sofre um determinado processamento industrial. Como, em princípio, todo o lixo produzido pela coletividade em apreço deve ser coletado, to-

da a vez em que o volume de lixo produzido igualar a capacidade instalada dos coletores, um novo centro coletor, com capacidade para processar o acréscimo de lixo produzido em x anos, deve ser colocado em operação. Deste modo, como esquematicamente indicado na Figura 5, a cada período de tempo com duração de x anos, teremos a instalação de um novo centro coletor.

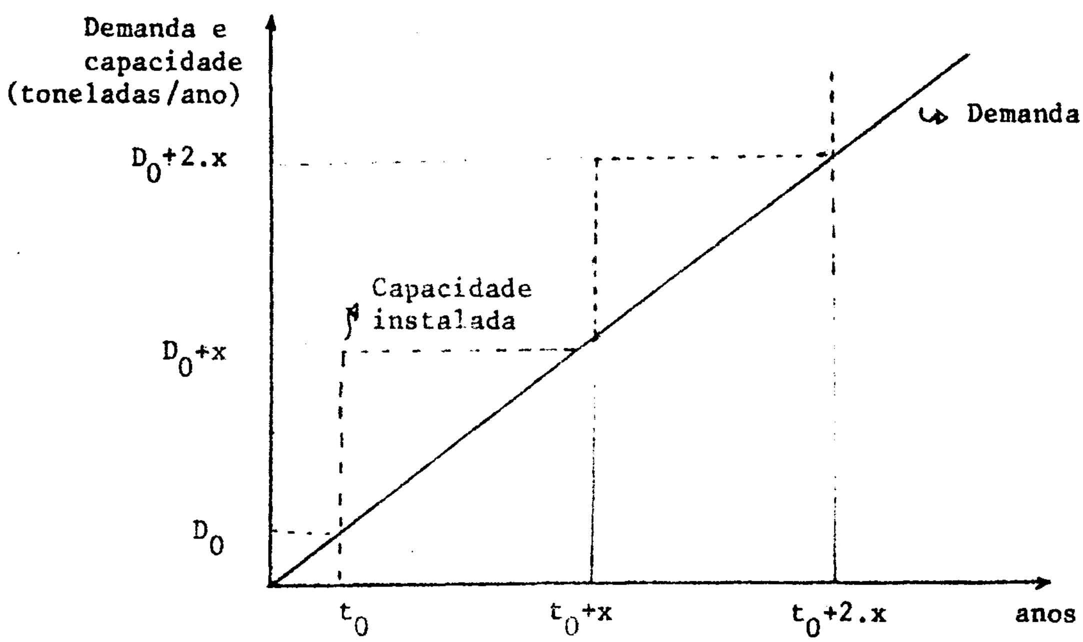

Figura 5

Evolução da Demanda e da Capacidade Instalada

Na Figura 5, t_0 denota o instante de tempo onde a capacidade presentemente instalada, D_0, é exaurida. Devendo ser observado que está sendo admitido que os centros coletores instalados têm uma duração ilimitada.

Deste modo, segue-se que passa a existir um excesso de capacidade instalada, cuja evolução ao longo do tempo é indicada na Figura 6.

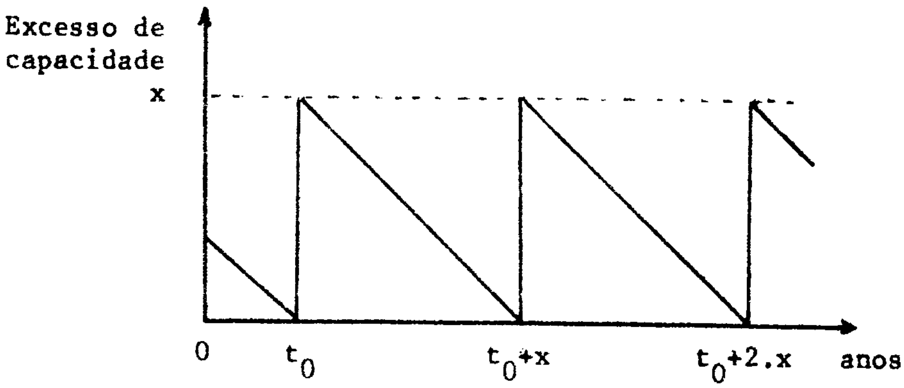

Figura 6
Evolução do Excesso de Capacidade

O problema que se quer resolver é o da determinação da capacidade x que cada novo centro coletor deve ter. Para tanto, iremos supor que o custo de instalação de um centro coletor com capacidade igual a x seja dado pela seguinte função:

$$C_x = a + b.x^{\alpha} \ , \ a > 0, \ b > 0, \ 0 < \alpha \leq 1 \qquad (72)$$

onde a constante a pode ser interpretada como um custo fixo, e a constante α representa um fator de economia de escala.[1]

Sendo δ a taxa anual de juros, com capitalização instantânea, considerando-se um horizonte infinito de planejamento e lançando-se mão do conceito de "ponto de regeneração", segue-se que o valor atual V(x) de uma sucessão ilimitada de instalações de novos centros coletores, na hipótese de estacionaridade temporal

1/ Se a = 0, se tivermos α = 0,5 isto significa que um centro coletor com capacidade para processar 20 toneladas/ano, custa somente o dobro que um outro com 1/4 desta mesma capacidade.

dos parâmetros em apreço, é tal que:

$$V(x) = C_x + V(x).\exp\{-\delta.x\} \tag{73}$$

Logo:

$$V(x) = \frac{a + b.x^{\alpha}}{1 - e^{-\delta.x}} \tag{74}$$

Tomando-se a derivada de V(x) e igualando-a a zero, decorre que a capacidade ótima $\bar{x}$ para cada centro coletor deve ser tal que:

$$\alpha.b.\bar{x}^{\alpha - 1} = \delta(a + b.\bar{x}^{\alpha})/(e^{\delta.\bar{x}} - 1) \tag{75}$$

Por outro lado, com relação à condição de segunda ordem, tem-se que:

$$V''(\bar{x}) = \frac{\alpha.b.\bar{x}^{\alpha-2}(\alpha - 1 + \delta.\bar{x})}{1 - e^{-\delta.\bar{x}}} \tag{76}$$

Logo, sendo $\delta > 0$, que é o caso de interesse, a capacidade ótima a ser instalada, $\bar{x}$, derivada a partir da relação (75), deve ser tal que:

$$\bar{x} > (1 - \alpha)/\delta \tag{77}$$

Como ilustração, suponha-se o caso onde $a = 10$, $b = 2$, $\alpha = 0{,}5$ e $\delta = 5\%$ ao ano, com capitalização instantânea. Neste caso, cada novo centro coletor deve ser instalado a cada 42,98 anos, com capacidade para processar 42,98 vezes o acréscimo do volume de lixo que é gerado a cada ano.

7.1.1 - Efeito de uma Variação na Taxa de Juros

Para que se aquilate o efeito na capacidade ótima $\bar{x}$ que é provocado por uma alteração na taxa de juros δ, basta tomar a diferencial total da relação (75), convenientemente reescrita, mantendo-se constante os parâmetros a, b e α. Decorre, então que:[1]

$$\frac{dx}{d\delta} = - \frac{x\{(\delta.x-1)e^{\delta.x} + 1\}}{\delta(e^{\delta.x}-1)(\alpha-1 + \delta.x)} \tag{78}$$

Ora, face à (77), temos que o denominador da relação acima é positivo. Quanto ao sinal do numerador, denotando-se por $F(x) = (\delta.x-1).\exp\{\delta.x\} + 1$, note-se que $F(0) = 0$ e que $F'(x) > 0$. Logo, o numerador da relação (78) também é positivo, do que decorre que um acréscimo na taxa de juros acarreta com que seja diminuida a capacidade dos novos centros coletores.

Assim, no caso do exemplo anterior, se a taxa de juros subir para 15% ao ano, com capitalização instantânea, a capacidade ótima cairá para o equivalente ao volume de lixo produzido em 16,62 anos,

7.2 - A Possibilidade de Demanda Insatisfeita

Admita-se, agora, que seja possível, transitoriamente, a ocorrência de demanda insatisfeita. No nosso exemplo do lixo, novos centros de processamento só seriam construídos quando o volume de lixo acumulado, digamos em vazadouros, alcançasse um certo valor crítico. Obviamente, o ato de acumular lixo em vazadouros

---

1/ Observe-se que, no caso particular onde $a = 0$, tem-se que $dx/d\delta = -\bar{x}/\delta < 0$.

implica em uma penalidade, representada pelo custo de transporte e de manuseio que é proporcional ao volume de lixo acumulado.

A possibilidade de demanda insatisfeita, faz com que, em termos gráficos, a analogia com a Figura 6, relativa ao caso visto no item precedente, seja como representada na Figura 7.

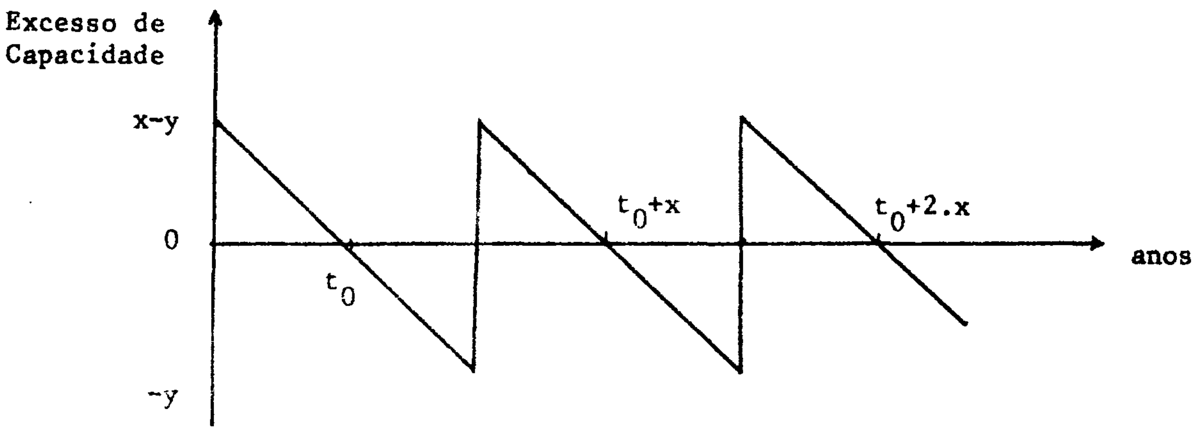

Figura 7

Evolução do Excesso de Capacidade

Similarmente ao caso anterior, cada nova instalação terá capacidade para processar o acréscimo de lixo produzido em x anos; com t_0, $t_0 + x$, $t_0 + 2.x$, etc, denotando os "pontos de regeneração" (pontos onde o excesso de capacidade é esgotado). Porém, agora, admite-se que a partir do ponto onde esgota-se o excesso de capacidade, acumule-se em vazadouros o acréscimo de lixo relativo a y anos.

Denotando-se por θ, que cresce linearmente de 0 até y, o

volume de lixo acumulado em vazadouro no fim de Θ anos após um "ponto de regeneração", e sendo β o custo unitário relativo à operação de vazamento do lixo, segue-se que o valor atual $C(x,y)$ do custo associado a uma sucessão infinita de ciclos (acumulação em vazadouros seguida da instalação de novo centro de processamento), será dado por:

$$C(x,y) = \int_0^y \beta.\Theta.e^{-\delta.\Theta}.d\Theta + (a + b.x^{\alpha})e^{-\delta.y} + C(x,y)e^{-\delta.x} \quad (79)$$

ou

$$C(x,y) = \frac{\beta\{(1-e^{-\delta.y})/\delta - y.e^{-\delta.y}\}/\delta + (a+b.x^{\alpha})e^{-\delta.y}}{1 - e^{-\delta.x}} \quad (79')$$

Igualando-se a zero as derivadas parciais, com respeito a x e com respeito a y, de C(x.y), segue-se que os valores ótimos da capacidade dos centros de processamento, $\bar{x}$, e dos vazadouros, $\bar{y}$, devem ser tais que resolvam o seguinte sistema de equações.[1]

$$\{\alpha.b.x^{\alpha-1}(e^{\delta.x} - 1) - \delta(a+b.x^{\alpha})\}e^{-\delta.y} =$$

$$= \beta\{(1-e^{-\delta.y})/\delta - y.e^{-\delta.y}\} \quad (80)$$

e

$$y = \delta(a+b.x^{\alpha}/\beta \quad (81)$$

No Quadro I, para $\alpha = 0,5$, $a = 10$, $b = 2$, $\delta = 15\%$ ao ano, com capitalização instantânea, e os valores indicados de β, são apresentados os correspondentes valores ótimos de $\bar{x}$, $\bar{y}$ e de $C(\bar{x},\bar{y})$.

1/ Note que, de (81), conclui-se que $\bar{y} \to 0$ quando $\beta \to \infty$ e que $\bar{y} \to \infty$ quando $\beta \to 0$.

Quadro I

Comportamento de $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $C(\bar{x},\bar{y})$ em Função de β

β	∞	2	1	0,5	0,1
$\bar{x}$	16,62	17,50	18,42	20,43	45,12
$\bar{y}$	0	1,38	2,79	5,71	35,15
$C(\bar{x},\bar{y})$	19,19	17,89	16,21	13,41	4,43

Referências

R. G. D. Allen, Mathematical Analysis for Economists, St. Martin's Press, New York, N.Y. 1938.

William J. Baumol, Economic Theory and Operations Analysis, 3rd. Ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1972.

Harold Bierman,Jr., "The Growth Period Decision", Management Science, Vol. 14, Nº 6 (February, 1968), pgs. B-302, B-309.

Manachem Brenner e Itzhak Venezia, "The Effects of Inflation and Taxes on Growth Investments and Replacement Policies", The Journal of Finance, Vol. 38, Nº, 5 (December, 1983), pgs., 1519-1528.

CRC, Standard Mathematical Tables, 19th. Ed., Samuel M. Selby, Editor, The Chemical Rubber Co., Cleveland, Ohio, 1971.

Clovis de Faro, Elementos de Engenharia Econômica, 3a. Ed., Editora Atlas S.A., São Paulo, S.P., 1979.

____________, Matemática Financeira, 9ª Ed., Editora Atlas, S.A., São Paulo, S.P., 1982.

James M. Henderson e Richard E. Quandt, Microeconomic Theory; a Mathematical Approach, and., McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y., 1971.

J. Hirshleifer, Investment, Interest and Capital, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs,N.J., 1970.

Rodolfo Hoffmann e Sonia Vieira, "Eucalyptus Growth Curves and the Determination of the Optimal Cutting Age", Revista de Econometria, Ano V Nº 1 (Abril, 1985), pgs. 113-128.

Robert S. Kaplan, "Stochastic Growth Models", Management Science, Vol. 18, Nº 5 (January, 1972, Part I), pgs. 249-264.

Alan S. Manne, "Capacity Expansion and Probabilistic Growth" Econometrica, Vol. 29, Nº 4 (October, 1961), pgs. 632-649.

Pierre Massé, _Optimal Investment Decisions: Rules for Action and Criteria for Choice_, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

Mario Henrique Simonsen, _A Teoria do Capital_, EPGE/FGV, mimeografado, 1980.

Itzhak Venezia, "A Bayesian Approach to the Optimal Growth Period: A Note", _The Journal of Finance_, Vol. 38, Nº 1 (March, 1983), pgs. 237-246.

Itzhak Venezia e Menachem Brenner, "The Optimal Duration of Growth Investment and Search", _The Journal of Business_, Vol. 52, Nº 3 (July, 1979), pgs. 393-407.

ENSAIOS ECONÔMICOS DA EPGE

1. ANÁLISE COMPARATIVA DAS ALTERNATIVAS DE POLÍTICA COMERCIAL DE UM PAIS EM PROCESSO DE INDUSTRIALIZAÇÃO - Edmar Bacha - 1970 (ESGOTADO)

2. ANÁLISE ECONOMÉTRICA DO MERCADO INTERNACIONAL DO CAFÉ E DA POLÍTICA BRASILEIRA DE PREÇOS - Edmar Bacha - 1970 (ESGOTADO)

3. A ESTRUTURA ECONÔMICA BRASILEIRA - Mario Henrique Simonsen - 1971 (ESGOTADO)

4. O PAPEL DO INVESTIMENTO EM EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA NO PROCESSO DE DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO - Carlos Geraldo Langoni - 1972 (ESGOTADO)

5. A EVOLUÇÃO DO ENSINO DE ECONOMIA NO BRASIL - Luiz de Freitas Bueno - 1972

6. POLÍTICA ANTI-INFLACIONÁRIA - A CONTRIBUIÇÃO BRASILEIRA - Mario Henrique Simonsen - 1973 (ESGOTADO)

7. ANÁLISE DE SÉRIES DE TEMPO E MODELO DE FORMAÇÃO DE EXPECTATIVAS - José Luiz Carvalho - 1973 (ESGOTADO)

8. DISTRIBUIÇÃO DA RENDA E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO DO BRASIL: UMA REAFIRMAÇÃO Carlos Geraldo Langoni - 1973 (ESGOTADO)

9. UMA NOTA SOBRE A POPULAÇÃO ÓTIMA DO BRASIL - Edy Luiz Kogut - 1973

10. ASPECTOS DO PROBLEMA DA ABSORÇÃO DE MÃO-DE-OBRA: SUGESTÕES PARA PESQUISAS - José Luiz Carvalho - 1974 (ESGOTADO)

11. A FORÇA DO TRABALHO NO BRASIL - Mario Henrique Simonsen - 1974 (ESGOTADO)

12. O SISTEMA BRASILEIRO DE INCENTIVOS FISCAIS - Mario Henrique Simonsen - 1974 (ESGOTADO)

13. MOEDA - Antonio Maria da Silveira - 1974 (ESGOTADO)

14. CRESCIMENTO DO PRODUTO REAL BRASILEIRO - 1900/1974 - Claudio Luiz Haddad 1974 (ESGOTADO)

15. UMA NOTA SOBRE NÚMEROS ÍNDICES - José Luiz Carvalho - 1974 (ESGOTADO)

16. ANÁLISE DE CUSTOS E BENEFÍCIOS SOCIAIS I - Edy Luiz Kogut - 1974 (ESGOTADO)

17. DISTRIBUIÇÃO DE RENDA: RESUMO DA EVIDÊNCIA - Carlos Geraldo Langoni - 1974 (ESGOTADO)

18. O MODELO ECONOMÉTRICO DE ST. LOUIS APLICADO NO BRASIL: RESULTADOS PRELIMINARES - Antonio Carlos Lemgruber - 1975

19. OS MODELOS CLÁSSICOS E NEOCLÁSSICOS DE DALE W. JORGENSON - Eliseu R. de Andrade Alves - 1975

20. DIVID: UM PROGRAMA FLEXÍVEL PARA CONSTRUÇÃO DO QUADRO DE EVOLUÇÃO DO ESTUDO DE UMA DÍVIDA - Clóvis de Faro - 1974

21. ESCOLHA ENTRE OS REGIMES DA TABELA PRICE E DO SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES: PONTO-DE-VISTA DO MUTUÁRIO - Clovis de Faro - 1975

22. ESCOLARIDADE, EXPERIÊNCIA NO TRABALHO E SALÁRIOS NO BRASIL - José Julio Senna - 1975

23. PESQUISA QUANTITATIVA NA ECONOMIA - Luiz de Freitas Bueno - 1978

24. UMA ANÁLISE EM CROSS-SECTION DOS GASTOS FAMILIARES EM CONEXÃO COM NUTRIÇÃO, SAÚDE, FECUNDIDADE E CAPACIDADE DE GERAR RENDA - José Luiz Carvalho - 1978

25. DETERMINAÇÃO DA TAXA DE JUROS IMPLÍCITA EM ESQUEMAS GENÉRICOS DE FINANCIAMENTO: COMPARAÇÃO ENTRE OS ALGORÍTIMOS DE WILD E DE NEWTON-RAPHSON - Clovis de Faro - 1978

26. A URBANIZAÇÃO E O CÍRCULO VICIOSO DA POBREZA: O CASO DA CRIANÇA URBANA NO BRASIL - José Luiz Carvalho e Uriel de Magalhães - 1979

27. MICROECONOMIA - Parte I - FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS PREÇOS - Mario Henrique Simonsen - 1979

28. ANÁLISE DE CUSTOS E BENEFÍCIOS SOCIAIS II - Edy Luiz Kogut - 1979

29. CONTRADIÇÃO APARENTE - Octávio Gouvêa de Bulhões - 1979

30. MICROECONOMIA - Parte 2 - FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS PREÇOS - Mario Henrique Simonsen - 1980 (ESGOTADO)

31. A CORREÇÃO MONETÁRIA NA JURISPRUDÊNCIA BRASILEIRA - Arnold Wald - 1980

32. MICROECONOMIA - Parte A - TEORIA DA DETERMINAÇÃO DA RENDA E DO NÍVEL DE PREÇOS - José Julio Senna - 2 Volumes - 1980

33. ANÁLISE DE CUSTOS E BENEFÍCIOS SOCIAIS III - Edy Luiz Kogut - 1980

34. MEDIDAS DE CONCENTRAÇÃO - Fernando de Holanda Barbosa - 1981

35. CRÉDITO RURAL: PROBLEMAS ECONÔMICOS E SUGESTÕES DE MUDANÇAS - Antonio Salazar Pessoa Brandão e Uriel de Magalhães - 1982

36. DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA TAXA INTERNA DE RETORNO: CONFRONTO ENTRE ALGORÍTIMOS DE BOULDING E DE WILD - Clovis de Faro - 1983

37. MODELO DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS - Fernando de Holanda Barbosa - 1983

38. A EFICIÊNCIA MARGINAL DO CAPITAL COMO CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE PROJETOS DE INVESTIMENTO - Clovis de Faro - 1983 (ESGOTADO)

39. SALÁRIO REAL E INFLAÇÃO (TEORIA E ILUSTRAÇÃO EMPÍRICA) - Raul José Ekerman - 1984

40. TAXAS DE JUROS EFETIVAMENTE PAGAS POR TOMADORES DE EMPRÉSTIMOS JUNTO A BANCOS COMERCIAIS - Clovis de Faro - 1984

41. REGULAMENTAÇÃO E DECISÕES DE CAPITAL EM BANCOS COMERCIAIS: REVISÃO DA LITERATURA E UM ENFOQUE PARA O BRASIL - Uriel de Magalhães - 1984

42. INDEXAÇÃO E AMBIÊNCIA GERAL DE NEGÓCIOS - Antonio Maria da Silveira - 1984

43. ENSAIOS SOBRE INFLAÇÃO E INDEXAÇÃO - Fernando de Holanda Barbosa - 1984

44. SOBRE O NOVO PLANO DO BNH: "SIMC"*- Clovis de Faro - 1984

45. SUBSÍDIOS CREDITÍCIOS À EXPORTAÇÃO - Gregório F.L. Stukart - 1984

46. PROCESSO DE DESINFLAÇÃO - Antonio C. Porto Gonçalves - 1984

47. INDEXAÇÃO E REALIMENTAÇÃO INFLACIONÁRIA - Fernando de Holanda Barbosa - 1984

48. SALÁRIOS MÉDIOS E SALÁRIOS INDIVIDUAIS NO SETOR INDUSTRIAL: UM ESTUDO DE DIFERENCIAÇÃO SALARIAL ENTRE FIRMAS E ENTRE INDIVÍDUOS - Raul José Ekerman e Uriel de Magalhães - 1984

49. THE DEVELOPING-COUNTRY DEBT PROBLEM - Mario Henrique Simonsen - 1984

50. JOGOS DE INFORMAÇÃO INCOMPLETA: UMA INTRODUÇÃO - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1984

51. A TEORIA MONETÁRIA MODERNA E O EQUILÍBRIO GERAL WALRASIANO COM UM NÚMERO INFINITO DE BENS - A. Araujo - 1984

52. A INDETERMINAÇÃO DE MORGENSTERN - Antonio Maria da Silveira - 1984

53. O PROBLEMA DE CREDIBILIDADE EM POLÍTICA ECONÔMICA - Rubens Penha Cysne - 1984

54. UMA ANÁLISE ESTATÍSTICA DAS CAUSAS DA EMISSÃO DO CHEQUE SEM FUNDOS: FORMULAÇÃO DE UM PROJETO PILOTO - Fernando de Holanda Barbosa, Clovis de Faro e Aloísio Pessoa de Araujo - 1984

55. POLÍTICA MACROECONÔMICA NO BRASIL: 1964-66 - Rubens Penha Cysne - 1985

56. EVOLUÇÃO DOS PLANOS BÁSICOS DE FINANCIAMENTO PARA AQUISIÇÃO DE CASA PRÓPRIA DO BANCO NACIONAL DE HABITAÇÃO: 1964 - 1984. - Clovis de Faro - 1985

57. MOEDA INDEXADA - Rubens P. Cysne - 1985

58. INFLAÇÃO E SALÁRIO REAL: A EXPERIÊNCIA BRASILEIRA - Raul José Ekerman - 1985

59. O ENFOQUE MONETÁRIO DO BALANÇO DE PAGAMENTOS: UM RETROSPECTO - Valdir Ramalho de Melo - 1985

60. MOEDA E PREÇOS RELATIVOS: EVIDÊNCIA EMPÍRICA - Antonio Salazar P. Brandão - 1985

61. INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA, INFLAÇÃO E INDEXAÇÃO - Antonio Maria da Silveira - 1985

62. MACROECONOMIA - CÁPITULO I - O SISTEMA MONETÁRIO - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1985

63. MACROECONOMIA - CAPÍTULO II - O BALANÇO DE PAGAMENTOS - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1985

64. MACROECONOMIA - CAPÍTULO III - AS CONTAS NACIONAIS - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1985

65. A DEMANDA POR DIVIDENDOS: UMA JUSTIFICATIVA TEÓRICA - Tommy Chin-Chiu Tan e Sergio Ribeiro da Costa Werlang - 1985

66. BREVE RETROSPECTO DA ECONOMIA BRASILEIRA ENTRE 1979 e 1984 - Rubens Penha Cysne - 1985

67. CONTRATOS SALARIAIS JUSTAPOSTOS E POLÍTICA ANTI-INFLACIONÁRIA - Mario Henrique Simonsen - 1985

68. INFLAÇÃO E POLÍTICAS DE RENDAS - Fernando de Holanda Barbosa e Clovis de Faro - 1985

69 BRAZIL INTERNATIONAL TRADE AND ECONOMIC GROWTH - Mario Henrique Simonsen - 1986

70. CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA: APLICAÇÕES - Clovis de Faro - 1986