

Fundação Getulio Vargas

Três Ensaios sobre Taxa de Juro Brasileira

**Projeto Submetido à Congregação da
Escola de Pós-Graduação em Economia (EPGE)
para Obtenção do Grau de**

Doutor em Economia

por

Gyorgy Varga

Rio de Janeiro, RJ

em 27 de dezembro de 1996

E-mail : vargagy@ibm.net

Índice

Agradecimentos, 3

Introdução, 4

Capítulo 1 - Estrutura a Termo da Taxa de Juro no Brasil, 6

- 1 - Modelos para a Estrutura a Termo da Taxa de Juro, 6**
 - 1- Estrutura a Termo da Taxa de Juro, 6**
 - 2- Alguns Modelos para a Estrutura a Termo, 7**
- 2 - Estimação da Estrutura a Termo para o Brasil , 17**
 - 1-Taxa de Juro Nominal no Brasil, 17**
 - 2- Análise da Taxa Diária em um Modelo de um Fator, 20**
 - 3-Ajuste do Modelo de Merton a Estrutura a Termo, 28**
 - 4-Impacto do Plano Real sobre a Taxa de Juro Diária, 31**
 - 5-Desenho da Estrutura a Termo Corrente, 36**
 - 6-Prêmio de Risco da Estrutura a Termo, 51**
 - 7-Taxa Real e Inflação, 54**

Capítulo 2 - Avaliação de Contrato Futuro e de Opção de Taxa de Juro Negociado no Brasil, 58

- 1 - Arbitragem com Contrato Futuro de Taxa de Juro de Um Dia, 58**
 - 1- Relação entre um Contrato Prefixado e o Contrato Futuro de DI, 58**
 - 2- Aplicação de um Modelo de Equilíbrio para a Estrutura a Termo, 62**
 - 3- Aplicação de um Modelo de Não Arbitragem para a Estrutura a Termo, 64**
 - 4- Teste do Mercado Futuro de DI, 66**
- 2 - Opção de Compra sobre Contrato Futuro de DI, 69**
 - 1- Modelo de Black, 70**
 - 2- Modelo de Merton, 71**
 - 3- Modelo HJM com um Fator, 73**
 - 4- Cálculo da Volatilidade, 74**
 - 5- Volatilidade Implícita, 75**
 - 6- Teste do Mercado de Opção sobre Futuro de DI, 76**

Bibliografia dos capítulos 1 e 2, 83

Capítulo 3 - Efeito da Taxa de Juro norte-americana sobre a Dívida Externa Brasileira, 100

- 1 - Introdução, 100**
- 2 - Evolução Recente, 101**
- 3 - Um Modelo de Dois Fatores, 103**
- 4 - Proteção Contra Variação da Taxa de Juro Americana, 112**
- Apêndices A, B, C e D, 116**

Bibliografia, 123

Versão 1.3

Agradecimentos

Agradeço especialmente ao meu orientador professor Aloisio Araújo e ao professor Carlos Ivan Simonsen Leal que apoiaram decisivamente este trabalho e aos comentários e sugestões recebidos dos colegas e professores Luiz Guilherme Schymura, João Victor Issler, Sérgio Werlang, Marcelo Navarro, Luís Antônio Catão, Marcos Valli, Isabela Munch, Tomás Brisola, Hélio Mori, aos participantes da seção de Finanças do Congresso de Sociedade Brasileira de Econometria, realizado em Águas de Lindóia, estado de São Paulo, em 18 de dezembro de 1996 e aos professores da EPGE/FGV que sempre incentivaram e apoiaram meu desenvolvimento acadêmico.

Introdução

Este trabalho está dividido em três capítulos. Nos dois primeiros estudamos o comportamento da taxa de juro nominal (que tem um prazo muito curto) e o preço de dois derivativos de taxa de juros negociados no Brasil. No terceiro, avaliamos o efeito da taxa de juro norte-americana sobre a dívida externa brasileira, através de um moderno modelo aplicado a título com risco de crédito.

A estrutura a termo de taxa de juro (nominal e real) no Brasil tem merecido pouca atenção dos economistas, a despeito do desenvolvimento teórico e suas aplicações no mercado norte-americano. Adicionalmente, o meio ambiente de alta inflação, prazo extremamente curto das aplicações financeiras e intervenção constante do Banco Central, proporciona resultados interessantes à literatura existente. Também os derivativos sobre instrumentos financeiros ligados à taxa de juro e negociados no Brasil são bastante diferentes dos negociados no exterior, não havendo até o presente nenhum estudo mais rigoroso do tema.

O terceiro capítulo contribui para a literatura de finanças e economia internacional, na medida que liga ambas as teorias na tentativa de explicar os *spreads* pagos pelo Brasil na sua dívida externa, com uma abordagem bastante diferente da usada até então.

Supomos, ao longo deste trabalho, mercados de capitais perfeitos no sentido de não existirem taxas, custos de transação, e serem os títulos divisíveis. Em geral, tratamos os títulos como tendo apenas um pagamento final de \$1 (uma unidade monetária), semelhante ao *zero coupon bond* norte-americano.

No capítulo 1 apresentamos, na primeira seção, um resumo dos modelos que se baseiam numa abordagem de equilíbrio geral para explicar a estrutura a termo. Também fazemos o mesmo resumo dos modelos de não arbitragem, que são particularmente úteis na avaliação de derivativos. Na segunda seção avaliamos o comportamento da taxa de juros de curtíssimo prazo (taxa de juros diária) segundo diversos modelos e concluimos que um modelo simples como de Merton(1973) se ajusta razoavelmente bem. Nota-se também um forte aumento da volatilidade na virada de cada mês. Ajustamos os diversos títulos existentes a

uma curva e verificamos que a estrutura a termo é extremamente irregular com saltos também na virada do mês. O prêmio de risco implícito nos títulos apresentou alta volatilidade, com sinal negativo e significativo.

Mostramos no capítulo 2 como funciona o contrato futuro de taxa de juros de um dia(DI) e como deve feita a arbitragem entre este e o mercado de títulos prefixados. Também verificamos qual a quantidade ótima de contratos futuros num modelo de equilíbrio e num modelo de não arbitragem com um fator . O resultado após o teste mostra que a volatilidade da carteira diminui com a adição dos contratos futuros acima. Para as opções sobre contrato futuro de DI, mostramos que o modelo de Black (1976), que é amplamente utilizado por praticantes nesses derivativos, não se aplica. Obtemos com base em Merton (1973), um modelo simples que é mostramos ser igual ao modelo de não arbitragem com um fator e volatilidade da taxa a termo constante. Testamos o modelo sobre alguns dados disponíveis e não rejeitamos o modelo.

No capítulo 3 aplicamos um modelo (Das (1995) e Longstaff e Schwartz (1995)) recente de avaliação de títulos com risco de crédito à dívida externa brasileira. Mostramos que prêmio de risco pago pelo Brasil depende do nível de reservas, da relação entre dívida com juro flutuante e fixo, da taxa de juros norte-americana e fatores internos ao país. O resultado obtido mostra uma correlação negativa entre prêmio de risco e a taxa de juros norte-americana, que é explicada pela taxa de crescimento da capacidade de pagamento do Brasil que em equilíbrio cresce com a taxa de juros norte-americana.

Os capítulos 1 e 2 foram produzidos numa época de ajuste macro econômico e sobre taxas de juros de curtíssimo prazo, mais pesquisa deve ser feita com dados mais recentes. Também os modelos aplicados aos derivativos de taxas de juros sofreram com a falta de liquidez desses. O capítulo 3 pode ser estendido para outros países e outros títulos.

Capítulo 1

Estrutura a Termo da Taxa de Juro no Brasil

1) Modelos de Estrutura a Termo da Taxa de Juro

1.1) Estrutura a Termo da Taxa de Juro

A estrutura a termo da taxa de juro é um conjunto de taxas de juro associadas a cada instante de tempo t . Em geral, as taxas de juro utilizadas pelos praticantes do mercado são normalizadas como taxas anuais com capitalização semestral no caso dos EUA (veja Fabozzi (1991)). No Brasil as convenções acerca da taxa de juro variam com o tipo de negócio (veja Faro (1990)). Com base nos títulos de renda fixa, com várias maturidades, negociados no mercado financeiro, pode-se desenhar um gráfico da taxa de juro acumulada versus o tempo, que no caso discreto, obtém-se resolvendo a equação abaixo:

$$r_{cs,t} = 2 \left[\left(\frac{1}{P(t,T)} \right)^{\frac{1}{2(T-t)}} - 1 \right] \quad (1.1)$$

onde: $P(t,T)$ = preço de um título com pagamento final igual a 1 (conhecido em inglês como *zero coupon bond*) com vencimento na data T .

$r_{cs,t}$ = taxa de juro anual com capitalização semestral.

t = período em anos com $t \in [0, T]$.

Um outro tratamento muito comum e conveniente do ponto de vista matemático é tratar a taxa de juro como contínua:

$$r(t,T) = - \frac{\log P(t,T)}{(T-t)} \quad (1.2)$$

Ao conjunto de taxas de juros acumuladas versus tempo dá-se o nome de estrutura a termo da taxa de juro. Ao longo deste trabalho usamos, em geral, a taxa de juro na forma contínua como na fórmula 1.2.

Os títulos disponíveis geram, através da fórmula 1.2, pontos da estrutura a termo da taxa de juro e, a partir desses pontos, diversos autores (McCulloch (1975), Vasicek e Fong(1982), Adams e Deventer(1994), Duarte e Werlang (1995) entre outros) ajustam funções determinísticas para descrever a estrutura a termo. Na seção 2.5 temos uma aplicação de algumas dessas técnicas.

Diversas teorias tentaram explicar o comportamento da estrutura a termo. A teoria das expectativas (Lutz(1940)) explica a taxa de juro de longo prazo como a média das taxas futuras de curto prazo. Hicks(1946) usa a preferência pela liquidez. Culbertson(1957) explica pela segmentação do mercado de títulos.

Outro conjunto de técnicas iniciadas por Merton (1973) tenta descrever a estrutura a termo a partir da taxa de juro de curto prazo e de relações de arbitragem entre taxa e os títulos disponíveis, nos chamados modelos de fatores. No caso de um fator, em geral, toma-se a taxa de juro de curto prazo. Entre esses autores estão Vasicek(1977), Dothan(1978), Richard(1978), Brennan e Schwartz(1979), Langetieg(1980). Cox, Ingersoll e Ross(1985), Longstaff e Schwartz (1992) que obtêm modelos onde o comportamento da taxa de juro depende de condições gerais de produção, investimento e consumo. A partir de 1986, com artigo de Ho e Lee(1986), começou uma nova abordagem para o problema da taxa de juro, que é muito importante para o cálculo de preço de derivativos. Toma-se a estrutura como dada pelos títulos disponíveis e com base nela (e restrições que dependem do modelo usado) calcula-se o preço dos derivativos. Nesse conjunto estão Black, Derman e Toy (1990) e Heath, Jarrow e Morton (1992).

1.2) Alguns Modelos para a Estrutura a Termo

A seguir temos em mais detalhes alguns dos modelos acima. Vasicek (1977) assume que a taxa de juro instantânea (ou de curtíssimo prazo) comporta-se como um processo de Itô, de modo que pode ser descrita como:

$$dr = a(r, t) dt + b(r, t) dz \quad (1.3)$$

onde dz é um processo de Wiener com variância dt , e r é a taxa de juro instantânea.

Com essa formulação, o processo seguido pela taxa de juro depende apenas de uma variável estado que é o seu preço corrente. O preço de um título sem pagamentos intermediários (conhecido em inglês como *discount bond*), pode ser calculado na data inicial através da avaliação do processo estocástico que este segue. Os resultados obtidos por Vasicek supõe a não existência de custos de transação, informações disponíveis para todos e não-saciabilidade para os investidores. Essas hipóteses implicam que o preço do título é uma função de r , podendo ser escrito como $P(t, T, r(t))$.

Uma vez que existe apenas uma variável estado, a taxa de retorno dos títulos de diferentes vencimentos é perfeitamente correlacionada. Logo, com dois títulos de prazos diferentes, constrói-se toda a estrutura a termo.

Pelo lema de Itô, o preço do título acima deve satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$dP = P \mu(t, T) dt - P \sigma(t, T) dz \quad (1.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mu(t, T) &= \frac{1}{P(t, T, r)} \left[\frac{\partial P}{\partial r} + a \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right] \\ \sigma(t, T) &= - \frac{1}{P(t, T, r)} r \frac{\partial P}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Por arbitragem entre uma carteira com dois títulos e a taxa instantânea de juros, Vasicek prova que:

$$\frac{\mu(t, T_1) - r}{\sigma(t, T_1)} = \frac{\mu(t, T_2) - r}{\sigma(t, T_2)} \quad (1.6)$$

A equação (1.6) é válida para qualquer vencimento T_i , e define o preço de mercado para o risco que chamamos de q na equação abaixo:

$$q(t, r) = \frac{\mu(t, T, r) - r}{\sigma(t, T, r)} \quad (1.7)$$

A cada instante t o preço de mercado para o risco é constante para todos os títulos, embora a cada momento esse risco possa variar. Combinando-se (1.5) e (1.7), obtém-se a equação básica de apreçamento de títulos, baseado nas hipóteses adotadas por Vasicek.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (a + bq) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (1.8)$$

Os preços dos títulos podem ser obtidos imediatamente da solução da equação (1.8), sujeita a condição $P(T, T, r) = 1$, que é igual a:

$$P(t, T) = E_t \left[e^{\int_t^T r(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_t^T q^2(\tau, r(\tau)) d\tau + \int_t^T q(\tau, r(\tau)) dz_\tau} \right] \quad (1.9)$$

A estrutura a termo pode ser obtida aplicando-se (1.9) em (1.2).

Cox, Ingersoll e Ross - CIR (1985), usam um modelo intertemporal de equilíbrio geral da economia para gerar um processo compatível de comportamento das taxas de juros. Eles assumem que a sociedade é homogênea, existe aversão relativa ao risco constante e a tecnologia segue um processo estocástico particular. Com essas hipóteses e uma tecnologia que depende de apenas um fator, obtém-se o seguinte processo de difusão para a taxa de juro.

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma \sqrt{r} dz \quad (1.10)$$

Para $k, \theta > 0$ esse é um processo autoregressivo de primeira ordem, onde a taxa de juro é ajustada para seu valor de longo prazo θ e o parâmetro k determina a velocidade desse ajustamento. Esse processo tem quatro propriedades empiricamente importantes:

- 1) Evita-se taxas negativas;
- 2) Se a taxa de juro atinge zero, ela pode voltar a ser positiva;

- 3) A variância absoluta da taxa de juro cresce quando ela própria cresce;
- 4) Existe uma distribuição de equilíbrio para a taxa de juro.

Dadas essas condições, o preço do título $P(t, T, r(t))$ deve seguir uma equação diferencial parcial semelhante a (1.8):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + [k(\theta - r) - \lambda r] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (1.11)$$

com a condição de contorno $P(t, T, r(t)) = 1$. A solução desse problema gera o preço do título.

$$P(t, T, r) = A(t, T) e^{-B(t, T)r} \quad (1.12)$$

$$\text{onde : } A(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{[(k+\lambda+\gamma)(T-t)]^{1/2}}}{(\gamma + k + \lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}},$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + k + \lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \left[(k + \lambda)^2 + 2\sigma^2 \right]^{1/2}$$

A estrutura a termo pode ser obtida, imediatamente, aplicando-se (1.12) em (1.2):

$$R(t, T, r) = \frac{[rB(t, T) - \log A(t, T)]}{(T - t)}$$

onde $R(t, T, r)$ corresponde à taxa de juros efetiva entre a data t e T , para $t=0$, $R(\cdot)$ descreve a estrutura a termo para cada T .

CIR também calcula o preço de uma opção de compra, resolvendo a equação com condição final igual

a:

$$C(t, T, r, T_1, k) = \text{Max} [P(T_1, T, r) - k, 0] \quad (1.13)$$

Eles também apresentam modelos com mais de um fator como, por exemplo, inflação e juro real, sendo esses consistentes com a economia subjacente.

Brennan e Schwartz (1979) desenvolveram um modelo de dois fatores, onde a taxa nominal é explicada pela soma de um processo para a taxa de curto prazo e outro para a taxa de longo prazo. Com esses fundamentos e fazendo arbitragem com uma perpetuidade, eles obtêm o preço dos títulos de qualquer vencimento e, conseqüentemente, a estrutura a termo. Eles mostram um método para estimar os parâmetros desse modelo de dois fatores e fazem as estimativas para estrutura a termo canadense, usando dados mensais de 1964 a 1977. Como *proxy* para taxa de curto prazo, eles usaram taxas de depósitos de 30 dias e, para taxa de longo prazo, títulos do governo canadense com mais de 10 anos.

Ho & Lee (1986) inauguraram um procedimento diferente na análise dos problemas que envolvem taxa de juro, principalmente derivativos. Eles tomam a estrutura a termo corrente como dada e derivam os possíveis movimentos segundo uma restrição de arbitragem entre os títulos em geral e a taxa de juro de curto prazo. Outra restrição imposta, é fazer a função desconto evoluir de um estado para outro, independente do caminho já percorrido por essa função. Essa última é conhecida como condição de independência do caminho. Eles adotam um modelo binomial dependente do tempo para descrever a função desconto (que é o mesmo que o preço de um título com pagamento final \$1). Esse é um procedimento semelhante ao processo binomial adotado por Cox, Ross e Rubinstein (1979), que é muito popular entre praticantes e estudiosos de derivativos. Assim, o preço dos títulos evolui como num modelo binomial com n períodos e i estados da natureza. O preço dos títulos é ajustado para a estrutura corrente, através da combinação da taxa a termo com as funções de perturbação $h(T)$ e $h^*(T)$, como no desenho abaixo.

$$\begin{array}{c}
 \nearrow \frac{P_i^{(n)}(T+1)}{P_i^{(n)}(1)} h(T) \\
 n^{(n)} \cdot \pi \cdot \\
 \searrow \frac{P_i^{(n)}(T+1)}{P_i^{(n)}(1)} h^*(T)
 \end{array} \quad (1.14)$$

As funções de perturbação são determinadas a partir das restrições descritas acima, de onde se obtém:

$$\begin{aligned} h(T) &= \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^T} \quad \text{para } T \geq 0 \\ h^*(T) &= \frac{\delta^T}{\pi + (1 - \pi)\delta^T} \end{aligned} \quad (1.15)$$

O parâmetro π pode ser interpretado como uma probabilidade binomial e δ determina a diferença entre as perturbações h e h^* . Com as equações 1.14 e 1.15, têm-se o preço dos títulos para todas as datas. E da diferença entre eles têm-se a evolução da taxa de juro de curto prazo baseada na estrutura a termo corrente. Os modelos de um fator tomam o movimento da taxa de juro de curto prazo como exógeno e, com base nesse processo, geram a estrutura a termo de equilíbrio. Ho e Lee usam toda informação disponível na estrutura a termo e obtém o processo para a taxa de juro de curto prazo. O modelo deles não procura determinar a estrutura a termo de equilíbrio, como nos modelos de um fator, mas é determinado pela estrutura a termo. Assim sendo, eles usam o modelo para calcular o preço de derivativos sobre taxa de juro, consistente com a estrutura a termo corrente.

Seja um derivativo com pagamento final dado pela seguinte equação:

$$C(T, i) = f(i) \quad (0 \leq i \leq T) \quad (1.16)$$

Com valor ao longo do tempo limitado segundo:

$$L(n, i) \leq C(n, i) \leq U(n, i). \quad (1.17)$$

Assumindo também nenhum pagamento intermediário por parte desse derivativo, seu preço por arbitragem deve ser em qualquer momento:

$$C(n, i) = [\pi C(n+1, i+1) + (1 - \pi)C(n+1, i)] / P_i^{(n)}(1) \quad (1.18)$$

O preço do derivativo é obtido recursivamente com a equação 1.18, sujeito a condição final 1.16 e a condição de contorno 1.17. Ho e Lee sugerem que os parâmetros π e δ devam ser estimados através de algum procedimento não-linear, com base nos derivativos existentes no mercado.

Black, Derman e Toy (1990) supõe que a taxa de juro de curto prazo tem distribuição lognormal e volatilidade tempo-dependente. Com base nisso eles ajustam um modelo binomial discreto com n períodos e estados. O modelo é ajustado para cada período de acordo com a estrutura a termo da taxa de juro corrente e com a volatilidade do período. Esse modelo é semelhante ao de Ho e Lee por tomar a estrutura a termo da taxa de juro como dada, mas além disso toma a estrutura a termo da volatilidade da taxa de juro. É então um modelo bastante simples e prático para o cálculo de preço de derivativos de taxa de juro.

Hull e White (1990) estendem os modelos de Vasicek (1977) e CIR (1985) de modo a torná-los consistentes com a estrutura a termo corrente e com a estrutura a termo da volatilidade das taxas a termo. No caso do modelo de Vasicek, essa extensão é feita ajustando-se o processo estocástico para a taxa de juro de curto prazo segundo:

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b - r)]dt + \sigma(t)dz \quad (1.19)$$

No modelo de CIR,

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b - r)]dt + \sigma(t)\sqrt{r}dz \quad (1.20)$$

O preço de qualquer título f , que dependa de r deve satisfazer:

$$f_t + [\phi(t) - a(t)r]f_r + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 f_{rr} - rf = 0 \quad (1.21)$$

onde: $\phi(t) = a(t)b + \theta(t) - \lambda(t)\sigma(t)$

Uma solução para a equação acima, quando f é um título que paga \$1 em $t=T$, pode ser dada pela equação:

$$f = A(t, T)e^{-B(t, T)r} \quad (1.22)$$

Essa equação pode ser ajustada aos dados de mercado tomando-se:

$$B(t, T) = \frac{R(r, t, T)\sigma_R(r, t, T)(T - t)}{r\sigma_r(r, t)} \quad (1.23)$$

onde: $R(r, t, T)$ = taxa contínua para o período t à T .

σ_R = volatilidade de $R(r, t, T)$

σ_r = volatilidade da taxa r no momento t .

O valor de $A(t, T)$ pode ser obtido igualando-se as equações (1.22) e (1.23) à estrutura a termo corrente.

Longstaff & Schwartz (1992) desenvolvem, a partir de condições de equilíbrio geral, um modelo que explica a variação da taxa de juro nominal de curto prazo como função de dois fatos: a taxa de juro corrente (r) e a volatilidade (V) desta. Com o processo para r e V , eles obtêm fórmulas fechadas para o preço dos títulos e de derivativos sobre estes. Os parâmetros do modelo são obtidos simultaneamente e eles não encontram evidência de rejeição do modelo para o mercado norte-americano.

Heath, Jarrow e Morton (1992) apresentam um arcabouço para avaliação de derivativos de taxa de juro, partindo das taxas de juros a termo. Eles usam os métodos de medida de martingal equivalente (veja Harrison e Kreps (1979) e Harrison e Pliska(1981)), tomam como dada a curva de taxa de juro a termo e um conjunto de possíveis processos estocásticos para a taxa de juro a termo, com múltiplos fatores, para o movimento desta curva. O prêmio de risco é eliminado através de uma condição de não-arbitragem. Os modelos de Vasicek(1977), Brennan e Schwartz (1979), Langetieg(1980), Ho e Lee(1986), entre outros, se tornam casos particulares deste modelo mais geral.

O modelo de Ho e Lee(1986) pode ser descrito no arcabouço de HJM através das seguintes equações para a taxa de juro a termo e de curto prazo:

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2} \right) + \sigma \tilde{W}(t) \quad (1.24)$$

$$r(t) = f(0, t) + \sigma \tilde{W}(t) + \sigma^2 \frac{t^2}{2} \quad (1.25)$$

onde : σ é a volatilidade da estrutura da taxa de juro a termo

\tilde{W} é um movimento Browniano

A dinâmica do preço dos títulos é dada por:

$$P(t, T) = \left[\frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right] e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) T t (T-t) - \sigma (T-t) \tilde{W}(t)} \quad (1.26)$$

O modelo de apreçamento de opções de títulos mais utilizados pelos praticantes é baseado em Black(1974). Esse modelo supõe que o preço a termo dos títulos tem distribuição lognormal. Obviamente isso não é verdade porque o preço do título com pagamento final \$1 não pode ultrapassar seu valor de face, de modo que a distribuição adotada não é rigorosamente correta. Outro problema vem da volatilidade que converge para zero, conforme se aproxima o vencimento do título.

Além dos modelos vistos anteriormente, temos a seguir o modelo de Jamshidian (1989), que também toma como dada a estrutura a termo. Ele obtém uma fórmula fechada para opções de títulos de renda fixa sem risco de crédito. Esse modelo assume que a taxa de juro instantânea segue um processo de reversão à média, semelhante ao apresentado como exemplo em Vasicek (1977).

$$dr = a(r_0 - r)dt + \sigma dz \quad (1.27)$$

Também é assumido que o preço do risco $\lambda(r, t)$ é constante. Assim, o preço de uma opção de compra com data de exercício T_1 sobre um título que vence na data T_2 ($T_2 > T_1$) é dado por :

$$\begin{aligned}
C(r, t, T_1, T_2, K) &= P(t, T, r) E \left[\text{Max} \{0, \tilde{P} - K\} \right] \\
&= P(t, T_2, r) N(h) - K P(t, T_1, r) N(h - \sigma_p)
\end{aligned}
\tag{1.28}$$

onde: \tilde{P} = preço a termo em T_1 do título com vencimento em T_2 .

K = preço de exercício da opção

$N(.)$ = distribuição normal padrão

$$\begin{aligned}
h &= \log \left[\frac{P(t, T_2, r)}{P(t, T_1, r)} \right] \frac{1}{\sigma_p} + \frac{\sigma_p}{2} \\
\sigma_p &= \frac{\sigma}{a\sqrt{2a}} \left(1 - e^{-a(T_1 - T_2)} \right) \left(1 - e^{-2a(T_1 - t)} \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

A fórmula de Jamshidian para o preço da opção de compra é semelhante à formula de Black-Scholes (FBS). O ativo subjacente \tilde{P} tem distribuição lognormal e $P(t, T, r)$ tem a função de calcular o valor atual como $e^{-r(T-t)}$ na FBS e σ_p^2 é variância do logaritmo do preço do ativo subjacente.

2) Estimação da Estrutura a Termo

Os resultados a seguir, mostram que não há diferença significativa entre o retorno de títulos privados de alta qualidade de crédito e dos títulos públicos. O comportamento da taxa de juro de curto prazo, não é bem descrito por modelos de um fator e sofre influência significativa de mudanças de mês. Para a estrutura a termo, obtivemos um perfil muito irregular e prazo também muito curto. O prêmio de risco apresenta alta volatilidade, heteroscedasticidade e é significativamente negativo, o que indica algum gosto por risco. Por fim, a taxa de juro real é bem descrita por um modelo de um fator com reversão à média e volatilidade dependente do nível da taxa.

Dividimos esta seção em sete partes: na primeira e segunda, estudamos a taxa nominal de curto prazo (no nosso caso taxa diária); na terceira o ajustamos o modelo de Merton(1973) à taxa corrente, na quarta o avaliamos o efeito do plano real sobre a taxa de juro diária e na quinta a forma da estrutura a termo. Na sexta seção analisamos o prêmio de risco implícito na estrutura a termo. Por fim, fazemos a mesma análise de um fator para a taxa de juro real realizada.

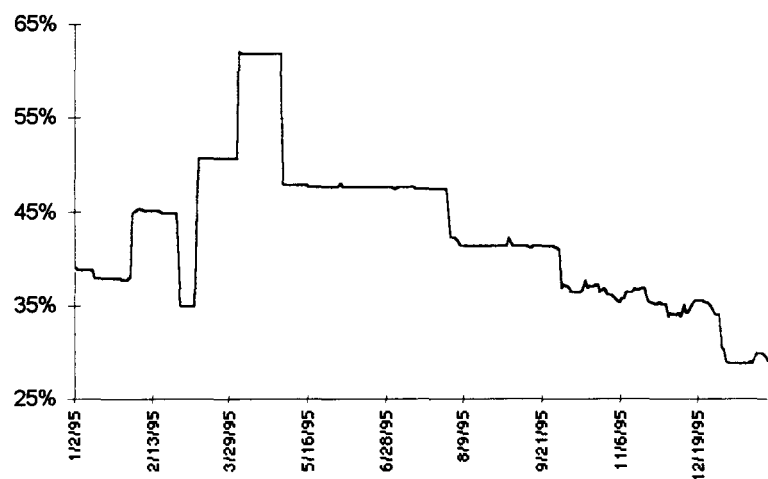
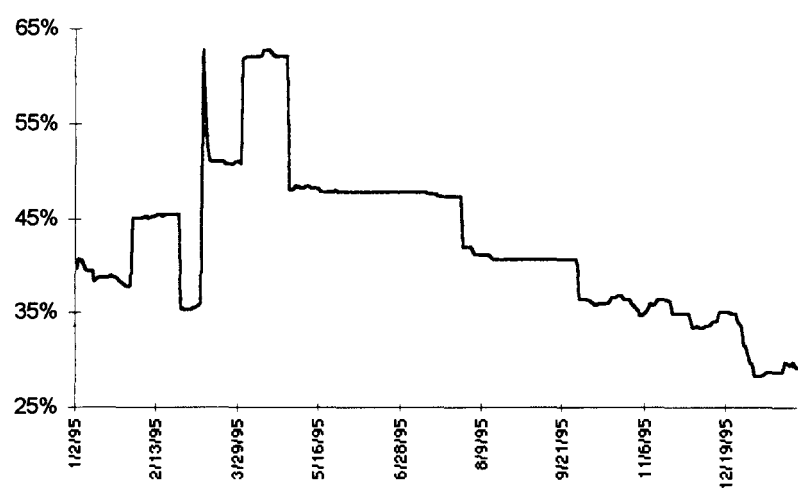
2.1) Taxa de Juro Nominal no Brasil

Existem dois conjuntos de dados disponíveis para se estimar o processo para a taxa nominal. O primeiro é composto pelos títulos prefixados do governo (LTN e BBC) e a taxa de juro de um dia para financiar esses títulos, conhecida como taxa SELIC (veja gráfico 2.2 abaixo)¹. O segundo são os títulos privados do melhor crédito, negociados no chamado mercado interbancário, cujo conjunto de dados é: CDI prefixados de 30 ou 60 dias corridos de prazo, contratos futuros de CDI negociados na BMF, SWAP de taxa diária por taxa fixa registrados na CETIP, e também negociados com 30 ou 60 dias corridos e a taxa diária conhecida como CDI ou DI (Depósito Interfinanceiro)². Esta última está desenhada no gráfico 2.1 abaixo, na forma anual e contínua para o período entre 2/01/95 e 26/01/96. A taxa over (que é a convenção do mercado) foi transformada em anual e contínua de acordo com a seguinte fórmula:

¹ Os dados de Taxa Selic e títulos públicos federais foram gentilmente cedidos pelo DEMAB/BACEN.

² Esses foram retirados do boletim diário da ANDIMA.

$$r_t = 252 \ln(1 + \frac{taxa_over}{3000})$$



A diferença entre elas é mínima, havendo apenas poucos saltos, que podem ser explicados pela defasagem entre CDI e SELIC, já que o CDI da data t corresponde ao SELIC de $t+1$ ³. O gráfico 2.3 mostra a diferença entre as duas taxas, CDI - SELIC, com e sem defasagem.

³ Os bancos podem transformar dinheiro do mercado de CDI em dinheiro para o mercado SELIC, simplesmente deixando a captação no CDI parada por um dia útil na conta-corrente. Outra maneira de explicar isso é através da

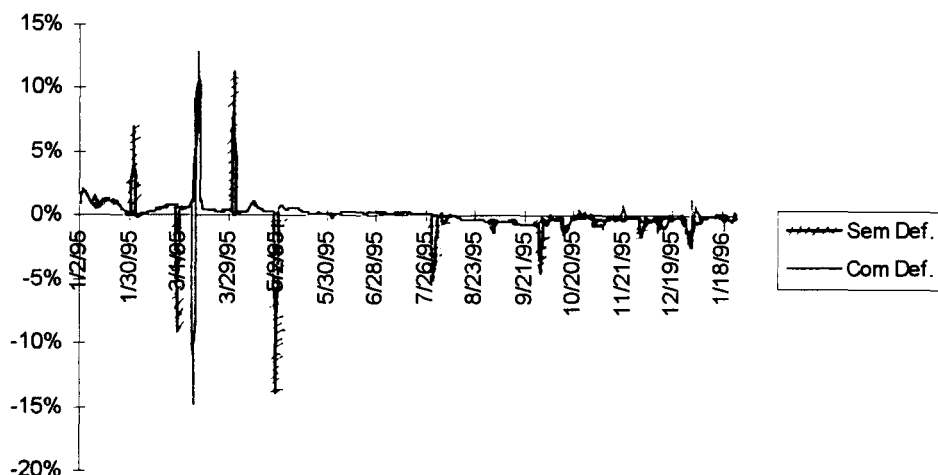


Gráfico 2.3 - Diferença entre a Taxa Diária CDI e SELIC

A qualidade do crédito do governo é, segundo os livros texto, melhor do que de qualquer agente privado, então, a taxa do CDI deveria ser sempre maior, mas o gráfico mostra, após a primeira metade de 1995, que esse não é o caso. Regredindo a diferença entre CDI e SELIC, com $(CS_{(-1)})$ e sem defasagem(CS), contra uma constante, obtivemos:

$$CS_{(-1)} = -0.034\% + \varepsilon \quad \therefore \quad CS = 0.00028\% + \varepsilon$$

(-0.33)
(0.034)

Portanto, não há evidência alguma de que o crédito do governo é melhor do que o implícito no CDI. No caso sem defasagem o CDI é, em média, ligeiramente maior do que o SELIC, que pode ser explicado pela queda da taxa de juro no período, somada à própria defasagem. O caso com defasagem é ligeiramente negativo. Em ambos os casos esse sinal não é significativo. O motivo óbvio para a taxa dos títulos privados não ser significativamente maior do que dos títulos públicos, vem dos diferentes planos econômicos que afetaram as dívidas do governo.

diferença entre cheque(CDI) e reserva bancária (SELIC). Então, por arbitragem, a taxa do CDI do dia t deve corresponder à taxa a termo do SELIC em t+1.

2.2) Análise da Taxa Diária em um Modelo de um Fator

Para verificar qual o modelo mais adequado, analisamos um conjunto de modelos para a taxa de juro de curto prazo, com apenas um fator. Utilizamos um procedimento igual ao adotado por CHAN et al..(1992), baseado num método econométrico simples. A forma geral para o comportamento estocástico da taxa de juro é:

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma dz \quad (2.1)$$

Com algumas restrições sobre os parâmetros α , β , σ e γ podemos obter qualquer um dos modelos abaixo:

1. Merton	$dr = \alpha dt + \sigma dz$
2. Vasicek	$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma dz$
3. CIR SR	$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma r^{1/2} dz$
4. Dothan	$dr = \sigma r dz$
5. Mov. Browniano Geo.	$dr = \beta r dt + \sigma r dz$
6. Breenan-Schwartz	$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma r dz$
7. CIR VR	$dr = \sigma r^{3/2} dz$
8. CEV	$dr = \beta r dt + \sigma r^\gamma dz$

O primeiro modelo adota um movimento Browniano simples, utilizado por Merton (1973); o segundo segue um processo de retorno à média (Ornstein - Uhlenbeck), como no exemplo de Vasicek (1977). O terceiro é o modelo obtido por C.I.R (1985). O quarto foi usado por Dothan (1978). O quinto é o tradicional movimento Browniano geométrico utilizado, por exemplo, no modelo Black-Scholes. Este é muito conveniente por supor que a taxa de juro tem distribuição lognormal. O sexto vem de Breenan e Schwartz (1980), que o utilizam para apreçar títulos conversíveis. Esses três últimos modelos implicam que a volatilidade condicional de variações para taxa de juro é proporcional a r^2 . O sétimo modelo foi utilizado por C.I.R. (1980). Finalmente, o último é o modelo de elasticidade constante da variância, introduzido por Cox e Ross (1976).

O conjunto de restrições é então:

Modelo	α	β	σ^2	γ
1. Merton		0		0
2. Vasicek				0
3. CIR SR				1/2
4. Dothan	0	0		1
5. Mov. Browniano Geo.	0			1
6. Breenan-Schwartz				1
7. CIR VR	0	0		3/2
8. CEV	0			

A estimação do modelo acima foi feita com uma aproximação discreta dada pelas equações (2.2) e (2.3), como em Chan et all.

$$r_{t+1} - r_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_{t+1} \quad (2.2)$$

$$E[\varepsilon_{t+1}] = 0 \quad , \quad E[\varepsilon_{t+1}^2] = \sigma^2 r_t^{2\gamma} \quad (2.3)$$

onde: r_t é a taxa diária contínua e anualizada.

Seguindo o trabalho de Chan et all, os parâmetros das equações (2.2) e (2.3) são obtidos através de um conjunto de restrições superidentificados num sistema de equações de momento, usando GMM (Método dos Momentos Generalizado de Hansen - 1982). A utilização de GMM não requer que a distribuição da variação da taxa de juro seja normal, apenas que a distribuição seja estacionária, ergódica e que as devidas expectativas existam. Definamos o vetor $f_t(\theta)$ como:

$$f_t[\theta] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} r_t \\ \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \\ (\varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma}) r_t \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde $\theta = \{\alpha, \beta, \sigma, \gamma\}$ é o vetor de parâmetros.

Se (2.2) e (2.3) são verdade, então $E[f_t(\theta)] = 0$

Vejamos primeiramente as estimativas para a taxa diária do SELIC no período entre 2/01/95 e 26/01/96. Os cálculos foram todos realizados através do sistema TSP, estimando-se as equações para $\varepsilon_{t+1}, \left(\varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma}\right)$ e tomando como instrumentos uma constante e a taxa r_t . O modelo é exatamente identificado para a equação irrestrita e superidentificado para outras, como se verifica através do conjunto de restrições. A tabela 2.1 mostra o comportamento da taxa diária do SELIC, de onde se tem uma média diária de 42,26% (anualizada), desvio padrão 7,8% e significativa autocorrelação. Entre parênteses, tem-se o resultado do teste-Q, de onde se verifica que não há evidência para afirmar que a variação diária não é estacionária.

Variável	Obs.	Média	Desvio-padrão	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
r_t	267	0.422644	0.078321	0.970 (253)	0.940 (492)	0.910 (716)	0.880 (927)	0.849 (1112)
$r_t - r_{t-1}$	266	-0.000369	0.017246	0.000684 (0.00013)	0.0112 (0.034)	0.0085 (0.053)	0.00504 (0.0603)	0.00179 (0.061)

Tabela 2.1 - Estatísticas Básicas da Taxa Diária do SELIC

Para testar a qualidade do ajuste do modelo, usamos a estatística qui-quadrado, com a hipótese nula do modelo ser verdadeiro. Pela tabela 2.2 verificamos que apenas o modelo de Dothan não passa no teste com 90% de probabilidade. A aplicação do GMM sobre os modelos de Vasicek (2), CIR SR (3), BS(6) resultou em estimativas de volatilidade negativa. O coeficiente α dos modelos de Merton(1) não passa no teste t a 95% de probabilidade. Também o coeficiente β dos modelos MBG(5) e CEV(8) não passam no teste a 95% de probabilidade. Assim sendo, apenas o modelo CIR VR não é reprovado.

Modelo	α	β	σ	γ	Teste χ^2 (p - value)	g.l.
Irrestrito	0.00779 (0.98)	-0.0193 (-0.99)	-0.0461 (-0.77)	1.18 (0.72)		
1.Merton	0.000068 (0.08)	0	0.01463 (4.18)	0	1,0131 (0,6026)	2
2.Vasicek	0.00573 (0.79)	-0.0134 (-0.78)	-0.01657 (-4.31)	0	0,4606 (0,4974)	1

3.CIR SR	0.0068 (0.91)	-0.0163 (-0.91)	-0.0261 (-4.45)	1/2	0,1634 (0,686)	1
4.Dothan	0	0	0.4846 (389)	1	264 (0,00)	3
5.M.B.G.	0	-0.00061 (-0.32)	0.0332 (4.34)	1	0,9728 (0,6148)	2
6.B.S.	0.0076 (0.99)	-0.0186 (-1.05)	-0.0399 (-4.51)	1	0,0122 (0,9119)	1
7.CIR VR	0	0	0.0504 (4.94)	3/2	1.34 (0,7190)	3
8.CEV	0	-0.00039 (-0.16)	0.0260 (0.52)	0.6892 (0.29)	0,9533 (0,3289)	1

Tabela 2.2 - Estimativas dos Modelos Alternativos para Taxa de Juros. Valores do teste-t em parênteses abaixo dos coeficientes.

Chan et all também medem a performance do modelo; comparando a sua previsão com o que aconteceu, esse resultado é resumido numa estatística R1 e R2 (veja tabela 2.2), que são, respectivamente, a proporção da variação total ex-post da taxa de juro e o quadrado da variação da taxa que podem ser explicados pelos seus respectivos valores condicionais, dados pelas equações (2.2) e (2.3). Seguindo a idéia acima, regredimos a volatilidade realizada contra a volatilidade prevista, conforme a equação abaixo:

$$\sigma_R = a + b \sigma_P + \varepsilon \quad (2.4a)$$

onde : σ_R é a volatilidade realizada

σ_P é a volatilidade prevista (ou condicional)

No caso do modelo CIR VR, o R2 do ajuste da equação acima foi de 0.0065. Como era esperado, essa estatística está muito próxima de zero, porque a amostra apresenta muitos saltos, como pode ser visto nos gráficos 2.4.

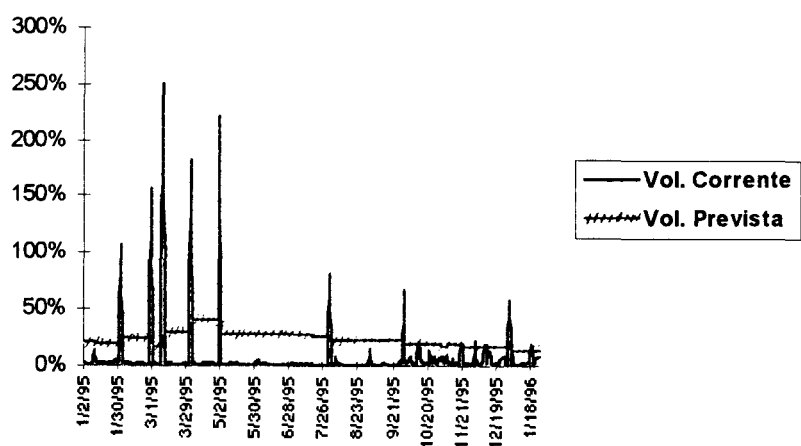


Gráfico 2.4 - Previsão de Volatilidade pelo Modelo CIR VR

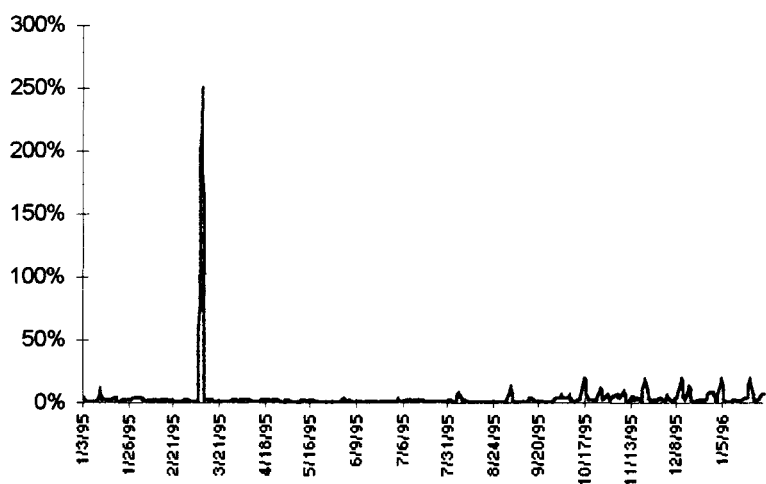


Gráfico 2.5 - Volatilidade Realizada com a Exclusão da Virada do Mês.

Os gráficos 2.1, 2.2 e 2.4 mostram saltos na taxa de juro e na volatilidade desta. Esses saltos coincidem com a mudança de mês. Esse é um fenômeno consistente com a política do Banco Central de ajustar a taxa de juro nominal diária, de modo a obter um valor acumulado no mês próximo à inflação, mais um ganho real qualquer. Por mais variável que seja o ganho real, a variação de número de dias úteis, de um mês para outro, tem um efeito enorme como pode ser visto no gráfico 2.5, desenhado sem a variação devido à virada de mês. Existe ainda um pico de volatilidade que, de fato, ocorreu no dia 10/3/95, devido à forte intervenção

do Banco Central. Sendo assim, vejamos uma reestimação do modelo (2.1), com a exclusão de todas as viradas de mês.

Modelo	α	β	σ	γ	Teste χ^2 (p - value)	g.l.
Irrestrito	0.0033 (0.82)	-0.0068 (-0.86)	0.00045 (1.85)	-3.18 (-10.86)		
1.Merton	-0.00020 (-2.61)	0	0.0010 (2.00)	0	1,53 (0,4654)	2
2.Vasicek	-0.00085 (-0.82)	0.00132 (0.62)	-0.00084 (11.64)	0	1.1477 (0,284)	1
3.CIR SR	-0.00085 (-0.81)	0.0013 (0.62)	-0.0011 (-1.48)	1/2	1.1406 (0,2855)	1
4.Dothan	0	0	0.4871 (861)	1	252 (0,00)	3
5.M.B.G.	0	-0.00042 (-2.06)	0.00074 (0.40)	1	1.7560 (0,4156)	2
6.B.S.	-0.00084 (-0.80)	0.0013 (0.61)	-0.00133 (-1.22)	1	1.1339 (0,2870)	1
7.CIR VR	0	0	0.0036 (3.52)	3/2	8.37 (0,0389)	3
8.CEV	0	-0.00035 (-2.05)	-0.00024 (-1.97)	-3.15 (-11.00)	0.67 (0,4124)	1

Tabela 2.3 - Estimativas dos Modelos Alternativos para Taxa de Juros com Exclusão do Dia da Virada do Mês . Valores do teste-t entre parênteses

Pela tabela 2.3, os modelos Dothan e CIR VR são excluídos por má especificação segundo o teste χ^2 . Os modelos de Vasicek, CIR SR, BS e CEV foram excluídos porque suas estimações apresentarem volatilidade negativa. O MBG tem a volatilidade não significativa. Resta então o modelo de Merton, que não é rejeitado por nenhum teste. A volatilidade, segundo o modelo de Merton, é constante e igual a 1.59% ao ano. No gráfico 2.6, temos a previsão de volatilidade dada pelo modelo irrestrito versus a volatilidade realizada.

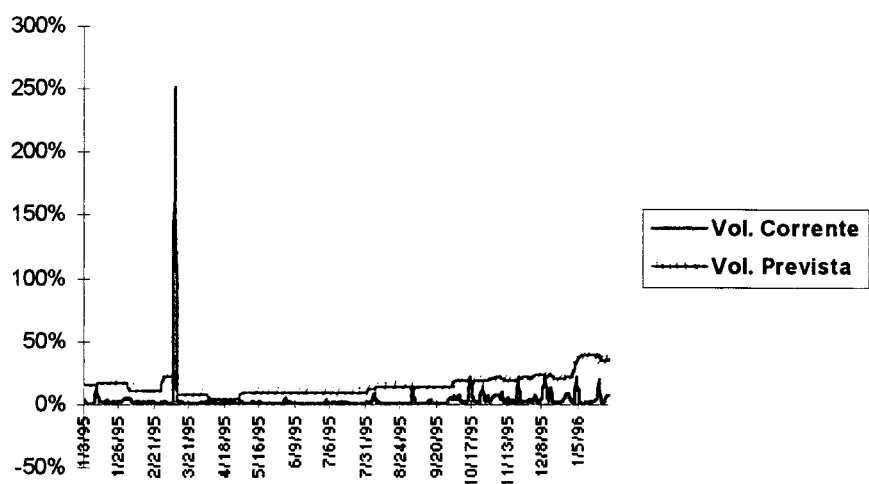


Gráfico 2.6 - Volatilidade Realizada versus Volatilidade Prevista pelo Modelo Irrestrito com Exclusão da Virada do Mês.

O gigantesco salto na volatilidade ocorrido em 10/3/95, perturba sobremaneira o comportamento da volatilidade. Para verificar melhor o ocorrido, temos no gráfico 2.7 o comportamento da volatilidade, com exclusão do salto do dia 10/3/95.

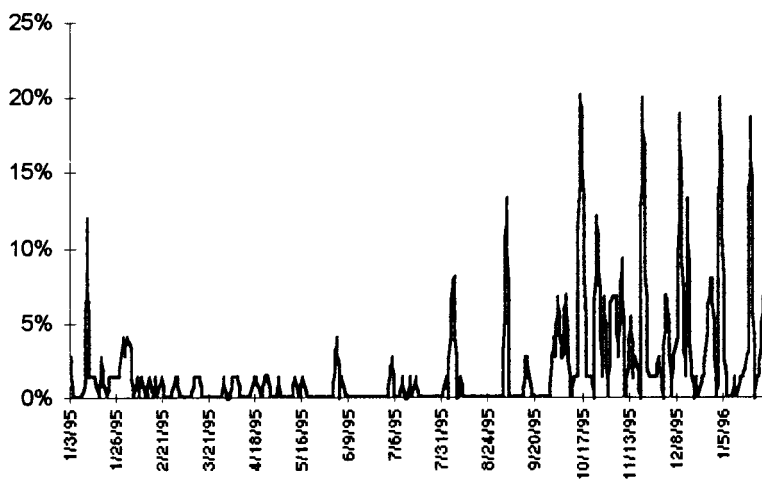


Gráfico 2.7 - Volatilidade Realizada com Exclusão da Virada do Mês e do Salto do dia 10/3/95.

Excluindo-se o salto da taxa de juro do dia 10/3/95, reestimamos os modelos e apresentamos os resultados na tabela 2.4. Apenas o modelo CEV(8) passa no teste χ^2 e coeficientes significativos.

Modelo	α	β	σ	γ	Teste χ^2 (p - value)	g.l.
Irrestrito	-0.00059 (-0.57)	0.0008 (0.37)	-0.00012 (-2.07)	-3.08 (-6.47)		
1.Merton	-0.00019 (-2.48)	0	-0.0014 (-6.45)	0	12.36 (0,0021)	2
2.Vasicek	-0.00114 (-1.11)	0.00197 (0.93)	-0.0014 (-6.45)	0	11.57 (0,0007)	1
3.CIR SR	-0.00115 (-1.18)	0.00199 (0.95)	0.0019 (5.98)	1/2	12.25 (0,0005)	1
4.Dothan	0	0	0.48 (3723)	1	251 (0,0000)	3
5.M.B.G.	0	-0.00037 (-2.32)	0.00256 (5.40)	1	13.94 (0,0009)	2
6.B.S.	-0.00115 (-1.12)	0.002 (0.95)	-0.00256 (-5.45)	1	12.79 (0,0003)	1
7.CIR VR	0	0	0.00297 (3.89)	3/2	18.69 (0,0003)	3
8.CEV	0	-0.0004 (-2.52)	0.00012 (2.09)	-3.11 (-6.63)	0.32 (0,5716)	1

Tabela 2.4 - Estimativas dos Modelos Alternativos para Taxa de Juros com Exclusão do Pico do Dia 10/3/95.

A série de volatilidade para o teste acima está no gráfico 2.5 abaixo.

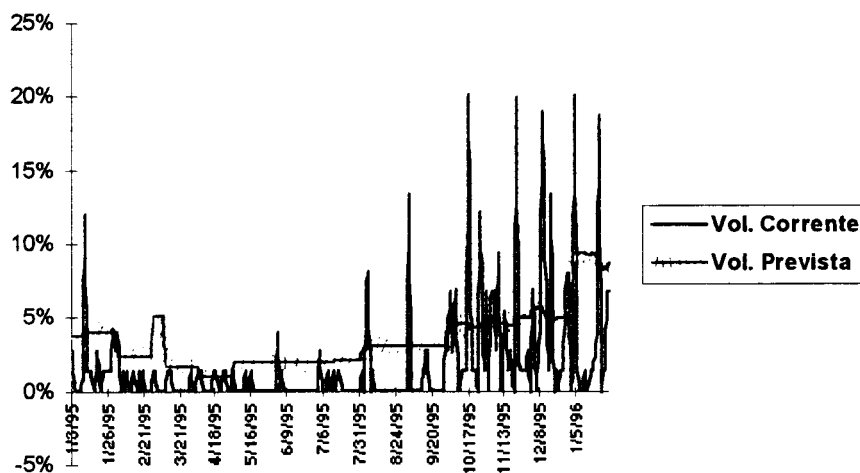


Gráfico 2.8 - Série de Volatilidade Realizada versus Volatilidade Prevista pelo Modelo CEV.

Em resumo, as estimativas que incluem todos os dias indicam que o modelo CIR VR é o que melhor se ajusta. Quando excluimos os saltos na taxa de juro, devido à virada de mês, apenas o modelo de Merton continua significativo. O motivo pode ser a queda na volatilidade da amostra, uma vez que são eliminados grandes saltos. Consequentemente, os modelos que atribuem muito valor à volatilidade perdem significancia.

Quando excluimos o salto do dia 10/3/95, o modelo CEV é o único que passa em todos os testes. Seguindo o teste de qualidade, dado pela equação 2.4a, obtivemos um coeficiente R_2 para o ajuste dessa equação igual a 0.13, portanto, um ajuste muito melhor do que as primeiras estimativas.

Chan et all rejeitam os modelos de Merton, Vasicek e CIR SR por má especificação (teste χ^2), rejeitando, assim, os modelos com $\gamma < 1$, o que indica a importância da relação entre volatilidade da taxa de juro e o seu nível. Eles também verificam pouca significância nos modelos com reversão à média. Mesmo no modelo irrestrito, o coeficiente β é insignificante. Nosso resultado combina com o deles na medida que desclassifica os modelos com reversão à média. Além disso, também não obtivemos coeficientes significativos para α .

Nossos resultados combinam com Chan et all, e mostram, mais uma vez, que modelos mais simples e não muito conhecidos, como CIR VR e CEV, performam melhor.

2.3) Ajuste do Modelo de Merton a Estrutura a Termo

Para testar a relação entre os resultados da seção anterior e a estrutura a termo, usaremos os resultados da tabela 2.3 para verificar a qualidade do ajuste de um modelo, baseado na equação 2.1, com as restrições dadas pelo modelo de Merton. Assim, assumimos que a taxa de curto prazo $r(t)$ se comporta como:

$$dr = \alpha dt + \sigma dz \quad (2.5)$$

Representando o título sem risco de crédito, com pagamento final igual a \$1 na data T , por $P(t, T, r(t))$.

Aplicando o lema de Itô, temos que a taxa de retorno instantânea desse título é:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= \left(P_r dr + \frac{P_{rr} (dr)^2}{2} + P_t dt \right) / P \\ &= \left(\alpha \frac{P_r}{P} + \frac{P_t}{P} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{P_{rr}}{P} \right) dt + \sigma \frac{P_r}{P} dz \end{aligned} \quad (2.6)$$

Em mercados perfeitos, a taxa de retorno esperada de qualquer ativo pode ser escrita como a taxa de retorno do ativo sem risco mais um prêmio de risco. A equação acima pode ser reescrita como:

$$\frac{dP}{P} = \mu(t, T, r) dt + \nu(t, T, r) dz \quad (2.7)$$

Pelo argumento de não-arbitragem (veja por exemplo Vasicek (1977)), temos que o prêmio de risco (λ^*) é independente da data de vencimento do título (data T):

$$\mu(t, T, r) = r + \lambda^*(t, r) \nu(t, T, r) \quad (2.8)$$

Combinando-se 2.8, 2.7 e 2.6, obtemos a equação fundamental das finanças:

$$rP + \lambda^*(t, r) \sigma P_r = \alpha P_r + P_t + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} \quad (2.9)$$

Merton (1973) assume que vale a hipótese das expectativas e faz $\lambda^*(t, r)=0$, com isso, resolve a equação 2.9 com a condição de contorno $P(T, T, r)=1$, de onde obtém a seguinte fórmula:

$$P^*(t, T, r) = e^{\left(-r(T-t) - \frac{\alpha}{2}(T-t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 \right)} \quad (2.10)$$

A seguir, calculamos os parâmetros α e σ a partir da estrutura a termo, com base na equação 2.10. Utilizamos, para isso, títulos públicos cujo prazo não passasse de um mês, de modo a compararmos o resultado com o da tabela 2.3, onde excluimos a virada do mês. Os dados são de todo o ano de 1995 havendo um total de 150 observações. Adotamos um procedimento semelhante ao de Brown e Dybvig (1986) onde estimamos os parâmetros da equação 2.5 através da seguinte equação:

$$P^m(t, T, r) = P^*(t, T, r) + \varepsilon_{t,T} \quad (2.11)$$

onde P^m é o preço de mercado do título com vencimento em T .

Com base no modelo da equação 2.11, tentamos obter uma estimativa de máxima verossimilhança para os parâmetros α e σ , através do procedimento padrão do sistema TSP. Após várias tentativas com diversas

combinações de valores iniciais, não houve convergência de nenhuma delas. Verificando graficamente em 2.9, tem-se uma função erro, definida como o quadrado de $\varepsilon_{t,T}$ de 2.11. Obtem-se facilmente um mínimo global em $\alpha \cong -0.53$, enquanto que o erro é muito suavemente crescente em σ .

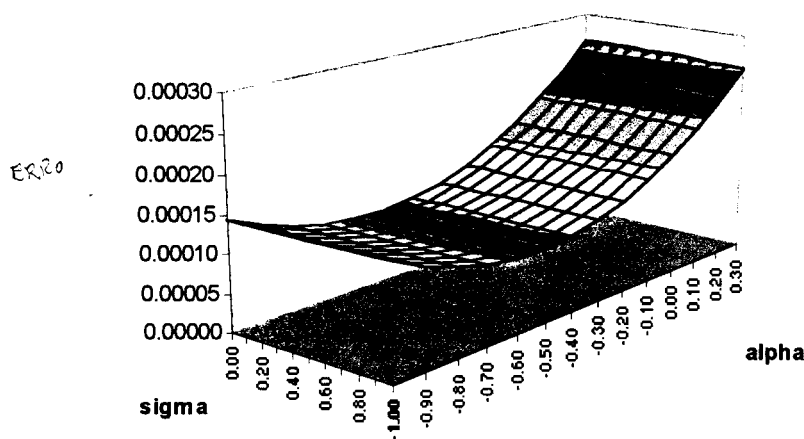


Gráfico 2.9 - Erro do Modelo de Merton.

A diferença entre as duas estimativas é muito grande, o que mostra que o modelo de Merton na sua forma mais simples (com $\lambda = 0$), não é adequado para explicar a estrutura a termo dos títulos públicos.

2.4) Impacto do Plano Real sobre a Taxa de Juro Diária

O plano econômico, conhecido como Plano Real, adotado pelo governo brasileiro em início de julho de 1994, diminuiu sobremaneira a taxa de inflação e, consequentemente, a taxa de juro nominal. A seguir estimamos a taxa diária em três períodos: entre 1989 e 1996, 1989 até a véspera do Plano Real e do início do plano até 1996. Os gráficos 2.12 a 2.14, mostram a evolução da taxa nominal diária (no formato anual e contínuo) nesses três períodos. Verificam-se muitas variações bruscas e duas mudanças significativas no seu nível, em março de 1990 e julho de 1994.

Os dados da taxa diária, eventualmente, apresentam-se duas vezes maior devido à proximidade de algum feriado. Isso é o que o Banco Central chama de duplo *overnight*. Para corrigir nós simplesmente dividimos o valor da taxa diária por dois. Esse tipo de problema ocorreu, com frequência, próximo ao Natal e num total de doze vezes para toda a amostra.

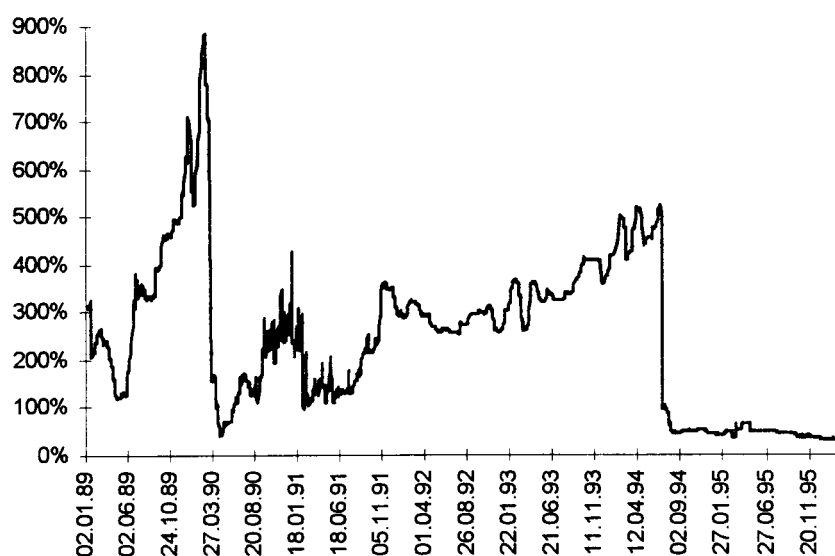


Gráfico 2.12 - Evolução da Taxa Diária do CDI

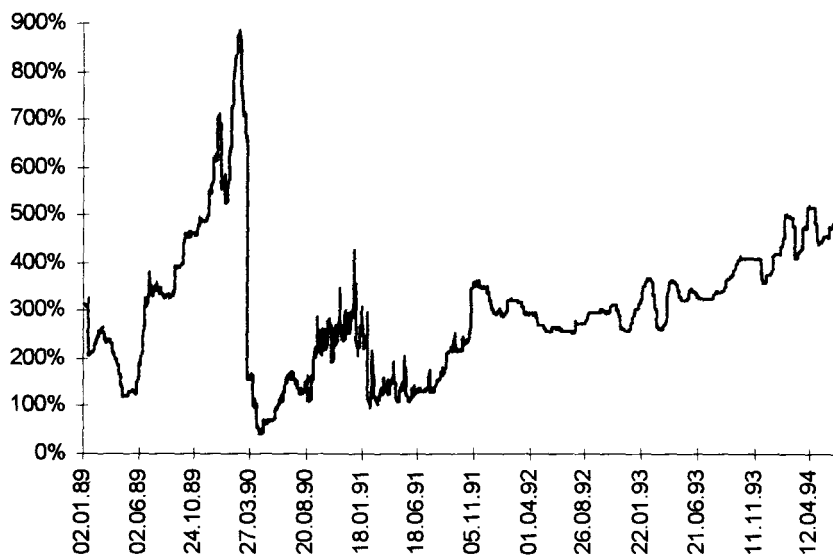


Gráfico 2.13 - Evolução da Taxa Diária do CDI antes do Plano Real

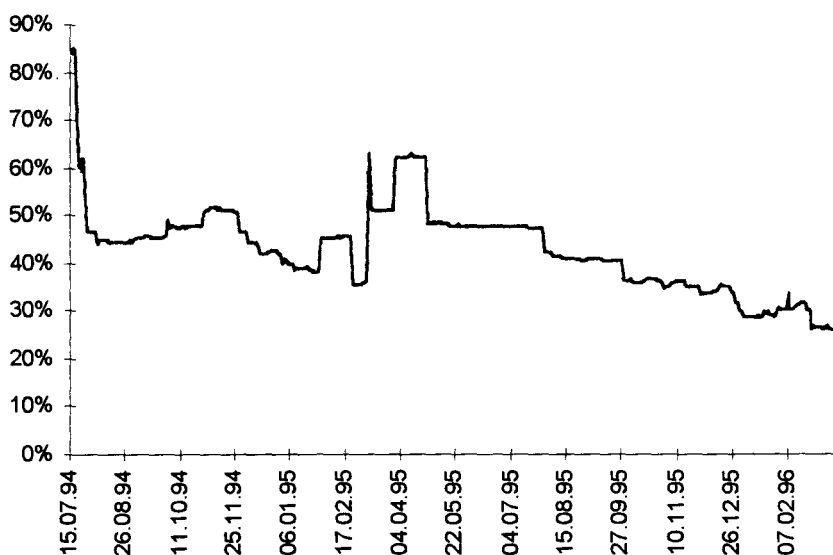


Gráfico 2.14 - Evolução da Taxa Diária do CDI Pós-Plano Real

Na tabela 2.5, temos a autocorrelação dessas taxas e de suas variações. Verifica-se facilmente uma grande e consistente autocorrelação positiva da taxa diária. Quanto à sua variação, ela tem autocorrelação

consistentemente negativa para o período como um todo e após o plano, com valores não muito pequenos para a primeira autocorrelação. Para o período pré-plano, a variação da taxa diária é negativa no primeiro período e com um valor alto. Para os períodos seguintes, a autocorrelação é pequena.

Variável	Obs.	Média	Desvio-padrão	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
r_t	1785	2.14463	1.69450	0.965	0.957	0.951	0.945	0.935
$r_t - r_{t-1}$	1784	-0.00158	0.44355	-0.386	-0.0358	-0.00923	-0.0492	-0.0231
Pre-Real								
r_t	1355	3.03697	1.46335	0.942	0.930	0.923	0.914	0.900
$r_t - r_{t-1}$	1354	0.00152	0.49691	-0.407	-0.0379	0.0108	0.0513	0.0239
Pos-Real								
r_t	419	0.42556	0.89399	0.911	0.853	0.816	0.791	0.758
$r_t - r_{t-1}$	418	-.00141	0.03055	-0.274	-0.0127	-0.00747	-0.0362	-0.0215

Tabela 2.5 - Estatísticas Básicas da Taxa Diária do CDI

A aplicação dos modelos da seção 2.2 sobre o período total, tem seu resultado na tabela 2.6a. Os modelos de Dothan e CIR VR são eliminados por má especificação (teste χ^2). As estimativas para os modelos de Vasicek e CIR SR apresentam volatilidade negativa. O coeficiente β dos modelos MBG e CEV não são significativos. O coeficiente α do modelo de Merton também não é significativo a 90%. Apenas o modelo BS passa pelos testes básicos (o coeficiente β é significativo a 90%).

Modelo	α	β	σ	γ	Teste χ^2 (p - value)	g.l.
Irrestrito	0.0153 (1.63)	-0.0071 (-1.31)	0.0391 (2.06)	1.396 (3.29)		
1.Merton	0.0035 (1.25)	0	0.12 (7.66)	0	2.49 (0,28)	2
2.Vasicek	0.0024 (0.56)	0.00064 (0.313)	-0.12 (-7.33)	0	2.38 (0.1224)	1
3.CIR SR	0.0054 (1.22)	-0.0012 (-.54)	-0.093 (-7.62)	1/2	1.44 (0,23)	1
4.Dothan	0	0	4.98 (500)	1	1203 (0,0000)	3
5.M.B.G.	0	0.00052 (0.35)	0.053 (6.83)	1	4.73 (0,0936)	2
6.B.S.	0.0097 (2.07)	-0.0038 (-1.48)	0.059 (7.87)	1	0.48 (0,4849)	1
7.CIR VR	0	0	0.0268 (8.14)	3/2	9.73 (0,0210)	3
8.CEV	0	0.0013 (0.82)	0.1142 (3.08)	0.1790 (0.27)	2.66 (0.1027)	1

Tabela 2.6a - Estimativas dos Modelos Fator para a Taxa Diária do CDI entre dez/88 e jan/96.

Quanto ao período anterior ao Plano Real, temos o resultado na tabela 2.6b. Os modelos de Dothan, CIR VR, Vasicek , CIR SR, MBG, CEV e Merton apresentam os mesmos problemas do período total (tabela 2.6a), sendo que, novamente, apenas o modelo BS passa pelos testes básicos (o coeficiente β é significativo a 90%).

Modelo	α	β	σ	γ	Teste χ^2 (p - value)	g.l.
Irrestrito	0.0299 (1.53)	-0.0094 (-1.24)	0.0353 (1.55)	1.37 (2.42)		
1.Merton	0.00618 (1.58)	0	0.14 (11.63)	0	1.53 (0.4652)	2
2.Vasicek	0.01118 (1.13)	-0.0018 (-0.54)	0.14 (-11.69)	0	1.23 (0,2669)	1
3.CIR SR	0.0151 (1.53)	-0.0034 (-1.03)	0.09 (-11.78)	1/2	0.779 (0,3774)	1
4.Dothan	0	0	5.32 (566)	1	1160 (0.00)	3
5.M.B.G.	0	0.00068 (0.50)	0.052 (11.37)	1	4.85 (0,0887)	2
6.B.S.	0.0214 (2.16)	-0.0060 (-1.77)	0.054 (-11.8)	1	0.25 (0,6127)	1
7.CIR VR	0	0	0.0281 (12.5)	3/2	10.37 (0,0157)	3
8.CEV	0	0.0020 (1.23)	0.2027 (1.37)	-0.5797 (-0.033)	2.34 (0.1264)	1

Tabela 2.6b - Estimativas dos Modelos de um Fator para a Taxa Diaria do CDI antes do Plano Real.

Quanto ao período pós-plano, vários modelos são excluídos por má especificação. São eles: Merton, Dothan, MBG, CIR VR e CEV. Quanto ao restante: Vasicek, CIR SR e BS apresentam resultados com volatilidade negativa.

Modelo	α	β	σ	γ	Teste χ^2 (p - value)	g.l.
Irrestrito	0.0199 (2.67)	-0.0500 (-2.76)	0.0565 (2.22)	1.23 (1.55)		
1.Merton	-0.00066 (-0.92)	0	0.0137 (3.22)	0	6.11 (0.047)	2
2.Vasicek	0.016318 (2.35)	-0.0390 (-2.43)	-0.0233 (-6.17)	0	2.52 (0,1118)	1
3.CIR SR	0.0184 (2.54)	-0.0449 (-2.62)	-0.035 (-6.67)	1/2	0.924 (0,3364)	1
4.Dothan	0	0	0.56 (381)	1	412 (0,00)	3
5.M.B.G.	0	-0.0021 (-1.36)	0.031 (4.39)	1	5.99 (0,05)	2
6.B.S.	0.0197 (2.65)	-0.0491 (-2.75)	-0.0494 (-6.99)	1	0.0905 (0,7636)	1
7.CIR VR	0	0	0.052 (5.89)	3/2	7.34 (0,0618)	3
8.CEV	0	-0.0019 (-0.82)	0.0467 (1.19)	1.42 (0.90)	5.98 (0.015)	1

Tabela 2.6c - Estimativas dos Modelos de um Fator para a Taxa Diária do CDI depois do Plano Real.

O período pós-plano, claramente apresenta mudanças, tanto graficamente, quanto nos testes dos modelos. Um modelo que se ajusta razoavelmente para o período como um todo (modelo BS), já não se ajustou para o período posterior ao Plano, por apresentar estimativas com volatilidade negativa. A taxa diária do CDI é muito próxima da taxa do SELIC, conforme verificamos na seção 2.1, sendo assim, os resultados da tabela 2.2 devem ser muito parecidos com os da tabela 2.6c. De fato, eles são muito próximos, exceto para a qualidade do modelo (teste χ^2).

2.5) Desenho da Estrutura a Termo Corrente

A seguir, desenhamos a estrutura a termo corrente para os títulos privados e públicos e também, para a combinação destes. Na construção da estrutura para títulos privados, usamos os títulos disponíveis e com liquidez, que são: contratos futuros de DI com até três meses para o vencimento, SWAPs com um e dois meses para o vencimento e a taxa diária do CDI. Para a estrutura dos títulos públicos, usamos BBCs, LTNs e taxa diária do SELIC e os mesmos procedimentos da estrutura anterior. Para desenhar essa curva precisamos determinar o valor da taxa de juro, em períodos intermediários, entre os títulos disponíveis acima. O procedimento adotado pelos praticantes do mercado é simplesmente interpolar linearmente a taxa dos títulos mais próximos.

$$r_{t+i} = (r_{t+\tau} - r_t) \frac{i}{\tau} \quad (2.12)$$

onde: $i < \tau$

Outro procedimento conhecido na literatura é o *Cubic Spline*, adotado inicialmente por McCulloch (1975), num artigo que modela a estrutura a termo corrente ajustada para os impostos. Vasicek e Fong (1982) usam *Exponential Splines* para ajustar a estrutura a termo com exclusão dos impostos e também das opções implícitas nos títulos. Adams e Deventer (1994) ajustam uma curva para a estrutura a termo, através de um procedimento de suavização máxima da taxa de juro a termo. Duarte e Werlang (1995) fazem o ajuste empírico da estrutura a termo, através da minimização de um conjunto de erros.

O *Cubic Spline* de McCulloch consiste em ajustar um polinômio de terceiro grau, com saltos na terceira derivada, em pontos chamados *knots* (nós). Esse polinômio define linearmente uma função desconto e, com base nos títulos disponíveis, podemos fazer uma estimativa de uma simples função linear. Essa função desconto é definida como:

$$\delta(m_i) = 1 + \sum_{j=1}^k a_j f_j(m_i) \quad (2.13)$$

onde: m_i é a data de vencimento do título i .

A função desconto corresponde ao valor presente de um título, que paga uma unidade monetária no seu vencimento e $f(0)=0$. Os parâmetros a_j são estimados através de regressão linear. O preço de cada título i , em qualquer dia, é dado por $p_i = \delta(m_i)$. Com essa formulação, temos uma equação linear para o preço do título i . A estimativa dos coeficientes a_j é feita através da seguinte equação:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{a} + \mathbf{e} \quad (2.14)$$

$$\text{onde: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 - 1 \\ p_2 - 1 \\ \vdots \\ p_n - 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(m_1) & f_2(m_1) & \dots & f_k(m_1) \\ f_1(m_2) & f_2(m_2) & \dots & f_k(m_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(m_n) & f_2(m_n) & \dots & f_k(m_n) \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

\mathbf{e} é um termo de erro aleatório.

O vetor \mathbf{a} pode ser calculado pela tradicional fórmula de mínimos quadrados ordinários:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}'\mathbf{p} \quad (2.15)$$

Os parâmetros k definem o número de nós onde ocorrem descontinuidades, na terceira derivada da função, que estamos ajustando para o preço dos títulos. No caso do *cubic spline* devemos ter $k-1$ nós d_j . O primeiro nó corresponde à data inicial 0 e o último à data de vencimento do título de maior prazo $d_0 = 0$ e $d_{k-1} = m_n$. Os outros nós podem ser definidos pelo pesquisador ou, segundo McCulloch, por um procedimento que separa o número de títulos igualmente entre cada nó.

A função $f_j(m)$ é definida como :

Para $j < k$:

$$\begin{aligned}
&=0 && \text{se } m < d_{j-1} \\
&= \frac{(m-d_{j-1})^3}{6(d_j-d_{j-1})} && \text{se } d_{j-1} \leq m < d_j \\
&= \frac{c^2}{6} + \frac{ce}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{6(d_{j+1}-d_j)} && \text{se } d_j \leq m < d_{j+1} \\
&\quad c = d_j - d_{j-1} \quad \therefore \quad e = m - d_j && (2.16) \\
&= (d_{j+1} - d_{j-1}) \left[\frac{2d_{j+1} - d_j - d_{j-1}}{6} + \frac{m - d_{j+1}}{2} \right] && \text{se } d_{j+1} \leq m.
\end{aligned}$$

Para $j=k$ definimos $f_k(m)=m$, qualquer que seja m .

Comparamos o método de interpolação linear na taxa com o método de McCulloch para o dia 22/11/95, sobre a seguinte carteira de títulos do governo.

Dias úteis para o Vencimento	Preço
1	0.99860528
20	0.9735740
24	0.9689142
28	0.9640077
33	0.95856026
38	0.95420627

A interpolação foi feita entre cada taxa obtida dos preços acima. O *cubic spline* foi feito escolhendo-se nós de acordo com o critério sugerido por McCulloch. Assim, com $k=4$, esses nós são $d_1=0$, $d_2=28$ e $d_3=38$. O vetor a obtido para esses dados foi :

a_1	1.400
a_2	0.040
a_3	4.360
a_4	(0.373)

No gráfico 2.15 temos a função desconto para os dois métodos e no gráfico 2.16 a estrutura a termo da taxa de juro, obtida a partir da função desconto.

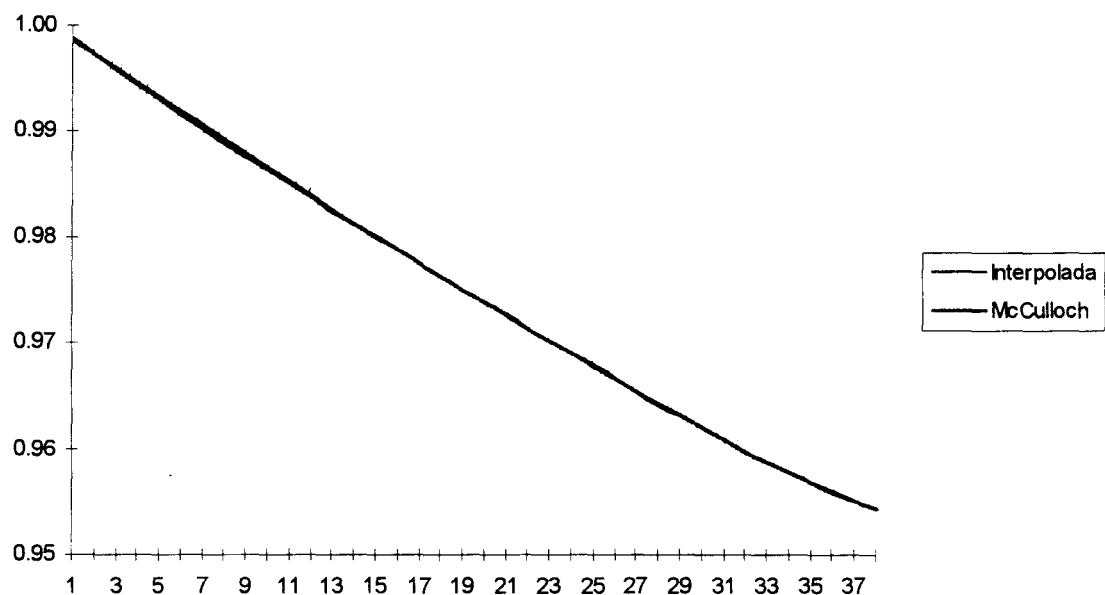


Gráfico 2.15 - Comparação dos Preços Gerados por Interpolação Linear e pelo Método de McCulloch

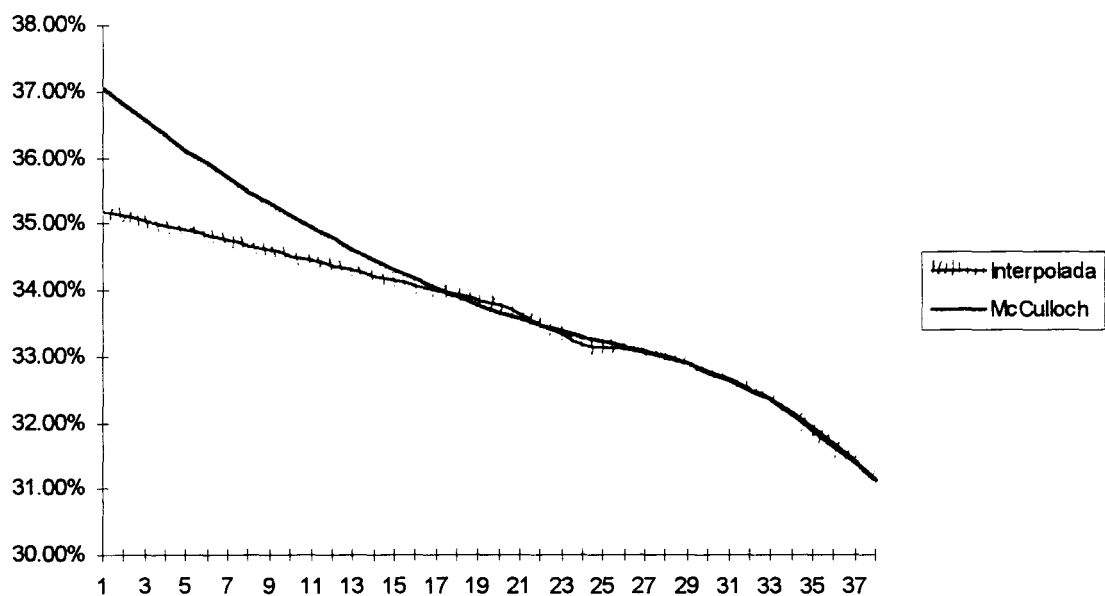


Gráfico 2.16 - Comparação da Estrutura a Termo Gerada por Interpolação Linear e pelo Método de McCulloch.

A diferença entre os dois métodos é muito pequena quando comparamos o preço gerado mas, comparando-se as taxas, as diferenças são razoáveis, principalmente nos primeiros dias. Em compensação, a estrutura a termo gerada pelo *cubic spline* é mais suave.

Estrutura a Termo para os Títulos Públicos

Um exercício interessante é desenhar a estrutura a termo de cada dia ao longo de um período grande. No gráfico 2.17 e 2.18, temos um desenho tridimensional para a estrutura a termo dos títulos do governo, com base no método de interpolação linear. Os gráficos são do primeiro e segundo semestre de 1995, respectivamente. Nota-se que no primeiro semestre, o nível das curvas varia muito e no fim do segundo semestre, as curvas se estabilizam num patamar em torno de 35% ao ano (contínuo), havendo inclusive um alongamento dos prazos.

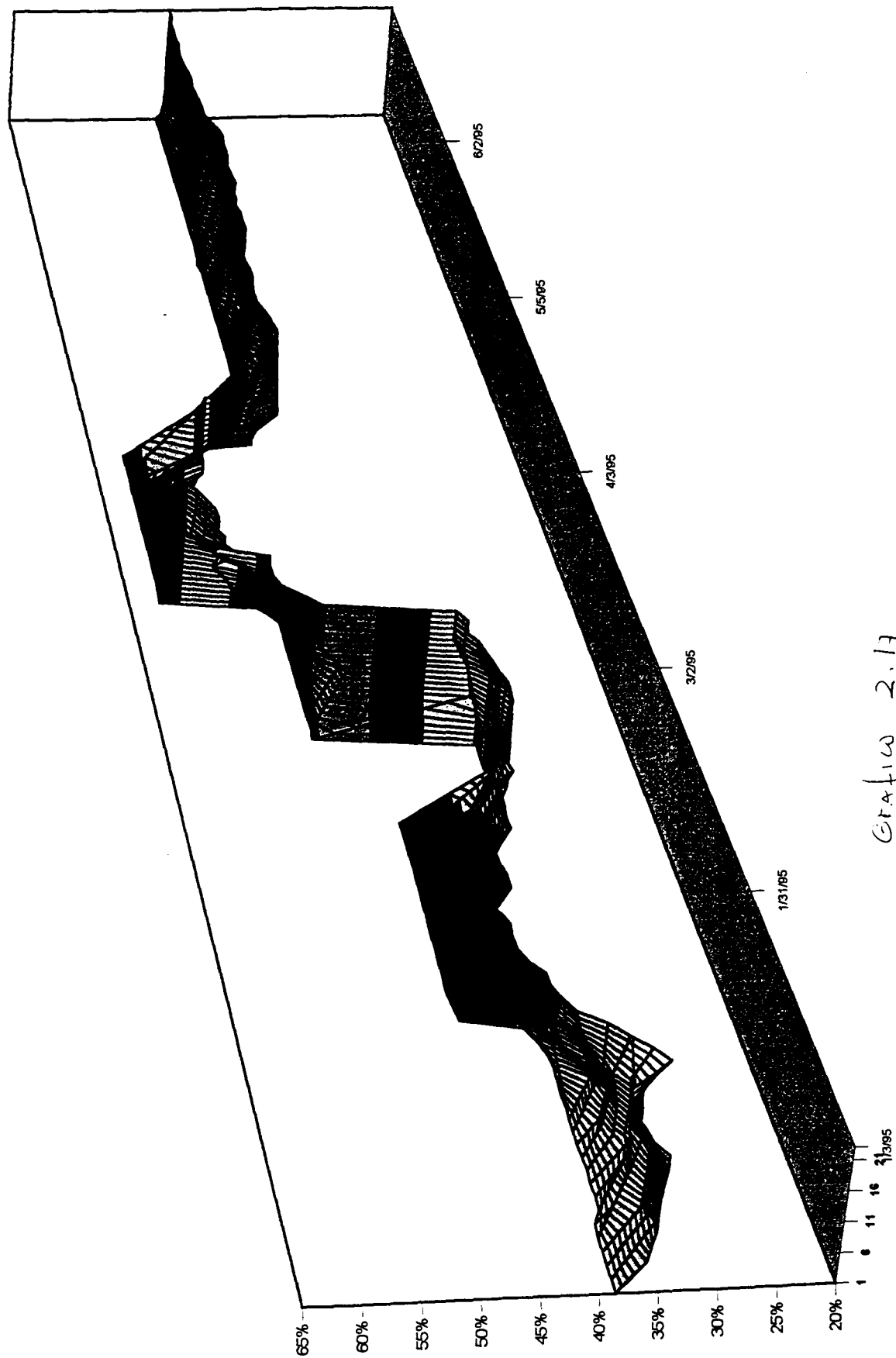


Grafico 2.17

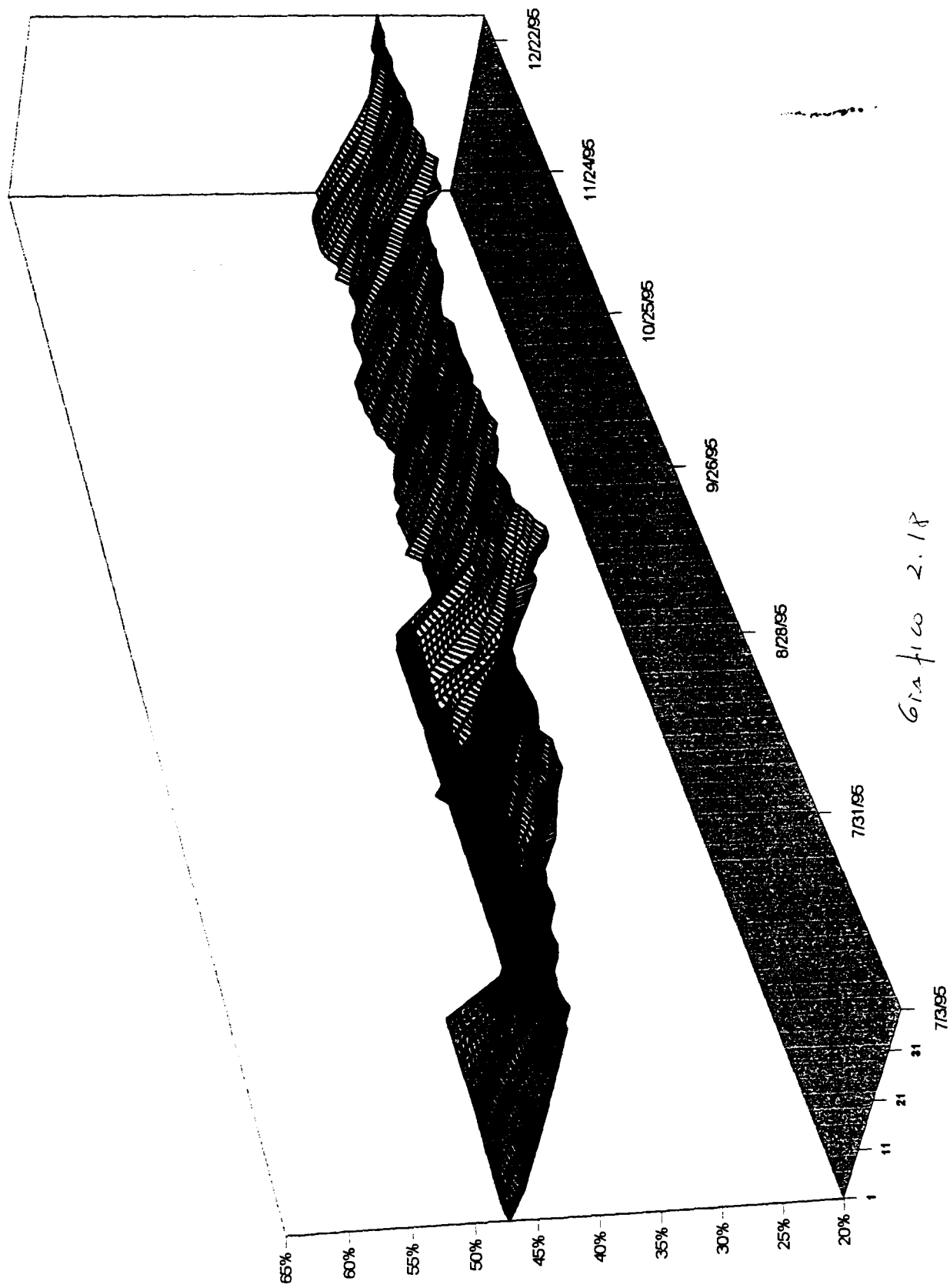


Gráfico 2.18

Para visualizar melhor a estrutura a termo dentro do mês, temos no gráfico 2.19, abaixo, a estrutura a termo para títulos públicos dos meses de outubro e novembro de 1995 (escolhidos arbitrariamente). Verifica-se um formato de taxa descendente ao longo de todo o período.

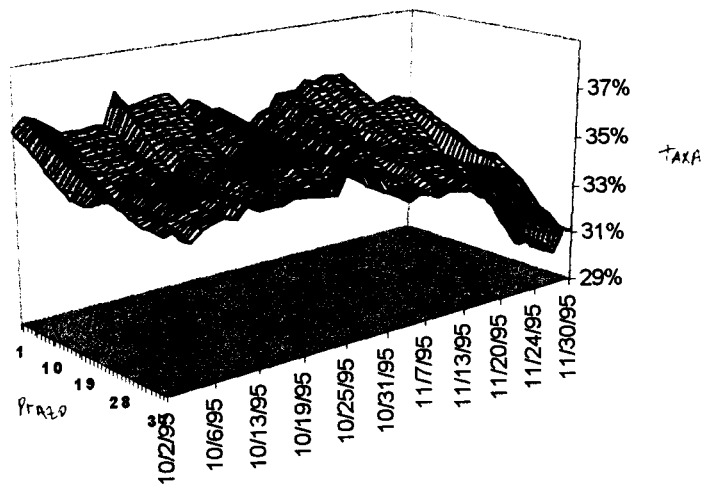


Gráfico 2.19 - Estrutura a Termo dos Títulos Públicos para Outubro e Novembro de 1995 usando Interpolação Linear.

Para comparar, temos o gráfico 2.20 feito com os mesmos dados, mas modelados com cubic spline. Verifica-se um formato muito semelhante, porém mais suave, como era de se esperar.

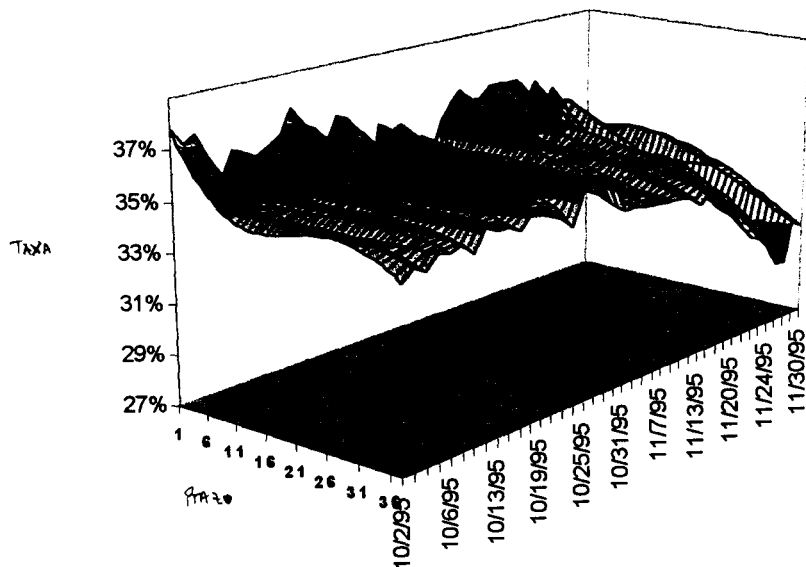


Gráfico 2.20 - Estrutura a Termo dos Títulos Públicos para Outubro e Novembro de 1995 usando Cubic Spline.

Para ver mais precisamente, tomamos um conjunto de quatro dias de novembro (também escolhidos arbitrariamente). Verifica-se no gráfico 2.21, uma quebra na suavidade das curvas quando nos aproximamos de 20 dias úteis, que coincide com o início do próximo mês.

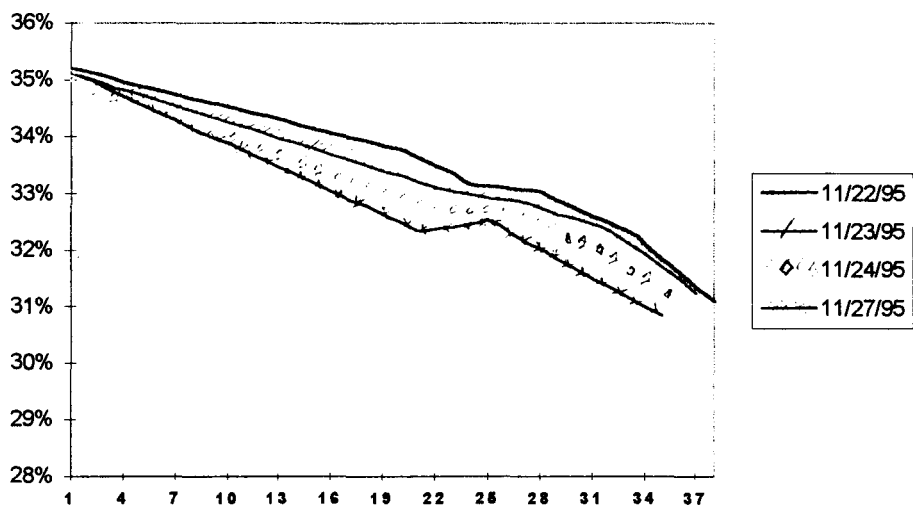


Gráfico 2.21 - Estrutura a Termo dos Títulos Públicos com Interpolação Linear

Novamente vamos comparar os dois procedimentos de ajuste para a estrutura a termo. No gráfico 2.22, temos os mesmos dados usados no gráfico 2.21, e fizemos o *cubic spline* com três nós, sendo o nó intermediário no décimo-quinto dia. O resultado são curvas suaves, mas com valores razoavelmente diferentes daqueles obtidos na interpolação linear, inclusive para a primeira taxa. Para ilustrar um pouco mais o comportamento da estrutura a termo, temos no gráfico 2.23 a estrutura a termo de diversos dias ao longo do ano de 1995. Verifica-se um alongamento do prazo para vencimento dos títulos. Também verifica-se formatos levemente crescentes e decrescentes.

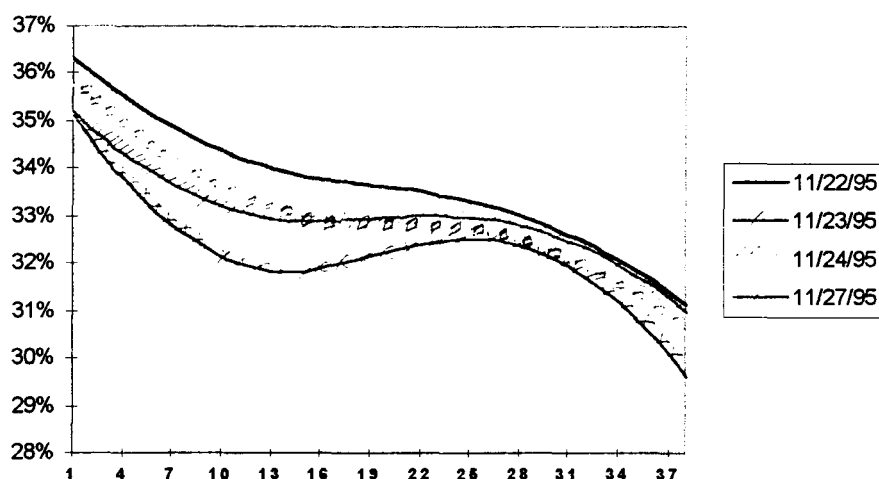


Gráfico 2.21 - Estrutura a termo dos Títulos Públicos com Cubic Spline.

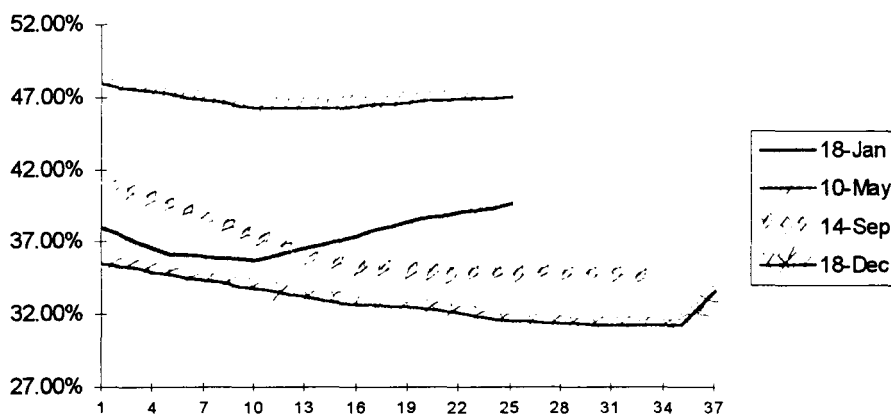


Gráfico 2.23 - Estrutura a Termo dos Títulos Públicos ao Longo do Ano

Estrutura a Termo dos Títulos Privados

Seguindo o mesmo procedimento adotado para títulos públicos, temos a seguir alguns gráficos com a estrutura a termo dos títulos privados. No gráfico 2.24, temos o desenho da estrutura a termo para os meses de outubro e novembro de 1995, usando interpolação linear. No gráfico 2.25, usamos os mesmos dados e *cubic spline* para desenhar a estrutura a termo. Comparando-se com os títulos públicos, o prazo dos títulos privados é maior e, nesse caso, ele vem dos contratos futuros de CDI. O formato das curvas é bem

semelhante e, no caso do cubic spline, temos algumas taxas muito baixas no início e altas no final. Novamente utilizamos apenas três, sendo o nó intermediário no prazo de 15 dias.

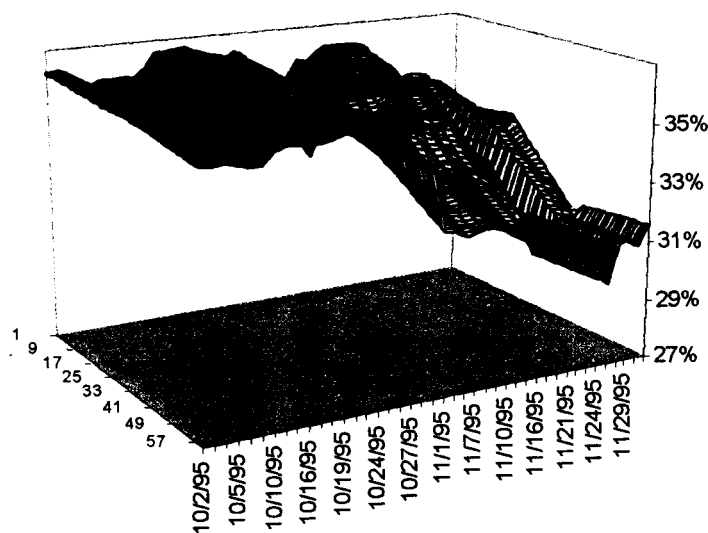


Gráfico 2.24 - Estrutura a Termo da Taxa de Juro dos Títulos Privados para Outubro e Novembro de 1995 usando Interpolação Linear.

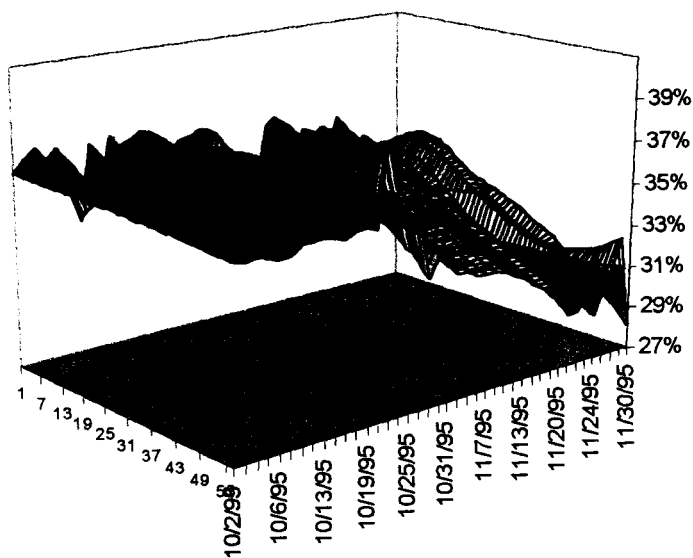


Gráfico 2.25 - Estrutura a Termo da Taxa de Juro dos Títulos Privados para Outubro e Novembro de 1995 usando Cubic Spline.

Para ilustrar melhor, temos nos gráficos 2.26 e 2.27 um conjunto de quatro escolhidos arbitrariamente. No gráfico 2.26, verifica-se um pequeno ajuste nas curvas no prazo de aproximadamente 22 dias e também com 42 dias. A razão é novamente a mudança de mês, que altera o nível da taxa de juro esperada. No gráfico 2.27, verifica-se que o *cubic spline* distorce razoavelmente as taxas do dia 23/11 e 27/11. A razão é que são exatamente essas curvas que apresentam maiores variações, conforme se verifica no gráfico 2.26. É importante lembrar que o *cubic spline* ajusta a função desconto e não as taxas.

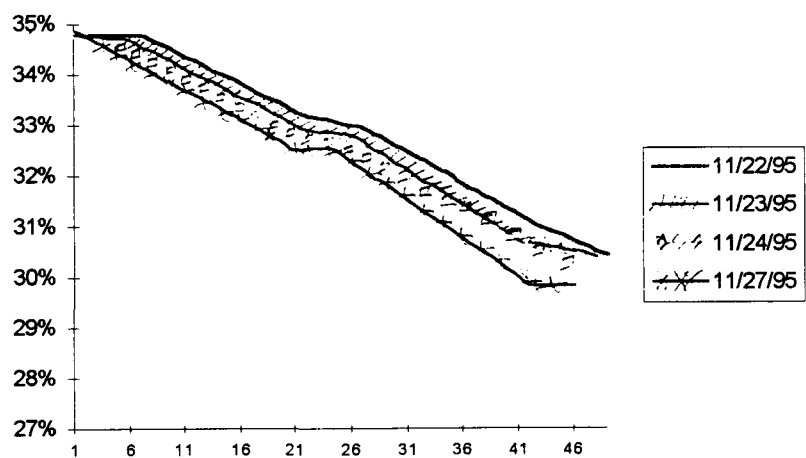


Gráfico 2.26 - Estrutura a Termo para Títulos Privados com Interpolação Linear

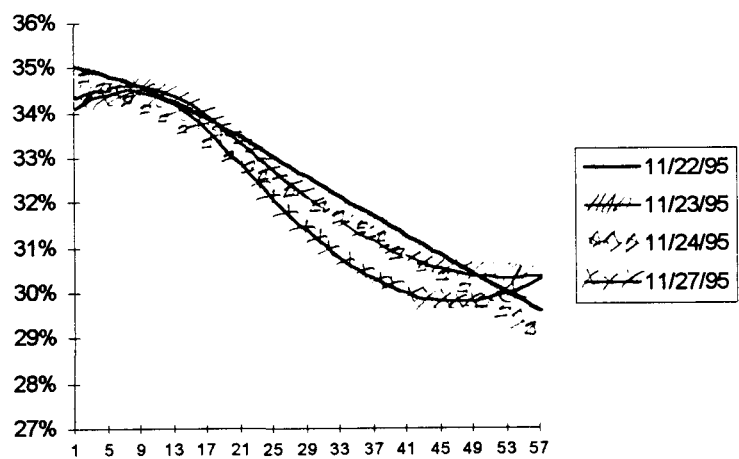


Gráfico 2.27 - Estrutura a Termo para Títulos Privados usando Cubic Spline.

No gráfico 2.28, redesenhamos a estrutura a termo usando cubic spline com o nó intermediário no final do primeiro mês, de modo a coincidir o nó com a virada do mês. O resultado foi uma curva ainda mais distorcida.

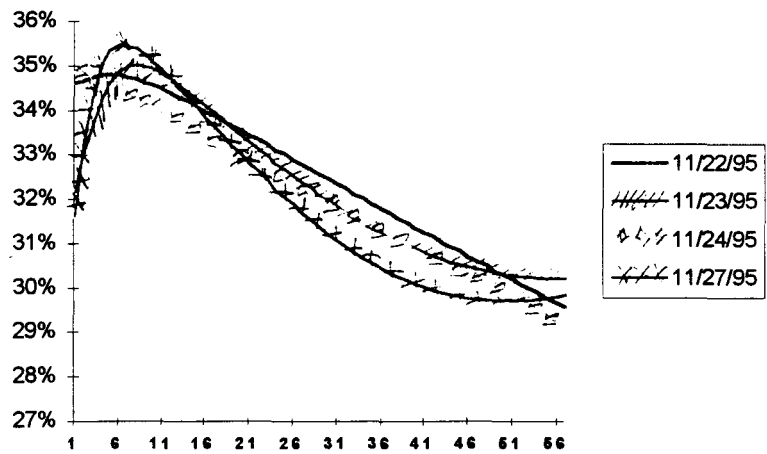


Gráfico 2.28 - Estrutura a Termo para Títulos Privados usando Cubic Spline e um único Knot no fim do primeiro mês.

Combinação da Estrutura a Termo dos Títulos Públicos com a dos Títulos Privados

Os títulos públicos e privados, em geral, tem data de vencimento diferentes. Sendo assim, a combinação dos dois pode adicionar informação ao formato da estrutura a termo corrente. No gráfico 2.29, temos essas duas curvas para o dia 22/11, de onde se verifica que os títulos privados tem prazo maior e formato ligeiramente diferente. Também a taxa do primeiro dia é diferente. Essas diferenças no formato poderiam se traduzir em ganho extraordinário, se existissem títulos para todos os dias: públicos e privados. Ou essas diferenças aparecem porque o formato gerado pela interpolação linear, separadamente em cada curva, não corresponde à estrutura a termo esperada , uma vez que existem poucos vencimentos disponíveis.

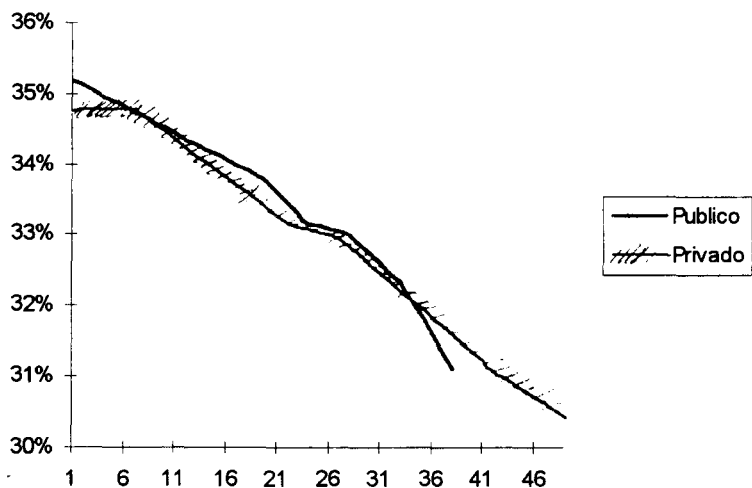


Gráfico 2.29 - Estrutura a Termo para Títulos Públicos e Privados para o dia 22/11/95 usando Interpolação Linear.

Para combinar títulos com qualidade de crédito diferente, usamos o resultado da seção 1 que mostra que essa diferença não é significativa quando se compara o mercado interbancário (CDI) com o mercado de taxas para títulos públicos. Também mostramos que a taxa do CDI em t é o valor esperado para a taxa SELIC em $t+1$. Sendo assim, ajustamos todas as taxas de títulos privados pela taxa SELIC do dia, de modo que a estrutura a termo dos títulos privados ficou com um dia a mais e comparável com a dos títulos públicos. A taxa dos títulos privados foi modificada segundo a seguinte fórmula:

$$r_{t+i} = \frac{(t+i)r_{t+i} + r_0}{t+i+1} \quad (2.17)$$

onde r_0 é a taxa SELIC do dia.

No gráfico 2.30, temos essas curvas desenhadas seguindo o procedimento de ajuste para os títulos privados. O formato delas fica um pouco mais complexo e continua com uma grande inflexão nas mudanças de mês.

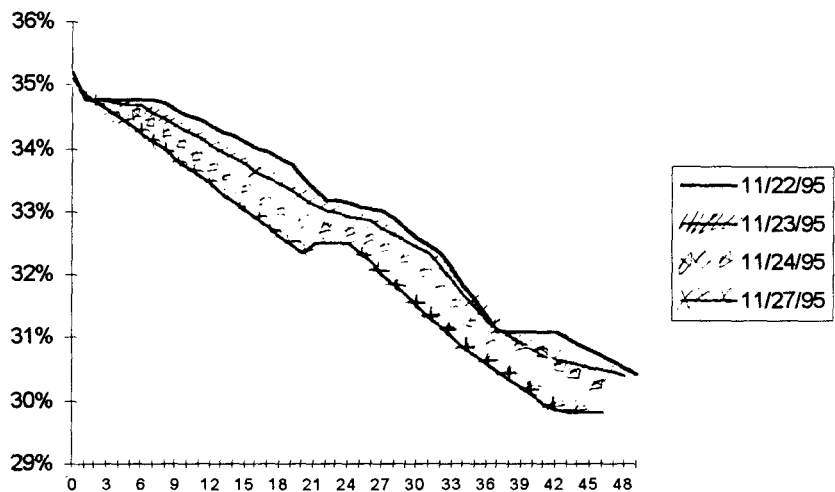


Gráfico 2.30 - Estrutura a Termo dos Títulos Públicos e Privados com Interpolação Linear e Ajuste das Taxas dos Títulos Privados pela Taxa Selic.

A estrutura a termo com cubic spline e nó intermediário na virada do mês, está no gráfico 2.31. Novamente ela apresenta um formato muito suave mas com taxas bastante diferentes das que de fato ocorreram.

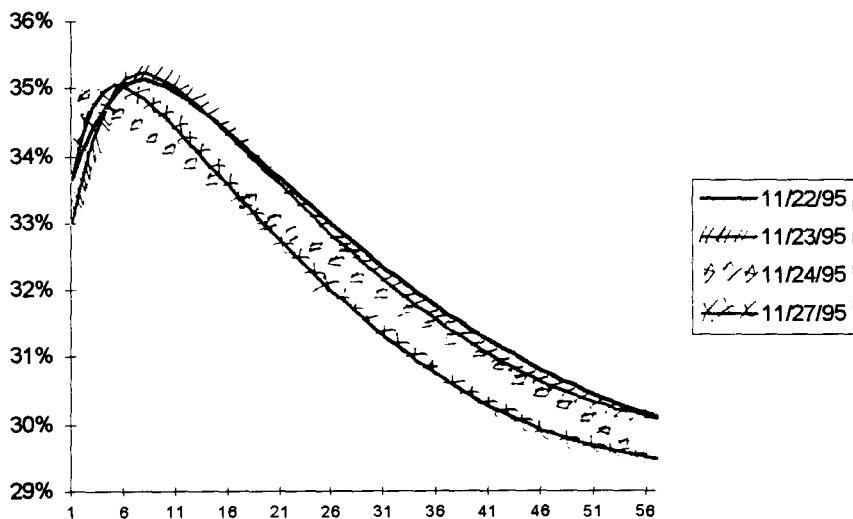


Gráfico 2.31 - Estrutura a Termo dos Títulos Públicos e Privados com Cubic Spline e Ajuste das Taxas dos Títulos Privados pela Taxa Selic

No gráfico 2.32 temos o cubic spline com cinco nós, sendo os três intermediários no final de cada mês. Novamente a estrutura gerada tem diferenças razoáveis para a estrutura a termo calculada por interpolação linear.

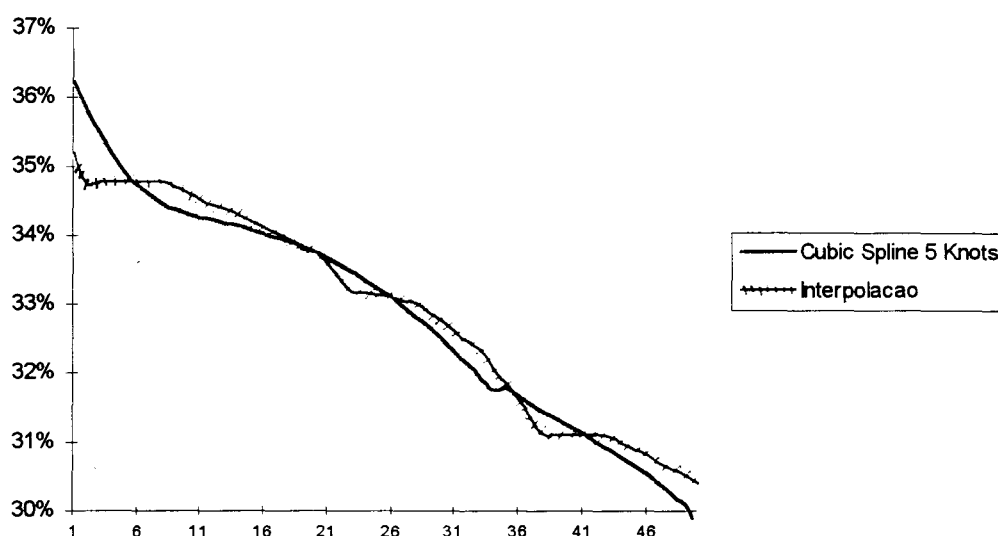


Gráfico 2.32 - Estrutura a Termo do dia 22/11/95, com Títulos Públicos e Privados.

A estrutura a termo da taxa de juro brasileira tem um formato muito irregular, além de ser de prazo extremamente curto, apenas dois meses, enquanto nos EUA a estrutura a termo nominal tem 30 anos. Outro fator que afeta a estrutura a termo é a mudança de mês. A utilização de procedimentos mais sofisticados para se ajustar uma curva suave às taxas de juros disponíveis, fica muito dificultada pela irregularidade da estrutura a termo. Do ponto vista prático, a curva gerada que não passa por todos os pontos disponíveis, deve apresentar taxas diferentes das correntemente transacionadas no mercado.

2.6) Prêmio de Risco da Estrutura a Termo

Seguindo o artigo de Engle, Lilien e Robins (1987), estudamos a seguir o comportamento do prêmio de risco implícito na estrutura a termo da taxa de juro nominal, com base num modelo *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity in Mean* (ARCH-M) introduzido por esses autores.

Definimos o prêmio de risco como a diferença entre a taxa embutida num contrato futuro de CDI, com prazo de um mês, e a taxa diária do CDI acumulada nesse mesmo prazo.

$$premio = \frac{1}{PF} - \prod_{j=t}^{t+N-1} (1+i_j) \quad (2.18)$$

onde: PF é o preço do contrato futuro com vencimento mais próximo ou data N .

i_j é a taxa diária e efetiva do CDI.

No gráfico temos uma série calculada para a equação acima, para o período entre janeiro de 1993 e agosto de 1994.

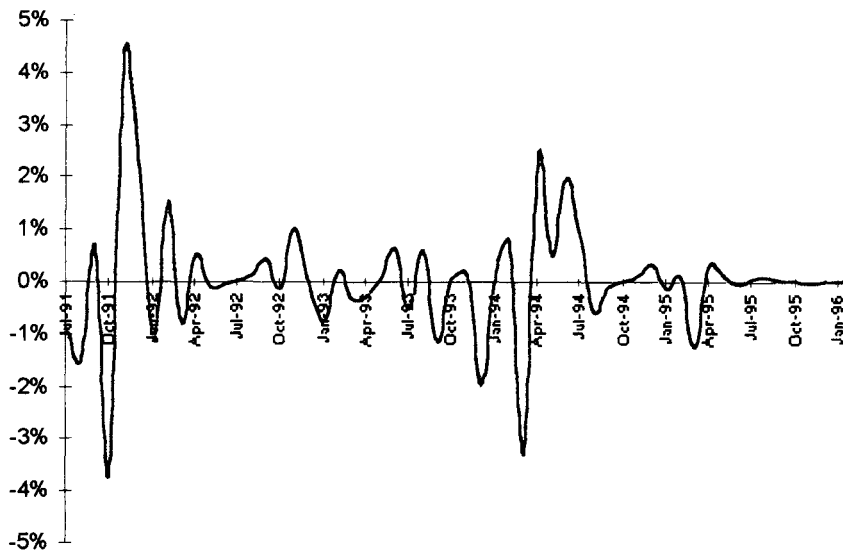


Gráfico 2.33 - Comportamento do Prêmio de Risco Implícito no Mercado Futuro de Juro.

Regredindo o prêmio com um mês e dois meses de prazo (prêmio1 e prêmio2) contra uma constante obtivemos o seguinte resultado:

$$premio1 = 0.000165 + e_{(0.10)}$$

$$L = 168.28$$

$$premio2 = -0.00057 + e_{(-0.07)}$$

$$L = 77.25$$

As regressões acima indicam um retorno positivo médio de +0,016% ao mês para o prêmio de um mês e de -0,028% ao mês para o prêmio bimestral. Em ambos os casos os coeficientes não são significativos devido à alta volatilidade. Permitindo distúrbios ARCH de primeira ordem obtivemos:

$$premio1_t = \frac{-0.00188}{(-2.60)} + e_t \quad \therefore \quad h_t^2 = \frac{0.000024}{(3.28)} + \frac{1.69}{(3.20)} \varepsilon_{t-1}^2$$

$$L = 181.21$$

$$premio2_t = \frac{-0.0049}{(-2.89)} + e_t \quad \therefore \quad h_t^2 = \frac{0.000215}{(2.76)} + \frac{1.94}{(4.57)} \varepsilon_{t-1}^2$$

$$L = 104.21$$

O efeito ARCH é muito forte, todos os coeficientes são significativos e o prêmio de risco é negativo para os dois prazos trabalhados. A estatística L tem distribuição χ^2 sob a hipótese nula de que não existe efeito ARCH. Aplicando o modelo ARCH-M, com distúrbio ARCH de primeira ordem e introduzindo o desvio padrão como variável explicativa do prêmio, temos:

$$premio1_t = \frac{-0.0397}{(-0.85)} + \frac{3.98}{(0.83)} h_t + e_t \quad \therefore \quad h_t^2 = \frac{0.000088}{(4.74)} - \frac{0.1278}{(0.62)} \varepsilon_{t-1}^2$$

$$L = 179.08$$

$$premio2_t = \frac{+0.000175}{(0.056)} - \frac{0.15}{(-1.49)} h_t + e_t \quad \therefore \quad h_t^2 = \frac{0.00017}{(3.15)} + \frac{1.99}{(3.98)} \varepsilon_{t-1}^2$$

$$L = 106.65$$

Esses resultados não indicam que o prêmio de risco varia com o tempo (porque o coeficiente de h_t não é significativo) como é o resultado de Engle et al. Pelo gráfico 2.34 verifica-se que o prêmio de risco para o prazo de dois meses é muito mais volátil do que o de um mês.

Não houve negócio para o contrato futuro com vencimento em dois meses, nos meses de maio, junho e julho de 1994, devido à proximidade do plano real.

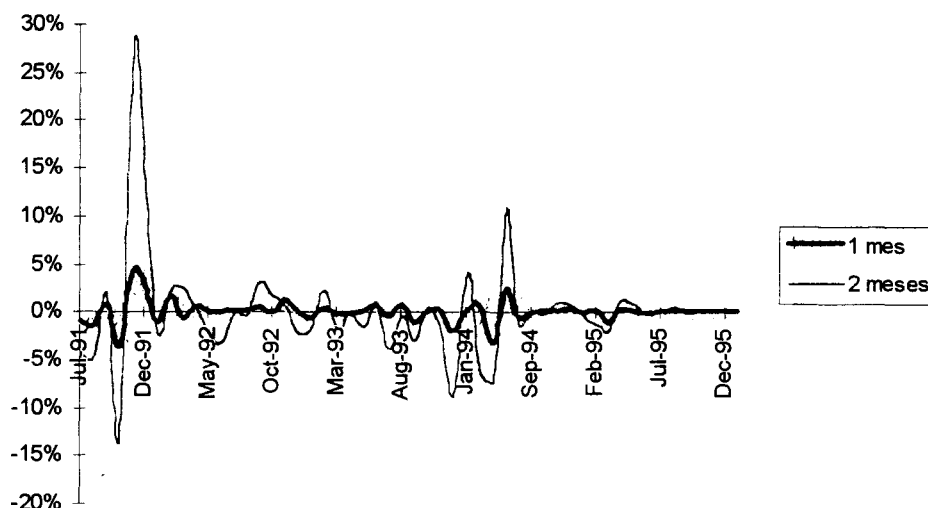


Gráfico 2.34 - Prêmio de Risco para 1 mês versus 2 Meses.

2.7) Taxa Real e Inflação

Nessa seção estudamos o comportamento da taxa real de juro realizada. Usamos como medida de inflação o Índice Geral de Preços-mercado (IGPm), da Fundação Getúlio Vargas, por ser largamente utilizado em títulos indexados à inflação. Até recentemente (junho de 1994 com o Plano Real), o governo brasileiro emitia frequentemente títulos indexados ao IGPm. No mercado ainda existem *SWAPs* e debêntures indexados ao IGPm. A liquidez desses títulos era muito grande até junho de 1994, mas atualmente existem apenas negócios esparsos.

Outros países como: Inglaterra, Austrália, Canadá, Israel e Suécia também possuem títulos do governo indexados à inflação. No caso inglês eles representavam em 1994, 13% do valor de mercado dos títulos em mercado. Brown e Schaefer (1996) avaliam a estrutura a termo da taxa de juro real inglesa, com base nos títulos indexados à inflação. Eles obtêm que essa estrutura tem uma grande variedade de formatos e a taxa real de longo prazo é bastante estável. Eles também avaliam como essa estrutura se ajusta a um modelo do tipo C.I.R. (1985) e mostram que a volatilidade gerada por esse modelo se ajusta à volatilidade observada para esse mercado, exceto para 1993.

No caso brasileiro, a estrutura a termo real é de difícil observação devido a pouca liquidez dos títulos indexados à inflação . Assim sendo, estudaremos apenas o ajuste da taxa real realizada a um modelo de um fator.

O Gráfico 2.35 mostra o comportamento da taxa de juro real realizada (ex-post) da taxa mensal de juro paga pelos CDBs. Os dados foram retirados do Boletim do BACEN⁴, para junho de 1989 até janeiro de 1996 e descontados pela taxa de inflação calculada pelo IGPM. Em junho e agosto de 1994 dois IGPMs foram divulgados pela Fundação Getúlio Vargas, segundo determinação do governo. Ainda segundo essa determinação, o IGPM com menor taxa de inflação foi o utilizado para corrigir os contratos financeiros. Assim sendo, utilizamos esse índice para o estudo a seguir.

No gráfico 2.35 verifica-se uma taxa bastante negativa em março de 1990. Isso coincide com o plano econômico do governo Collor, que diminuiu a taxa de juro enquanto o índice IGPM ainda continha parte da inflação passada, porque há uma defasagem entre a coleta e a divulgação do índice. Novamente em fevereiro de 1991 foi estabelecido um plano econômico, com ampla política de rendas, que ocasionou a queda na taxa de juro, mas não foi imediatamente seguida pelo índice devido ao efeito da defasagem.

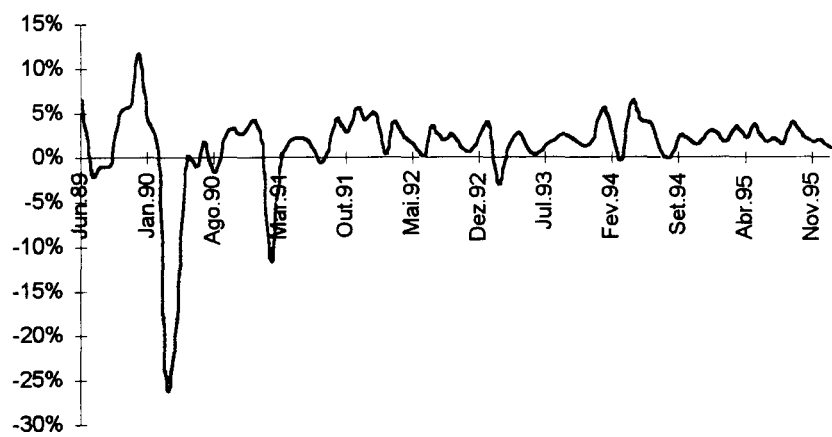


Gráfico 2.35 - Comportamento das Taxa Real de Juro Realizada Descontada pelo IGPM.

⁴ No boletim do Banco Central essa taxa é chamada CDB preset, e está disponível entre dezembro de 1991 até hoje, em série mensal. Para o período anterior a dezembro de 1991 tomamos a taxa do overnight acumulada como proxy.

Na tabela 2.7 temos as autocorrelações da taxa nominal de juro que cai ciclicamente nas primeiras cinco autocorrelações e são significativas pelo teste-Q (esta estatística tem distribuição χ^2 sob a hipótese nula de que o modelo é corretamente especificado). A variação da taxa apresenta uma autocorrelação significativamente negativa para os quatro primeiros termos.

Variável	Obs.	Média	Desvio-padrão	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
r_t	80	0.01269	0.04655	0.437 (15.7)	0.0335 (15.8)	0.171 (18.2)	-0.176 (20.9)	-0.088 (21.5)
$r_t - r_{t-1}$	79	-0.000369	0.04958	-0.141 (1.61)	-0.177 (4.19)	-0.168 (6.54)	-0.0809 (7.09)	0.0326 (7.18)

Tabela 2.7 - Estatísticas Básicas da Taxa Real Realizada.

Na tabela 2.8 temos o resultado da aplicação do GMM sobre os dados acima. Os modelos irrestrito, CIR SR, CIR VR e CEV não puderam ser estimados porque a taxa real assume valores negativos, logo, não é possível obter resultados no âmbito dos números reais. Pelo teste χ^2 eliminamos os modelos de Dothan e MBG. Os modelos de Merton e Vasicek também são eliminados por não apresentarem um coeficiente α significativo. Assim, sobra apenas o modelo BS que indica reversão à média para a taxa real e dependência da volatilidade para o nível da taxa.

Modelo	α	β	σ	γ	Teste χ^2 (p - value)	g.l.
1.Merton	-0.00627 (-1.29)	0	0.0453 (5.34)	0	5.54 (0.0626)	2
2.Vasicek	0.01047 (1.87)	-0.6426 (-3.61)	0.0353 (2.83)	0	4.07 (0.0435)	1
4.Dothan	0	0	0.09777 (7.98)	1	11.97 (0.0075)	3
5.M.B.G.	0	-0.3537 (-3.03)	-0.5574 (-2.92)	1	11.69 (0,0029)	2
6.B.S.	0.0139 (3.16)	-0.6492 (-3.46)	0.3793 (4.29)	1	2.49 (0,114)	1

Tabela 2.8 - Estimativas dos Modelos de um Fator para a Taxa Real de Juro.

No gráfico 2.36 temos o comportamento da volatilidade prevista pelo modelo BS e a volatilidade realizada. Também recalculando a equação 2.4a com os dados da taxa real obtivemos um R_2 igual 0,15.

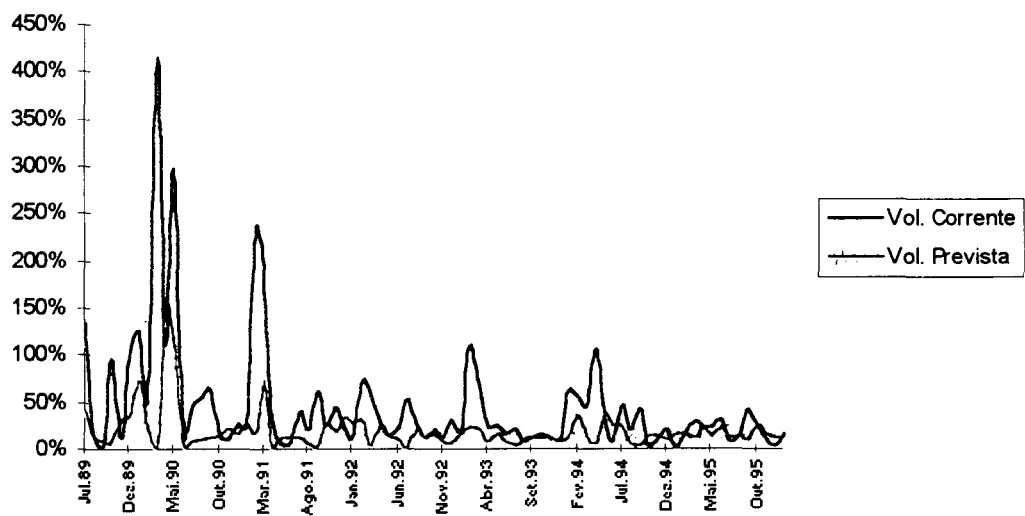


Gráfico 2.36 - Série de Volatilidade da Taxa Real Realizada versus Volatilidade Prevista pelo Modelo CEV.

Capítulo 2

Avaliação do Contrato Futuro e de Opção de Taxa de Juro de Um Dia Negociado no Brasil

1) Contrato Futuro de Taxa de Juro de Um Dia (DI)

O contrato futuro de taxa de juro de um dia, negociado na BMF (FUTURO DI, apêndice C) é diferente dos contratos futuros disponíveis porque negocia a taxa de juro por um dia, acumulada entre a data de aquisição do contrato e seu vencimento, enquanto a maioria dos contratos futuros de taxa de juro negocia parte da estrutura a termo futuro. Esse contrato começou a ser negociado em 4/7/94 tendo havido 93.114 negócios em 1994 e 176.667 em 1995 que representaram 27,6 milhões de contratos em 1994 e 80,5 em 1995. Atualmente, contratos futuros de DI tem negociação expressiva para um prazo de até três meses. Assim sendo, precisamos de estimativas para o comportamento da taxa de juro nominal nesse período.

1.1) Relação entre um Contrato Prefixado e o Contrato Futuro de DI

Seguindo formulação apresentada por Varga (1992), um contrato futuro de DI adquirido pelo preço de fechamento¹, paga diariamente :

$$F_{t+1} - F_t (1 + i_t) \quad (2.1)$$

onde: F_t = preço de fechamento do contrato futuro no dia t .

i_t = taxa de juro efetiva média negociada no mercado de CDI do dia t .

¹ Se o contrato for adquirido durante o dia a um preço P_0 diferente do preço de fechamento, deve se adicionar a (2.1) a quantia $F_t - P_0$.

No dia seguinte², repete-se o negócio da equação (2.1) e a quantia acumulada até então deve incluir o investimento do pagamento anterior. Acumulando e investindo todos esses pagamentos até a data de vencimento do contrato futuro, que chamaremos T , tem-se o resultado abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \left[F_{t+1} - F_t(1+i_t) \right] \prod_{j=t+1}^T (1+i_j) \\
 & \left[F_{t+2} - F_{t+1}(1+i_{t+1}) \right] \prod_{j=t+2}^T (1+i_j) \\
 & \vdots \\
 & \frac{\left[F_T - F_{T-1}(1+i_{T-1}) \right] (1+i_{T-1})}{F_T - F_t \prod_{j=t}^{T-1} (1+i_j)}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

A quantia total gerada por um contrato futuro de DI é dada pelo resultado de (2.2), onde F_t é o valor final fixo. Para simplificar faremos esse valor igual a 1. Logo, um contrato futuro adquirido na data t gera a seguinte quantia no seu vencimento:

$$1 - F_t \prod_{j=t}^{T-1} (1+i_j) \tag{2.3}$$

Para facilitar as contas, vamos tratar a taxa de juro na sua forma contínua, fazendo:

$$\prod_{j=t}^{T-1} (1+i_j) = e^{\int_t^T r(\tau) d\tau}$$

Substituindo em (2.3) temos:

$$1 - F_t e^{\left(\int_t^T r(\tau) d\tau \right)} \tag{2.4}$$

² De fato, existe uma defasagem de 1 dia útil entre o dia do cálculo de cada pagamento e sua efetivação. Esse problema foi tratado por Feijó (1995) para um caso não estocástico.

Economicamente, o contrato futuro de DI equivale à aquisição de um título prefixado com financiamento diário pela taxa média do CDI. Sendo assim, o preço desse contrato pode e deve ser calculado por arbitragem com o mercado de taxa diária e o mercado prefixado.

A operação de arbitragem consiste em adquirir a seguinte carteira:

- 1) λ contratos futuros
- 2) Um título prefixado com valor final 1, preço $P(t, K)$ e vencimento na data K.
- 3) Financiamento diário da posição acima pela taxa do CDI.

Como não se paga (ou recebe) nada pelos contratos futuros, o valor inicial dessa posição é zero. O valor final é :

$$\begin{aligned}
 &1) \quad \lambda \left[F_T - F_t e^{\int_t^T r(\tau) d\tau} \right] \\
 &2) \quad 1 \\
 &3) \quad \underline{- P(t, K) e^{\int_t^K r(\tau) d\tau}} \\
 &1 - P(t, K) e^{\int_t^K r(\tau) d\tau} + \lambda \left[F_T - F_t e^{\int_t^T r(\tau) d\tau} \right] \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

Se o contrato futuro vence na mesma data que o título prefixado, a solução é trivial e está resolvida abaixo. Se vence antes, devemos assumir algum tipo de comportamento para a taxa de juro e estudamos essa situação no caso 2.

Caso 1) $K = T \Rightarrow F_K = 1$

$$1 - P(t, T) e^{\int_t^T r(\tau) d\tau} + \lambda \left[1 - F_t \exp \int_t^T r(\tau) d\tau \right] =$$

$$(1 + \lambda) - e^{\int_t^T r(\tau) d\tau} \left[P(t, K) + \lambda F_t \right]$$

Para qualquer taxa de juro não haverá oportunidade de ganho sem risco (uma vez que, por hipótese, não foi investido nada), ou oportunidade de arbitragem, se $\lambda = -1$ e $F_t = P(t, K)$. Por isso, temos que o preço do contrato futuro, em condições de não arbitragem, deve ser igual ao preço do contrato prefixado com mesma data de vencimento.

Caso 2) $K < T$

O valor da carteira de arbitragem (C) no instante t é:

$$C(t, r) = -P(t, K, r) + P_{0K} e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} + \lambda \left[P(t, T, r) - F_{0T} e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} \right] \quad (2.5)$$

onde: P_{0K} e F_{0T} são os valores iniciais do título prefixado e do contrato futuro, respectivamente.

O primeiro termo corresponde ao valor do título prefixado; o segundo à aplicação no CDI que é equivalente ao valor inicial do título prefixado. O terceiro termo é o valor do contrato futuro. Pelo caso 1 sabemos que o preço do contrato futuro em qualquer momento, e em condições de não arbitragem, deve ser igual ao preço de um título prefixado com mesma data de vencimento.

A variação instantânea dessa carteira é dada por:

$$dC = -dP(t, K, r) + rP_{0K} e^{\tau} + \lambda \left[dP(t, T, r) - rF_{0T} e^{\tau} \right] \quad (2.6)$$

Estamos desprezando o termo $dr(P_{0K} - \lambda F_{0T})$ porque é relativamente pequeno. Para não haver oportunidade de arbitragem devemos escolher λ tal que o valor esperado de dC seja igual a zero. Para isso precisamos avaliar o comportamento do preço do título. Veremos a seguir duas maneiras de avaliar dP . A primeira num modelo de equilíbrio do tipo Vasicek(1977), Dothan(1978), Richard(1978), Brennan e Schwartz(1979), Langetieg(1980), Cox, Ingersoll e Ross(1985), Longstaff e Schwartz (1992) com um fator

que gera a estrutura a termo a partir de um comportamento dado para a taxa de juro. A segunda num modelo de não arbitragem para a estrutura a termo como em Ho e Lee(1986), BDT (1990)e HJM (1992).

1.2) Relação entre Contrato Futuro e de DI num Modelo de Equilíbrio para a Estrutura a Termo da Taxa de Juro.

Assumiremos que a taxa de juro depende da taxa corrente e segue um processo de Itô.

$$dr = a(r, t) dt + b(r, t) dz \quad (2.7)$$

Com base nisso, o preço de um título com valor final 1, e vencimento na data s ($s > t$) é dado por:

$$P = e^{-\int_t^s r(\tau) d\tau}$$

Pelo lema de Itô, o preço do título acima deve satisfazer a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dP = P \mu(t, T) dt - P \sigma(t, T) dz \quad (2.8)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mu(t, T) &= \frac{1}{P(t, T, r)} \left[\frac{\partial P}{\partial r} + a \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right] \\ \sigma(t, T) &= - \frac{1}{P(t, T, r)} r \frac{\partial P}{\partial r} b \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima em (2.6) temos

$$\begin{aligned} dC &= -u_K P_K dt + \sigma_K P_K dz + r P_{0K} dt + \lambda [u_T P_T dt + \sigma_T P_T dz - r F_{0T} dt] \\ &= (-u_K P_K + r P_{0K} + \lambda u_T P_T - \lambda r F_{0T}) dt + (\sigma_K P_K + \lambda \sigma_T P_T) dz \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde: u_x e σ_x se referem a $u(t, x)$ e $\sigma(t, x)$.

P_x se refere a $P(t, x, r)$

Essa carteira deixa de ter um comportamento aleatório se escolhermos:

$$\lambda = \frac{-\sigma_K P_K}{\sigma_T P_T} \quad (2.10)$$

$$dC = \left(rP_{0K} - u_K P_K - \frac{\sigma_K P_K}{\sigma_T P_T} (u_T P_T - rF_{0T}) \right) dt$$

No caso de um processo de reversão à média para a taxa de juro, podemos ter a seguinte forma funcional:

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz \quad (2.11)$$

Vasicek (1977) mostra que a solução de 2.8 dado 2.11 é:

$$P(t, s, r) = e^{\left[\left(\frac{\gamma - r}{\alpha} - \frac{\rho^2}{4\alpha^3} (3 - e^{-\alpha(s-t)}) \right) (1 - e^{-\alpha(s-t)}) - (s-t) \left(\gamma - \frac{\rho^2}{2\alpha^2} \right) \right]} \quad (2.12)$$

$$\frac{dP(t, s)}{P(t, s)} = r dt - \frac{\rho}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(s-t)}) dz$$

Se r segue o processo de (2.11), então o coeficiente de dt é:

$$rP_{0K} - rP_K - \frac{(1 - e^{-\alpha(K-t)})P_K}{(1 - e^{-\alpha(T-t)})P_T} (rP_T - rF_{0T})$$

Voltando para o instante inicial, quando $t \rightarrow 0$, $P_K = P_{0K}$, ou seja, todo o valor obtido com o título prefixado é investido à taxa contínua r . Para não haver arbitragem, o coeficiente de dt deve ser zero e isto ocorre quando $F_{0T} = P_T$.

O preço do contrato prefixado com vencimento em K , negociado na data t , deve respeitar a estrutura a termo dada pela equação (2.12). Se isso não ocorrer, e $P_{0K} > P(0, K)$, pode-se obter essa diferença fazendo-se :

1) Vender a seguinte quantidade de contratos futuros;

$$\lambda = \frac{(1 - e^{-\alpha(K-t)})P(0, K)}{(1 - e^{-\alpha(T-t)})F(0, T)} \quad (2.13)$$

2) Comprar o título prefixado ao preço $P(0, K)$

3) Tomar emprestado P_{0K} à taxa do CDI.

Os negócios 2) e 3) devem proporcionar um lucro igual a $P_{0K} - P(0, K)$ sem nenhum outro desembolso até a data de vencimento K . Se $P_{0K} < P(0, K)$ basta fazer o negócio inverso. Portanto, para ambos os casos temos uma arbitragem clássica.

Caso 3) $K > T$ vamos assumir que existam dois contratos futuros $F(t, T_1)$ e $F(t, T_2)$ com $T_1 < T_2$ e $T_1 < K < T_2$. Nesse caso, pode ocorrer arbitragem entre esses contratos se $F(t, T_1) \neq P(t, T_1)$ ou se o preço do título prefixado for diferente do preço dado pela estrutura a termo. Se for esse o caso, faz-se a arbitragem com o contrato futuro de vencimento posterior (T_2), já que o primeiro contrato não permite eliminar a parte aleatória entre o período T_1 e K .

1.3) Relação entre Contrato Futuro e de DI num Modelo de Não Arbitragem para a Estrutura a Termo.

Uma outra abordagem para avaliar instrumentos derivativos de taxa de juro, toma a estrutura a termo como dada ao invés de gerar a estrutura como na equação 2.12. Tomamos o procedimento mais simples que assume que a volatilidade das taxas a termo é constante e apenas um fator explica seus movimentos. Essa formulação é baseada em Ho e Lee (1986) no caso discreto e HJM (1992) no caso contínuo. O processo estocástico para as taxas a termo é dado por:

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2} \right) + \sigma \tilde{W}(t) \quad (2.14)$$

A dinâmica do preço dos títulos é obtida a partir da estrutura a termo corrente e é escrita como (veja HJM (1992) pg 91):

$$P(t, T) = \left[\frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right] e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) T t (T-t) - \sigma (T-t) \tilde{W}(t)} \quad (2.15)$$

Nesse caso a estrutura a termo não depende mais da taxa de juro corrente, mas de toda a estrutura a termo corrente. Choques aleatórios afetam toda a estrutura de acordo com a volatilidade e o prazo. Fazendo

$$dx = -\frac{\sigma^2}{2} T \left(T - \frac{t}{2} \right) dt - \sigma (T-t) dW(t) \quad (2.16)$$

Aplicando o lema de Itô sobre 2.15 obtemos

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = - \left[\frac{dP(0, t)}{P(0, t)} + \frac{\sigma^2 t}{4} (3T - 2t) \right] dt - \sigma (T-t) d\tilde{W} \quad (2.17)$$

Quando $t \rightarrow 0$ o primeiro termo do lado direito de 2.17 é a própria taxa de juros corrente e instantânea que chamamos de r . Assim 2.17 pode ser reescrita como:

$$\frac{dP(0, T)}{P(0, T)} = r dt - \sigma T d\tilde{W} \quad (2.18)$$

Reproduzindo novamente 2.6, temos:

$$dC = (-u_K P_K + r P_{0K} + \lambda u_T P_T - \lambda r F_{0T}) dt + (\sigma_K P_K + \lambda \sigma_T P_T) d\tilde{W} \quad (2.19)$$

onde: $u_K = r$
 $\sigma_K = -\sigma K$

Escolhendo a mesma quantidade de contratos futuros de 2.10 e substituindo em 2.19 acima, temos que a carteira de contrato futuro e prefixado varia no momento $t \rightarrow 0$, segundo:

$$dC = \left[P_{0K} (r - u_k) - \frac{\sigma_K P_{0K}}{\sigma_T F_{0T}} F_{0T} (u_T - r) \right] dt \quad (2.20)$$

Com um pouco mais de substituições temos:

$$dC = \left[P_{0K} (r - r) - \frac{-\sigma K P_{0K}}{-\sigma T F_{0T}} F_{0T} (r - r) \right] dt = 0 \quad (2.21)$$

A quantidade ótima de contratos é então

$$\lambda = K P_{0K} / T F_{0T} \quad (2.22)$$

É interessante notar que a solução desse problema de arbitragem não depende da volatilidade da estrutura a termo, porque os movimentos aleatórios da estrutura a termo ocorrem simultaneamente no contrato futuro e no título prefixado, sendo ambos eliminados por 2.22.

1.4) Teste do Mercado Futuro de DI.

Para testarmos a eficiência dos modelos no mercado futuro de DI, aplicamos os modelos acima sobre uma amostra dos meses de outubro e novembro de 1995. Calculamos a função lucro, definida como o resultado final de uma arbitragem entre um contrato prefixado e um com taxa flutuante segundo o CDI diário. Cada negócio tem 10 e 20 dias úteis de prazo e a cada dia é iniciado um novo negócio. Calculamos a função lucro com e sem *hedge*.

A função lucro é escrita como:

$$L = 1 - P_{0K} \prod_{j=1}^{K-1} (1 + i_j) + \lambda \left[F_{KT} - F_{0T} \prod_{j=1}^{K-1} (1 + i_j) \right] \quad (2.23)$$

onde F_{KT} é o preço na data K do contrato futuro com vencimento em T .

No caso sem *hedge* tomamos $\lambda=0$ e no caso com *hedge* tomamos a equação 2.11 ou 2.22. Para esses casos calculamos o valor final da equação 2.23, para negócios com prazo de 10 e 20 dias úteis iniciando-se em 2/10/95 e terminando em 29/12/95 e 21/12/95 respectivamente.

Primeiramente testamos o modelo de Vasicek estendido por Hull-White (1990). Para isso calculamos o valor do parâmetro a (que corresponde à velocidade de retorno à média), seguindo procedimento sugerido por Hull-White. Esses autores ajustam o modelo para a estrutura a termo corrente para o procedimento mais simples, onde os parâmetros a e σ são supostos constantes e calculados com base na estrutura a termo corrente. O parâmetro a é muito sensível à taxa de curto prazo, mesmo assim calculamos seu valor com base na taxa diária do CDI e SELIC. A volatilidade anual dessas taxas foram de 5% e 6,96% respectivamente. Tomamos como amostra o período de outubro e novembro de 1995. Os valores do parâmetro a foram de -2.33 e 4.18 para o CDI e SELIC respectivamente. O parâmetro a , embora varie bastante, tem pouco efeito sobre o resultado da função lucro, conforme se verifica no resultado apresentado na tabela 2.1.

Numero de observacoes = 47		Intervalo com 95% prob. para a media		
Parametro a	Media	Desvio-padrao	minimo	maximo
sem hedge	(0.0000331)	0.0174%	(0.0000843)	0.0000181
-2.33 com hedge	(0.0000518)	0.0081%	(0.0000758)	(0.0000278)
1.06 com hedge	(0.0000543)	0.0082%	(0.0000784)	(0.0000301)
4.18 com hedge	(0.0000567)	0.0084%	(0.0000814)	(0.0000320)

Tabela 2.1 - Teste do Modelo HW/Vasicek com Negócios de 10 dias úteis.

Na tabela 2.2 temos o resultado para negócios com prazo de 20 dias úteis.

Numero de observacoes = 42		Intervalo com 95% prob. para a media		
Parametro a	Media	Desvio-padrao	minimo	maximo
sem hedge	(0.0002250)	0.0429%	(0.0003587)	(0.0000913)
-2.33 com hedge	(0.0001807)	0.0308%	(0.0002767)	(0.0000847)
1.06 com hedge	(0.0001814)	0.0316%	(0.0002799)	(0.0000829)
4.18 com hedge	(0.0001820)	0.0324%	(0.0002830)	(0.0000810)

Tabela 2.2 - Teste do Modelo HW/Vasicek para Negócios com 20 dias úteis.

Intervalo c/95% prob. para media						
Prazo dias uteis	Obs.		Media	Desvio-padrao	minimo	maximo
20	42	sem hedge	(0.000226)	0.0429%	(0.000359)	(0.000092)
	42	com hedge	(0.000181)	0.0313%	(0.000279)	(0.000083)
10	47	sem hedge	(0.000033)	0.0174%	(0.000084)	0.000018
	47	com hedge	(0.000053)	0.0082%	(0.000077)	(0.000029)

Tabela 2.3 - Teste do Modelo HJM com um Fator

Assumindo que a estrutura a termo se comporta segundo as equações 2.15 a 2.18, o valor da função lucro deve ser zero e sem variância alguma. A tabela 2.3 mostra que em 42 negócios, com prazo de 20 dias úteis, a adoção do *hedge* diminuiu a variabilidade e aproximou à zero o valor da carteira. No caso do prazo de 10 dias úteis, o valor médio ficou mais negativo, mas a variância da carteira diminuiu.

Em todos os exemplos acima a adoção do *hedge* diminuiu o intervalo de confiança para a média do lucro, de modo que diminuiu o risco da carteira. Um lucro médio negativo pode ser facilmente transformado em positivo invertendo-se os sinais da função lucro e, conseqüentemente, criando-se um negócio inverso. No modelo de equilíbrio haverá oportunidade de arbitragem (ou lucro esperado positivo) se o preço do título ou do contrato futuro estiverem desajustados em relação ao preço de equilíbrio dos títulos em geral. No modelo de não arbitragem, isso, por suposto, não deve ocorrer porque a própria estrutura a termo é definida pelos títulos existentes, inclusive contratos futuros. Na prática, esta última abordagem é útil na medida em que permite aos praticantes do mercado negociar e proteger títulos que eles acreditem ter um preço fora do mercado.

2) Opção de Compra Sobre Contrato Futuro de DI

Com base no contrato futuro de DI (ver apêndice C), a BMF lançou contratos de opção de compra e de venda, cujo ativo subjacente é o preço do contrato futuro de DI com vencimento no mês seguinte ao vencimento da opção. Em resumo, essa opção negocia a taxa de juro efetiva do mês posterior ao seu vencimento. O primeiro negócio com esse contrato ocorreu em 21/10/94 e no ano de 1995 os negócios só se iniciaram a partir de 17/10/95, possivelmente devido à alta inflação do início desse ano e às expectativas quanto ao plano econômico³. A liquidez desses contratos foi extremamente baixa, tendo havido em outubro, novembro e dezembro de 1995 um total de apenas 62 negócios com 18.450 contratos, em 27 dias de negócios num total de 61 dias.

O valor dessa opção em qualquer data é:

$$C(t, t^*, T, K)$$

No vencimento ($t=t^*$):

$$\text{Max} \{ P(t = t^*, T) - K, 0 \} \quad (2.30)$$

onde : t = data de avaliação da opção

t^* = data de vencimento da opção

T = data de vencimento do contrato futuro subjacente

K = preço de exercício equivalente ao preço unitário de um contrato futuro de DI com vencimento em T .

$P(t, \tau)$ = preço de um título com pagamento final 1 na data τ . Neste caso trata-se do próprio contrato futuro de DI.

³ Trata-se do plano real iniciado em julho de 1994.

Diversos modelos têm sido desenvolvidos para avaliar opções de taxa de juro. Entre eles o mais utilizado pelos praticantes do mercado (Gemmil (1993, pg 181) é baseado em Black(1976) e é apenas uma modificação da fórmula original de Black-Scholes. Existem, basicamente, dois conjuntos de modelos para se avaliar derivativos de taxa de juro. Um deles gera a estrutura a termo e, com base nela, se obtém o preço do derivativo. O segundo toma como dada a estrutura a termo como em Ho e Lee(1986), BDT(1990) e HJM (1992).

2.1) Modelo de Black

O modelo de apreçamento de opções de títulos mais utilizados pelos praticantes é baseado em Black(1976). Esse modelo supõe que o preço a termo dos títulos tem distribuição lognormal. Obviamente isso não é verdade porque o preço do título com pagamento final \$1 não pode ultrapassar seu valor de face, de modo que a distribuição adotada não é rigorosamente correta. Outro problema vem da volatilidade que converge para zero, conforme se aproxima o vencimento do título.

O preço de tal opção pode ser facilmente calculado segundo a famosa fórmula de Black-Scholes, modificada pelo próprio Fisher Black (1976), para o caso de *commodities*. Basicamente, usa-se o preço a termo do próprio título no lugar do preço à vista.

$$C(t, t^*, T) = P(t, t^*) [P(t, T)N(d1) - KN(d2)] \quad (2.31)$$

$$d1 = \frac{\log\left(\frac{P(t, T)}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{n}{252}\right)}{\sigma\sqrt{\frac{n}{252}}} \quad \therefore \quad d2 = d1 - \sigma\sqrt{\frac{n}{252}}$$

Esse modelo não se adequa bem à opção de DI, porque o ativo subjacente que é o contrato futuro tem um prazo muito curto. A volatilidade do contrato futuro cai muito rápido devido à proximidade do vencimento. Por exemplo, para o período de outubro a novembro de 1995 temos no gráfico 2.4 a evolução da volatilidade do preço (suposto lognormal) versus a volatilidade da taxa de juros implícita nesses títulos.

2.2) Modelo de Merton

Sendo assim, usamos o resultado de Merton (1973), onde a opção de compra é uma opção para trocar $P(t, T)$ unidades do contrato futuro com vencimento em T , por uma unidade do contrato que vence em t^* .

Assumindo que a taxa de juro segue um processo browniano simples como:

$$dr = a dt + \sigma dz \quad (2.32)$$

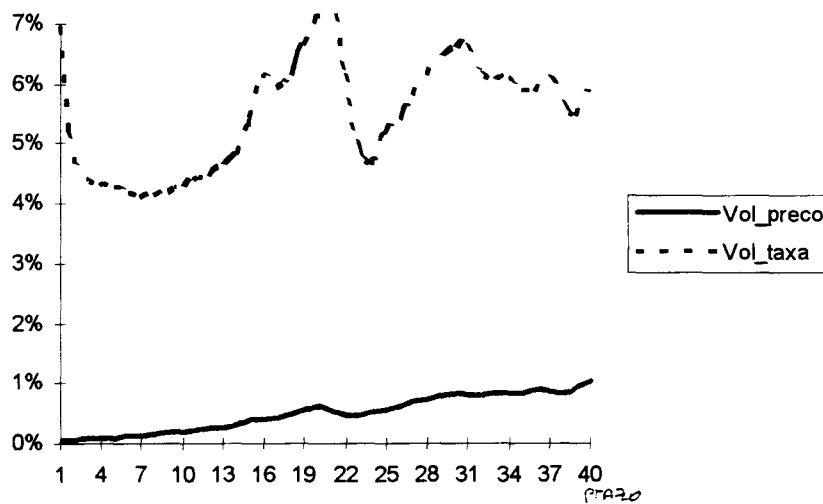


Gráfico 2.4 - Volatilidade da Taxa de Juros e Volatilidade do Preço à Vista versus Prazo.

Por Merton (1973) o preço de um título com prazo τ é igual a:

$$P(r, t, t + \tau) = e^{\left(-r\tau - \frac{a\tau^2}{2} + \frac{\sigma^2 \tau^3}{6}\right)} \quad (2.33)$$

onde r é a taxa de juros instantânea.

Aplicando o lema de Itô, obtemos que este preço tem distribuição lognormal com variância $(\sigma \tau)^2$.

O preço da opção de compra é então :

$$C(t) = P(t, T) N(h) - P(t, t^*) K N(h - \sigma_p) \quad (2.34a)$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \text{Log} \left(\frac{P(t, T)}{K P(t, t^*)} \right) + \frac{\sigma_p}{2} \quad (2.34b)$$

$$\sigma_p^2 = \int_0^{t^*} \left[\alpha_1(\tau)^2 - 2\rho(\tau) \alpha_1(\tau) \alpha_2(\tau) + \alpha_2(\tau)^2 \right] d\tau$$

onde: α_1 e α_2 são, respectivamente, a volatilidade da taxa de juro do título que vence em t^* e T .

ρ é a correlação entre a taxa de juro dos títulos que vencem em T e t^* .

Tomando o caso simples onde a correlação é igual a 1 temos:

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 (T - t^*)^2 \quad (2.35)$$

Com isso podemos partir da volatilidade da taxa de juro e evitar a volatilidade dos títulos em particular.

Mais recentemente Hull e White(1987) estenderam o modelo de Vasicek (1977) de modo a ajustá-lo à estrutura a termo corrente. Esse modelo é particularmente interessante porque assume que o processo estocástico da taxa de juro segue um processo de retorno à média, descrito como:

$$dr = [\theta + a(b - r)]dt + \sigma dz$$

A fórmula para cálculo do preço da opção é a mesma de (3.24) modificando-se apenas o cálculo da volatilidade que agora tem dois parâmetros e é obtida por:

$$\sigma_p = \frac{\sigma \sqrt{(1 - e^{-2at^*})} (1 - e^{-a(T - t^*)})}{\sqrt{2a}} \quad (2.36)$$

Para se estimar os parâmetros a e σ pode-se usar o mesmo procedimento de Issler e Gonçalves (1996).

Os modelos acima permitem que a taxa de juro atinja um valor negativo. Para contornar isso, Black, Derman e Toy (1990) supõem que a taxa de juro de curto prazo tem distribuição lognormal e volatilidade

tempo-dependente. Infelizmente não é possível obter fórmula fechada para esse caso, devendo-se resolver o problema com algum procedimento numérico.

2.3) Modelo HM com um Fator

Heath, Jarrow and Morton- HJM (1992) calculam o preço de derivativos de taxa de juros tomando a estrutura a termo como dada e permitem que a taxa de juro a termo (f_t) varie com distribuição normal. O processo para a taxa a termo pode ser descrito (no caso de apenas um fator) como:

$$df_t(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t) \quad (2.37)$$

HJM mostram, que se o processo para a taxa a termo é livre de arbitragem, então o valor esperado da variação da taxa a termo, sob probabilidade de martingala, é uma função da volatilidade como:

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du$$

A forma da função $\sigma(t, u)$ depende do comportamento das taxas a termo, Jarrow e Turnbull (1996 pg 489) sugerem um formato exponencial e decrescente. Com base numa amostra quinzenal (do ano de 1995) de taxas a termo, temos no gráfico 2.5 a volatilidade anualizada versus o prazo da taxa a termo. Por inspeção verifica-se que não há um padrão óbvio. Assim sendo, por simplicidade, tomamos a volatilidade como constante.

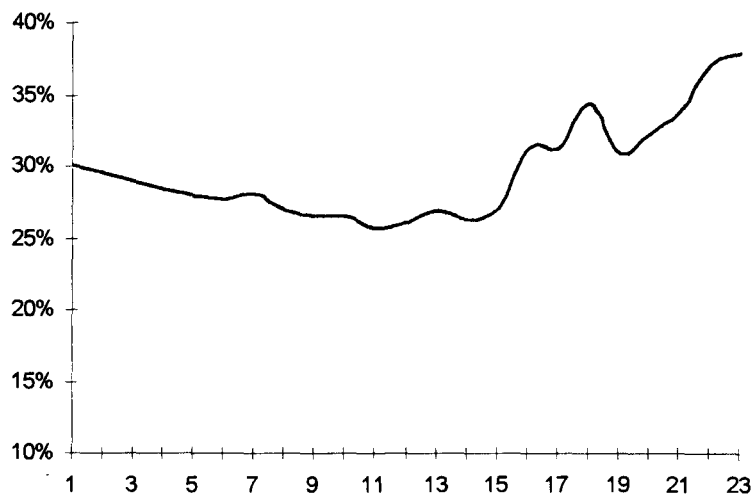


Gráfico 2.5 - Volatilidade da Taxa de Juros a Termo versus Prazo.

Nesse caso o preço da opção de compra segundo HJM (1992) é:

$$C(t) = P(t, T) N(h) - KP(t, t^*) N\left(h - \sigma(T - t^*) \sqrt{(t^* - t)}\right)$$

$$h = \frac{\text{Log}\left(\frac{P(t, T)}{KP(t, t^*)}\right) + \frac{1}{2} \sigma(T - t^*)^2 (t^* - t)}{\sigma(T - t^*) \sqrt{(t^* - t)}} \quad (2.38)$$

onde : $P(t, t^*)$ é o preço do título que vence na data de vencimento da opção, também entendido como o fator de desconto.

$P(t, T)$ é o preço do título objeto da opção.

Note que a equação 2.38 é igual à solução obtida em 2.34 e 2.35. Portanto, no caso particular acima, o preço da opção de compra será o mesmo.

2.4) Cálculo da Volatilidade

Calculamos a volatilidade histórica da estrutura a termo sobre duas amostras, uma com dados quinzenais para todo ano de 1995 e a outra sobre dados diários nos meses de outubro e novembro de 1995. No desenho da estrutura a termo usamos informações de títulos públicos (Taxa do Selic, BBC e LTN) e de

títulos privados (Taxa CDI, Contrato Futuro de DI, e Swap de CDI versus Pre). Com essas informações criamos a estrutura a termo interpolando entre os diversos vencimentos disponíveis, de modo que obtemos a taxa para todos os vencimentos. A volatilidade foi calculada sobre a primeira diferença das taxas na forma contínua e anual. A estrutura a termo da volatilidade para os dois casos está na tabela 2.4 abaixo:

Prazo	1995	Out-Dez-1995
1	29.96%	6.96%
2	29.92%	4.78%
3	29.64%	4.42%
4	29.39%	4.30%
5	29.16%	4.27%
6	28.96%	4.16%
7	28.90%	4.12%
8	28.66%	4.13%
9	30.64%	4.19%
10	29.47%	4.28%
11	28.45%	4.40%
12	27.91%	4.45%
13	27.37%	4.63%
14	27.88%	4.82%
15	26.08%	5.29%
16	25.63%	6.08%
17	25.86%	5.95%
18	26.31%	6.11%
19	30.70%	6.64%
20	30.13%	7.09%
21	29.56%	7.58%
22	29.68%	6.15%
23	26.20%	5.05%
media	28.54%	5.21%
desvio-padrao	1.59%	1.11%

Tabela 2.4 - Volatilidade histórica da Estrutura a Termo da Taxa de Juro.

A diferença de volatilidade entre as duas estimativas é muito grande e acontece devido a um choque ocorrido na segunda quinzena de março de 1995. Não se observa um padrão crescente ou decrescente na estrutura a termo da volatilidade como nos EUA (Koenigsberg *et all* 1991).

2.5) Volatilidade Implícita

Mesmo sendo um contrato com muito pouca liquidez, podemos calcular a volatilidade implícita. Tomaremos os negócios dos meses de outubro e novembro de 1995 de modo a podermos comparar com a volatilidade histórica já calculada na seção 2.4. Usamos o modelo de um fator dado por 2.34.

DATA	Vol. Implícita
10/17/95	3.4%
10/18/95	4.0%
10/23/95	4.0%
10/24/95	3.2%
10/25/95	3.1%
10/26/95	3.8%
10/27/95	2.3%
10/30/95	3.4%
10/31/95	3.9%
11/1/95	3.4%
11/3/95	0.0%
11/8/95	4.1%
11/9/95	5.0%
11/13/95	3.6%
11/14/95	3.7%
11/17/95	6.8%
11/20/95	5.4%
11/21/95	0.0%
11/28/95	0.0%
12/1/95	0.0%
12/5/95	0.0%
12/7/95	5.4%
12/8/95	3.6%
12/12/95	4.0%
12/13/95	0.0%
12/14/95	3.7%
12/20/95	4.1%
Média total	3.1%

Tabela 2.5 - Volatilidade Implícita Diária (média) das Opções de DI.

Para o mesmo período, a tabela 2.4 mostra uma volatilidade realizada de 5.21% aa, superior à volatilidade implícita nas opções, segundo a tabela 2.5. Se o modelo estiver correto, deve-se obter um ganho através da arbitragem entre os contratos de opção e uma carteira equivalente composta de contratos futuros.

2.6) Teste do Mercado de Opção sobre Futuro de DI.

Para testarmos a eficiência dos modelos apresentados acima para o mercado de opção de DI, tomaremos uma amostra dos meses de setembro, outubro e novembro de 1995. Calculamos a função lucro, definida como o resultado final de uma arbitragem entre um contrato de opção e sua carteira equivalente produzida a partir do modelo 2.34.

A carteira equivalente composta pelos títulos que vencem em T e t^* pode ser calculada com base na avaliação do efeito do preço de cada título sobre a carteira total.

$$\Pi(t) = nC[P(t, T), P(t, t^*)] + n_1 P(t, T) + n_2 P(t, t^*) \quad (2.39)$$

onde n é a quantidade de opções, n_1 a quantidade de contratos futuros que vencem em T e n_2 de contratos futuros que vencem em t^* .

Para tornar esta carteira insensível a variações infinitesimais no preço de cada título devemos ter:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial P(t, T)} &= n \frac{\partial C}{\partial P(t, T)} + n_1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial P(t, t^*)} &= n \frac{\partial C}{\partial P(t, t^*)} + n_2 = 0\end{aligned}\tag{2.40}$$

Assim, a carteira equivalente à opção pode ser reproduzida adquirindo-se as quantidades n_1 e n_2 acima.

O efeito do preço de cada título sobre o prêmio da opção (as derivadas parciais abaixo estão calculadas no apêndice A) é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial P(t, T)} &= N(h) \\ \frac{\partial C}{\partial P(t, t^*)} &= -k N(h - \sigma_p)\end{aligned}\tag{2.41}$$

Testamos todas as opções de compra com vencimento em janeiro de 1995 e negociadas no período entre outubro e dezembro de 1995, assumimos aproximadamente previsão perfeita para a volatilidade do período tomando-a igual a 5.21% aa conforme dado na tabela 2.4.

Num procedimento semelhante ao adotado por Galai (1977) calculamos uma função retorno em períodos discretos e diários definida como:

$$\begin{aligned}R_{t+1} &= n_t (C_{t+1}^{\text{mod}} - C_t^{\text{mod}}) + n_{1,t} (P(t+1, T) - P(t, T) e^{r/252}) \\ &\quad + n_{2,t} (P(t+1, t^*) - P(t, t^*) e^{r/252})\end{aligned}\tag{2.42}$$

onde : r é a taxa contínua diária equivalente ao do mercado de CDI

C^{mod} é o preço da opção de compra segundo o modelo.

n_t , $n_{1,t}$ e $n_{2,t}$ são os valores dados por 2.40 em períodos discretos t .

A quantidade de opções n_t é dada por:

$$\begin{aligned} &1, \text{ se } C_t^{mer} < C_t^{mod} \\ &-1, \text{ se } C_t^{mer} > C_t^{mod} \end{aligned}$$

Obviamente se a opção está cara, de acordo com o modelo, ela é vendida, do contrário é comprada. Uma vez comprada ou vendida a opção, são feitos ajustes diários na quantidade de contratos futuros segundo a equação 2.42. O lucro esperado é dado pela diferença entre o preço dado pelo modelo e o preço do mercado, que é igual a $n_t (C_t^{mod} - C_t^{mer})$. O lucro efetivo é igual ao esperado mais a acumulação e capitalização dos ajustes diários dado por 2.42. Na tabela 2.6, temos o lucro esperado e efetivo para toda a amostra. No apêndice B, temos este resultado em detalhes.

Resultado do ajuste diario							
Opcao	Preco de exercicio	Vencimento da Opcao	Vencimento do Futuro	Neg. Real.	Total Neg.	Esperado	Efetivo
JA54	0.9730	1/2/96	2/1/96	4	46	140.00	140.80
JA55	0.9735	1/2/96	2/1/96	1	1	3.76	(1.98)
JA56	0.9740	1/2/96	2/1/96	3	6	88.29	74.66
JA57	0.9745	1/2/96	2/1/96	3	5	45.15	38.05

Tabela 2.6 - Resultado do Teste para o Mercado de Opções de DI

Se nosso modelo está correto, o retorno diário deve ter média igual a zero. Da tabela 2.7, tem-se que não há evidência a 95% de probabilidade para rejeitar a hipótese de que o retorno diário é diferente de zero.

Intervalo c/95% prob. p/media					
Opcao	media	desvio-padrao	observacoes	minimo	maximo
JA54	0.10	0.54	49	(0.06)	0.26
JA55	0.08	0.89	42	(0.20)	0.36
JA56	(0.28)	1.60	40	(0.79)	0.23
JA57	(0.10)	3.14	39	(1.11)	0.92

Tabela 2.7 - Teste do Retorno Diário

Galai (1977) em seu teste não distingue o ganho esperado do retorno diário. Optamos por este procedimento porque essas opções tem muito pouca liquidez e embute um lucro muito grande que deve

distorcer a avaliação isolada do modelo. Também tomamos a volatilidade realizada no período de teste, sem considerar nenhuma estimativa ex-ante, de modo a poder avaliar apenas o modelo. A regra de negociação acima apresenta um lucro extraordinário para o período. Também vale notar que a volatilidade implícita das opções ficou abaixo da realizada e, possivelmente, abaixo de qualquer previsão que considerasse o período anterior dentro do mesmo ano, pois nesse caso a volatilidade foi maior como mostra a tabela 2.4.

Apêndice A

Fazendo:

$$A = \frac{\ln\left(\frac{P(t, T)}{K P(t, t^*)}\right)}{\sigma \sqrt{t^*}(T - t^*)} \quad \therefore \quad B = \frac{\sigma \sqrt{t^*}(T - t^*)}{2}$$

$$N'(\cdot) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Tomando a notação acima temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial P(t, T)} &= \frac{1}{2B\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-[(A+B)/2]} - \frac{K P(t, t^*)}{P(t, T)} e^{-[(A-B)/2]} \right\} + N[A+B] \\ &= \frac{1}{2B\sqrt{2\pi}} e^{-A^2-B^2} \left\{ e^{-AB} - \frac{K P(t, t^*)}{P(t, T)} e^{AB} \right\} + N[A+B] \\ &= \frac{1}{2B\sqrt{2\pi}} e^{-A^2-B^2} \left\{ \frac{\sqrt{K P(t, t^*)}}{\sqrt{P(t, T)}} - \frac{K P(t, t^*)}{P(t, T)} \frac{\sqrt{P(t, T)}}{\sqrt{K P(t, t^*)}} \right\} + N[A+B] = N[A+B] \end{aligned}$$

Seguindo procedimento semelhante temos:

$$\frac{\partial C}{\partial P(t, t^*)} = -K N[A-B]$$

onde: $A+B=h$ e $A-B=h-\sigma(T-t^*)\sqrt{(t^*-t)}$, conforme a equação 2.38.

Apêndice B

JA54

Modelo de Merton modificado para opção de taxa de juros									
		Data inicial:	10/17/95			Resultado Delta-hedge:			
		Opcao	JA54			esperado:	140.00		
						efetivo:	140.80		
		Preço exerc.:	97.300				(0.80)		
		Venc. Opcao	1/2/96			Retorno Diário			
		Venc. Futuro	2/1/96			Media:	0.10		
		Correlacao:	1.000			Desvio-padrão:	0.54		
		Volatilidade taxa de juros:	5.2%			observacoes:	49		
DATA	CDI dia	Ajuste diario-C1	Ajuste diario-C2	Opcao	Acumulado p/vencimento	Retorno Diário do hedge	Volatilidade	Vol.-Tit.	P(t,T)=
10/17/95	0.360941			-70	(70.00)		5.2%	0.2046%	0.930188
10/18/95	0.360941	0.000754	(0.000753)	0	(69.97)	(0.58)	5.2%	0.2026%	0.930188
10/19/95	0.365974	(0.000350)	0.000488	0	(56.32)	0.00	5.2%	0.2006%	0.932384
10/20/95	0.366813	(0.000123)	0.000051	0	(63.62)	(0.42)	5.2%	0.1985%	0.933838
10/23/95	0.366813	(0.000211)	0.000110	0	(73.85)	(0.25)	5.2%	0.1964%	0.935399
10/24/95	0.364297	(0.000068)	(0.000015)	0	(82.31)	(0.38)	5.2%	0.1943%	0.936735
10/25/95	0.363458	(0.000057)	(0.000003)	0	(88.41)	(0.47)	5.2%	0.1922%	0.938086
10/26/95	0.362619	0.000077	(0.000050)	0	(85.76)	(0.55)	5.2%	0.1901%	0.939362
10/27/95	0.359264	(0.000732)	0.000494	0	(109.72)	0.88	5.2%	0.1879%	0.941501
10/30/95	0.357586	(0.001007)	0.000634	0	(147.14)	2.04	5.2%	0.1857%	0.943746
10/31/95	0.353392	(0.000607)	0.000383	0	(169.79)	0.33	5.2%	0.1835%	0.945568
11/1/95	0.345843	(0.000392)	0.000335	0	(175.71)	(0.14)	5.2%	0.1812%	0.947296
11/3/95	0.346681	0.000074	(0.000135)	0	(182.01)	(0.12)	5.2%	0.1789%	0.948438
11/6/95	0.350037	(0.000204)	0.000104	0	(192.30)	(0.03)	5.2%	0.1766%	0.949865
11/7/95	0.352553	0.000300	(0.000249)	0	(187.46)	(0.08)	5.2%	0.1743%	0.950900
11/8/95	0.358425	0.000211	(0.000093)	0	(175.95)	(0.05)	5.2%	0.1719%	0.952124
11/9/95	0.357586	0.000092	(0.000125)	0	(179.43)	(0.14)	5.2%	0.1695%	0.953334
11/10/95	0.360941	(0.000235)	0.000056	0	(197.61)	0.16	5.2%	0.1671%	0.954752
11/13/95	0.362619	(0.000038)	(0.000138)	0	(215.50)	0.19	5.2%	0.1646%	0.955965
11/14/95	0.362619	(0.000473)	0.000264	0	(236.70)	0.30	5.2%	0.1621%	0.957632
11/16/95	0.362619	(0.000092)	(0.000129)	0	(259.16)	0.36	5.2%	0.1595%	0.958872
11/17/95	0.362619	0.000324	(0.000211)	580	331.80	0.25	5.2%	0.1569%	0.960029
11/20/95	0.360941	0.000318	(0.000318)	0	332.21	(0.21)	5.2%	0.1543%	0.961750
11/21/95	0.348359	0.001248	(0.000794)	-590	(211.88)	(0.74)	5.2%	0.1516%	0.963972
11/22/95	0.349198	(0.000209)	0.000023	0	(230.77)	0.41	5.2%	0.1489%	0.965329
11/23/95	0.347520	0.000146	0.000076	0	(208.85)	0.43	5.2%	0.1461%	0.966747
11/24/95	0.347520	(0.000296)	0.000145	0	(224.24)	0.40	5.2%	0.1433%	0.968232
11/27/95	0.348359	(0.000371)	(0.000077)	0	(269.32)	0.55	5.2%	0.1404%	0.969488
11/28/95	0.348359	0.002452	(0.001010)	0	(125.52)	2.07	5.2%	0.1374%	0.969788
11/29/95	0.347520	0.000243	(0.000084)	0	(109.78)	0.13	5.2%	0.1344%	0.971040
11/30/95	0.332421	(0.000348)	0.000155	0	(129.22)	0.23	5.2%	0.1313%	0.972547
12/1/95	0.334098	0.000891	(0.000314)	0	(71.75)	1.17	5.2%	0.1281%	0.973498
12/4/95	0.334937	0.000009	0.000009	0	(70.08)	(0.19)	5.2%	0.1249%	0.974799
12/5/95	0.334098	0.000107	0.000004	0	(59.01)	(0.17)	5.2%	0.1216%	0.976100
12/6/95	0.334098	(0.000399)	0.000167	0	(82.34)	0.25	5.2%	0.1181%	0.977582
12/7/95	0.335776	0.000027	0.000096	0	(70.15)	(0.06)	5.2%	0.1146%	0.978982
12/8/95	0.335776	0.000155	(0.000161)	0	(70.79)	(0.13)	5.2%	0.1110%	0.980112
12/11/95	0.338293	0.000121	(0.000032)	0	(62.02)	(0.12)	5.2%	0.1072%	0.981384
12/12/95	0.339132	0.000185	(0.000088)	0	(52.39)	(0.17)	5.2%	0.1033%	0.982608
12/13/95	0.339132	0.000193	(0.000071)	0	(40.31)	(0.20)	5.2%	0.0993%	0.983853
12/14/95	0.350037	0.000190	(0.000012)	0	(22.49)	(0.19)	5.2%	0.0950%	0.985165
12/15/95	0.350876	(0.000345)	0.000012	0	(55.84)	0.80	5.2%	0.0906%	0.986547
12/18/95	0.350037	0.000058	(0.000064)	0	(56.59)	(0.06)	5.2%	0.0860%	0.987854
12/19/95	0.350037	0.000045	(0.000016)	0	(53.80)	(0.04)	5.2%	0.0810%	0.989210
12/20/95	0.350037	0.000089	(0.000026)	340	292.43	(0.02)	5.2%	0.0758%	0.990558
12/21/95	0.349198	(0.000034)	0.000014	0	290.82	0.00	5.2%	0.0702%	0.991921
12/22/95	0.348359	(0.000052)	(0.000052)	0	280.83	(0.02)	5.2%	0.0641%	0.993351
12/26/95	0.340809	0.000058	(0.000092)	0	277.89	(0.03)	5.2%	0.0573%	0.994820
12/27/95	0.335776	0.000011	(0.000004)	0	278.95	(0.10)	5.2%	0.0496%	0.996170
12/28/95	0.313125	0.000062	0.000018	0	287.25	(0.17)	5.2%	0.0287%	0.997480
1/2/96	0.313125	0.001676	(0.001245)	-189.92	140.80	(0.18)	5.2%	0.0000%	1.000000

Appendice B

JA54

[illegible]

Modelo de Merton modificado para opcao de taxa de juros									
		Data inicial:	10/17/95			Resultado Delta-hedge:			
		Opcao	JA55			esperado:	3.76		
						efetivo:	(1.98)		
		Preco exerc.:	97,350				5.74		
		Venc. Opcao	1/2/96			Retorno Diario			
		Venc. Futuro	2/1/96			Media:	0.08		
		Correlacao:	1.000			Desvio-padrao:	0.89		
		Volatilidade taxa de juros:	5.2%			Observacoes:	42		
DATA	CDI dia	Ajuste diario-C1	Ajuste diario-C2	Opcao	Acumulado p/vencimento	Retorno Diario do hedge	Volatilidade	Vol.-Tit.	1o. Futuro P(t,T)=
10/17/95	0.360941			0	-		5.2%	0.2046%	0.930188
10/18/95	0.360941	-	-	0	-	-	5.2%	0.2026%	0.930188
10/19/95	0.365974	-	-	0	-	-	5.2%	0.2006%	0.932384
10/20/95	0.366813	-	-	0	-	-	5.2%	0.1985%	0.933838
10/23/95	0.366813	-	-	0	-	-	5.2%	0.1964%	0.935399
10/24/95	0.364297	-	-	0	-	-	5.2%	0.1943%	0.936735
10/25/95	0.363458	-	-	0	-	-	5.2%	0.1922%	0.938086
10/26/95	0.362619	-	-	-75	(75.00)	-	5.2%	0.1901%	0.939362
10/27/95	0.359264	(0.000614)	0.000414	0	(95.08)	0.88	5.2%	0.1879%	0.941501
10/30/95	0.357586	(0.000870)	0.000548	0	(127.42)	2.26	5.2%	0.1857%	0.943746
10/31/95	0.353392	(0.000546)	0.000344	0	(147.76)	0.29	5.2%	0.1835%	0.945568
11/1/95	0.345843	(0.000359)	0.000307	0	(153.16)	(0.33)	5.2%	0.1812%	0.947296
11/3/95	0.346681	0.000068	(0.000124)	0	(158.95)	(0.31)	5.2%	0.1789%	0.948438
11/6/95	0.350037	(0.000189)	0.000096	0	(168.45)	(0.20)	5.2%	0.1766%	0.949865
11/7/95	0.352553	0.000280	(0.000232)	0	(163.93)	(0.29)	5.2%	0.1743%	0.950900
11/8/95	0.358425	0.000196	(0.000087)	0	(153.23)	(0.22)	5.2%	0.1719%	0.952124
11/9/95	0.357586	0.000085	(0.000115)	0	(156.43)	(0.35)	5.2%	0.1695%	0.953334
11/10/95	0.360941	(0.000217)	0.000051	0	(173.20)	0.03	5.2%	0.1671%	0.954752
11/13/95	0.362619	(0.000035)	(0.000130)	0	(189.94)	0.06	5.2%	0.1646%	0.955965
11/14/95	0.362619	(0.000448)	0.000250	0	(209.99)	0.20	5.2%	0.1621%	0.957632
11/16/95	0.362619	(0.000088)	(0.000124)	0	(231.50)	0.27	5.2%	0.1595%	0.958872
11/17/95	0.362619	0.000314	(0.000205)	0	(220.86)	0.07	5.2%	0.1569%	0.960029
11/20/95	0.360941	(0.000307)	0.000308	0	(221.11)	0.01	5.2%	0.1543%	0.961750
11/21/95	0.348359	(0.001207)	0.000768	0	(265.30)	0.94	5.2%	0.1516%	0.963972
11/22/95	0.349198	(0.000205)	0.000023	0	(283.95)	0.32	5.2%	0.1489%	0.965329
11/23/95	0.347520	0.000144	0.000075	0	(262.36)	0.33	5.2%	0.1461%	0.966747
11/24/95	0.347520	(0.000291)	0.000143	0	(277.57)	0.28	5.2%	0.1433%	0.968232
11/27/95	0.348359	(0.000366)	(0.000076)	0	(322.21)	0.61	5.2%	0.1404%	0.969488
11/28/95	0.348359	0.002441	(0.001006)	0	(179.21)	3.92	5.2%	0.1374%	0.969788
11/29/95	0.347520	0.000232	(0.000080)	0	(164.26)	(0.08)	5.2%	0.1344%	0.971040
11/30/95	0.332421	(0.000329)	0.000147	0	(182.74)	0.10	5.2%	0.1313%	0.972547
12/1/95	0.334098	0.000856	(0.000302)	0	(127.62)	1.87	5.2%	0.1281%	0.973498
12/4/95	0.334937	0.000008	0.000008	0	(126.17)	(0.54)	5.2%	0.1249%	0.974799
12/5/95	0.334098	0.000099	0.000004	0	(118.07)	(0.47)	5.2%	0.1216%	0.976100
12/6/95	0.334098	(0.000363)	0.000152	0	(137.35)	0.17	5.2%	0.1181%	0.977582
12/7/95	0.335776	0.000025	0.000090	0	(126.03)	(0.37)	5.2%	0.1146%	0.978982
12/8/95	0.335776	0.000144	(0.000149)	0	(126.71)	(0.52)	5.2%	0.1110%	0.980112
12/11/95	0.338293	0.000112	(0.000030)	0	(118.65)	(0.51)	5.2%	0.1072%	0.981384
12/12/95	0.339132	0.000170	(0.000081)	0	(109.86)	(0.57)	5.2%	0.1033%	0.982608
12/13/95	0.339132	0.000176	(0.000065)	0	(98.93)	(0.62)	5.2%	0.0993%	0.983853
12/14/95	0.350037	0.000171	(0.000010)	0	(83.00)	(0.53)	5.2%	0.0950%	0.985165
12/15/95	0.350876	(0.000300)	0.000010	0	(112.10)	1.18	5.2%	0.0906%	0.986547
12/18/95	0.350037	0.000053	(0.000060)	0	(112.90)	(0.58)	5.2%	0.0860%	0.987854
12/19/95	0.350037	0.000042	(0.000015)	0	(110.37)	(0.58)	5.2%	0.0810%	0.989210
12/20/95	0.350037	0.000084	(0.000024)	0	(104.59)	(0.59)	5.2%	0.0758%	0.990558
12/21/95	0.349198	0.000032	(0.000013)	0	(102.85)	(0.62)	5.2%	0.0702%	0.991921
12/22/95	0.348359	0.000049	0.000049	0	(93.17)	(0.62)	5.2%	0.0641%	0.993351
12/26/95	0.340809	(0.000055)	0.000086	0	(90.16)	(0.71)	5.2%	0.0573%	0.994820
12/27/95	0.335776	(0.000010)	0.000004	0	(90.93)	(0.57)	5.2%	0.0496%	0.996170
12/28/95	0.313125	(0.000060)	(0.000017)	0	(98.74)	(0.24)	5.2%	0.0287%	0.997480
1/2/96	0.313125	(0.001676)	0.001246	139.92	(1.98)	0.13	5.2%	0.0000%	1.000000

JA56

Modelo de Merton modificado para opcao de taxa de juros									
		Data inicial:	10/17/95			Resultado Delta-hedge:			
		Opcao	JA56			esperado:	88.29		
		Premio merc.:				efetivo:	74.66		
		Preco exerc.:	97,400				13.63		
		Venc. Opcao	1/2/96			Retorno Diario			
		Venc. Futuro	2/1/96			Media:	(0.28)		
		Correlacao:		1.000		Desvio-padrao:	1.60		
		Volatilidade taxa de juros:		5.2%		Observacoes:	40		
DATA	CDI dia	Ajuste diario-C1	Ajuste diario-C2	Opcao	Acumulado p/vencimento	Retorno Diario do hedge	Volatilidade	Vol.-Tit.	1o. Futuro P(t,T)=
10/17/95	0.360941			0	-		5.2%	0.2046%	0.930188
10/18/95	0.360941	-	-	0	-	-	5.2%	0.2026%	0.930188
10/19/95	0.365974	-	-	0	-	-	5.2%	0.2006%	0.932384
10/20/95	0.366813	-	-	0	-	-	5.2%	0.1985%	0.933838
10/23/95	0.366813	-	-	0	-	-	5.2%	0.1964%	0.935399
10/24/95	0.364297	-	-	0	-	-	5.2%	0.1943%	0.936735
10/25/95	0.363458	-	-	0	-	-	5.2%	0.1922%	0.938086
10/26/95	0.362619	-	-	0	-	-	5.2%	0.1901%	0.939362
10/27/95	0.359264	-	-	0	-	-	5.2%	0.1879%	0.941501
10/30/95	0.357586	-	-	-80	(80.00)		5.2%	0.1857%	0.943746
10/31/95	0.353392	(0.000473)	0.000298	0	(97.58)	0.23	5.2%	0.1835%	0.945568
11/1/95	0.345843	(0.000318)	0.000272	0	(102.31)	(0.50)	5.2%	0.1812%	0.947296
11/3/95	0.346681	0.000061	(0.000110)	0	(107.41)	(0.48)	5.2%	0.1789%	0.948438
11/6/95	0.350037	(0.000169)	0.000086	0	(115.86)	(0.37)	5.2%	0.1766%	0.949865
11/7/95	0.352553	0.000252	(0.000209)	0	(111.74)	(0.48)	5.2%	0.1743%	0.950900
11/8/95	0.358425	0.000176	(0.000078)	0	(102.09)	(0.38)	5.2%	0.1719%	0.952124
11/9/95	0.357586	0.000076	(0.000102)	0	(104.88)	(0.55)	5.2%	0.1695%	0.953334
11/10/95	0.360941	(0.000193)	0.000046	0	(119.77)	(0.10)	5.2%	0.1671%	0.954752
11/13/95	0.362619	(0.000032)	(0.000117)	0	(134.88)	(0.08)	5.2%	0.1646%	0.955965
11/14/95	0.362619	(0.000412)	0.000230	0	(153.24)	0.09	5.2%	0.1621%	0.957632
11/16/95	0.362619	(0.000083)	(0.000116)	0	(173.27)	0.18	5.2%	0.1595%	0.958872
11/17/95	0.362619	0.000298	(0.000194)	380	216.87	(0.13)	5.2%	0.1569%	0.960029
11/20/95	0.360941	0.000289	(0.000290)	0	217.10	0.23	5.2%	0.1543%	0.961750
11/21/95	0.348359	0.001138	(0.000725)	-398	(139.24)	(1.24)	5.2%	0.1516%	0.963972
11/22/95	0.349198	(0.000199)	0.000022	0	(157.10)	0.20	5.2%	0.1489%	0.965329
11/23/95	0.347520	0.000141	0.000074	0	(135.88)	0.20	5.2%	0.1461%	0.966747
11/24/95	0.347520	(0.000282)	0.000138	0	(150.44)	0.14	5.2%	0.1433%	0.968232
11/27/95	0.348359	(0.000357)	(0.000074)	0	(193.81)	0.77	5.2%	0.1404%	0.969488
11/28/95	0.348359	0.002413	(0.000995)	0	(52.32)	7.20	5.2%	0.1374%	0.969788
11/29/95	0.347520	0.000214	(0.000074)	0	(38.38)	(0.30)	5.2%	0.1344%	0.971040
11/30/95	0.332421	(0.000299)	0.000133	0	(55.02)	(0.07)	5.2%	0.1313%	0.972547
12/1/95	0.334098	0.000794	(0.000280)	0	(3.76)	2.83	5.2%	0.1281%	0.973498
12/4/95	0.334937	0.000007	0.000007	0	(2.36)	(0.87)	5.2%	0.1249%	0.974799
12/5/95	0.334098	0.000086	0.000003	0	6.52	(0.76)	5.2%	0.1216%	0.976100
12/6/95	0.334098	(0.000308)	0.000129	0	(11.42)	0.06	5.2%	0.1181%	0.977582
12/7/95	0.335776	0.000022	0.000079	0	(1.27)	(0.70)	5.2%	0.1146%	0.978982
12/8/95	0.335776	0.000125	(0.000129)	0	(1.72)	(0.95)	5.2%	0.1110%	0.980112
12/11/95	0.338293	0.000097	(0.000026)	0	5.42	(0.91)	5.2%	0.1072%	0.981384
12/12/95	0.339132	0.000146	(0.000069)	0	13.07	(0.99)	5.2%	0.1033%	0.982608
12/13/95	0.339132	0.000147	(0.000055)	0	22.37	(1.00)	5.2%	0.0993%	0.983853
12/14/95	0.350037	0.000139	(0.000008)	0	35.45	(0.76)	5.2%	0.0950%	0.985165
12/15/95	0.350876	(0.000231)	0.000008	0	13.19	1.39	5.2%	0.0906%	0.986547
12/18/95	0.350037	0.000045	(0.000051)	0	12.67	(1.25)	5.2%	0.0860%	0.987854
12/19/95	0.350037	0.000036	(0.000013)	0	14.98	(1.31)	5.2%	0.0810%	0.989210
12/20/95	0.350037	0.000071	(0.000021)	0	20.02	(1.39)	5.2%	0.0758%	0.990558
12/21/95	0.349198	0.000026	(0.000011)	0	21.63	(1.56)	5.2%	0.0702%	0.991921
12/22/95	0.348359	0.000041	0.000041	0	29.85	(1.59)	5.2%	0.0641%	0.993351
12/26/95	0.340809	(0.000044)	0.000069	0	32.42	(2.02)	5.2%	0.0573%	0.994820
12/27/95	0.335776	(0.000008)	0.000003	0	31.95	(2.18)	5.2%	0.0496%	0.996170
12/28/95	0.313125	(0.000049)	(0.000014)	0	25.71	(3.47)	5.2%	0.0287%	0.997480
1/2/96	0.313125	(0.001599)	0.001189	89.92	74.66	1.51	5.2%	0.0000%	1.000000

[illegible]

Modelo de Merton modificado para opcao de taxa de juros									
		Data inicial:	10/17/95			Resultado Delta-hedge:			
		Opcao	JA57			esperado:	45.15		
						efetivo:	38.05		
		Preco exerc.:	97,450				7.10		
		Venc. Opcao	1/2/96			Retorno Diario			
		Venc. Futuro	2/1/96			Media:	(0.10)		
			Correlacao:	1.000		Desvio-padrao:	3.14	(0.03)	
			Volatilidade taxa de juros:	5.2%		observacoes:	39		
									1o. Futuro
DATA	CDI dia	Ajuste diario-C1	Ajuste diario-C2	Opcao	Acumulado p/vencimento	Retorno Diario do hedge	Volatilidade	Vol.-Tit.	P(t,t*)=
10/17/95	0.360941			0	-		5.2%	0.2046%	0.930188
10/18/95	0.360941	-	-	0	-	-	5.2%	0.2026%	0.930188
10/19/95	0.365974	-	-	0	-	-	5.2%	0.2006%	0.932384
10/20/95	0.366813	-	-	0	-	-	5.2%	0.1985%	0.933838
10/23/95	0.366813	-	-	0	-	-	5.2%	0.1964%	0.935399
10/24/95	0.364297	-	-	0	-	-	5.2%	0.1943%	0.936735
10/25/95	0.363458	-	-	0	-	-	5.2%	0.1922%	0.938086
10/26/95	0.362619	-	-	0	-	-	5.2%	0.1901%	0.939362
10/27/95	0.359264	-	-	0	-	-	5.2%	0.1879%	0.941501
10/30/95	0.357586	-	-	0	-	-	5.2%	0.1857%	0.943746
10/31/95	0.353392	-	-	-72	(72.00)	-	5.2%	0.1835%	0.945568
11/1/95	0.345843	(0.000270)	0.000231	0	(76.00)	(0.63)	5.2%	0.1812%	0.947296
11/3/95	0.346681	0.000052	(0.000094)	0	(80.35)	(0.62)	5.2%	0.1789%	0.948438
11/6/95	0.350037	(0.000145)	0.000074	0	(87.59)	(0.51)	5.2%	0.1766%	0.949865
11/7/95	0.352553	0.000219	(0.000182)	0	(84.01)	(0.63)	5.2%	0.1743%	0.950900
11/8/95	0.358425	0.000152	(0.000087)	0	(75.67)	(0.50)	5.2%	0.1719%	0.952124
11/9/95	0.357586	0.000064	(0.000087)	0	(78.03)	(0.71)	5.2%	0.1695%	0.953334
11/10/95	0.360941	(0.000165)	0.000039	0	(90.71)	(0.21)	5.2%	0.1671%	0.954752
11/13/95	0.362619	(0.000028)	(0.000102)	0	(103.81)	(0.21)	5.2%	0.1646%	0.955965
11/14/95	0.362619	(0.000364)	0.000203	0	(120.01)	(0.02)	5.2%	0.1621%	0.957632
11/16/95	0.362619	(0.000074)	(0.000104)	0	(138.04)	0.07	5.2%	0.1595%	0.958872
11/17/95	0.362619	0.000274	(0.000178)	0	(128.70)	(0.35)	5.2%	0.1569%	0.960029
11/20/95	0.360941	(0.000263)	0.000264	0	(128.81)	(0.49)	5.2%	0.1543%	0.961750
11/21/95	0.348359	(0.001036)	0.000660	0	(166.63)	1.59	5.2%	0.1516%	0.963972
11/22/95	0.349198	(0.000187)	0.000021	0	(183.53)	0.06	5.2%	0.1489%	0.965329
11/23/95	0.347520	0.000134	0.000070	0	(163.31)	0.07	5.2%	0.1461%	0.966747
11/24/95	0.347520	(0.000266)	0.000130	0	(177.09)	(0.04)	5.2%	0.1433%	0.968232
11/27/95	0.348359	(0.000341)	(0.000071)	0	(218.48)	1.03	5.2%	0.1404%	0.969488
11/28/95	0.348359	0.002353	(0.000971)	0	(80.57)	12.09	5.2%	0.1374%	0.969788
11/29/95	0.347520	0.000187	(0.000065)	0	(68.41)	(0.50)	5.2%	0.1344%	0.971040
11/30/95	0.332421	(0.000256)	0.000114	0	(82.72)	(0.25)	5.2%	0.1313%	0.972547
12/1/95	0.334098	0.000699	(0.000247)	0	(37.66)	3.80	5.2%	0.1281%	0.973498
12/4/95	0.334937	0.000006	0.000006	0	(36.57)	(1.11)	5.2%	0.1249%	0.974799
12/5/95	0.334098	0.000068	0.000003	0	(29.52)	(0.93)	5.2%	0.1216%	0.976100
12/6/95	0.334098	(0.000240)	0.000100	0	(43.52)	(0.08)	5.2%	0.1181%	0.977582
12/7/95	0.335776	0.000018	0.000064	120	84.70	(0.93)	5.2%	0.1146%	0.978982
12/8/95	0.335776	(0.000099)	0.000102	-90	(4.83)	1.26	5.2%	0.1110%	0.980112
12/11/95	0.338293	0.000077	(0.000020)	0	0.79	(1.18)	5.2%	0.1072%	0.981384
12/12/95	0.339132	0.000112	(0.000053)	0	6.66	(1.21)	5.2%	0.1033%	0.982608
12/13/95	0.339132	0.000109	(0.000041)	0	13.56	(1.16)	5.2%	0.0993%	0.983853
12/14/95	0.350037	0.000098	(0.000006)	0	22.81	(0.76)	5.2%	0.0950%	0.985165
12/15/95	0.350876	(0.000150)	0.000005	0	8.30	1.23	5.2%	0.0906%	0.986547
12/18/95	0.350037	0.000033	(0.000037)	0	7.91	(1.70)	5.2%	0.0860%	0.987854
12/19/95	0.350037	0.000026	(0.000009)	0	9.59	(1.80)	5.2%	0.0810%	0.989210
12/20/95	0.350037	0.000050	(0.000015)	0	13.18	(1.86)	5.2%	0.0758%	0.990558
12/21/95	0.349198	0.000018	(0.000007)	0	14.27	(2.11)	5.2%	0.0702%	0.991921
12/22/95	0.348359	0.000027	0.000027	0	19.70	(1.98)	5.2%	0.0641%	0.993351
12/26/95	0.340809	(0.000026)	0.000041	0	21.24	(2.50)	5.2%	0.0573%	0.994820
12/27/95	0.335776	(0.000004)	0.000002	0	20.98	(2.88)	5.2%	0.0496%	0.996170
12/28/95	0.313125	(0.000025)	(0.000007)	0	17.75	(7.83)	5.2%	0.0287%	0.997480
1/2/96	0.313125	(0.000766)	0.000570	39.92	38.05	10.60	5.2%	0.0000%	1.000000

Especificações do Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia

Objeto de negociação

A taxa de juro efetiva de Depósitos Interfinanceiros-DI, definida para esse efeito pela acumulação das taxas médias diárias de DI de um dia, calculadas pela Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos-Cetip, para o período compreendido entre o dia da operação no mercado futuro, inclusive, e o último dia de negociação, inclusive.

Cotação

Preço unitário-PU, definido como R\$100.000,00 descontados pela taxa de juro descrita no item anterior.

Variação mínima de apregoação

0,10 ponto de PU.

Oscilação máxima diária

5% sobre o valor do primeiro vencimento em aberto, calculados sobre o preço de ajuste do pregão anterior.

Os dois primeiros vencimentos abertos à negociação não estão sujeitos a limites de oscilação.

A BM&F poderá, a qualquer momento, alterar os limites de oscilação, bem como sua aplicação aos diversos vencimentos, inclusive para aqueles que habitualmente não têm limites.

Unidade de negociação

PU multiplicado pelo valor em reais de cada ponto, estabelecido pela BM&F.

Meses de vencimento

Todos os meses.

Número de vencimentos em aberto

No máximo doze.

Data de vencimento

Primeiro dia útil do mês de vencimento.

Último dia de negociação

Dia útil anterior à data de vencimento.

Day trade

São admitidas operações de compra e venda para liquidação diária (*day trade*), desde que realizadas no mesmo pregão, pelo mesmo cliente (ou operador especial), intermediadas pela mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação. Os resultados auferidos nessas operações são movimentados financeiramente no dia útil seguinte ao de sua realização.

Ajuste diário

As posições em aberto ao final de cada pregão serão ajustadas com base no preço de ajuste do dia, estabelecido conforme regras da Bolsa, com movimentação financeira em D+1.

Para efeito de cálculo do ajuste diário, utilizam-se as seguintes fórmulas:

a) ajuste das operações realizadas no dia

$$AD = (PA^t - PO) \times M \times n$$

b) ajuste das posições em aberto no dia anterior

$$AD = \left\{ PA^t - \left[PA^{t-1} \times \left(1 + \frac{i}{100} \right) \right] \right\} \times M \times n$$

onde:

AD = valor do ajuste diário;

PA^t = preço (PU) de ajuste do dia;

PO = preço (PU) da operação;

M = valor em reais de cada ponto de PU, estabelecido pela BM&F;

n = número de contratos;

PA^{t-1} = preço (PU) de ajuste do dia anterior;

i = taxa média de DI de um dia, da Cetip, referente ao dia anterior, expressa em percentual ao dia (taxa efetiva dia), com até sete casas decimais.

Se, em determinado dia, a taxa divulgada pela Cetip se referir a um período (número de dias) distinto daquele a ser considerado na correção do preço de ajuste, a BM&F poderá arbitrar uma taxa, a seu critério, para aquele dia específico.

O ajuste diário das posições será realizado até a data de vencimento, sendo que, nesse dia, o preço de ajuste será igual a R\$100.000,00.

Condições de liquidação no vencimento

Na data de vencimento, as posições em aberto, após o último ajuste, serão liquidadas financeiramente pela Bolsa, mediante o registro de operação de natureza inversa (compra ou venda) à da posição, na mesma quantidade de contratos, pela cotação (preço unitário) de R\$100.000,00.

Os resultados financeiros da liquidação serão movimentados no dia útil subsequente à data de vencimento.

Condições especiais

Se, por qualquer motivo, a Cetip atrasar a divulgação ou deixar de divulgar a taxa média de DI de um dia, por um ou mais dias, a BM&F poderá:

- a) prorrogar a liquidação deste contrato, até a divulgação oficial pela Cetip;
- b) encerrar as posições em aberto pelo último preço de ajuste disponível.

Caso a Cetip altere o critério de apuração e/ou de divulgação da taxa objeto deste contrato, a BM&F poderá:

- a) alterar a fórmula do cálculo do preço de ajuste do dia anterior corrigido, de forma a apurar resultado equivalente ao obtido com critério original da Cetip;
- b) encerrar as posições em aberto pelo último preço de ajuste disponível.

Hedgers

Instituições financeiras e investidores institucionais.

Margem de garantia

Valor fixo por contrato, devida em D+1, com redução de 20% para *hedgers*. A margem de garantia é alterável a qualquer momento, a critério da Bolsa.

Ativos aceitos como margem

Dinheiro, ouro e, a critério da Bolsa, títulos públicos e privados, cartas de fiança, apólices de seguro, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações.

Custos operacionais

Taxa operacional básica

Operação normal: 3%; *day trade*: 1,5%.

A taxa operacional básica por contrato negociado, sujeita a valor mínimo estabelecido pela Bolsa, incide sobre a seguinte base de cálculo:

$(100.000 - PC) \times M$, onde:

PC = preço de ajuste do dia anterior corrigido, relativo ao mês de vencimento negociado;

M = valor em reais de cada ponto de PU, estabelecido pela BM&F.

Para os contratos liquidados financeiramente no vencimento, o valor da taxa operacional básica será idêntico ao do último dia de negociação.

Taxas da Bolsa (emolumentos e contribuição para o Fundo de Garantia)

2,7% da taxa operacional básica.

Taxa de registro

0,005% sobre a mesma base de cálculo estabelecida para a determinação da taxa operacional básica, sujeita a valor mínimo fixado pela Bolsa.

Os custos operacionais são devidos no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão.

Os sócios efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e 75% dos demais custos operacionais (taxas de registro e da Bolsa).

7. Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato a legislação em vigor e as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e ofícios circulares, bem como no Protocolo de Intenções entre as bolsas de valores, de mercadorias e de mercados de liquidação futura, de 25.5.88, observadas, adicionalmente, as regras específicas do Banco Central do Brasil.

OFÍCIO CIRCULAR 133/94-SG, DE 30.6.94

Especificações do Contrato de Opções de Compra sobre Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia

1. **Objeto da opção**
O contrato futuro de taxa média de Depósitos Interfinanceiros-DI de um dia negociado na BM&F, com vencimento no mês imediatamente posterior ao mês de vencimento da opção.
2. **Cotação**
Prêmio da opção, expresso em pontos de preço unitário-PU, sendo cada ponto equivalente ao valor em reais estabelecido pela BM&F para o contrato futuro objeto da opção.
3. **Variação mínima de apregoação**
0,01 ponto de PU.
4. **Oscilação máxima diária**
Não há limites de oscilação diária, podendo a Bolsa, excepcionalmente e a seu critério, estabelecê-los.
5. **Unidade de negociação**
Cada opção refere-se a um contrato futuro de taxa média de Depósitos Interfinanceiros de um dia.
6. **Preços de exercício**
As séries de preços de exercício serão estabelecidas e divulgadas pela BM&F, sendo expressas em pontos de PU, para cada mês de vencimento.
7. **Meses de vencimento**
Todos os meses.
8. **Número de vencimentos em aberto**
No máximo doze.
9. **Data de vencimento e último dia de negociação**
Primeiro dia útil do mês anterior ao mês de vencimento do contrato futuro objeto da opção. Nesse dia, não se admitirá *day trade* nem a abertura de novas posições para esse vencimento.
10. **Day trade**
São admitidas operações de compra e venda para liquidação diária (*day trade*), desde que realizadas no mesmo pregão, pelo mesmo cliente (ou operador especial), intermediadas pela mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação. Os resultados auferidos nessas operações são movimentados financeiramente no dia útil seguinte ao de sua realização.
11. **Movimentação financeira do prêmio**
Pagamentos e recebimentos de prêmios são efetuados no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão.
12. **Horário de exercício**
Conforme determinação da BM&F.
13. **Exercício**
As opções poderão ser exercidas pelos titulares somente na data de vencimento.
14. **Condições de liquidação no exercício**
No exercício das opções, o titular assume uma posição comprada no contrato futuro de taxa média de Depósitos Interfinanceiros de um dia, pelo preço de exercício da opção, e o lançador assume uma posição vendida no contrato futuro de taxa média de Depósitos Interfinanceiros de um dia, pelo preço de exercício da opção.
O ajuste referente às posições assumidas no mercado futuro de Depósitos Interfinanceiros de um dia, em decorrência do exercício de opções, será, de acordo com as especificações daquele contrato, movimentado financeiramente no dia útil subsequente ao de exercício.
15. **Margem de garantia para o lançador**
A margem é determinada pela BM&F, com base no prêmio médio de cada pregão, sujeita a valor mínimo estabelecido e depositada em D+1, podendo ser alterada a qualquer momento, a critério da Bolsa.
16. **Ativos aceitos como margem**
Dinheiro, ouro e, a critério da Bolsa, títulos públicos e privados, cartas de fiança, apólices de seguro, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações.

17. Custos operacionais

• Taxa operacional básica

Operação normal: 1,5%; *day trade*: 0,75%; exercício: mesmo valor da taxa operacional básica do contrato futuro de Depósitos Interfinanceiros de um dia objeto da opção.

Nas operações (normal e *day trade*), a taxa operacional básica incide sobre a seguinte base de cálculo:

$$BC = PU_1 - PU_2$$

onde:

BC = base de cálculo;

PU_1 = preço de ajuste corrigido do contrato futuro objeto, referente ao primeiro vencimento em aberto;

PU_2 = preço de ajuste corrigido do contrato futuro objeto, referente ao segundo vencimento em aberto.

Nos casos abaixo, desde que as operações sejam de um mesmo cliente (ou operador especial), realizadas, no mesmo dia, através da mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação, o valor da taxa operacional básica será idêntico àquele fixado para as operações *day trade* no contrato futuro de Depósitos Interfinanceiros de um dia:

- a) exercer uma opção de compra e ser exercido em outra opção de compra;
- b) exercer uma opção de compra e exercer uma opção de venda;
- c) ser exercido numa opção de compra e ser exercido numa opção de venda;
- d) exercer uma opção de compra e vender um contrato futuro objeto da opção;
- e) ser exercido numa opção de compra e comprar um contrato futuro objeto da opção.

• Taxas da Bolsa

1,7% da taxa operacional básica.

Os custos operacionais são devidos no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão ou do exercício.

Os sócios efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e 75% das taxas da Bolsa.

Os investidores institucionais pagarão 75% das taxas da Bolsa.

18. Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato a legislação em vigor e as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e ofícios circulares, bem como no Protocolo de Intenções entre as bolsas de valores, de mercadorias e de mercados de liquidação futura, de 25.05.88, observadas, adicionalmente, as regras específicas do Banco Central do Brasil.

Capítulo 3

Efeito da Taxa de Juro Norte-Americana sobre a Dívida Externa Brasileira

1) Introdução

A dívida externa dos países em desenvolvimento tem sido estudada sob diferentes aspectos. Claessens e Van Wijnbergen (1995), Cohen (1993), Hajivassilou (1989) analisam a renegociação e o plano Brady que sucedeu a moratória durante a década de 80. Em Sacks (1989) há um conjunto de artigos de diversos autores onde são estudados aspectos macroeconômicos. Purcell e Orlanski (1988) mostram o efeito de variáveis macroeconômicas sobre o prêmio de risco dos títulos da dívida externa de países subdesenvolvidos, Bartolomeu (1991) e Cumby e Evans (1993) e Claessens e Pennacchi (1996) quantificam a qualidade de crédito desses títulos, através de um modelo de um fator onde este é uma variável não observável que é a própria probabilidade de *default* do país. Paralelamente a esta literatura, dívidas (ou títulos) também podem ser tratados como títulos de renda fixa com risco de crédito e, sobre esse assunto, existe uma ampla literatura que avalia o valor desses títulos como função de diversos fatores. Merton(1974) foi o primeiro a avaliar dívidas com risco com base num modelo de opção onde o valor da empresa tem comportamento estocástico e a economia tem taxa de juro constante. Outros assumem um processo estocástico para o próprio risco de crédito.

Mais recentemente, Das (1995) e Longstaff e Schwartz (1995) estudam o comportamento do prêmio de risco dos títulos em geral, num modelo de dois fatores (sendo um fator a taxa de juro e outro o valor da empresa) numa economia com taxa de juro estocástica. Como os títulos da dívida externa são negociados em dólar, se adaptam bem a um modelo onde o prêmio pago por eles é função da taxa de juro norte-americana (chamamos apenas de americana) e um componente intrínseco ao crédito do país. Com base nesse tipo de modelo, mostramos que o prêmio de risco implícito na dívida externa brasileira é negativamente correlacionado com choques da taxa de juro americana. Na seção 3.2 fazemos uma avaliação empírica e na seção seguinte mostramos, através de um modelo com dois fatores, semelhante a Das (1995) e Longstaff e

Schwartz (1995), um fundamento para o resultado empírico. Na última seção mostramos como uma carteira desses títulos da dívida deve ser protegida contra variações da taxa de juro americana.

2) Evolução Recente

Para avaliar o efeito da taxa de juro americana usaremos, como *proxy* da dívida externa Brasileira, o *PAR BOND* e os cálculos dessa seção estão no apêndice A. Esse é um título prefixado com pagamento de juros periódico e pagamento do principal no vencimento em 2024, portanto, um título bastante bem comportado¹. O gráfico 3.1 mostra a evolução recente da Taxa Interna de Retorno-TIR (equação A.1) do Par Bond versus a mesma taxa implícita no UST de 30 anos. No gráfico 3.2 tem-se diferença entre a TIR do Par Bond (na forma contínua, equação A.5) e do UST (conhecido entre os praticantes do mercado financeiro como *spread* de crédito ou prêmio de risco) versus a própria TIR do UST.

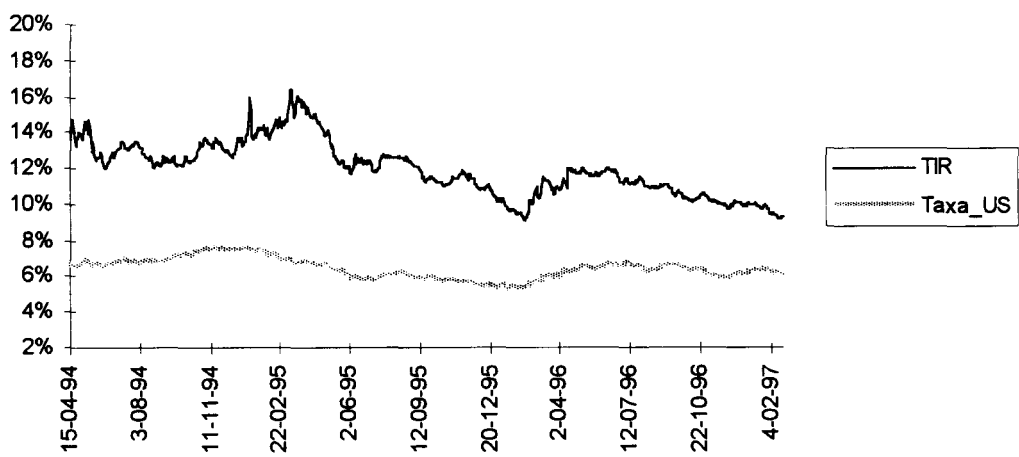


Gráfico 3.1 - Taxa Interna do Par Bond versus o UST 30 anos

Podemos explicar a TIR desse título através da taxa de juro americana de longo-prazo com um modelo simples com um fator que pode ser escrito como:

$$\Delta TIR_B = a + b \Delta Y + \varepsilon_{t+1} \tag{3.1}$$

onde: ΔTIR_B é a variação da taxa interna de retorno do Par Bond

¹ Os outros títulos estão descritos no apêndice B.

ΔY é a variação da taxa do UST de 30 anos.

Utilizando-se Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) sobre o conjunto de dados do gráfico 3.1, obtivemos o seguinte resultado:

<i>a</i>	<i>b</i>	R^2	Obs.
-0.000009	0.86	0.032	254
(-0.005)	(2.9)		

Esse resultado é significativo e mostra que a TIR é quase perfeitamente proporcional a aumentos da taxa de juro americana. Quanto ao prêmio de risco apenas, temos no gráfico 3.2 um desenho do comportamento ao longo do tempo. Este é bastante próximo da TIR do título, porque no cálculo desta última não foi excluído o colateral do principal e das garantias. A taxa de rendimento total do risco Brasil é então a soma do prêmio de risco e da taxa implícita no UST.

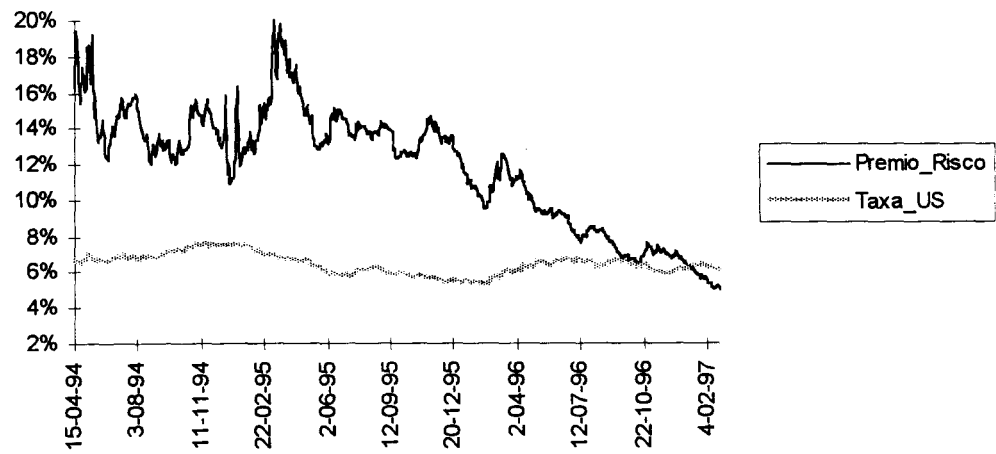


Gráfico 3.2 - Prêmio de Risco Brasil Implícito no Par Bond versus UST 30 anos

O efeito da variação da taxa de juro americana sobre a variação do prêmio de risco Brasil pode ser visualizado no gráfico 3.3.

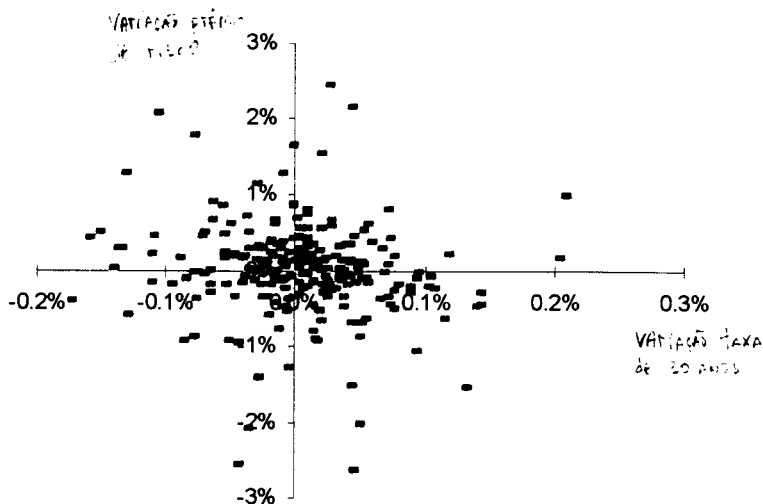


Gráfico 3.3 - Variação do Prêmio de Risco Brasil versus Variação da Taxa Interna do UST 30 anos

Também recalculamos a equação 3.1 com o prêmio de risco ao invés da TIR conforme a equação 3.2 abaixo.

$$\Delta s_B = a + b \Delta Y + \varepsilon_{t+1} \tag{3.2}$$

onde: Δs_B é a taxa interna do Par Bond

ΔY é a variação da taxa do UST de 30 anos.

O resultado da regressão é significativo e mostra que a variação da taxa do UST explica parte da variação do prêmio de risco. É interessante notar que a variação da taxa de juro americana é negativamente correlacionada com o prêmio de risco e com coeficiente maior do que 1.

<i>a</i>	<i>b</i>	R ²	Obs.
0.000004	-1.4	0.017	254
(0.01)	(2.11)		

A seguir, explicamos o prêmio de risco com base na taxa de juro e em fatores intrínsecos ao país.

3) Um Modelo de Dois Fatores

Vejamos um modelo onde o valor da dívida é igual ao valor esperado da capacidade de pagamento, menos o valor final da dívida. Como *proxy* para a capacidade de pagamento tomamos o valor das reservas

internacionais que, em última instância, são os recursos para pagar a dívida. Esse é um procedimento semelhante ao utilizado por Das (1995) e Longstaff e Schwartz (1995) para avaliar dívidas de empresas em geral. No caso desses artigos, a capacidade de pagamento é o próprio ativo da empresa. No caso de um país, optamos pelas reservas porque essa é uma variável observável e muito sensível à situação macroeconômica, interna e externa. Desse modo, a evolução das reservas pode ser escrita como:

$$\frac{dR}{R} = \mu dt + \delta_1 dW_1 + \delta_2 dW_2 \quad (3.3)$$

onde: W_1 e W_2 são processos de Wiener que representam, respectivamente, choques da taxa de juro americana e fatores internos ao país.

δ_1 e δ_2 são as respectivas variâncias dos processos acima.

Quanto à taxa de juro americana, assumimos que as taxas a termo têm seu movimento dado por:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_1(t) \quad (3.4a)$$

A taxa de juro instantânea $r(t)$ a qualquer momento t é expressa pela taxa de juro a termo, segundo $r(t) = f(t, t)$, sendo assim o preço dos títulos sem risco são dados por:

$$P(t, T) = e^{\left[-\int_t^T f(t, y) dy \right]} \quad (3.4b)$$

onde $P(t, T)$ é o preço do título na data t com valor final \$1 e vencimento na data T .

Tomando o resultado de Amin e Jarrow (1992, pg 223) para o preço de ativos com risco numa economia estocástica, temos a seguinte lei para o preço a termo dos títulos:

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{\left\{ \int_t^T \int_0^t \sigma(y, s) a(y, s) dy ds - \int_0^t \left[\int_t^T \sigma(y, s) ds \right] d\tilde{W}_1(y) \right\}} \quad (3.4c)$$

$$\text{onde : } a(t, T) = - \int_t^T \sigma(t, v) dv$$

O valor das reservas na data T será então:

$$R(T) = R(0) B(T) e^{\left\{ -\frac{1}{2} [\delta_1^2 + \delta_2^2] T + \delta_1 \tilde{W}_1(T) + \delta_2 \tilde{W}_2(T) \right\}} \quad (3.4d)$$

onde $B(T)$ é fator de acumulação de juro entre a data 0 e T, dado por:

$$B(T) = \frac{1}{P(0, T)} e^{\left\{ \frac{1}{2} \int_0^T a(s, t)^2 ds - \int_0^T a(s, t) d\tilde{W}_1(s) \right\}} \quad (3.4e)$$

Supomos que o valor de uma dívida com valor final fixo (F) e vencimento na data T ($D(0, T)$) é dada por:

$$\begin{aligned} D(0, T) &= E \left\{ \text{Min} [R(T), F] / B(T) \right\} \\ &= E \left\{ [F - \text{Max}(0, F - R(T))] / B(T) \right\}. \end{aligned}$$

Pela paridade entre opção de venda e opção de compra temos:

$$FP(0, T) - E \left[\text{Max}(0, F - R(T)) / B(T) \right] = R(0) - E \left[\text{Max}(0, R(T) - F) / B(T) \right] \quad (3.5)$$

Para implementar esse modelo seguimos o mesmo procedimento adotado por Das(1995). Assumimos que o processo para a volatilidade é constante e igual a σ , semelhante ao modelo de Ho e Lee (1986), de modo que $a(t, T) = -\sigma(T-t)$.

Usando um resultado de Amin e Jarrow(1992, pg 224), obtemos a seguinte fórmula para o preço da dívida:

$$\begin{aligned} D(0, T) &= R(0) - E \left\{ \text{Max} [0, R(T) - F] / B(T) \right\} \\ &= R(0) - R(0) \Phi(K) + FP(0, T) \Phi(K - \psi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde: Φ é a distribuição normal acumulada

$$K = \frac{\ln \left[\frac{R(0)}{FP(0, T)} \right] + \frac{1}{2} \psi^2}{\psi}$$

$$\psi^2 = (\delta_1^2 + \delta_2^2) T + \delta_1 \sigma T^2 + \frac{\sigma^2 T^3}{3}$$

Estimamos os parâmetros de 3.3 com a equação abaixo:

$$\Delta R = a + d_1 \Delta Y + d_2 \Delta S \tag{3.7}$$

onde: ΔR é a variação contínua das reservas

ΔY é a variação das taxa de juro embutida no UST de 30 anos

ΔS é a variação contínua do índice BOVESPA em dólar

Com base numa amostra de dados trimestrais de junho de 1990 a setembro de 1995², extraída da revista Conjuntura Econômica, obtivemos os resultados abaixo através de estimação usando MQO.

a	d ₁	d ₂
0.085	0.127	0.115
(1.97)	(1.39)	(0.95)

A correlação entre variação da taxa de juro americana e do índice Bovespa, no período da amostra acima foi positiva e igual a 0.2. Essa é uma correlação baixa que diminui o efeito da multicolinearidade sob as estimativas de d_1 e d_2 . O sinal positivo da correlação também surpreendente, uma vez que se espera que aumento da taxa de juro diminua o preço das ações. Obviamente estamos tratando de ativos negociados em países diferentes. Para volatilidade da taxa a termo americana usamos 0.0148 ao ano, retirado de Gonçalves e Issler (1996). É interessante verificar a relação entre o prazo e a taxa implícita da dívida. Para isso, assumimos que a estrutura a termo americana pode ser descrita por um polinômio segundo:

² As reservas e o índice Bovespa foram obtidos da revista conjuntura econômica e a taxa de juro americana de várias edições do *Federal Reserve Bulletin*.

$$P(0, T) = e^{[-(a+bT-cT^2)T]} \quad (3.8)$$

Os coeficientes a, b e c foram estimados com base nas taxas implícitas em títulos do governo americano com um, dez e trinta anos de prazo para o vencimento. Seus valores foram obtidos do *Federal Reserve Bulletin* de setembro de 1995 e são $i_1=5.62\%$, $i_{10}=6.2\%$ e $i_{30}=6.55\%$. Deste conjunto obtivemos os seguintes parâmetros da equação 3.8:

$$\begin{aligned} a &= 0.0553837 \\ b &= 0.0008225 \\ c &= 0.0000162 \end{aligned}$$

Com base nesses parâmetros e na equação 3.8 desenhamos essa estrutura a termo no gráfico 3.4a.

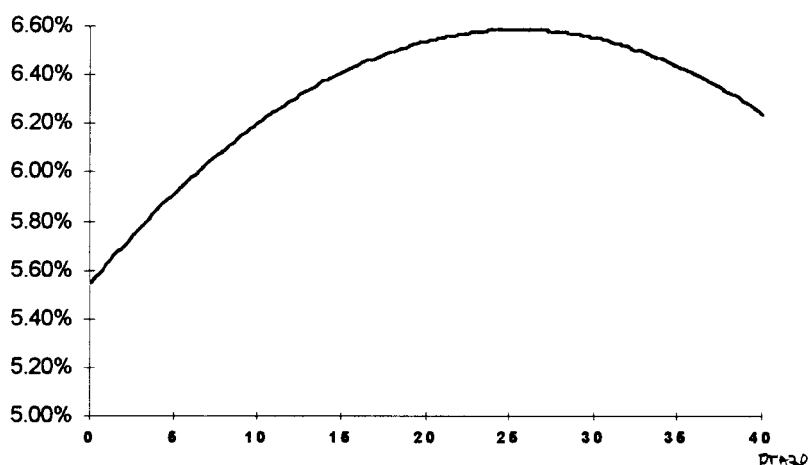


Gráfico 3.4a - Estrutura a Termo Corrente da Taxa de Juro Americana Assumindo um Formato Polinomial.

Em junho de 1995 a dívida externa brasileira tinha um prazo médio de 8.3 anos³ e era de US\$ 124.8 bilhões, dividida em US\$ 57.5 pagando taxa flutuante e US\$ 67.3 bilhões pagando taxa fixa⁴. Quanto às reservas, seu valor total era de US\$ 33.5 bilhões. Supondo que toda a dívida fosse com juro fixo, usamos o modelo acima para obter o valor presente da dívida e, consequentemente, a taxa implícita desta (TIR Brasil-

³ Chance (1990) mostra que a duração de um título com risco de crédito é diferente da duração de um título sem esse risco. Supomos que a dívida fixa e flutuante tem um prazo final único de 8.3 anos, uma vez que esta é a única estatística disponível.

⁴ Esses dados foram extraídos do boletim do Banco Central do Brasil de março de 1996.

TIRb). O gráfico 3.4 apresenta esse resultado: a TIRb cai substancialmente até o décimo-terceiro ano, e depois volta a subir.

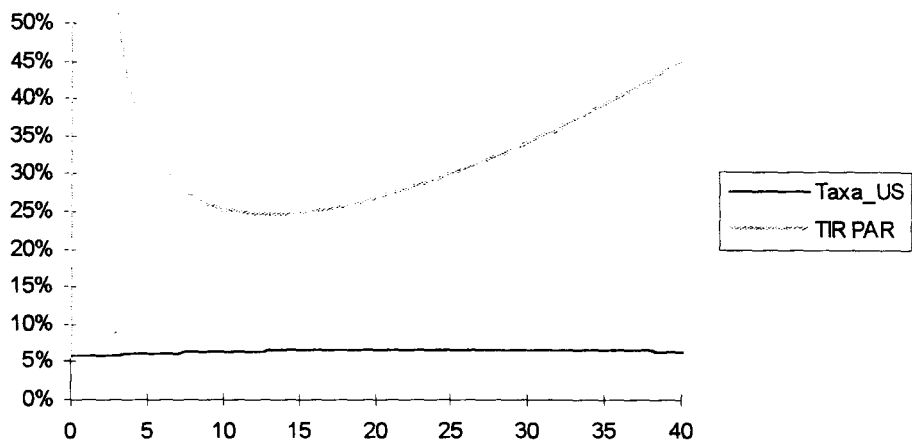


Gráfico 3.4 - Relação entre TIR da Dívida Brasileira e a Taxa de Juros Americana

O gráfico 3.5 apresenta o prêmio de risco em função do prazo da dívida. Verifica-se que a dívida com prazo pequeno demanda um alto prêmio de risco.

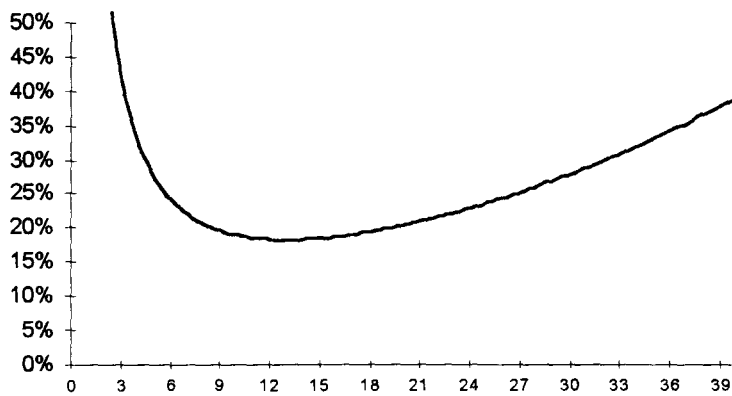


Gráfico 3.5 - Prêmio de Risco Versus Prazo da Dívida

No caso da dívida com juro flutuante e continuamente capitalizado, seu valor hoje é:

$$\begin{aligned}
 D_f(0,T) &= E\left\{ \text{Min}\left[R(T), F_0B(T) \right] / B(T) \right\} \\
 &= E\left[\frac{R(T)}{B(T)} - \text{Max}\left(0, \frac{R(T)}{B(T)} - F_0 \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Novamente assumimos o modelo de Amin e Jarrow e obtemos:

$$D_f(0, T) = R(0) - E \left[\text{Max} \left(0, \frac{R(T)}{B(T)} - F_0 \right) \right].$$

O segundo termo da equação acima é uma opção com solução no apêndice C. O valor dessa dívida é:

$$D_f(0, T) = R(0) - R(0)\Phi(K1) + F_0 \Phi(K1 - \psi1) \quad (3.10)$$

$$K1 = \frac{\text{Ln} \left[\frac{R(0)}{F_0} \right] + \frac{1}{2} \psi1^2}{\psi1}$$

$$\psi1^2 = (\delta_1^2 + \delta_2^2) T$$

Nesse caso, temos o valor hoje de uma dívida com valor inicial F_0 , como se seu preço de mercado fosse igual a $D_f(0, T)$. Portanto, como essa dívida varia com a taxa de juro americana, a diferença entre $D_f(0, T)$ e F é o próprio *spread* pago pelo país, que na forma anual e contínua, é dado por:

$$s = - \left(\frac{1}{T} \right) \text{Ln} \left(\frac{D_f(0, T)}{F_0} \right) \quad (3.11)$$

Assumindo os mesmos parâmetros estimados na equação 3.7 e uma dívida total e flutuante de \$50 para um valor inicial das reservas de \$50, temos no gráfico 3.6 o desenho da relação *spread* e tempo.

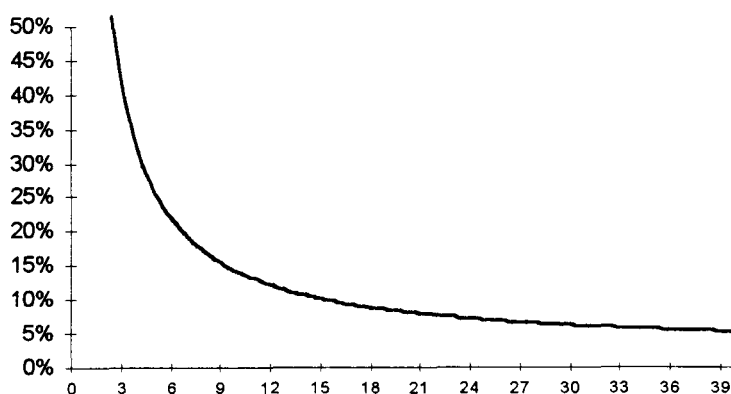


Gráfico 3.6 - Prêmio de Risco versus Prazo da Dívida

No caso da combinação de dívida com valor final fixo e flutuante, assumiremos o valor inicial para a dívida flutuante $F1$ e valor final para a dívida fixa $F2$, num total com valor inicial F .

$$F1 = x F \quad \therefore \quad F2 = (1 - x) F / P(0, T)$$

Nosso problema é obter o valor hoje desse total que chamamos $D_c(0, T)$:

$$D_c(0, T) = E \left\{ \text{Min} \left[R(T), xFB(T) + (1 - x) F / P(0, T) \right] / B(T) \right\} \quad (3.12)$$

Dada a dificuldade de calcular a distribuição da soma de duas variáveis lognormais, optamos por calcular o valor desta opção pelo método monte carlo, conforme as equações do apêndice D. Com base nessas equações e nos dados de junho de 1995 para o Brasil, temos no gráfico 3.7 o comportamento do *spread* para vários prazos. Quanto maior o prazo da dívida, menor o prêmio de risco pago pelo Brasil.

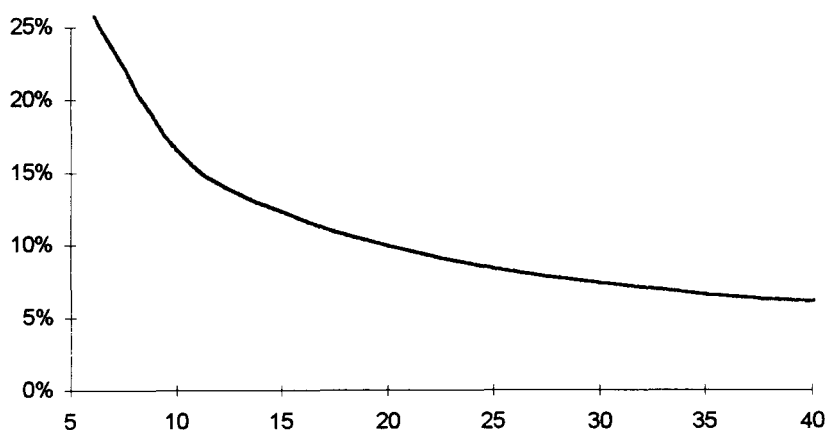


Gráfico 3.7 - Prêmio de Risco versus Prazo .

O efeito da combinação entre juro flutuante e fixo está no gráfico 3.8, de onde se verifica que, quanto maior a parcela flutuante da dívida, menor será o *spread*. Nesse gráfico tomamos o prazo corrente da dívida.

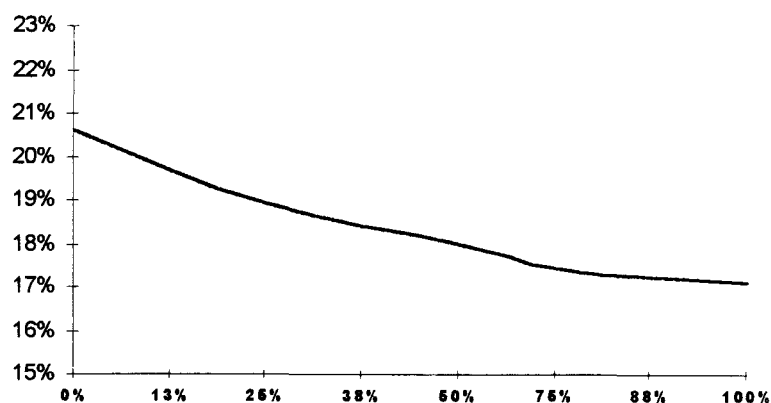


Gráfico 3.8 - Prêmio de Risco versus Percentual Fixo e Flutuante da Dívida.

Por fim, no gráfico 3.9 temos a combinação do efeito prazo com o percentual de juro flutuante da dívida.

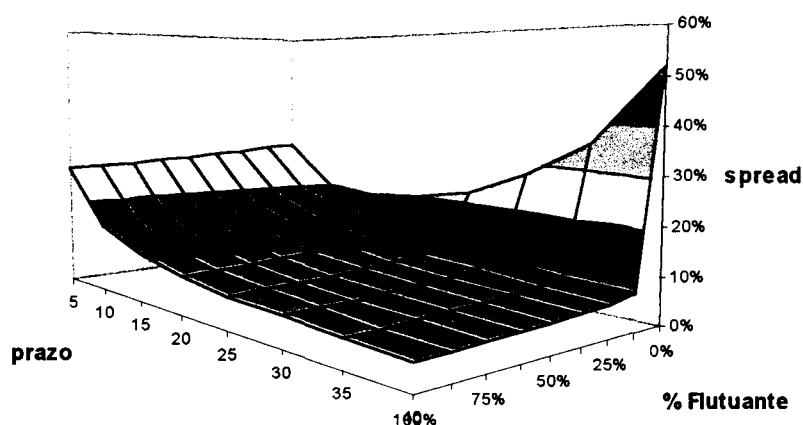


Gráfico 3.9 - Prêmio de Risco versus Prazo e Percentual com taxa Flutuante da Dívida

Os parâmetros δ_1 e δ_2 da equação 3.3, afetam positivamente a volatilidade da geração de reservas e, consequentemente, aumentam o spread do país. O governo brasileiro pode atuar através de choques positivos em dW_2 e diminuição da volatilidade dada por δ_2 . Outro resultado interessante é o efeito do volume de reservas sobre o spread; quanto maior a reserva, menor é o spread. Em junho de 1995 as reservas totais eram de US\$ 33.5 bilhões e spread dado pelo modelo era de 18.09%. Em dezembro de 1995 as reservas aumentaram para US\$ 51.8 bilhões. Tomando todos os outros dados do modelo como constantes, o spread

deveria cair para 14.2%. No mesmo período, o prêmio de risco implícito no Par Bond passou de 14.22% para 11.78%

4) Proteção Contra Variação da Taxa de Juro Americana.

Para calcular o efeito de uma variação não esperada da taxa de juro sobre a dívida, tomamos como referência a variação da taxa de juro de 10 anos. Para avaliar o impacto dessa variação sobre todo o modelo, integramos 3.4c e obtemos:

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{\left\{ -\frac{\sigma^2}{2} Tt(T-t) - \sigma(T-t) \tilde{W}_1(t) \right\}} \quad (3.13)$$

Fazendo T número de trimestres, uma variação dx na taxa de juro de 10 anos, entre o período 0 e 1, é dada por:

$$dx = -\frac{1}{39} \ln[P(1, 40)] + \frac{1}{40} \ln[P(0, 40)] \quad (3.14)$$

onde $P(1, 40)$ é dado por 3.13 e $P(0, 40)$ por 3.8.

Com as devidas substituições, podemos calcular qual o tamanho do choque aleatório $W_1(1)$ que gera uma variação dx na taxa de juro de 10 anos. No caso de uma variação de 1% na taxa de juro de 10 anos, a estrutura a termo corrente da equação 3.8 se desloca para cima, segundo o gráfico 3.10. Vale observar que esse deslocamento não é paralelo, portanto, o efeito de variações de taxa de prazos diferentes afetam as outras taxas de maneira não proporcional.

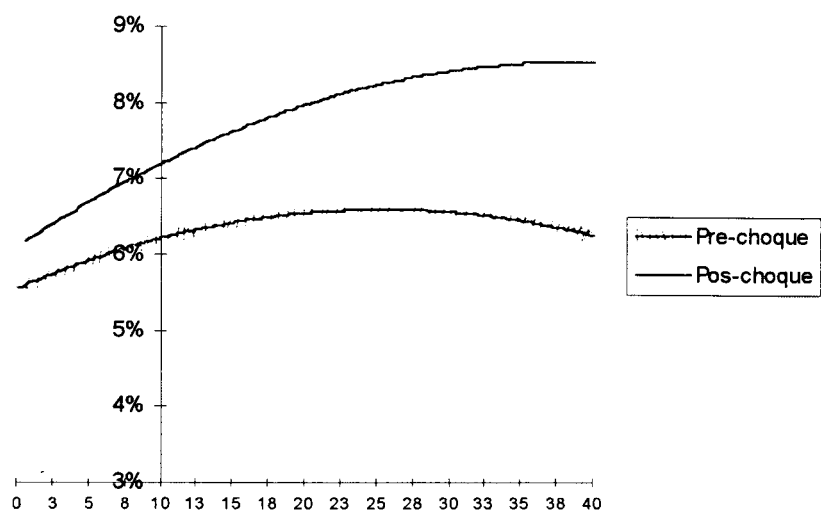


Gráfico 3.10 - Efeito de uma Variação de 1% na Taxa de 10 anos sobre a Estrutura a Termo Corrente

Para avaliar o efeito dessa variação da taxa de juro, adicionamos o choque aleatório $W_1(1)$ às equações D.5 e D.6 e recalculamos o preço pelo método de monte carlo. No gráfico 3.11 temos o preço da dívida para diversas variações da taxa de juro americana de 10 anos.

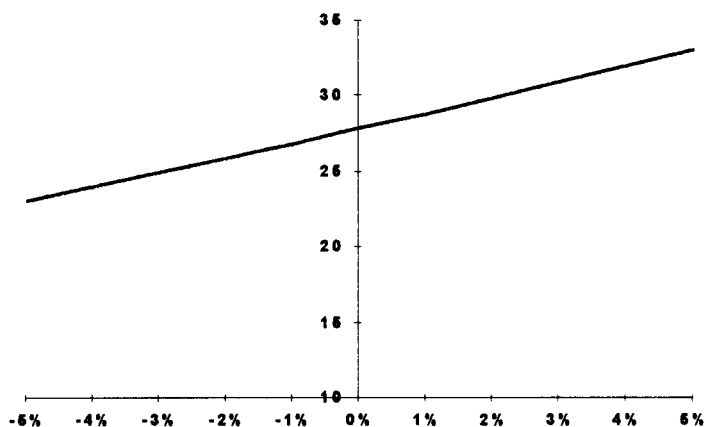


Gráfico 3.11 - Preço do Título de Dívida versus Variação da Taxa de Juro Americana.

No gráfico 3.12, podemos verificar uma relação decrescente e linear entre prêmio de risco e variação da taxa de juro americana. O coeficiente dessa reta é de -0.45 , portanto, um resultado que combina em sinal com a estimativa da equação 3.2, embora tenha um valor menor. Essa diferença talvez possa ser explicada pelas estimativas dos parâmetros da equação 3.3 ou por estarmos trabalhando nesse exemplo com o título de 10 anos.

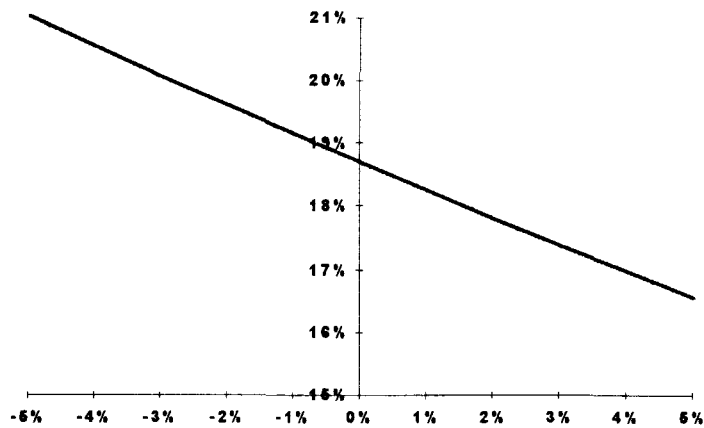


Gráfico 3.12 - Prêmio de Risco versus Variação da Taxa de Juro Americana.

O efeito de variação no percentual da dívida que paga juro flutuante pode ser avaliado no gráfico 3.13 onde temos a variação do prêmio de risco versus a variação da taxa de juro americana e do percentual de juro flutuante da dívida. O aumento do percentual flutuante da dívida torna a (quase) reta do gráfico 3.12 mais inclinada, o que implica numa sensibilidade maior à variação da taxa de juro.

A proteção contra efeito da taxa de juro americana, de uma carteira que contenha um título que apenas paga o prêmio de risco Brasil, deve ser feito com um ativo que aumente (diminua) de valor quando a taxa de juro americana diminuir (aumentar). Com esse ativo pode-se eliminar ganhos e perdas sobre a carteira com o título que paga o prêmio de risco. O exemplo para esse ativo pode ser um contrato futuro ou a termo sobre a taxa de juro americana.

Em artigo recente (Telljohann (1994)) publicado pela Chicago Board of Trade para os praticantes do mercado de *Brady Bonds*, encontram-se três estratégias diferentes de proteção para um Par Bond, contra variações da taxa de juro americana. A técnica utilizada é a de eliminar o efeito da variação da taxa de juro

americana sobre o Par Bond adquirindo um contrato futuro de taxa de juro americana⁵, que gere um efeito inverso para a mesma variação da taxa de juro americana. O efeito sobre o Par Bond é calculado com base em série histórica. As três estratégias diferem dependendo de hipóteses do efeito da taxa de juro americana sobre a qualidade de crédito do país emissor do título.

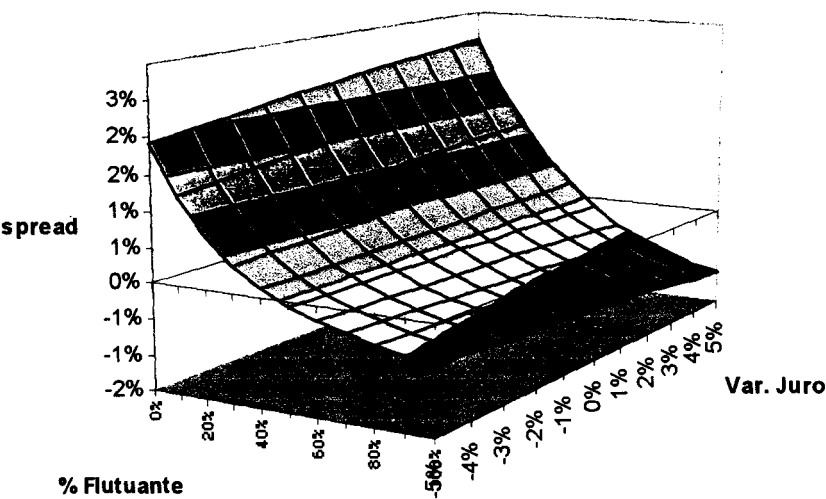


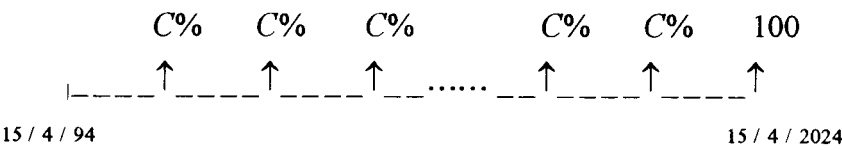
Gráfico 3.13 - Variação do Prêmio de Risco versus Variação da Taxa de Juro America e do Percentual Flutuante da Dívida.

Várias extensões podem ser feitas sobre esse modelo, como por exemplo: testar empiricamente o resultado da proteção com algum contrato futuro ou a termo, estudar o comportamento dos parâmetros da equação 3.3 para períodos diferenciados, avaliar implicitamente os parâmetros de 3.3, aplicar a outros títulos e países.

⁵ Pode ser um contrato futuro de título do governo americano negociado na *Chicago Board of Trade*.

Apêndice A - Cálculo da TIR do Par Bond

O diagrama do fluxo de caixa desse título é:



Onde: C_i são pagamentos semestrais nos dias 15/4 e 15/10 de cada ano, de juros de:

ANO	Juro Anual Pago Semestralmente
1º	4,00 %
2º	4,25 %
3º	5,00 %
4º	5,25 %
5º	5,50 %
6º	5,75 %
7º	6,00 %

C_1 e C_2 = dois pagamentos de juros, que são garantidos por títulos do tesouro americano (UST).

O valor final também é garantido por UST.

A Taxa Interna de Retorno desse título é simplesmente aquela que iguala o valor presente do título ao seu preço de mercado.

$$P = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{C_i}{(1 + TIR)^{t_i}} + \frac{100}{(1 + TIR)^{t_N}} \tag{A.1}$$

ou na forma contínua (r):

$$P = \sum_{i=1}^{N-1} C_i e^{-rt_i} + 100 e^{-rt_N}$$

No mercado costuma-se mostrar o preço sem capitalização dos juros. Mas, quando do pagamento, o valor final é o preço de mercado (também conhecido como *clean price*- P_c) mais os juros (*dirty price*- P_D).

O risco Brasil embutido no título costuma ser quantificado através da TIR calculada sobre o fluxo de caixa, sem qualquer garantia, que chamaremos TIR_B ou r_B na forma contínua. Nesse caso, o preço do título equivale à soma de três componentes:

1 - Valor presente do principal à taxa americana :

$$P_1 = 100 e^{-r_u t_N} \quad (A.2)$$

2 - Valor presente das garantias rolantes⁶, que depende da probabilidade de *default*.

$$P_2 = \sum_{i=1}^{N-1} p_i \left(C_i e^{-r_u t_i} + C_{i+1} e^{-r_u t_{i+1}} \right) \quad (A.3)$$

onde p_i é a probabilidade de default na data i , suposta ter distribuição exponencial com parâmetro s .

Essa distribuição combina com o resultado obtido por Cumby e Evans (1993) e Claessens e Pennacchi (1996) para *Bradies* mexicanos. Assim, a probabilidade em qualquer intervalo de tempo (t_i, t_{i+1}) é:

$$\begin{aligned} P(\tau < t_1) &= 1 - e^{-st_1} \\ P(t_i < \tau < t_{i+1}) &= e^{-st_i} - e^{-st_{i+1}} \end{aligned} \quad (A.4)$$

No gráfico A.1 abaixo, temos a probabilidade de default a cada período, para $s=7\%$.

⁶ Borensztein e Pennacchi (1990) calculam o valor dessas garantias usando teoria das opções.

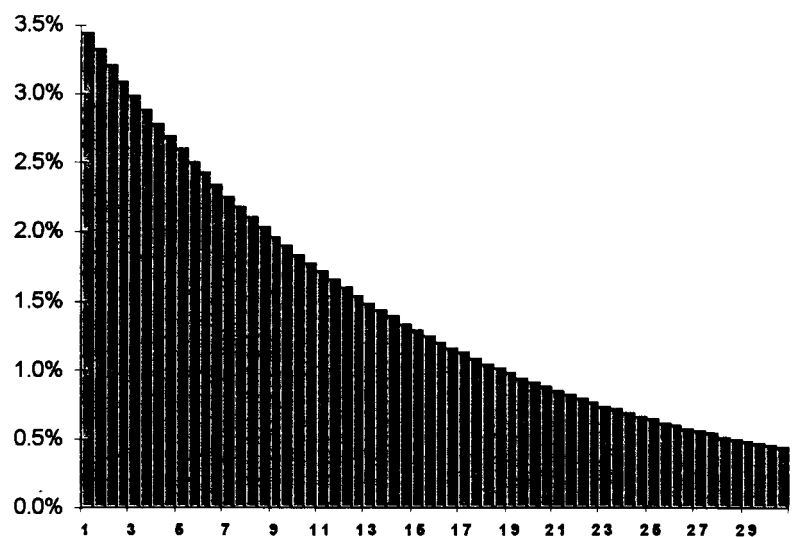


Gráfico A.1 - Probabilidade (Exponencial) de *Default* com Parâmetro $s=7\%$

No gráfico A.2 abaixo, temos a probabilidade acumulada de default para vários valores de s .

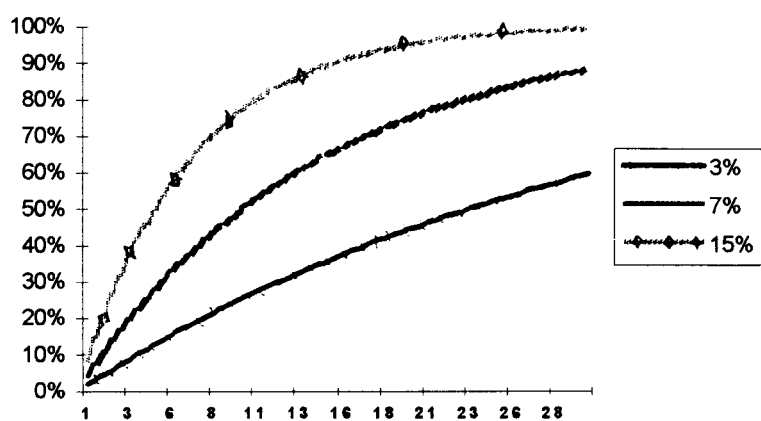


Gráfico A.2 - Probabilidade (Exponencial) Acumulada de *Default* para vários Parâmetros.

3 - Valor presente descontado à taxa de risco Brasil, que é igual a taxa americana mais o prêmio de risco Brasil.

$$P_3 = \sum_{i=1}^{N-1} C_i e^{-r_B t_i} \quad (\text{A.5})$$

onde: $r_B = r_u + s$

Então temos $P_D = P_1 + P_2 + P_3$. Para obtermos o valor de s , utilizamos um processo de iteração até obtermos um s tal que $P_D = P_1 + P_2 + P_3$. Tomamos também uma estrutura a termo para taxa de juro americana constante e igual à taxa de 30 anos.

Apêndice B - Principais Títulos da Dívida Externa Brasileira

Títulos do Plano Brady

Título	Juro	Amortização	Vencimento
PAR	FIXO	final	15/4/2024
C-Bond (Capitalization Bond)	fixo + capitalização de parte dos juros	periódica de 5.86%, começando em 15/4/2004	15/4/2014
DCB	flutuante Libor + (7/8)%	periódica de 5.88%, começando em 15/4/2004	15/4/2012
Discount	flutuante Libor + (13/16)%	final	15/4/2024

Não - Brady

Título	Juro	Amortização	Vencimento
IDU	flutuante Libor + (13/16)%	crescente e variada	1/1/2001
Eligible Interest - EI	flutuante Libor + (13/16)%	crescente e variada	15/4/2006

Apêndice C - Cálculo do Valor da Opção

Com base em Amin e Jarrow, temos:

$$E \left[\text{Max} \left(0, \frac{R(T)}{B(T)} - F_0 \right) \right] \quad (C.1)$$

$$R(T) = R(0) B(T) e^{\left\{ -\frac{1}{2} [\delta_1^2 + \delta_2^2] T + \delta_1 \tilde{W}_1(T) + \delta_2 \tilde{W}_2(T) \right\}}$$

onde $\delta_1 \tilde{W}_1(T) + \delta_2 \tilde{W}_2(T)$ e $\text{normal}(0, [\delta_1^2 + \delta_2^2] T)$

Fazendo $x = -\frac{1}{2} [\delta_1^2 + \delta_2^2] T + \delta_1 \tilde{W}_1(T) + \delta_2 \tilde{W}_2(T)$, procuramos:

$$E \left[R(0) e^{\tilde{x}} - F_0 \right]^+ = R(0) \left[\int_{F_0/R(0)}^{\infty} e^x f(e^x) d(e^x) - \frac{F_0}{R(0)} \int_{F_0/R(0)}^{\infty} f(e^x) d(e^x) \right]$$

A função f é a função densidade de uma lognormal e a solução da equação acima, segundo Ingersoll(1987, pg 14) é:

$$R(0) \left\{ e^{\left(\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2} \right)} \Phi \left(\frac{\mu_x - \text{Ln} \left(\frac{F_0}{R(0)} \right)}{\sigma_x} + \sigma_x \right) - \frac{F_0}{R(0)} \Phi \left(\frac{\mu_x - \text{Ln} \left(\frac{F_0}{R(0)} \right)}{\sigma_x} \right) \right\}$$

Com as devidas substituições para a média e a variância de x tem-se a fórmula 3.10.

Apêndice D - Monte Carlo para o Cálculo do Valor da Opção

Com base na equação 3.12, temos:

$$D_c(0, T) = E \left\{ \text{Min} \left[\frac{R(T)}{B(T)}, xF + (1-x) \frac{F}{P(0, T) B(T)} \right] \right\} \quad (\text{D.1})$$

onde segundo Amin e Jarrow:

$$\frac{R(T)}{B(T)} = R(0) e^{\left\{ -\frac{1}{2} [\delta_1^2 + \delta_2^2] T + \delta_1 \tilde{W}_1(T) + \delta_2 \tilde{W}_2(T) \right\}} \quad (\text{D.2})$$

$$B(T) = \frac{1}{P(0, T)} e^{\left\{ \frac{\sigma^2 T^3}{6} + \int_0^T \sigma(T-t) d\tilde{W}_1(t) \right\}} \quad (\text{D.3})$$

Tomamos ε_t como um número aleatório retirado de amostra normal com média zero e variância 1.

Sendo assim, calculamos as duas fontes de variação aleatória como:

$$\tilde{W}_2(T) = \varepsilon_t \sqrt{T} \quad (\text{D.4})$$

$$\tilde{W}_1(T) = \sum_{i=0}^{39} \varepsilon_i \sqrt{T/40} \quad (\text{D.5})$$

$$\int_0^T \sigma(T-t) d\tilde{W}_1(t) = \sigma \left\{ T \sum_{i=0}^{39} \varepsilon_i \sqrt{T/40} - \sum_{i=0}^{39} i \varepsilon_i \sqrt{T/40} \right\} \quad (\text{D.6})$$

Com essas equações geramos uma amostra para D.2 e D.3 e, consequentemente, D.1. O preço final

3.12 foi obtido pela média de 1000 corridas para a equação D.1.

Bibliografia

Amin, K. and R. Jarrow (1992) "Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy." *Mathematical Finance* 2, 217-237.

Bartholomeu, E. (1991) "Stripped Yield and Spread on Collateralized Bonds" Research Memorandum, J.P. Morgan, sep. 20.

Bohmer, E. and W. Megginson (1990) "Determinants of Secondary Market Prices for Developing Country Syndicated Loans" *The Journal of Finance* 5, 1517-1540.

Boletim do Banco Central do Brasil, março de 1996.

Borensztein, E. and G. Pennacchi (1990) "Valuation of Interest Payment Guarantees on Developing Country Debt" *IMF Staff Papers* 37, 4, 806-824.

Bulow, J. and K. Rogoff (1989) "A Constant Recontracting Model of Sovereign Debt" *Journal of Political Economy* 97, 155-178.

Bulow, J. and K. Rogoff (1989) "Sovereign Debt: Is to Forgive to Forget" *American Economic Review*, 43-50.

Chance, D. (1990) "Default Risk and Duration of Zero-coupon Bonds" *Journal of Finance* 45, 1457-69.

Claessens, S. and G. Pennacchi (1996) "Estimating the Likelihood of Mexican Default from the Market Prices of Brady Bonds" *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31, 109-126.

Claessens, S. and S. Van Wijnbergen (1994 - 5) "Secondary Market Prices and Mexico's Brady Deal" *Quarterly Journal of Economics*; pg 965-82.

Cohen, D. (1993) "A Valuation Formula for LDC Debt with Same Application to Debt Relief" *Journal of Internacional Economics* XLIII, 167-80.

Cumby, R. and M. Evans (1993) "Measuring Current and Anticipated Future Credit Quality: Estimates from Brady Bonds" Working Paper no. S-93-44, New York University Salomon Center.

Das, S. (1995) "Credit Risk Derivatives" *The Journal of Derivatives*, spring.

Duarte, A. M. and Sérgio Werlang (1995) "A Model to Estimate the US Term Structure of Interest Rates." EPGE-FGV Ensaios Econômicos 273.

Fabozzi, F. (ed.) (1991) "The Handbook of Fixed Income Securities." Business One Irwin-USA.

Fabozzi, F. and H. G. Fong (1994) "Advanced Fixed Income Portfolio Management: The State of Art" Probus Publishing Company- USA.

Federal Reserve Bulletin , varios números.

Gonçalves, F. and J. Issler (1996) "Estimating the Term Structure of Volatility and Fixed Income Derivative Pricing." Journal of Fixed Income, June.

Hajivassiliou, V. (1989) "Do the Secondary Market Believe in Life After Debt?" Cowles Foundation Discussion Paper 911.

Hamilton, J. (1984) "Time Series Analysis" Princeton University Press.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1992) "Bond Pricing and the Term Structure of the Interest Rates: A New Methodology," Econometrica, 60,1 , 77-105.

Ho, T.S. Y., and S.-B. Lee (1986) "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," Journal of Finance, 41 , 1011-29. TTT

Hull, J. (1992) "Options, Futures and other Derivatives Securities" Prentice-Hall.

Ingersoll, J. (1987) "Theory of Financial Decision Making" Rowman & Littlefield Publishers.

Longstaff, F. (1990) "Valuing Options on Yields" Journal of Financial Economics 26, 97-121.

Longstaff, F. and E. Schwartz (1995) "A Simple Approach to Valuing Risk Fixed and Floating Rate Debt" Journal of Finance, forthcoming.

Marques, M. e Sergio Werlang (1989) "Moratória Interna, Dívida Pública e Juros Reais" Pesquisa e Planejamento Econômico, 19-44.

Merton, R. (1974) "On The Pricing of Corporate Debt, The Risk Structure of Interest Rates" Journal of Finance, 449-470.

Purcell, J. and D. Orlanski (1988) "Developing Country Loans: A new Valuation Model for Secondary Market Trading: Salomon Brothers.

Ramaswamy, K. and S. Sundaresan (1986) "The Valuation of Floating Rate Investments: Theory and Evidence." *Journal of Financial Economics* 17, 251-272.

Reed, N. (1994) "The Brady Crunch" *Risk Magazine*, november.

Sachs, J. (editor) (1989) "Developing Country Debt and the World Economy" National Bureau of Economic Research., Chicago.

Telljoham, K (1994) "Quantifying and Isolating the U.S. Interest Rate Component of a Brady Par Bond" Chicago Board of Trade.