

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA EM PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
MESTRADO EM FINANÇAS E ECONOMIA EMPRESARIAL

ANDRÉ LUÍS WERNER

UM ESTUDO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE PREÇOS DE COMMODITIES E SEUS
DETERMINANTES

RIO DE JANEIRO

Maio de 2008

ANDRÉ LUÍS WERNER

UM ESTUDO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE PREÇOS DE COMMODITIES E SEUS
DETERMINANTES

Dissertação submetida ao corpo docente
da Escola de Pós-Graduação em Eco-
nomia da Fundação Getúlio Vargas -
EPGE / FGV, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do grau de Mestre
em Finanças e Economia Empresarial

Orientador: Alexandre Lowenkron

RIO DE JANEIRO

Maio de 2008

ANDRÉ LUÍS WERNER

UM ESTUDO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE PREÇOS DE COMMODITIES E SEUS
DETERMINANTES

Dissertação submetida ao corpo docente
da Escola de Pós-Graduação em Econo-
mia da Fundação Getúlio Vargas - EPGE
/ FGV, como parte dos requisitos ne-
cessários à obtenção do grau de Mestre
em Finanças e Economia Empresarial

Aprovada em 23 de maio de 2008

BANCA EXAMINADORA

Prof. Alexandre Lowenkron (Orientador)
Banco BBM

Prof. Marco Antonio Cesar Bonomo
EPGE/FGV

Prof. Carlos Eugênio Ellery Lustosa da Costa
EPGE/FGV

Resumo

São dois os objetivos deste trabalho. O primeiro é apresentar o resultado da aplicação de dois modelos de preços de commodities (Reversão à média e Short-Term Variations / Long-Term Dynamics) a série de preços de três metais industriais: cobre, alumínio e níquel. Dentre os resultados obtidos no modelo Short-Term Variations / Long-Term Dynamics, obtemos as estimativas das séries históricas de duas variáveis não-observáveis: Preço de equilíbrio e Desvio de curto prazo do preço. Enquanto preço de equilíbrio pode ser relacionado através da teoria econômica a fatores de difícil observação ou não observáveis como, por exemplo, o custo marginal de produção, o desvio de curto prazo do preço pode ser relacionado a pelo menos uma variável com indicador observável: nível de estoques.

Dada a relação empírica verificada entre a série de desvios de curto prazo estimada e o nível de estoques observado, o segundo objetivo deste estudo é propor a extensão do modelo Short-Term Variations / Long-Term Dynamics para que considere explicitamente informações referentes a níveis de estoque.

Com este trabalho pudemos concluir que a especificação do modelo Short-Term Variations / Long-Term Dynamics traz um ganho de informação para o analista, estimando realisticamente variações no preço de equilíbrio e nível do desvio de curto prazo. Observamos ainda a existência de relação entre o desvio de curto-prazo e níveis de estoque.

Através da introdução da informação relativa a estoque no modelo Short-Term / Long-Term pudemos verificar que o prêmio de escassez afeta a formação do preço do cobre e níquel, e potencialmente do alumínio, através de relações semelhantes.

Do ponto de vista de previsão, pudemos observar que nenhum dos modelos tem poder de previsão consistentemente superior ao passeio aleatório. O modelo Short-Term / Long-Term apresenta a segunda melhor performance e o modelo proposto perde poder de previsão significativamente em horizontes maiores que um ano.

Palavras-Chave: Processo Estocástico, Commodities

Abstract

There are two goals in this work. The first one is to present the result of two commodities price models (mean-reversion and Short-Term Variations / Long-Term Dynamics) applied to three industrial metal historical prices, namely copper, aluminum and nickel. Among the results of the Short-Term Variations / Long-Term Dynamics we obtain estimates for historical series for two non-observable variables: Equilibrium Prices and Short-Term Price Deviations. While Equilibrium Prices can be related by economic theory to factors that are hard or impossible to be observed as marginal production cost, Short-Term Price Deviations can be linked to at least one observable variable: Inventory Levels.

Considering the empiric relationship observed between estimated Short-Term Price Deviations and observed inventory levels, the second goal of this work is to propose the extension of the Short-Term Variations / Long-Term Dynamics model to explicitly consider inventory level information.

With this work we could conclude that there is information gain with the use of Short-Term Variations / Long-Term Dynamics model, estimating realistically changes in equilibrium prices and short-term price deviations. We could also observe a significant relationship between short-term deviations and inventory level.

Through the use of inventory level information in the Short-Term Variations / Long-Term Dynamics model we could verify that scarcity premium affects copper, nickel and, potentially, aluminum prices through the same kind of relationship.

We could also verify that none of the models has higher forecasting power consistently superior to random walk. The Short-Term Variations / Long-Term Dynamics model presents the second best performance and the proposed model extension loses power on forecasting periods longer than one year.

Key Words: Stochastic Process, Commodities

Para minha amada esposa Luciana.

Sumário

1	Objetivos	p. 7
2	Descrição dos Modelos de Preços de Commodities	p. 8
2.1	Especificação do modelo de reversão à média	p. 8
2.2	Especificação do modelo Short-Term / Long-Term	p. 11
3	Resultados Empíricos	p. 15
3.1	Dados utilizados	p. 15
3.2	Estimação dos parâmetros	p. 15
3.3	Modelos na forma estado-espço	p. 17
3.4	Resultados dos Modelos	p. 19
3.5	Relação entre Desvio de Curto-Prazo e Nível de Estoques	p. 22
4	Expansão do modelo de Short-Term Variations / Long-Term Dynamics	p. 25
4.1	Especificação e estimação do modelo	p. 25
4.2	Estimação e Resultados	p. 29
5	Comparação entre os Modelos	p. 35
6	Conclusão	p. 39
	Referências	p. 40

1 Objetivos

São dois os objetivos deste trabalho. O primeiro é apresentar o resultado da aplicação de dois modelos de preços de commodities (Reversão à média e Short-Term Variations / Long-Term Dynamics) a série de preços de três metais industriais: cobre, alumínio e níquel. Dentre os resultados obtidos no modelo Short-Term Variations / Long-Term Dynamics, obtemos as estimativas das séries históricas de duas variáveis não-observáveis: Preço de equilíbrio e Desvio de curto prazo do preço. Enquanto preço de equilíbrio pode ser relacionado através da teoria econômica a fatores de difícil observação ou não observáveis como, por exemplo, o custo marginal de produção, o desvio de curto prazo do preço pode ser relacionado a pelo menos uma variável com indicador observável: nível de estoques.

Dada a relação empírica verificada entre a série de desvios de curto prazo estimada e o nível de estoques observado, o segundo objetivo deste estudo é propor a extensão do modelo Short-Term Variations / Long-Term Dynamics para que considere explicitamente informações referentes a níveis de estoque. De forma a verificar se há ganho no poder de previsão através da especificação proposta do modelo, comparamos o erro de previsão no horizonte de um mês nos três modelos.

2 Descrição dos Modelos de Preços de Commodities

Modelos de preços de commodities baseados no conceito de reversão a um preço de equilíbrio tem o apelo intuitivo do argumento da tendência ao equilíbrio na relação entre oferta e demanda. De forma geral quando preços estão acima de um dado preço de equilíbrio produtores de alto (baixo) custo entrarão (sairão) do mercado, pressionando os preços para baixo (para cima).

Nesta seção apresentamos a aplicação de dois modelos de preços de commodities que são desenvolvidos a partir deste conceito. O primeiro, denominado neste trabalho modelo de reversão à média, descreve o processo de evolução do preço a vista como função de um preço de equilíbrio constante.

A percepção de que o preço de equilíbrio pode variar ao longo do tempo devido a mudanças estruturais na indústria, como novas tecnologias e desenvolvimento de novos mercados, nos leva ao segundo modelo que descreve o preço a vista como sendo composto por duas variáveis: o preço de equilíbrio, determinado por efeitos duradouros sobre a estrutura da indústria, e o desvio de curto-prazo com relação a este preço de equilíbrio, determinado por fatores que tendem a ter efeito não persistente sobre o preço, como greves e condições climáticas. Neste trabalho denominamos este segundo modelo Short-Term / Long-Term.

A especificação do modelo descrita a seguir tem por objetivo obter a função de evolução das variáveis-estado dos modelos ao longo do tempo, e a relação entre estas variáveis e os preços futuros observados no mercado. Estas equações serão utilizadas no processo de estimação dos parâmetros descrito no capítulo 3.

2.1 Especificação do modelo de reversão à média

Em nossa análise utilizamos o modelo de um fator apresentado em Schwartz 1997 onde assume-se que a variável-estado representando o logaritmo do preço a vista segue um processo de reversão à média do tipo Ornstein-Uhlenbeck como o especificado a seguir.

Definindo o processo estocástico do preço a vista S da commodity como

$$dS = \kappa(\mu - \ln S)Sdt + \sigma Sdz$$

e a função $X(S) = \ln S$, aplicamos o lema de Ito obtendo

$$dX = \left(\frac{1}{S} \kappa(\mu - X)S + 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{1}{S} \sigma S dz$$

simplificando

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz$$

onde $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$,

A versão em tempo discreto do processo real para $\Delta t = \frac{T}{n}$ é dada por

$$X_{t+1} - X_t = \kappa(\alpha - X_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}N(0, 1)$$

isolando X_{t+1}

$$X_{t+1} = \kappa\alpha\Delta t + (1 - \kappa\Delta t)X_t + \sigma\sqrt{\Delta t}N(0, 1)$$

Sabemos de Harvey 1989 que em um processo na forma $x_t = c + Tx_{t-1} + \eta_t$, onde η é um vetor de variáveis aleatórias com valor esperado zero e matriz de covariância Q , o vetor esperança e a matriz de covariância n-passos a frente são dados recursivamente por:

$$E(x_{t+1}) = c + Tx_t$$

$$Var(x_{t+1}) = TVar(x_t)T' + Q$$

com $c = \kappa\alpha\Delta t$, $T = (1 - \kappa\Delta t)$ e $Q = \sigma^2\Delta t$ temos

$$E(X_{t+1}) = \kappa\alpha\Delta t + (1 - \kappa\Delta t)X_t$$

$$Var(X_{t+1}) = (1 - \kappa\Delta t)^2 Var(\alpha_t) + \sigma^2\Delta t$$

Resolvendo recursivamente para X_0 e $Var(X_0) = 0$, obtemos:

$$E(X_t) = \alpha(1 - (1 - \kappa\Delta t)^t) + (1 - \kappa\Delta t)^t X_0$$

$$Var(X_t) = \frac{(-1 + (1 - \kappa \Delta t)^{2t}) \sigma_X^2}{\kappa(-2 + \Delta t \kappa)}$$

Tomando o limite para $n \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$

$$E(X_t) = \alpha(1 - e^{-t\kappa}) + e^{-t\kappa}X_0 \quad (2.1)$$

$$Var(X_t) = \frac{(1 - e^{-2\kappa t}) \sigma_X^2}{2\kappa} \quad (2.2)$$

Como X é normalmente distribuído e $X = \ln(S)$, S é log-normalmente distribuído com

$$E(S_t) = \exp(E(X_t) + \frac{1}{2}Var(X_t))$$

O preço de longo prazo pode ser obtido tomando o limite $t \rightarrow \infty$ em $E(S_t)$ obtendo

$$S_{LP} = e^{\mu - \frac{\sigma^2}{4\kappa}} \quad (2.3)$$

Obtemos o processo neutro-ao-risco equivalente deduzindo o prêmio de risco λ da tendência do processo real:

$$dS = \kappa(\mu - \ln S - \lambda)Sdt + \sigma Sdz$$

$$dX = \kappa(\alpha^* - X)dt + \sigma dz$$

Onde $\alpha^* = \mu - \lambda - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$,

segundo os mesmos passos realizados no processo real

$$E(X_t)^* = \alpha^*(1 - e^{-t\kappa}) + e^{-t\kappa}X_0$$

$$Var(X_t)^* = \frac{(1 - e^{-2\kappa t}) \sigma_X^2}{2\kappa}$$

Na metodologia neutra-ao-risco de apreçamento o preço futuro de um ativo é dado pelo valor esperado no processo neutro-ao-risco, logo

$$\log(Fut(S, T)) = \log(E^*(S(T))) = \alpha^*(1 - e^{-T\kappa}) + e^{-T\kappa}X_T + \frac{(1 - e^{-2\kappa T}) \sigma_X^2}{4\kappa} \quad (2.4)$$

2.2 Especificação do modelo Short-Term / Long-Term

Em nosso estudo utilizamos o modelo proposto em Schwartz e Smith 2000. Iniciamos a análise com a decomposição do logaritmo do preço spot de uma commodity em dois fatores estocásticos (variáveis-estado):

$$\log Y_t = \chi_t + \xi_t$$

onde:

$\chi_t \rightarrow$ Desvio de curto prazo do preço

$\xi_t \rightarrow$ Preço de equilíbrio

χ_t reverte para zero através de um processo de reversão à media do tipo Ornstein-Uhlenbeck representando variações temporárias como, por exemplo, déficit energético e estados de greve.

$$d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi$$

ξ_t segue o movimento estocástico browniano representando variações estruturais de natureza mais duradoura, como desenvolvimentos de novos mercados e mudanças tecnológicas.

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi$$

dz_χ e dz_ξ são incrementos brownianos correlacionados

$$dz_\chi dz_\xi = \rho_{\chi\xi} dt$$

O coeficiente de reversão κ representa a velocidade com que os desvios de curto prazo desaparecem, ou seja, a velocidade com que o logaritmo do preço spot reverte para equilíbrio ξ . O parâmetro μ indica a variação média do preço de equilíbrio e σ_χ e σ_ξ são as volatilidades dos processos de curto-prazo e de equilíbrio respectivamente.

A aproximação do processo real para tempo discreto com n intervalos de duração $\Delta t = \frac{T}{n}$ é dada por:

$$\chi_t - \chi_{t-1} = -\kappa\chi_{t-1}\Delta t + \sigma_\chi N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$$

$$\chi_t = (1 - \kappa)\chi_{t-1}\Delta t + \sigma_\chi N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$$

e

$$\xi_t - \xi_{t-1} = \mu_\xi \Delta t + \sigma_\xi N(0, 1) \sqrt{\Delta t}$$

$$\xi_t = \xi_{t-1} + \mu_\xi \Delta t + \sigma_\xi N(0, 1) \sqrt{\Delta t}$$

Podemos rescrever o processo real em forma matricial como

$$x_t = c + T x_{t-1} + \eta_t$$

$$x_t = \begin{bmatrix} \chi_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_\xi \Delta t \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde $\phi = 1 - \kappa \Delta t$ e η_t é um vetor 2 x 1 de ruídos normalmente distribuídos e serialmente não correlacionados com $E[\eta_t] = 0$ e

$$Var[\eta_t] = Q = \begin{bmatrix} \sigma_\chi^2 \Delta t & \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t \\ \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t & \sigma_\xi^2 \Delta t \end{bmatrix}$$

Dado este processo, o vetor esperança ($E(x_t)$) e a matriz de variância-covariância ($Var(x_t)$) para t passos a frente são dados recursivamente por:

$$E(x_{t+1}) = c + T x_t \text{ e } Var(x_{t+1}) = T Var(x_t) T' + Q$$

Dados $x_0 = [\chi_0, \xi_0]$ e $Var(x_0) = 0$ e aplicando a recursividade, encontramos:

$$E(x_t) = [\phi^t \chi_0, \xi_0 + \mu_\xi t \Delta t]$$

$$Var(x_t) = \begin{bmatrix} \sigma_\chi^2 \Delta t \frac{1-\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2} & \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t \frac{1-\phi^{t-1}}{1-\phi} \\ \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t \frac{1-\phi^{t-1}}{1-\phi} & \sigma_\xi^2 t \Delta t \end{bmatrix}$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ e $\Delta t = \frac{T}{n} \rightarrow 0$ obtemos as formas analíticas para a distribuição condicional das variáveis-estado no tempo t . χ_t e ξ_t são conjuntamente normalmente distribuídos com valor esperado e matriz de covariância:

$$E[(\chi_t, \xi_t)] = [e^{-\kappa t} \chi_0, \xi_0 + \mu_\xi t] \quad (2.5)$$

$$\text{Cov}[(\chi_t, \xi_t)] = \begin{bmatrix} \frac{(1-e^{-2\kappa t})}{2\kappa} \sigma_\chi^2 & \frac{(1-e^{-\kappa t})}{\kappa} \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \\ \frac{(1-e^{-\kappa t})}{\kappa} \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi & \sigma_\xi^2 t \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Dados χ_0 e ξ_0 , o logaritmo do preço spot no tempo t é normalmente distribuído com esperança e variância:

$$\begin{aligned} E[\log(S_t)] &= e^{-\kappa t} \chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi t \\ \text{Var}[\log(S_t)] &= \frac{(1-e^{-2\kappa t})}{2\kappa} \sigma_\chi^2 + \sigma_\xi^2 t + 2 \frac{(1-e^{-\kappa t})}{\kappa} \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \end{aligned}$$

O processo neutro ao risco é obtido através da introdução de dois novos parâmetros, λ_χ e λ_ξ , que representam prêmios de risco na forma de ajuste na tendência do processo estocástico.

$$\begin{aligned} d\chi_t &= (-\kappa\chi_t - \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dz_\chi^* \\ d\xi_t &= (\mu_\xi - \lambda_\xi)dt + \sigma_\xi dz_\xi^* \end{aligned}$$

onde dz_χ^* e dz_ξ^* são incrementos brownianos correlacionados com $dz_\chi^* dz_\xi^* = \rho_{\chi\xi} dt$

Seguindo derivação similar à do processo real, encontramos que no processo neutro-ao-risco χ_t e ξ_t são conjuntamente normalmente distribuídos com esperança e matriz de variância-covariância:

$$\begin{aligned} E^*[(\chi_t, \xi_t)] &= [e^{-\kappa t} \chi_0 - (1-e^{-\kappa t}) \lambda_\chi, \xi_0 + \mu_\xi^* t] \\ \text{Cov}^*[(\chi_t, \xi_t)] &= \text{Cov}[(\chi_t, \xi_t)] \end{aligned}$$

O logaritmo do preço spot no processo neutro-ao-risco no tempo t , $\log(S_t) = \chi_t + \xi_t$, é normalmente distribuído com

$$\begin{aligned} E^*[\log(S_t)] &= e^{-\kappa t} \chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi^* t - (1-e^{-\kappa t}) \frac{\lambda_\chi}{\kappa} \\ \text{Var}^*[\log(S_t)] &= \text{Var}[\log(S_t)] \end{aligned}$$

Denominando $F_{T,0}$ o valor atual para um contrato futuro com vencimento em T , seu valor é dado pelo valor esperado do preço spot no processo neutro-ao-risco:

$$\begin{aligned} \log(F_{S,T}) &= \log(\mathbb{E}^*[S_T]) = \mathbb{E}^*[\log(S_T)] + \frac{1}{2} \text{Var}[\log(S_T)] = \\ &e^{-\kappa T} \chi_0 + \xi_0 + A(T) \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde:

$$A(T) = \mu_{\xi}^* T - (1 - e^{-\kappa T}) \frac{\lambda_{\chi}}{\kappa} + \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - e^{-2\kappa T})}{2\kappa} \sigma_{\chi}^2 + \sigma_{\xi}^2 T + 2 \frac{(1 - e^{-\kappa T})}{\kappa} \rho_{\chi\xi} \sigma_{\chi} \sigma_{\xi} \right)$$

3 *Resultados Empíricos*

3.1 Dados utilizados

Na estimação dos modelos utilizamos preços futuros diários em dólares norte-americanos publicados pela London Metal Exchange (LME), no período de abril de 1997 a dezembro de 2007 (2770 observações para cada série de preços futuros), para uma tonelada de cobre, alumínio e níquel e vencimentos em três, quinze e vinte e sete meses. Utilizamos também dados de estoque dos mesmos metais, em toneladas e também publicados pela LME.

Na comparação da eficiência de previsão dos modelos incluímos as séries de preço a vista e futuros com vencimento em 63 meses, esta última disponível apenas para cobre e alumínio.

3.2 Estimação dos parâmetros

O filtro de kalman é um algoritmo utilizado para estimar variáveis-estado não observáveis utilizando o conjunto de informações disponíveis no tempo t . Para que se utilize o filtro de kalman é necessário especificar o modelo na forma espaço-estado, estruturado basicamente em dois conjuntos de equações: o primeiro grupo determinando o comportamento das variáveis-estado ao longo do tempo (equações de transição) e o segundo especificando a relação entre as variáveis-estado e variáveis observáveis (equações de mensuração).

Utilizando a nomenclatura estabelecida em Harvey (1989), especificamos a equação de transição como:

$$\alpha_t = c + T\alpha_{t-1} + \eta_t$$

onde:

$$E(\eta) = 0 \text{ e } Var(\eta) = Q$$

As equações de mensuração, utilizadas para relacionar desvio de curto prazo, preço de

equilíbrio e preços do mercado futuro, tem a forma:

$$y_t = d + Z\alpha_t + \varepsilon_t$$

onde:

$$E(\varepsilon) = 0 \text{ e } Var(\varepsilon) = H$$

A matriz de variância-covariância H representa os erros de mensuração do preço futuro, originados, por exemplo, por questões de liquidez e momento da última negociação.

Na forma espaco-estado c, T, Q, d, Z e H são denominadas matrizes do sistema e variáveis que as compõem são denominados hiperparâmetros.

Definimos ainda a_t como o estimador ótimo das variáveis-estado dada a informação disponível em t ($\alpha_t | I_t$) e P_t como a matriz de covariância do erro de estimação $[(\alpha_t - a_t)(\alpha_t - a_t)']$.

Dado um conjunto de valores para os hiperparâmetros e valores de inicialização para a_0 e P_0 , o filtro de kalman é iniciado com as equações de previsão de a_1 e P_1 dado o conjunto de informação disponível em t_0 . As equações utilizadas neste passo são chamadas equações de previsão:

$$a_{t|t-1} = Ta_{t-1} + c$$

$$P_{t|t-1} = TP_{t-1}T' + Q$$

Com o surgimento de novas informações (ex: fechamento do mercado futuro) em $t=1$, atualizamos o estimador a_1 e a matriz de covariância P_1 através das equações de atualização:

$$a_t = a_{t|t-1} + P_{t|t-1}Z'F_t^{-1}v$$

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}Z'F_t^{-1}ZP_{t|t-1}$$

onde

$$F_t = ZP_{t|t-1}Z' + H$$

$$v = y_t - Za_{t|t-1} - d$$

Com os estimadores atualizados para a informação disponível em t_1 retornamos à equação de previsão para obter os estimadores das variáveis-estado para t_2 e assim sucessivamente.

A estimação dos hiperparametros foi feita através da maximização através de método numérico

da função de logverossimilhança dada por:

$$\log L = \frac{-NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(|F_t|) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T v_t' F_t^{-1} v_t$$

3.3 Modelos na forma estado-estado

Para transcrever os modelos apresentados para a forma estado-estado utilizamos as equações de esperança e variância das variáveis estado no processo real e a equação que relaciona estas variáveis ao preço futuro observado.

A. Modelo de reversão à Média

Das equações de valor esperado (2.1) e variância (2.2) do preço a vista no processo real podemos escrever a equação de transição como:

$$\alpha_t = c + T\alpha_{t-1} + \eta_t$$

$$\alpha_t = X_t$$

$$c = \alpha(1 - e^{-\kappa t})$$

$$T = e^{-\kappa t}$$

$$E(\eta_t) = 0$$

$$Q = \text{Var}(\eta_t) = \frac{(1 - e^{-2\kappa t})\sigma_X^2}{2\kappa}$$

A equação de mensuração pode ser escrita a partir da esperança do preço a vista no processo neutro-ao-risco (2.4) como:

$$y_t = d + Z\alpha_t + \varepsilon_t$$

$$y_t = \begin{bmatrix} \ln(F_{3M}) \\ \ln(F_{15M}) \\ \ln(F_{27M}) \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} \alpha^*(1 - e^{-T_{3M}\kappa}) + \frac{(1 - e^{-2\kappa T_{3M}})\sigma_X^2}{4\kappa} \\ \alpha^*(1 - e^{-T_{15M}\kappa}) + \frac{(1 - e^{-2\kappa T_{15M}})\sigma_X^2}{4\kappa} \\ \alpha^*(1 - e^{-T_{27M}\kappa}) + \frac{(1 - e^{-2\kappa T_{27M}})\sigma_X^2}{4\kappa} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} e^{-T_{3M}\kappa} \\ e^{-T_{15M}\kappa} \\ e^{-T_{27M}\kappa} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_t(0, H), H = \begin{bmatrix} \sigma_{3M}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{15M}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{27M}^2 \end{bmatrix}$$

B. Modelo de Short-Term / Long-Term

Das equações de valor esperado (2.5) e variância (2.6) das variáveis-estado no processo real podemos escrever a equação de transição como:

$$\alpha_t = c + T\alpha_{t-1} + \eta_t$$

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \chi_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_\xi \Delta t \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} e^{-\kappa \Delta t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\eta_t(0, Q) \text{ e } Q = \begin{bmatrix} (1 - e^{-2\kappa \Delta t}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} & (1 - e^{-\kappa \Delta t}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} \\ (1 - e^{-\kappa \Delta t}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} & \sigma_\xi^2 \Delta t \end{bmatrix}$$

A equação de mensuração pode ser escrita a partir da esperança do preço a vista no processo neutro-ao-risco (2.7) como:

$$y_t = d + Z\alpha_t + \varepsilon_t$$

$$y_t = \begin{bmatrix} \ln(F_{3M}) \\ \ln(F_{15M}) \\ \ln(F_{27M}) \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} A_{T_{3M}} \\ A_{T_{15M}} \\ A_{T_{27M}} \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} e^{-\kappa T_{3M}} & 1 \\ e^{-\kappa T_{15M}} & 1 \\ e^{-\kappa T_{27M}} & 1 \end{bmatrix}, \alpha_t = \begin{bmatrix} \chi_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_t(0, H), H = \begin{bmatrix} \sigma_{3M}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{15M}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{27M}^2 \end{bmatrix}$$

$$A_T = \mu_{\xi}^* T - (1 - e^{-\kappa T}) \frac{\lambda_{\chi}}{\kappa} + \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - e^{-2\kappa t})}{2\kappa} \sigma_{\chi}^2 + \sigma_{\xi}^2 t + 2 \frac{(1 - e^{-\kappa t})}{\kappa} \rho_{\chi\xi} \sigma_{\chi} \sigma_{\xi} \right)$$

3.4 Resultados dos Modelos

As tabelas 1 e 2 apresentam as estimativas para os parâmetros utilizados nos modelos.

No processo de reversão à média é de destaque a baixa velocidade de reversão estimada e o alto α , o que pode ser interpretado como uma tendência lenta de conversão do preço para um nível de equilíbrio historicamente elevado, conforme destacado nas figuras abaixo. Este fato se deve a estimação de um preço de equilíbrio único para toda a amostra, incluindo dois momentos de níveis de preços, o primeiro mais estável em nível mais baixo e o segundo mais volátil após elevação do nível de preços no período 2005-2006.

No modelo Short-Term / Long-Term este efeito é neutralizado pois o preço de equilíbrio passa a variar ao longo do tempo, com a velocidade de reversão a zero do desvio de curto prazo sendo mais significativa.

Nos gráficos 1, 2 e 3 podemos observar que o deslocamento do preço de equilíbrio dos três metais estimado no modelo Short-Term / Long-Term é consistente com as variações observadas nos vencimentos longos da curva de futuros e com estimativa de analistas com relação a elevação do custo de produção das respectivas indústrias.

Tabela 1: Parâmetros Estimados no Modelo de Reversão à Média

Parâmetro	Cobre	Níquel	Alumínio
κ	0,09 (0,001)	0,08 (0,002)	0,09 (0,003)
σ	0,21 (0,004)	0,32 (0,006)	0,15 (0,003)
α	9,15 (0,000)	10,91 (0,030)	8,18 (0,000)
α^*	7,26 (0,012)	7,87 (0,033)	7,32 (0,009)
σ_{3M}	0,00 (0,000)	0,07 (0,001)	0,03 (0,000)
σ_{15M}	0,05 (0,001)	0,01 (0,000)	0,00 (0,000)
σ_{27M}	0,08 (0,001)	0,07 (0,001)	0,08 (0,019)

Tabela 2: Parâmetros Estimados no Modelo Short-Term / Long-Term

Parâmetro	Cobre	Níquel	Alumínio
κ	0,36 (0,009)	0,22 (0,000)	0,28 (0,008)
μ_{ξ}	0,12 (0,000)	0,10 (0,000)	0,06 (0,029)
μ_{ξ}^*	-0,05 (0,002)	-0,11 (0,000)	-0,04 (0,001)
λ_{χ}	0,01 (0,004)	0,03 (0,000)	-0,04 (0,022)
σ_{χ}	0,21 (0,004)	0,58 (0,071)	0,25 (0,002)
σ_{ξ}	0,23 (0,006)	0,57 (0,000)	0,18 (0,003)
$\rho_{\chi\xi}$	-0,42 (0,029)	-0,82 (0,000)	-0,66 (0,011)
σ_{3M}	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)
σ_{15M}	0,01 (0,000)	0,01 (0,000)	0,01 (0,000)
σ_{27M}	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)

Figura 1: Cobre - Análise do Preço de Equilíbrio

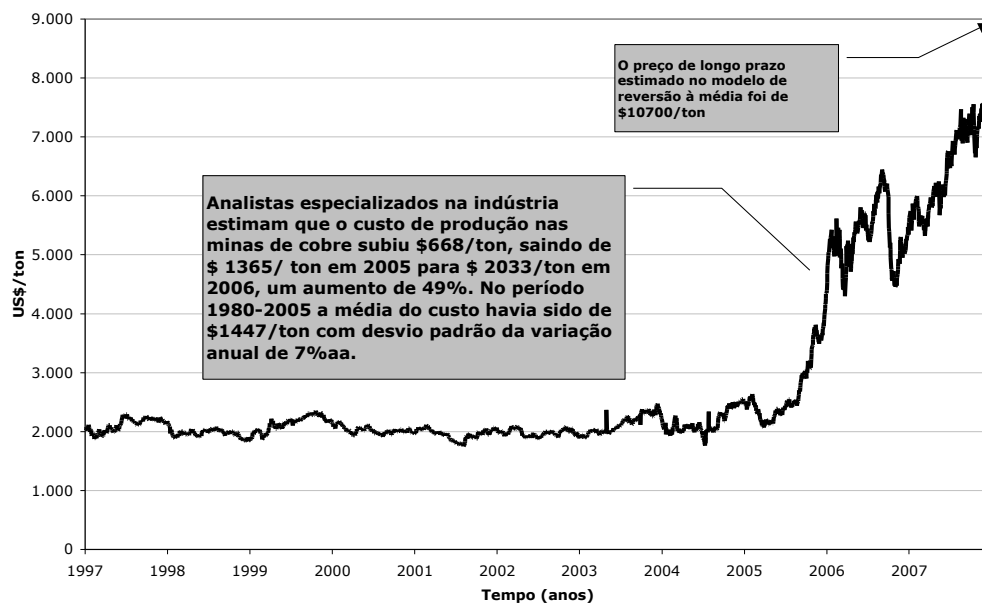


Figura 2: Níquel - Análise do Preço de Equilíbrio



Figura 3: Alumínio - Análise do Preço de Equilíbrio



3.5 Relação entre Desvio de Curto-Prazo e Nível de Estoques

Segundo Pindyck (2001) em mercados de commodities estoques tem um papel crucial. Em indústrias de transformação estoques são utilizados para reduzir custos de mudanças na produção em resposta a flutuações, previsíveis ou não, na demanda, e para reduzir custos de comercialização ao permitir o planejamento de entregas e evitar desabastecimento. Este benefício percebido pelos possuidores de estoques é geralmente denominado *convenience yield* nos modelos de preços de commodities.

Desta forma é esperado que em momentos de baixos níveis de estoque os agentes percebam maior valor na posse física da commodity em contraponto a situações de estoques elevados, onde o valor de estoque adicional é reduzido. Routledge, Seppi e Spatt adotam uma abordagem alternativa demonstrando a relação positiva entre *dividend yield* e probabilidade de exaustão dos estoques.

Schwartz e Smith colocam que apesar de decisões relativas a estocagem não estarem explícitas no modelo Long-Term / Short-Term, espera-se que desvios positivos (negativos) de preço correspondam a períodos de baixos (altos) estoques. Schwartz e Smith mostram ainda que apesar de não haver menção explícita ao *convenience yield*, o modelo Short-Term / Long-Term é equivalente ao modelo de *convenience yield* estocástico apresentado por Gibson e Schwartz (1990), e que desvios de curto-prazo estão tem ligação direta com o desvio do *convenience yield* de seu valor de equilíbrio.

Desta forma buscamos verificar a relação entre os desvios de curto prazo estimados no modelo Short-Term / Long-Term com o nível de estoque, representado em nossa análise pelo estoque divulgado oficialmente pela LME.

Apesar de não haver a figura de desvio de curto-prazo definida no modelo de reversão a média, utilizamos a mesma definição do modelo Short-Term / Long-Term onde o desvio de curto-prazo pode ser obtido a partir da diferença entre o preço spot e o preço de longo prazo obtido a partir da equação 2.3.

Os gráficos 4,5 e 6 apresentam a relação observada entre o desvio de curto prazo de cada metal e os nível de estoque da LME, expresso em dias de consumo, na seguinte forma:

$$y = \alpha + \beta \ln(x) + \varepsilon$$

onde y representa o desvio de curto-prazo como percentual do preço de equilíbrio, x representa o estoque da LME em dias de consumo, α e β são coeficientes da regressão e ε é o erro

da regressão.

Podemos observar que a relação é significativa para o cobre e níquel e não para o alumínio.

Figura 4: Cobre - Estoque vs. Desvio de Curto Prazo

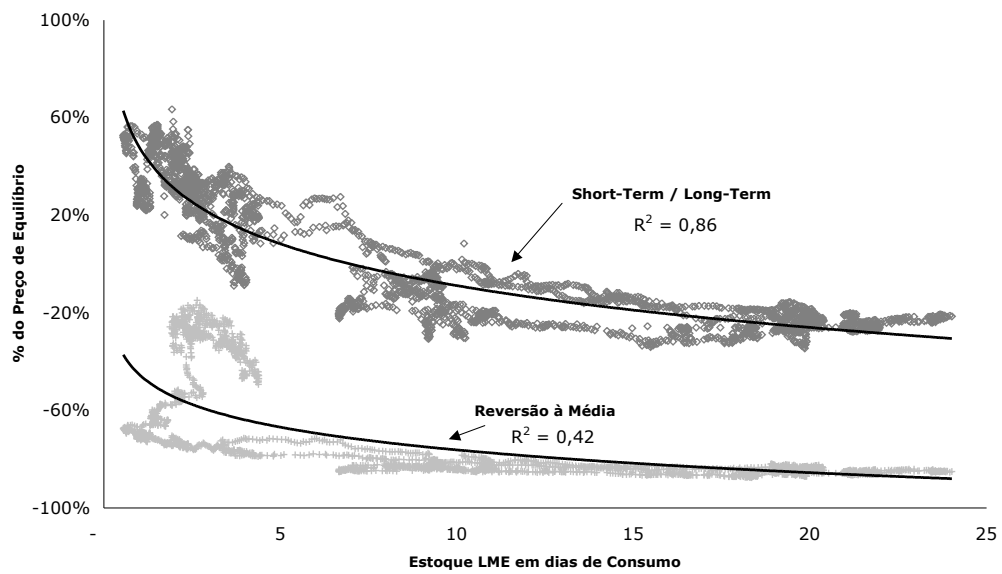


Figura 5: Níquel - Estoque vs. Desvio de Curto Prazo

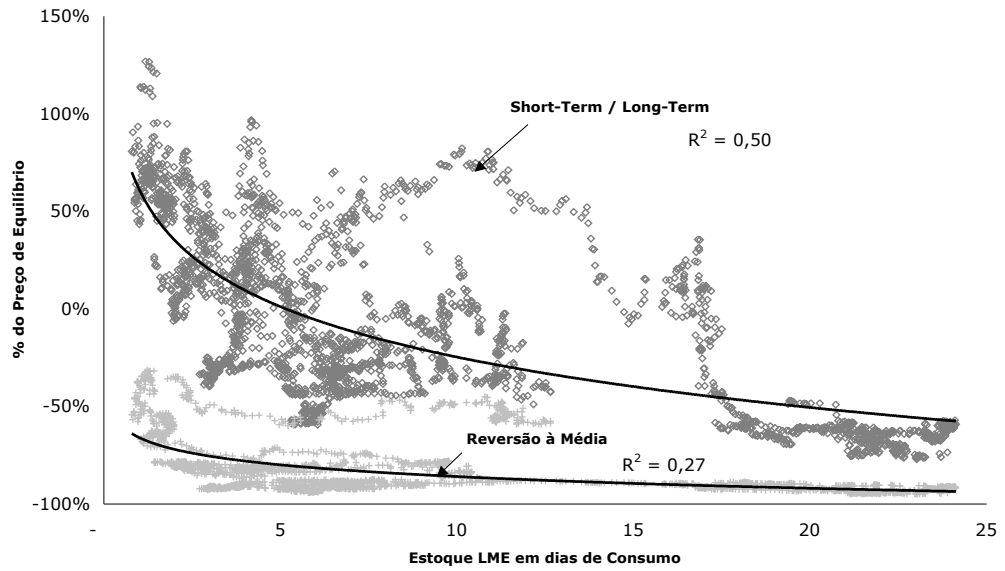
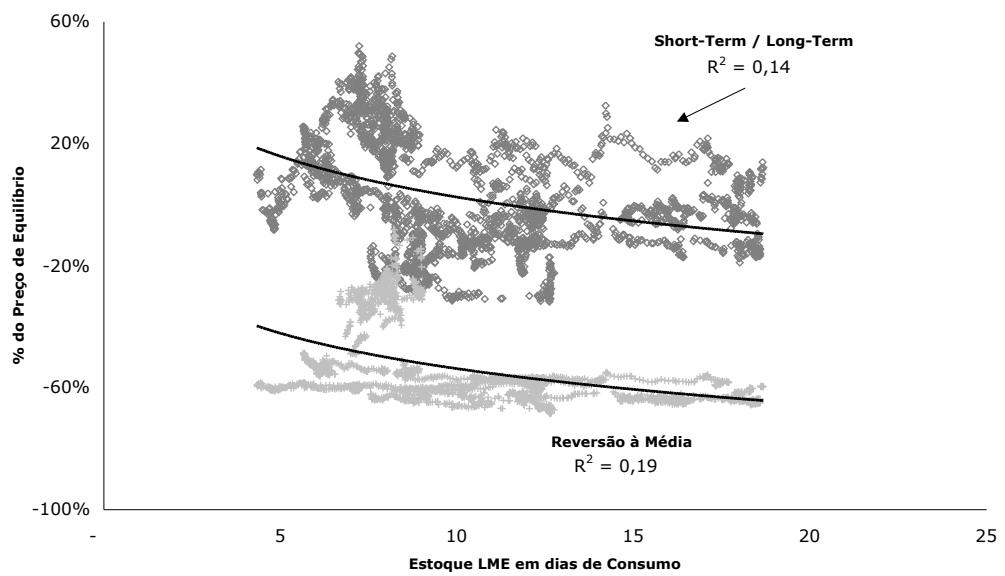


Figura 6: Alumínio - Estoque vs. Desvio de Curto Prazo



4 *Expansão do modelo de Short-Term Variations / Long-Term Dynamics*

4.1 Especificação e estimação do modelo

Iniciamos a expansão do modelo Short-Term / Long-Term separando do fator Desvio de Curto Prazo o efeito das variações de estoque através da introdução do fator Prêmio de Escassez, diretamente relacionado ao logaritmo do nível de estoques da LME.

$$\log Y_t = \psi_t + \chi_t + \xi_t$$

onde:

$$\psi_t \rightarrow \text{Prêmio de escassez}$$

$$\chi_t \rightarrow \text{Desvio de curto prazo do preço}$$

$$\xi_t \rightarrow \text{Preço de equilíbrio}$$

ψ_t reverte para zero através de um processo de reversão à média do tipo Ornstein-Uhlenbeck representando o prêmio de escassez do metal.

$$d\psi_t = -\gamma\psi_t dt + \sigma_\psi dz_\psi$$

χ_t reverte para zero através de um processo de reversão à média do tipo Ornstein-Uhlenbeck representando variações temporárias como, por exemplo, déficit energético e estados de greve.

$$d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi$$

ξ_t segue o movimento estocástico browniano representando variações estruturais de natureza mais duradoura, como desenvolvimentos de novos mercados e mudanças tecnológicas.

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi$$

dz_ψ, dz_χ, dz_ξ são incrementos brownianos correlacionados.

$$dz_\psi dz_\xi = \rho_{\psi\xi} dt$$

$$dz_\psi dz_\chi = \rho_{\psi\chi} dt$$

$$dz_\chi dz_\xi = \rho_{\chi\xi} dt$$

Os coeficientes de reversão γ e κ representam a velocidade com que o prêmio de escassez e o desvio de curto prazo retornam para zero. μ indica a variação média do preço de equilíbrio e σ_ψ, σ_χ e σ_ξ são as volatilidades dos processos do prêmio de escassez, desvio de curto-prazo e de equilíbrio respectivamente.

A aproximação do processo contínuo em tempo discreto com t intervalos de duração $\Delta t = \frac{T}{t}$ é dada por:

$$\psi_t - \psi_{t-1} = -\gamma\psi_{t-1}\Delta t + \sigma_\psi N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$$

$$\chi_t - \chi_{t-1} = -\kappa\chi_{t-1}\Delta t + \sigma_\chi N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$$

$$\xi_t - \xi_{t-1} = \mu_\xi\Delta t + \sigma_\xi N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$$

isolando as variáveis-estado em t

$$\psi_t = (1 - \gamma\Delta t)\psi_{t-1} + \sigma_\psi N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$$

$$\chi_t = (1 - \kappa\Delta t)\chi_{t-1} + \sigma_\chi N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$$

$$\xi_t = \xi_{t-1} + \mu_\xi\Delta t + \sigma_\xi N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$$

Denominando $\omega = (1 - \gamma\Delta t)$ e $\phi = (1 - \kappa\Delta t)$ podemos rescrever o processo real em forma matricial como

$$x_t = c + Tx_{t-1} + \eta_t$$

onde

$$x_t = \begin{bmatrix} \psi_t \\ \chi_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_\xi \Delta t \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e η_t é um vetor 3 x 1 de ruídos normalmente distribuídos e serialmente não correlacionados com $E[\eta_t]=0$ e

$$Var[\eta_t] = Q = \begin{bmatrix} \sigma_\psi^2 & \rho_{\psi\chi}\sigma_\psi\sigma_\chi\Delta t & \rho_{\psi\xi}\sigma_\psi\sigma_\xi\Delta t \\ \rho_{\psi\chi}\sigma_\psi\sigma_\chi\Delta t & \sigma_\chi^2\Delta t & \rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi\Delta t \\ \rho_{\psi\xi}\sigma_\psi\sigma_\xi\Delta t & \rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi\Delta t & \sigma_\xi^2\Delta t \end{bmatrix}$$

Dado este processo, o valor esperado ($E(x_t)$) e a matriz de covariância ($Var(x_t)$) para t-passos a frente são dados recursivamente por:

$$E(x_t) = \begin{bmatrix} \omega^t \psi_0 \\ \phi^t \chi_0 \\ \xi_0 + \mu_\xi t \Delta t \end{bmatrix}$$

$$Var(x_t) = \begin{bmatrix} \sigma_\psi^2 \frac{(-1+\omega^{2t})}{(-1+\omega)^2} & \rho_{\psi\chi}\sigma_\psi\sigma_\chi \frac{((\omega\phi)^t-1)}{\omega\phi-1} & \rho_{\psi\xi}\sigma_\psi\sigma_\xi \frac{(\omega^t-1)}{\omega-1} \\ \rho_{\psi\chi}\sigma_\psi\sigma_\chi \frac{((\omega\phi)^t-1)}{\omega\phi-1} & \sigma_\chi^2 \frac{1-\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2} & \rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi \frac{1-\phi^{t-1}}{1-\phi} \\ \rho_{\psi\xi}\sigma_\psi\sigma_\xi \frac{(\omega^t-1)}{\omega-1} & \rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi \frac{1-\phi^{t-1}}{1-\phi} & \sigma_\xi^2 t \end{bmatrix} \Delta t$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ e $\Delta t = \frac{T}{n} \rightarrow 0$ obtemos as formas analíticas para a distribuição condicional das variáveis-estado no tempo t. ψ_t, χ_t e ξ_t são conjuntamente normalmente distribuídos com valor esperado e matriz de covariância:

$$E(x_t) = \begin{bmatrix} e^{-t\gamma} \psi_0 \\ e^{-\kappa t} \chi_0 \\ \xi_0 + \mu_\xi t \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$Cov[(\psi_t, \chi_t, \xi_t)] = \begin{bmatrix} \sigma_\psi^2 \frac{(1-e^{-2t\gamma})}{2\gamma} & \rho_{\psi\chi}\sigma_\psi\sigma_\chi \frac{1-e^{-t(\kappa+\gamma)}}{\kappa+\gamma} & \rho_{\psi\xi}\sigma_\psi\sigma_\xi \frac{1-e^{-t\gamma}}{\gamma} \\ \rho_{\psi\chi}\sigma_\psi\sigma_\chi \frac{1-e^{-t(\kappa+\gamma)}}{\kappa+\gamma} & \frac{(1-e^{-2\kappa t})}{2\kappa} \sigma_\chi^2 & \frac{(1-e^{-\kappa t})}{\kappa} \rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi \\ \rho_{\psi\xi}\sigma_\psi\sigma_\xi \frac{1-e^{-t\gamma}}{\gamma} & \frac{(1-e^{-\kappa t})}{\kappa} \rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi & \sigma_\xi^2 t \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

O processo neutro ao risco é obtido através da introdução de três novos parâmetros, λ_ψ , λ_χ e λ_ξ , que representam prêmios de risco na forma de ajuste na tendência dos processos estocásticos.

$$\begin{aligned} d\psi_t &= (-\gamma\psi_t - \lambda_\psi)dt + \sigma_\psi dz_\psi \\ d\chi_t &= (-\kappa\chi_t - \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dz_\chi^* \\ d\xi_t &= (\mu_\xi - \lambda_\xi)dt + \sigma_\xi dz_\xi^* \end{aligned}$$

onde dz_ψ^* , dz_χ^* e dz_ξ^* são incrementos brownianos correlacionados e:

$$\begin{aligned} dz_\psi dz_\xi^* &= \rho_{\psi\xi} dt \\ dz_\psi dz_\chi^* &= \rho_{\psi\chi} dt \\ dz_\chi^* dz_\xi^* &= \rho_{\chi\xi} dt \end{aligned}$$

A aproximação do processo contínuo em tempo discreto com n intervalos de duração $\Delta t = \frac{T}{n}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \psi_t &= -\lambda_\psi \Delta t + (1 - \gamma \Delta t) \psi_{t-1} + \sigma_\psi N(0, 1) \sqrt{\Delta t} \\ \chi_t &= -\lambda_\chi \Delta t + (1 - \kappa \Delta t) \chi_{t-1} + \sigma_\chi N(0, 1) \sqrt{\Delta t} \\ \xi_t &= \xi_{t-1} + \mu_\xi \Delta t + \sigma_\xi N(0, 1) \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

Seguindo derivação similar à do processo real, encontramos que no processo neutro-ao-risco ψ_t, χ_t e ξ_t são conjuntamente normalmente distribuídos com esperança e matriz de variância-covariância:

$$\begin{aligned} E^*(x_t) &= \begin{bmatrix} \frac{-(1-e^{-\gamma t})}{\gamma} \lambda_\psi + e^{-\gamma t} \psi_0 \\ \frac{-(1-e^{-\kappa t})}{\kappa} \lambda_\chi + e^{-\kappa t} \chi_0 \\ \xi_0 + (\mu_\xi - \lambda_\xi) t \end{bmatrix} \\ \text{Cov}^*[(\psi_t, \chi_t, \xi_t)] &= \begin{bmatrix} \frac{(1-e^{-2\gamma t})}{2\gamma} \sigma_\psi^2 & \rho_{\psi\chi} \sigma_\psi \sigma_\chi \frac{1-e^{-t(\kappa+\gamma)}}{\kappa+\gamma} & \rho_{\psi\xi} \sigma_\psi \sigma_\xi \frac{1-e^{-t\gamma}}{\gamma} \\ \rho_{\psi\chi} \sigma_\psi \sigma_\chi \frac{1-e^{-t(\kappa+\gamma)}}{\kappa+\gamma} & \frac{(1-e^{-2\kappa t})}{2\kappa} \sigma_\chi^2 & \frac{(1-e^{-\kappa t})}{\kappa} \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \\ \rho_{\psi\xi} \sigma_\psi \sigma_\xi \frac{1-e^{-t\gamma}}{\gamma} & \frac{(1-e^{-\kappa t})}{\kappa} \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi & \sigma_\xi^2 t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dados ψ_0, χ_0 e ξ_0 , o logaritmo do preço spot no tempo t é normalmente distribuído com esperança e variância:

$$E^*[\log(S_t)] = \frac{-(1 - e^{-\gamma t})}{\gamma} \lambda_\psi + e^{-\gamma t} \psi_0 + \frac{-(1 - e^{-\kappa t})}{\kappa} \lambda_\chi + e^{-\kappa t} \chi_0 + \xi_0 + (\mu_\xi - \lambda_\xi)t$$

$$\text{Var}[\log(S_t)] = \sigma_\psi^2 + \sigma_\chi^2 + \sigma_\xi^2 + 2\text{cov}(\psi, \chi) + 2\text{cov}(\psi, \xi) + 2\text{cov}(\chi, \xi)$$

Da metodologia de apreçamento neutro-ao-risco e das propriedades da distribuição log-normal:

$$Fut(S, t) = E^*(S(t)) = \exp(E(\log(S_t)) + \frac{1}{2}\text{Var}(\log(S_t)))$$

$$\ln(Fut(S, t)) = e^{-\gamma t} \psi_0 + e^{-\kappa t} \chi_0 + \xi_0 + B(t) \quad (4.4)$$

$$B(t) = -\frac{(1 - e^{-\gamma t})}{\gamma} \lambda_\psi - \frac{(1 - e^{-\kappa t})}{\kappa} \lambda_\chi + t(\mu_\xi - \lambda_\xi) + \frac{(1 - e^{-2\gamma t})\sigma_\psi^2}{4\gamma} + \frac{(1 - e^{-2\kappa t})\sigma_\chi^2}{4\kappa}$$

$$+ \frac{t\sigma_\chi^2}{2} + \rho_{\psi\chi}\sigma_\psi\sigma_\chi \frac{1 - e^{-t(\kappa+\gamma)}}{\kappa + \gamma} + \rho_{\psi\xi}\sigma_\psi\sigma_\xi \frac{1 - e^{-t\gamma}}{\gamma} + \frac{(1 - e^{-\kappa t})}{\kappa} \rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi$$

A relação entre ψ e o nível de estoques é dado pela equação:

$$\log(EstoqueLME_t) = a + b\psi_t$$

4.2 Estimação e Resultados

Dada a relação de complementaridade entre o prêmio de escassez e o prêmio de curto prazo, onde o primeiro reflete exclusivamente a informação do estoque divulgado pela LME, especificamos na estimação do modelo a correlação entre prêmio de escassez e desvio de curto prazo como zero.

A tabela 3 apresenta os parâmetros estimados para o modelo expandido. Podemos observar que as velocidades de reversão (γ e κ) tanto para o prêmio de escassez como para o desvio de curto-prazo residual são significativos.

Nos gráficos 8, 9 e 10 podemos observar que as estimativas para o preço de equilíbrio não foi significativamente alterada pela introdução da informação relativa ao estoque em nenhum dos metais. Podemos observar ainda que o R^2 da relação entre os fatores residuais que influenciam o desvio de curto-prazo reduziu-se, sem, no entanto, ser eliminado.

Na figura 14 podemos observar que o efeito do nível de estoques sobre o prêmio de escassez é semelhante no níquel e cobre, repetindo-se o efeito que observávamos no alumínio no modelo

Tabela 3: Parâmetros Estimados no Modelo Short-Term / Long-Term

Parâmetro	Cobre	Níquel	Alumínio
γ	0,52 (0,037)	0,46 (0,007)	0,27 (0,000)
μ_{ξ}	0,12 (0,070)	0,10 (0,046)	0,06 (0,115)
κ	0,26 (0,000)	0,26 (0,007)	0,31 (0,000)
σ_{ψ}	0,03 (0,001)	0,04 (0,000)	0,02 (0,000)
$\rho_{\psi\xi}$	0,03 (0,023)	0,02 (0,022)	-0,04 (0,018)
σ_{χ}	0,23 (0,006)	0,38 (0,004)	0,15 (0,000)
σ_{ξ}	0,25 (0,000)	0,39 (0,006)	0,22 (0,000)
$\rho_{\chi\xi}$	-0,50 (0,016)	-0,50 (0,028)	-0,50 (0,000)
a	12,9 (0,204)	10,01 (0,123)	13,60 (0,155)
b	-8,64 (0,220)	-9,73 (0,045)	-5,73 (0,000)
σ_{3M}	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)
σ_{15M}	0,01 (0,000)	0,01 (0,000)	0,01 (0,000)
σ_{27M}	0,00 (0,000)	0,01 (0,000)	0,00 (0,000)
λ_{ψ}	-0,05 (0,000)	-0,15 (0,009)	-0,15 (0,000)
λ_{χ}	0,08 (0,000)	0,29 (0,070)	0,10 (0,079)
μ_{ξ}^*	-0,01 (0,000)	-0,01 (0,000)	-0,05 (0,000)

Short-Term / Long-Term.

Figura 7: Cobre - Análise do Preço de Equilíbrio

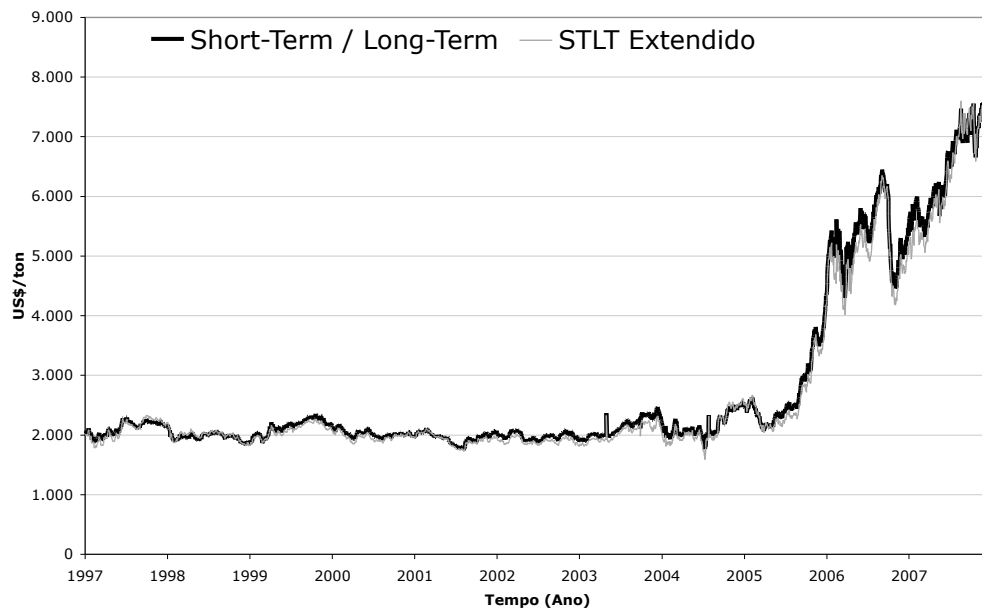


Figura 8: Níquel - Análise do Preço de Equilíbrio

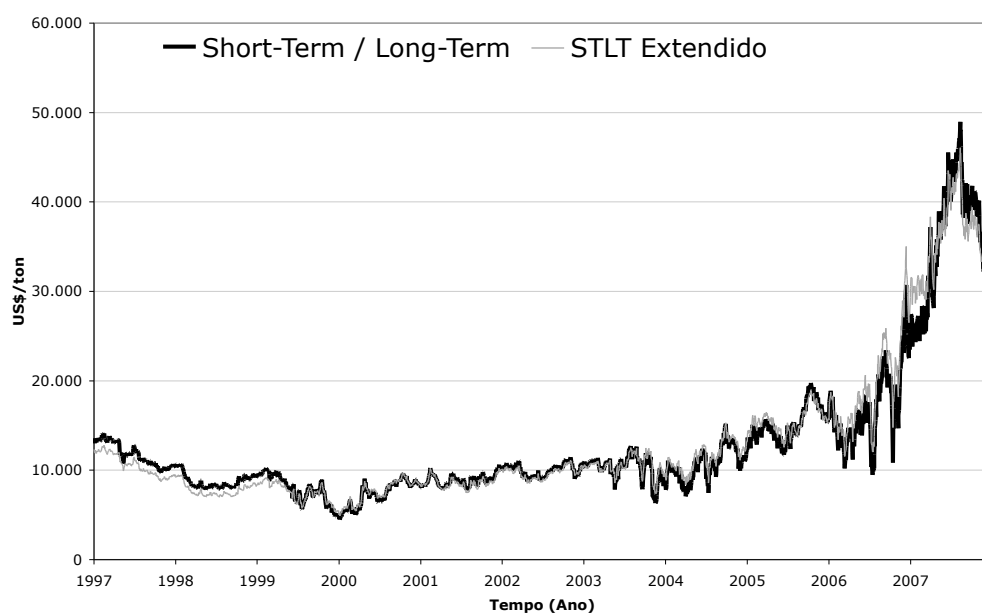


Figura 9: Alumínio - Análise do Preço de Equilíbrio

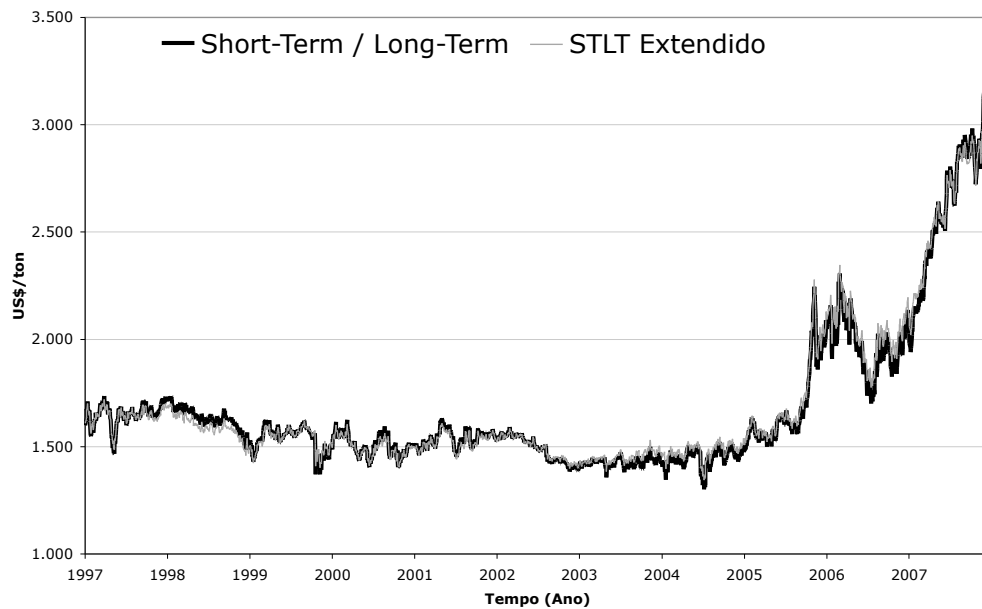


Figura 10: Cobre - Análise Desvio de Curto Prazo

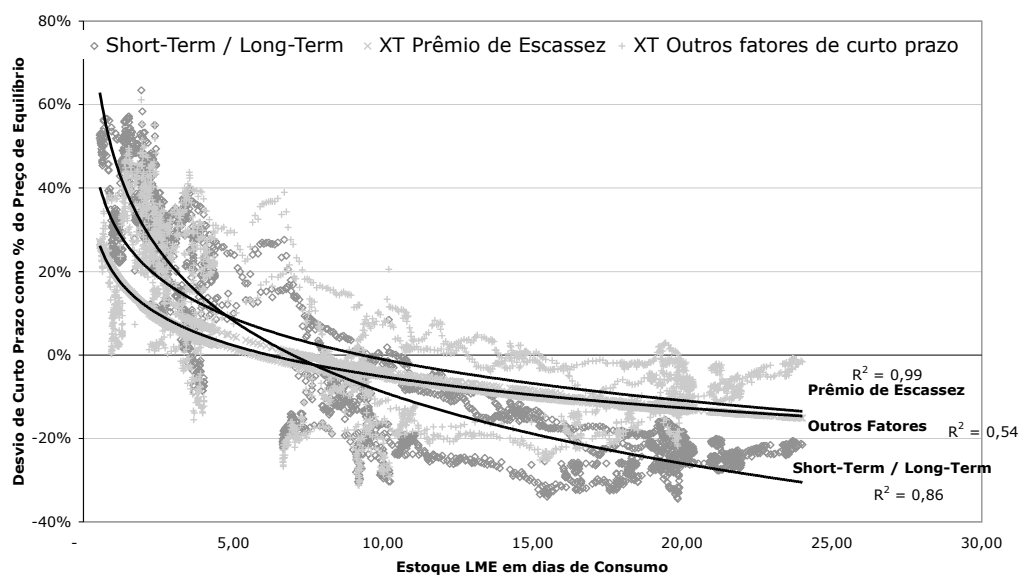


Figura 11: Níquel - Análise Desvio de Curto Prazo

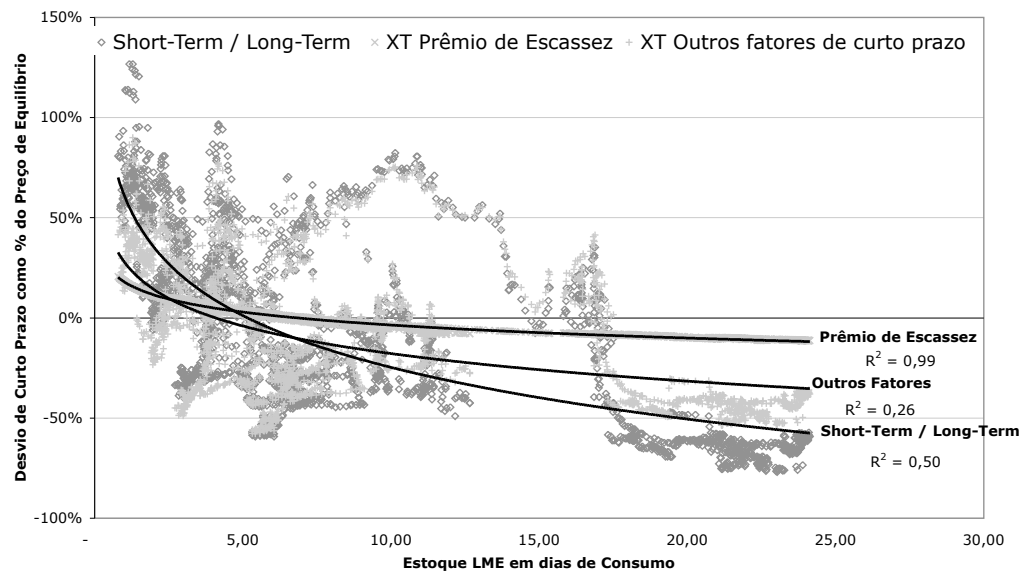


Figura 12: Alumínio - Análise Desvio de Curto Prazo

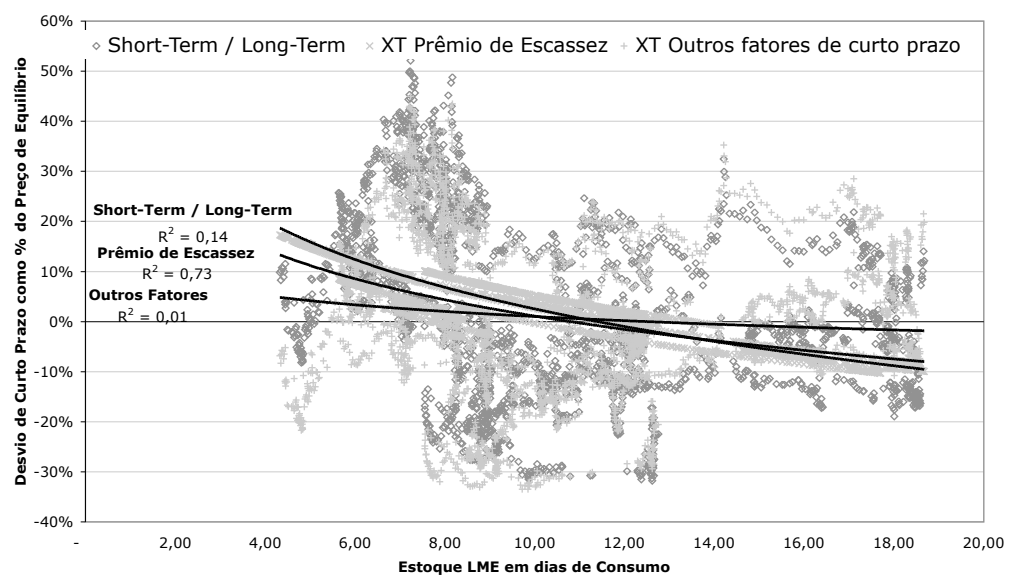
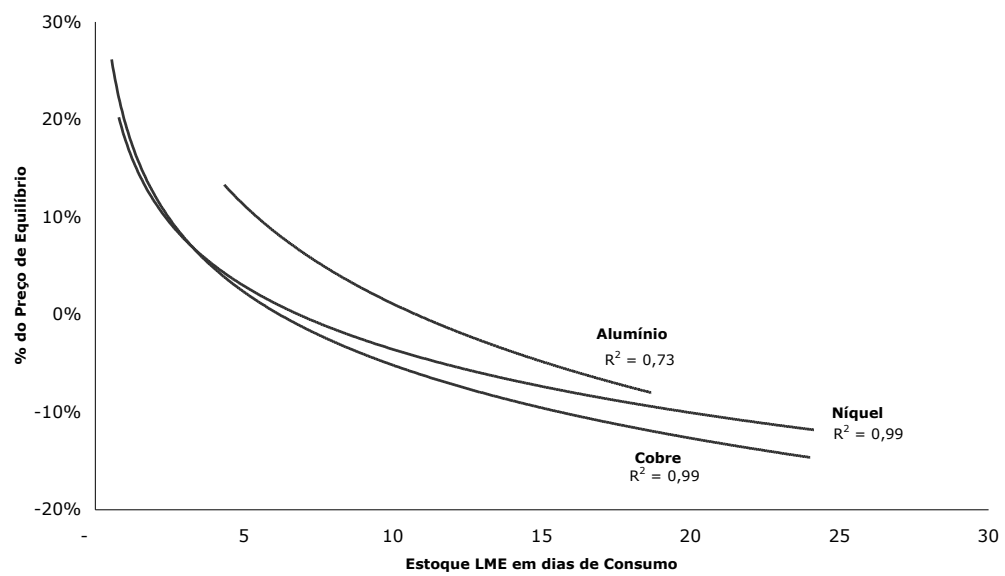


Figura 13: Comparação da Relação Estoques LME vs. Desvio de Curto Prazo nos Diferentes Metais



5 *Comparação entre os Modelos*

De forma a verificar se houve ganho no poder de previsão dada a especificação proposta para o modelo, analisamos os erros de previsão fora da amostra (2 anos) dos preços futuros de 3 meses, 15 meses e 27 meses com passos de um mês. De forma geral o passeio aleatório, com valor esperado do preço futuro em um mês igual ao observado atualmente, tem o menor erro quadrático médio. Até 15 meses os modelos Short-Term / Long-Term e a extensão proposta comportam-se bem, porém além deste horizonte o modelo proposto perde capacidade de previsão acentuadamente. Do ponto de vista de previsão não há razão aparente para que os modelos sejam implementados.

As tabelas 4, 5 e 6 apresentam os erros quadráticos médios de cada modelo, para cada um dos vencimentos em cada um dos metais.

Tabela 4: Cobre - Raiz do Erro Quadrático Médio

Modelo	Cash	3 meses	15 meses	27 meses	63 meses
Passeio Aleatório	716	686	556	495	455
Reversão a Média	1.139	942	851	987	1.142
Short-Term / Long-Term	730	687	602	490	874
STLT Extendido	729	676	639	868	2.163

Tabela 5: Níquel - Raiz do Erro Quadrático Médio

Modelo	Cash	3 meses	15 meses	27 meses
Passeio Aleatório	4.418	3.769	2.709	2.168
Reversão a Média	6.524	5.381	3.665	4.323
Short-Term / Long-Term	4.456	3.815	2.513	2.207
STLT Extendido	4.431	3.759	2.777	3.576

Tabela 6: Alumínio - Raiz do Erro Quadrático Médio

Modelo	Cash	3 meses	15 meses	27 meses	63 meses
Passeio Aleatório	174	164	125	115	129
Reversão a Média	275	218	156	188	312
Short-Term / Long-Term	182	163	129	113	168
STLT Extendido	182	163	168	263	628

Os gráficos 14, 15 e 16 apresentam as diferenças entre os erros quadráticos médios de cada modelo e os erros quadráticos médios do passeio aleatório para cada um dos vencimentos em cada um dos metais.

Figura 14: Cobre - Erro Relativo a Passeio Aleatório

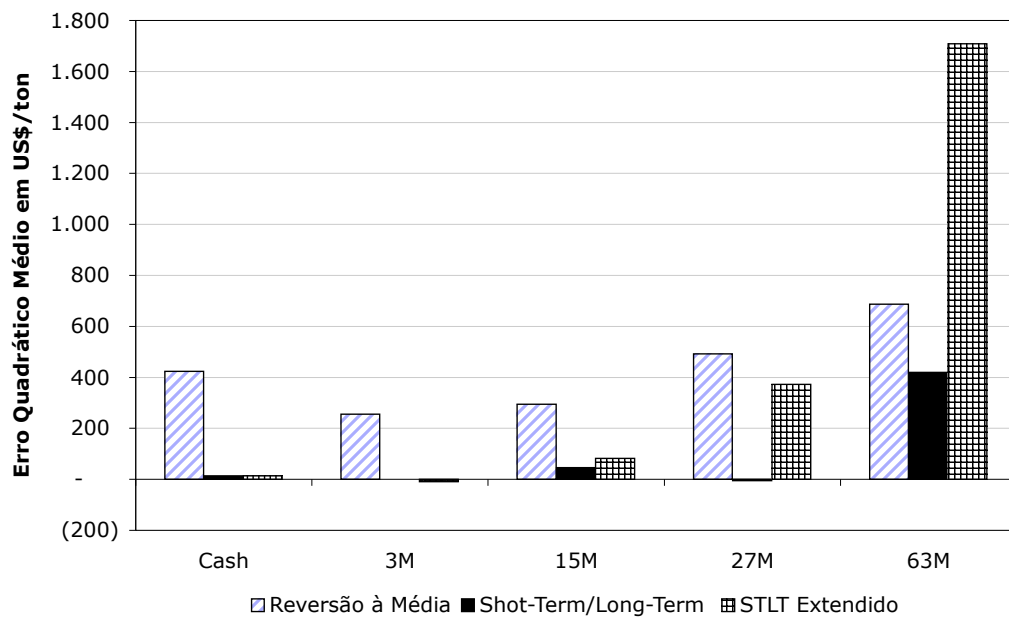


Figura 15: Níquel - Erro Relativo a Passeio Aleatório

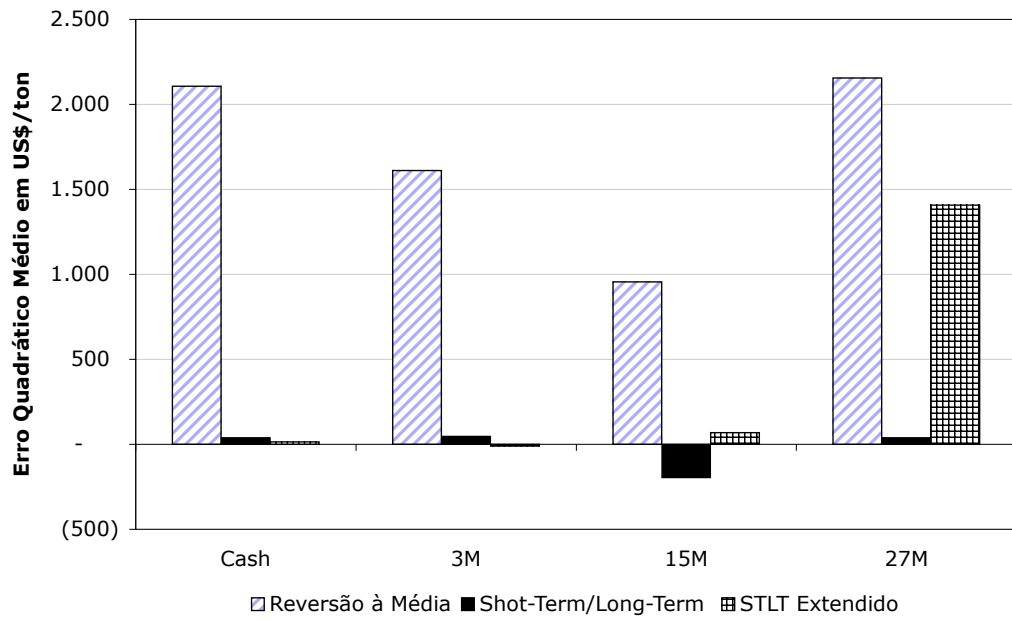
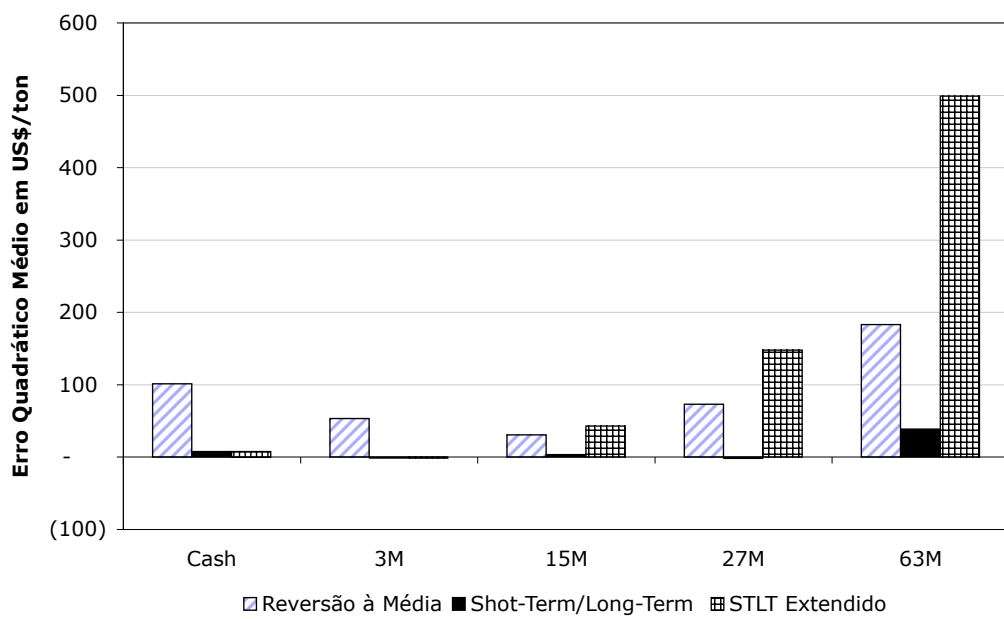


Figura 16: Alumínio - Erro Relativo a Passeio Aleatório



6 *Conclusão*

Com este trabalho pudemos concluir que a especificação do modelo Short-Term / Long-Term traz um ganho de informação para o analista, estimando realisticamente variações no preço de equilíbrio e nível do desvio de curto prazo. Observamos ainda a existência de relação entre o desvio de curto-prazo e níveis de estoque.

Através da introdução da informação relativa a estoque no modelo Short-Term / Long-Term pudemos verificar que o prêmio de escassez afeta a formação do preço do cobre e níquel, e potencialmente do alumínio, através de relações semelhantes.

Do ponto de vista de previsão, pudemos observar que nenhum dos modelos tem poder de previsão consistentemente superior ao passeio aleatório. O modelo Short-Term / Long-Term apresenta a segunda melhor performance e o modelo proposto perde poder de previsão significativamente em horizontes maiores que um ano.

Referências

- [1] BERNARD, Jean-Thomas; KHALAF, Lynda ; KICHIAN, Maral; MCMAHON, Sebastien. *Forecasting Commodity Prices: GARCH, Jumps, and Mean Reversion*, Canadá: Bank of Canada - Working Paper 2006-14, 2006
- [2] CASASSUS, Jaime; COLLIN-DUFRESNE, Pierre. *Stochastic Convenience Yield Implied from Commodity Futures and Interest Rates*, EUA: The Journal of Finance, Vol. 60, No. 5, p. 2283-2331, 2005
- [3] CORTAZAR, Gonzalo; SCHWARTZ, Eduardo S.. *Implementing a Stochastic Model for Oil Futures Prices*, EUA: Energy Economics, Vol. 25, No. 3, p. 215-238, 2003
- [4] HARVEY, Andrew C.. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter* , EUA: Cambridge University Press, 1989
- [5] HARVEY, Andrew C.; SHEPHARD, Neil. *Structural Time Series Models*, Amsterdam, Holanda: Handbook of Statistics Vol. 11, 1993
- [6] MILTERSEN, Kristian R.. *Commodity Price Modeling That Matches Current Observables, A New Approach*, Grã-Bretanha: Quantitative Finance, Vol. 3, No. 1, p. 51-58, 2003
- [7] MILTERSEN, Kristian R.; SCHWARTZ, Eduardo S.. *Pricing of Options on Commodity Futures With Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest Rates*, Seattle, WA, EUA : Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol. 33, No. 1, p 33-59., Março 1998
- [8] MILTERSEN, Kristian R.. *Valuation of Natural Resource Investments with Stochastic Convenience Yields and Interest Rates*, Dinamarca: Abril 1999
- [9] PINDYCK, Robert S.. *The Dynamics of Commodity Spot and Futures Markets: A Primer*, EUA: The Energy Journal, Vol. 22, No. 3, Agosto 2001
- [10] PINDYCK, Robert S.. *The Long-Run Evolution of Energy Prices*, EUA: The Energy Journal, Vol. 20, No. 2, Abril 1999
- [11] PINDYCK, Robert S.. *The Present Value Model of Rational Commodity Pricing*, EUA: The Economic Journal, Vol. 103, No. 418, p. 511-530, Maio 1993
- [12] PINDYCK, Robert S.. *Volatility and Commodity Price Dynamics*, EUA: The Journal of Futures Markets, Vol. 24, No. 11, p. 1029-1047, 2004
- [13] ROUTLEDGE, Bryan R.; SEPPI, Duane J. ; SPATT, Chester S.. *Equilibrium Forward Curves for Commodities*, EUA: The Journal of Finance, Vol. LV, No. 3, Junho 2000
- [14] SCHWARTZ, Eduardo S.; SMITH, James E.. *Short-term Variations and Long-term Dynamics in Commodity Prices*, EUA : Management Science, Vol. 46, No. 7, Julho 2000

- [15] SCHWARTZ, Eduardo S.. *The Stochastic Behaviour of Commodity Prices*, EUA: The Journal of Finance, Vol LII, No. 3, Julho 1997
- [16] SIMON, Dan. *Kalman Filtering*, EUA: Embedded System Programming, Vol. 14, No. 6, p. 72-79, Junho 2001