Nº 50

JOGOS DE INFORMAÇÃO INCOMPLETA: UMA INTRODUÇÃO

SERGIO RIBEIRO DA COSTA WERLANG

JOGOS DE INFORMAÇÃO INCOMPLETA: UMA INTRODUÇÃO

Sérgio Ribeiro da Costa Werlang

1. Introdução: Jogos não Cooperativos

A teoria dos jogos está em plena ebulição. Após um longo período de quase estagnação, período este em que se deixou de lado a teoria dos jogos não cooperativos em detrimento dos cooperativos, em 1975 esta teoria ressurgiu com o famoso artigo de Selten (1975); neste discute-se a razoabilidade de certos equilíbrios de Nash. É interessante justificar esta postura moderna de ignorar a teoria dos jogos cooperativos (ou, pelo menos, indicar à mesma um papel não mais que secundário). Isto ocorre porque sempre que se quer analisar um jogo cooperativo, pode-se entendê-lo como um jogo não cooperativo no qual as alternativas cooperar ou não, são possibilidades. Visto isso, passa-se à revisão dos conceitos e teoremas da teoria de informação completa.

Definição 1: Um jogo é uma quíntupla $\left(I,(A_i)_{i\in I}, R, (r_i)_{i\in I}, (\succeq_i)_{i\in I}\right)$, onde:

(i) I é o conjunto dos jogadores. A maioria das vezes supõe-se que seja finito, exceto quando se deseja modelar agentes que não detêm poder de mercado;

(ii) A_i é o espaço de estratégias, ou ações, do i-ésimo jogador. Quando este não é finito é necessário que se introduza uma topologia em A_i (que se denota por τ_{A_i}) para que se pos-

sa entender o significado de uma estratégia ser "perto" de outra. Esta topologia provém do problema econômico em questão;

(iii) R é o espaço de resultados. Poder-se-ia ter R diferindo de jogador para jogador, mas este caso é trivialmente estendido àquele. Às vezes também se o dota de uma estrutura topológica (que se denota por τ_R);

(iv) r_i é uma função que a cada combinação de estratégias (ou ações) de todos os jogadores associa um resultado para o jogo: seja $A = \prod_{j \in I} A_j$, então $\forall i \in I$, $r_i: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & R. \\ (a_j)_{j\in I} & \longmapsto & r_i\left((a_j)_{j\in I}\right) \end{array}$

Denomina-se r_i a função resultado do indivíduo i;

(v) Finalmente $\succsim_i$ é a relação de preferências do jogador i sobre o espaço de resultados R. ($\succsim_i \subset R \times R$). Esta relação indica quais os gastos do jogador i em relação aos possíveis resultados do jogo.

Esta definição de jogo é muito geral, e na maioria das vezes é desnecessário (e impraticável) que se trabalhe com a mesma. Pode-se colocar alguma estrutura para que se enquadre nos modelos usuais. A primeira coisa a fazer é supor que $\succsim_i$ seja representável com utilidades esperadas, a la Von Neumann-Morgenstern (VN-M). (Ver Herstein-Milnor (1953)). Isto implica algumas restrições em R e $\succsim_i$, que admitir-se-ão válidas. Dado isto tem-se, então, para todo i I, $v_i: R \to \mathbb{R}$ que representa $\succsim_i$ a la VN-M. Vai-se definir agora uma nova função $u_i: A \to \mathbb{R}$, dada por $u_i\left((a_j)_{j\in I}\right) = v_i\left(r_i\left((a_j)_{j\in I}\right)\right)$

Esta é a <u>função ganho</u>: ela diz qual a utilidade que determinada combinação de estratégias (ou ações) proporciona ao jogador i.

Em segundo lugar toma-se I finito, genericamente com n elementos. Tem-se assim:

<u>Definição 2</u>: Um <u>jogo com n pessoas</u>, Γ, é um par $\left((A_i)_{i-1}^{n}, (u_i)_{i=1}^{n}\right)$, onde A_i é o espaço das estratégias (ou ações) do i-ésimo jogador, e u_i: $A \rightarrow \mathbb{R}$ é a função ganho do mesmo. Além disso u_i é utilidade de VN-M.

Isto posto, chega-se à noção principal de equilíbrio não cooperativo: a de equilíbrio de Nash (cabe notar que pode-se definir o mesmo conceito no modelo da definição 1).

<u>Definição 3</u>: Dado Γ um jogo de n pessoas, $\Gamma = \left((A_i)_{i=1}^{n}, (u_i)_{i=1}^{n}\right)$, diz-se que a combinação de estratégias $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ é um <u>equilíbrio de Nash</u> se:

$\forall i$, $\forall a_i \varepsilon A_i$, tem-se: $u_i(\bar{a}_i, \bar{a}_{-i}) \geq u_i(a_i, \bar{a}_{-i})$; onde o termo a_{-i} significa o vetor $(a_1, \ldots, a_n)$ de onde se retira a i-ésima coordenada:

$a_{-i} \equiv (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, e $a \equiv (a_i, a_{-i})$ ou (a_{-i}, a_i). É importante que haja certa familiaridade com esta notação, pois será usada indiscriminadamente.

A pergunta imediata que surge é: por que esta noção é tão central e fornece resultado tão surpreendente bons? Isto é um ponto extremamente delicado. Uma razão básica é que dado que o i-ésimo jogador está independente por completo dos outros , não há como influir na decisão dos mesmos. Sendo assim, dado que os outros agem de certa maneira este i-ésimo tentará fazer o melhor que ele pode. Como todo conhecem todos os ingredientes do jogo (os A_i, e as u_i), eles conhecem esta propriedade dos

pontos $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ que são equilíbrios de Nash: sempre todos fazem o melhor que podem dados as ações dos outros.

Esta justificativa embora extremamente intuitiva, peca por um ponto: mesmo que haja apenas dois jogadores, mesmo que eles se conheçam bem, mesmo que o equilíbrio de Nash seja único, não há como assegurar que o outro jogará a estratégia de Nash. Neste caso pode ser terrível para ele (e para o adversário), caso ele insista em jogar a estratégia de Nash.

A justificativa dada originalmente por Cournot é atraente, porém dados certos problemas estratégicos tem sido relegada a um segundo plano. Sua idéia era a seguinte: se todos os jogadores no período t tomam como dadas as ações dos outros jogadores no período t-1 e escolhem a estratégia a jogar no período t de modo a maximizar seu ganho, então o ponto $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$, que é equilíbrio de Nash, seria um ponto de equilíbrio deste processo. Duas críticas porém se aplicam: a) o processo dinâmico acima pode não convergir nunca, e b) o jogador está sendo "cego" pois não vê que o que ele joga no período t-1 afeta o que todos os outros fazem em t, de modo que ele poderia tirar vantagem deste fato.

A única razão plausível teoricamente que se conhece (até o momento) é a propriedade do não arrependimento: Se todos jogam Nash, ao fim do jogo ninguém se arrepende do que fez: todos estão fazendo o melhor que eles poderiam fazer, dado o que os outros fizeram.

Finda a digressão teórica-filosófica, volta-se ao ponto principal: em que condições é possível que se garanta a existência de um ponto de equilíbrio de Nash? O teorema principal será apenas citado aqui:

<u>Teorema 1</u>: Seja $\Gamma = \left((A_i)_{i=1}^{n}, (\mu_i)_{i=1}^{n}\right)$ um jogo.

Seja V um espaço vetorial topológico real, localmente convexo e Hausdorff

Se $\forall i$: (i) $A_i \subset V$ é convexo e compacto;

(ii) u_i é contínua;

(iii) u_i é quase côncava na variável $a_i \in A_i$;

<u>Então</u>: $\exists\ \bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ equilíbrio de Nash de Γ.

A demonstração deste resultado é conseqüência do teorema de Glicksberg-Ky Fan (ver Glicksberg(1952)), segundo as linhas da prova de Berge (1957).

Para terminar esta seção introdutória, define-se o conceito de estratégia mista e equilíbrio em estratégia mista. Uma estratégia mista (opondo-se ao conceito de estratégia pura — esta um elemento de A_i) para o jogador i, é um elemento de $W(A_i)$, onde dado (X,τ_X) um espaço topológico, W(X) denota o conjunto das medidas de probabilidade regulares e borelianas sobre X.(ver Billingsley(1968)).(A σ-álgebra de Borel, $B(X)=\sigma(\tau_X)$ é a menor σ-álgebra que contém a topologia de X — ou seja, na qual os abertos de X são mensuráveis).

Agora faz-se uso da hipótese de ser u_i VN-M: é possível estendê-la linearmente a $\prod_{j=1}^{n} W(A_j)$, tomando-se valores esperados em relação à cada uma das variáveis, respectivamente.

<u>Exemplo</u>: Suponha dois jogadores. O jogador 1 joga a estratégia $a_1 \in A_1$ com probabilidade p_1 e a_1' com probabilidade $1-p_1$ (isto representa a descrição de uma estratégia mista de 1: um elemento de $W(A_1)$ uma randomização de suas ações). O jogador 2 joga a estratégia $a_2 \in A_2$ com probabilidade

p_2 e $a_2' \in A_2$ com probabilidade $1-p_2$. Qual será o ganho de 1 (por exemplo) neste caso? Simples: toma-se o valor esperado duplo:

$$U_1 = p_1 p_2 u_1(a_1,a_2) + p_1(1-p_2)\, u_1(a_1,a_2') + (1-p_1)\, p_2 u_1(a_1',a_2) +$$
$$+ (1-p_1)(1-p_2)\, u_1(a_1', a_2').$$

No contexto de estratégias mistas pode-se provar um teorema muito geral de existência de equilíbrio de Nash, no caso $\#A_i < +\infty\ \forall i$.

<u>Teorema 2</u>: Seja $\#A_i < +\infty\ \forall i$. Neste caso Γ possui equilíbrio de em estratégias mistas.

A demonstração deste resultado segue do Teorema 1 facilmente. Foi originalmente provado por Nash (1951).

2. Um Exemplo

Nesta seção será estudado um exemplo de aplicação daquela teoria da parte 1. O exemplo é muito simples, e provavelmente bem conhecido. Sua vantagem reside na comparação que será feita adiante, onde introduzir-se-á a ignorância dos jogadores a respeito do que eles jogam, como um dado do problema.

Vai-se supor um mercado com duas firmas. Cada firma pode ser do tipo que tem custo fixo alto ou baixo. Nesta parte supor-se-á que cada firma conhece o parceiro, e comparar-se-á a solução de Cournot com a de competição perfeita nos quatro tipo de mercados que podem surgir.

Seja então dada a demanda do mercado: $Q(p) = 4-p$.

Sejam as curvas de custo dadas por:

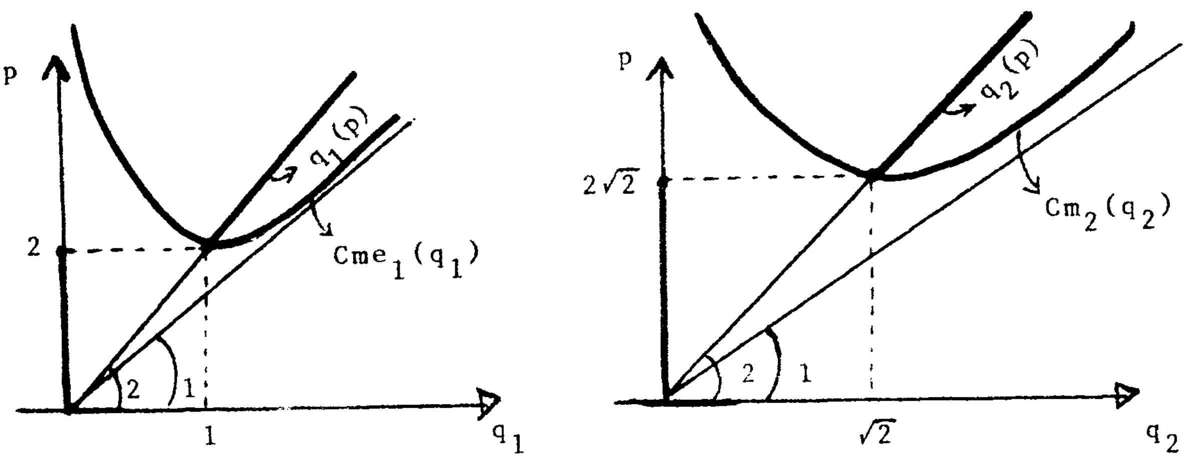
$$C_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad q=0 \\ q^2+1 & \text{se} \quad q>0 \end{cases}$$

$$C_2(q) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad q=0 \\ q^2+2 & \text{se} \quad q>0 \end{cases}$$

Estas curvas de custo são muito populares, pois geram uma curva de custo médio em forma de $\cup$ e causam uma descontinuidade na oferta. De fato, as duas curvas de oferta em competição perfeita são:

$$q_1(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 2 \\ \{0,1\} & \text{se } p = 2 \\ p/2 & \text{se } p > 2 \end{cases}$$

$$q_2(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p < 2\sqrt{2} \\ \{0, \sqrt{2}\} \text{ se } p = 2\sqrt{2} \\ p/2 \text{ se } p > 2\sqrt{2} \end{cases}$$



Portanto tem-se a tabela de produções abaixo, que são as produções de equilíbrio em competição perfeita.

FIRMA 2

FIRMA 1		Custo Fixo Baixo	Custo Fixo Alto
	Baixo	F1 = 1 F2 = 1	F1 = 4/3 F2 = 0
	Alto	F1 = 0 F2 = 4/3	Não há equilíbrio: Há espaço para uma, que não pode atender à demanda, mas não para duas.

O equilíbrio de Cournot é um equilíbrio onde as firmas percebem seu poder de mercado, mas jogam independentemente nas quantidades. Assim obtém-se:

$A_1 = A_2 = [0,4]$ (Não há razão para alagar o mercado com mais que a máxima demanda).

Um elemento genérico de A_i diz-se q_i. Supor-se-á também que as firmas só jogam estratégias puras. Assim $u_1(q_1,q_2) = L_1(q_1,q_2) = P(q_1+q_2)q_1 - C_i(q_1)$ e $u_2(q_1,q_2) = L_2(q_1,q_2) = P(q_1+q_2)q_2 - C_j(q_2)$

i,j indicam alto ou baixo custo fixo, e $P(Q) = 4-Q$ é a função de demanda inversa. Tem-se, ao final de algumas contas:

		F2	
		baixo	alto
F1	baixo	F1 = 4/5 F2 = 4/5	F1 = 1 F2 = 0
	alto	F1 = 0 F2 = 1	EQ1: F1 = 1 F2 = 0 EQ2: F1 = 0 F2 = 1

3. Jogos Com Informação Incompleta

Esta foi uma idéia de Harsanyi(1967-68). Suponha que se queira analisar uma situação onde não se conhece exatamente com quem se está jogando, nem quem se é. Como se pode modelar tal fato ? Se se começa a pensar nisto, ver-se-á que há um problema de uma recursão infinita de suposições. Para exemplificar sejam apenas dois jogadores, que se conhecem a si mesmos , mas desconhecem um ao outro. Assim, segundo Harsanyi, para que o jogo seja jogado (ou seja: para que o conflito seja resolvido) o jogador 1 tentará descobrir quem é o jogador 2, e certamente o que ele pensa a respeito de 2 afetará sua decisão (da escolha de sua ação). Da mesma forma 2 tentará descobrir quem é 1, e isto influenciará a decisão de 2. Mas 1 tentará também descobrir o que 2 pensa que 1 é, e assim por diante.

Vê-se que o problema na forma como se apresenta é intratável. A idéia genial de Harsanyi foi a de achar uma "forma reduzida" para o problema: a cada jogador Harsanyi permite o conhecimento de uma parte do que ele é e do que os outros são. Além disso todos têm conhecimento deste problema, e todos têm distribuições subjetivas a priori sobre o que os outros são. Também é hipótese do modelo que todos conheçam estas distribuições. Formalmente, tem-se:

<u>Definição 4</u>: Um <u>jogo com informação incompleta</u> e n jogadores Γ_I, é uma quádrupla:

$((A_i)_{i=1}^n, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n, (P_i)_{i=1}^n)$, onde:

(i) A_i é o espaço de ações do jogador i, similar ao já definido anteriormente. Como se verá adiante, não se confunde mais com o espaço de estratégias;

(ii) S_i é o espaço de tipos do i-ésimo jogador. Um $s_i \in S_i$ representa a idéia intuitiva do "pedaço" do jogo que é conhecido pelo jogador i. Sejam $A = \prod_{j=1}^{n} A_j$ e $S = \prod_{j=1}^{n} S_j$;

(iii) $u_i : A \times S \to \mathbb{R}$ é a função ganho do jogador

$$(\underbrace{a_1, \ldots, a_n}_{a \in A}, \underbrace{s_1, \ldots s_n}_{s \in S}) \mapsto u_i(a,s)$$

i. Note que aqui introduz-se a principal modificação em relação ao modelo de informação completa: a função ganho do i-ésimo jogador não só depende das ações de todos, mas também do tipo de cada jogador, inclusive do seu próprio. Supõe-se que cada jogador conheça seu próprio tipo antes de começar o jogo, mas desconheça os tipos dos outros. Como foi dito anteriormente seu tipo representa o "pedaço" de informação sobre o jogo que está disponível para ele. Contudo os tipos dos outros ainda são desconhecidos. O que se faz então para que o jogo seja jogado ? Entra em campo agora as distribuições a priori, que cada indivíduo tem, sobre os tipos dos outros;

(iv) $P_i : S_i \to W(S_{-i})$. O P_i representa, dado cada tipo $s_i \in S_i$, o que o i-ésimo jogador pensa que os outros são. Ou seja , é uma distribuição subjetiva a priori sobre os tipos s_{-i} . Isto faz com que a noção subseqüente de equilíbrio seja dita, às vezes, bayesiana.

<u>Exemplo</u>: Sejam duas firmas, que produzem o mesmo produto, e di-

videm o mercado. Cada firma pode ser, como nos exemplos anteriores, de custo fixo alto ou de custo fixo baixo:

$$C_i(q) = \begin{cases} 0, & \text{se } q = 0; \\ q^2 + i, & \text{se } q \neq 0 \end{cases}$$

para $i = 1,2$. Todas as duas firmas conhecem seu próprio custo fixo, mas desconhecem o custo fixo da outra. Sabe-se apenas que cada uma das firmas atribui igual chance da oponente ter custo fixo alto ou baixo. Como se representa formalmente esta situação? A demanda inversa é $p=4-Q$.

É muito simples, uma vez que se utiliza o modelo de Harsanyi: tem-se $n=2$,

$A_1 = A_2 = [0,4]$;

$S_1 = S_2 = \{\overset{\text{custo fixo baixo}}{1}, \overset{\text{custo fixo alto}}{2}\}$;

$u_1 \colon A_1 \times A_2 \times S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lccl} & \text{FIRMA 1} & \text{FIRMA 2} & \\ (q_1, q_2, & 1 \quad , & 1) & \longmapsto (4 - q_1 - q_2)q_2 - C_1(q_1) \\ (q_1, q_2, & 1 \quad , & 2) & \longmapsto (4 - q_1 - q_2)q_1 - C_1(q_1) \\ (q_1, q_2, & 2 \quad , & 1) & \longmapsto (4 - q_1 - q_2)q_1 - C_2(q_1) \\ (q_1, q_2 & 2 \quad , & 2) & \longmapsto (4 - q_1 - q_2)q_1 - C_2(q_1) \end{array}$$

u_2: é definido de modo simétrico.

Falta definir as distribuições a priori. Para tanto, em geral se os conjuntos S_i são finitos, pode-se gerar $W(S_{-i})$ com as probabilidades de cada $\{s_{-i}\}$. Assim denota-se $P_i(s_{-i}|s_i) = P_i(s_i)(\{s_{-i}\})$.

É bom ter em mente que isto não implica em absoluto que os P'_{is} sejam provenientes de uma grande P definida em todo S, tomando-se probabilidades condicionais aos tipos $s_i \in S_i$.

No caso do exemplo tem-se que S_{-i} possui apenas uma coordenada:

$$P_1(s_1)(\{s_2\}) = P_1(s_2|s_1) \text{ e } P_2(s_2)(\{s_1\}) = P_2(s_1|s_2).$$

Como as firmas dão igual chance da oponente ser de custo fixo alto ou baixo, independente de seu próprio tipo:

$$P_1(\overset{s_2 \in S_2}{1}|\overset{s_1 \in S_1}{1}) = P_1(2|1) = P_1(1|2) = P_1(2|2) = 1/2$$

$$P_2(\underset{s_1 \in S_1}{1}|\underset{s_2 \in S_2}{1}) = P_2(2|1) = P_2(1|2) = P_2(2|2) = 1/2$$

Não se disse ainda como as firmas competirão neste mercado, ou seja, como se resolve o conflito. Para isto define-se a noção de equilíbrio de Harsanyi-Nash, ou bayesiano. Deve-se entender primeiro quais são as estratégias dos jogadores de Γ_I. É claro que não são mais as simples ações, como o eram no modelo de informação completa. A estratégia deve captar o fato de o jogador saber qual é o seu tipo no início do jogo, e saber que todos sabem seus tipos também. Portanto:

<u>Definição 5</u>: Seja $\Gamma_I = \left((A_i)_{i=1}^n, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n, (P_i)_{i=1}^n\right)$.

O <u>espaço de estratégias para o jogador i</u> é $\Sigma_i = \{\sigma_i : S_i \to A_i\}$. Em outras palavras: para cada tipo $s_i \in S_i$ o jogador escolhe uma ação. Como requisitos técnicos, além da estrutura topológica dos A_i's e dos S_i's, também se exige que σ_i seja $B(A_i)$-$B(S_i)$ mensurável.

Suponha agora que cada jogador esteja usando uma estratégia. Assim tem-se $\sigma_1 \varepsilon\ \Sigma_1, \ldots, \sigma_n \varepsilon\ \Sigma_n$. Ver-se-á o caso finito, onde já se definiu $P_i(s_i)(\{s_{-i}\})$ como $P_i(s_{-i}|s_i)$. Também se sabe que vale o teorema de Von Neumann-Morgenstern. Daí, se os jogadores que não o i-ésimo jogam $\sigma_i = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ (que se representa por $\sigma_i(s_{-i}) \equiv (\sigma_1(s_1), \ldots, \sigma_{i-1}(s_{i-1}), \sigma_{i+1}(s_{i+1}), \ldots, \sigma_n(s_n)$) tem-se que, para cada $s_i \varepsilon\ S_i$ e cada $a_i \varepsilon\ A_i$:

$$U_i(\sigma_{-i}, a_i, s_i) = \sum_{s_{-i} \varepsilon S_{-i}} P_i(s_{-i}|s_i) u_i(\sigma_{-i}(s_{-i}), a_i, s_{-i}, s_i)$$

Este valor representa a utilidade esperada para o jogador i caso os outros joguem σ_{-i}, caso ele seja do tipo s_i e caso ele tome a ação a_i. O valor esperado é tomado com base em sua distribuição a priori dos tipos dos outros.

Um comportamento não cooperativo deve supor que o jogador i tentará, de modo independente, escolher a ação $\bar{a}_i$ que maximiza seu ganho esperado. Óbvio é que este valor vai depender de seu tipo s_i. Por conseguinte:

<u>Definição 6</u>: Dado Γ_I, uma ênupla $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$ de estratégias dos jogadores é dita um <u>equilíbrio</u> de <u>Harsanyi-Nash</u> (ou <u>equilíbrio bayesiano</u>) se: $\forall i = 1, \ldots, n$; $\forall s_i\ \varepsilon\ S_i$; $\forall a_i\ \varepsilon\ A_i$; tem-se:

$U_i(\bar{\sigma}_{-i}, \sigma_i(s_i), s_i) \geqslant U_i(\bar{\sigma}_{-i}, a_i, s_i)$. Isto quer dizer que $\bar{\sigma}_i(s_i)$ resolve:

$$\max_{a_i \varepsilon A_i} \sum_{s_{-i} \varepsilon S_{-i}} P_i(s_{-i}|s_i)\ u_i\ (\sigma_{-i}(s-i), a_i, s_{-i}, s_i)\ .$$

Como exercício e exemplo, resolver-se-á o problema já visto.

Usando a mesma nctação do exemplo, sejam $q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$, respectivamente, os valores de

$\sigma_1(1), \sigma_1(2), \sigma_2(1), \sigma_2(2).$ ($q_1=(q_{11}, q_{12}) \varepsilon [0,4]^2$ estratégia da firma 1 e $q_2=(q_{21}, q_{22}) \varepsilon [0,4]^2$ é a estratégia da firma 2).

Calculando as expressões

$$\sum_{s-i \varepsilon S_{-i}} P_i(s_{-i}|s_i)\ u_i(\bar{\sigma}_{-i}(s_{-i}),\ a_i,\ s_{-i},\ s_i)$$

Tem-se: (dados $\bar{q}_{11}, \bar{q}_{12}, \bar{q}_{21}, \bar{q}_{22}$ um equilíbrio de Nash)

$i = 1$, $a_1=q$, $s_1=1$

$$\frac{1}{2}[(4-q-\bar{q}_{21})q - C_1(q)] + \frac{1}{2}[(4-q-\bar{q}_{22})\ q - C_1(q)] \qquad \text{(A)}$$

$i=1$, $a_1= q$, $s_1=2$

$$\frac{1}{2}[(4-q-\bar{q}_{21})q - C_2(q)] + [\frac{1}{2}\ (4-q-\bar{q}_{22})q - C_2(q)] \qquad \text{(B)}$$

$i=2$, $a_2= q$, $s_2= 1$

$$\frac{1}{2}[(4-\bar{q}_{11}-q)q - c_1(q)] + \frac{1}{2}[(4-\bar{q}_{12}-q)q - c_1\ (q)] \qquad \text{(C)}$$

$i=2$, $a_2= q$, $s_2 = 2$

$$\frac{1}{2}[(4-\bar{q}_{11}-q)q - C_2(q)] + \frac{1}{2}[(4-\bar{q}_{12}-q)q - C_2(q)] \qquad \text{(D)}$$

A manéira de resolver é simples. Acha-se o máximo de (A) e este é $\bar{q}_{11}$, de (B) e este é $\bar{q}_{12}$, de (C) e este é $\bar{q}_{21}$ de (D) e este é $\bar{q}_{22}$. Obtém-se, um sistema de equações.

É possível que se calcule que a única solução é:

$\bar{q}_{11} = \bar{q}_{21} = \frac{8}{9}$ e $\bar{q}_{21} = \bar{q}_{22} = 0.$

Isto nos dá o quadro de configurações abaixo:

FIRMA 2

FIRMA 1		Custo Fixo Alto	Custo Fixo Baixo
	Custo Fixo Alto	$F_1 = 0$ $F_2 = 0$	$F_1 = 0$ $F_2 = \frac{8}{9}$
	Custo Fixo Baixo	$F_1 = \frac{8}{9}$ $F_2 = 0$	$F_1 = \frac{8}{9}$ $F_2 = \frac{8}{9}$

Visto o exemplo acima, ver-se-á agora de que outras maneiras pode um jogo de informação incompleta aparecer. A mais importante é aquela situação em que as P_i's vêm de uma grande distribuição a priori $P \varepsilon W(S)$. Neste caso há uma simplificação na forma como o jogo é apresentado. Γ_I agora é descrito por $\left((A_i)_{i=1}^n, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n, P\right)$. Este é dito um jogo <u>consistente</u> $\left(P_i(s_i) = P(.|s_i)\right)$.

No caso finito é possível mostrar que as estratégias são escolhidas de modo que $\forall i \ \bar{\sigma}_i : S_i \to A$ maximize em Σ_i a função $\sum_{s \varepsilon S} P(s)\, u_i\, (\bar{\sigma}_{-i}(s_{-i}), \sigma_i(s_i), s)$.

Um equilíbrio de Nash assim definido corresponde a um definido da outra maneira e vice versa. Algumas pequenas

complicações técnicas aparecem no caso $\#S_i = +\infty$.

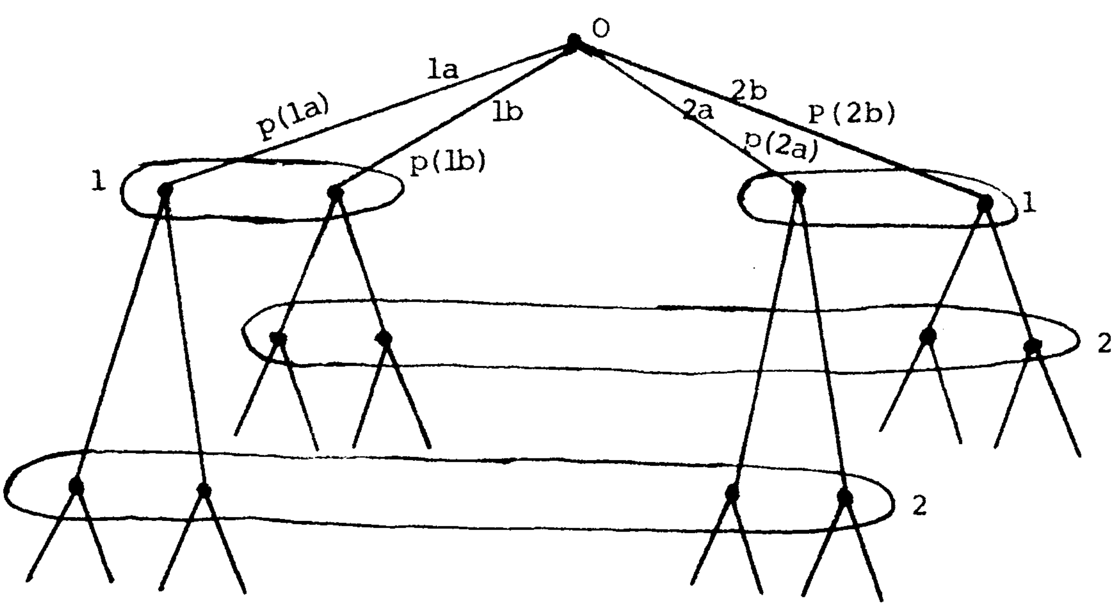
A vantagem desta versão consistente é a notação muito mais concisa. E, além do mais, a idéia de informação incompleta é perfeitamente captada pelo modelo.

O exemplo anterior provém de uma distribuição a priori: $P(1,1) = P(1,2) = P(2,1) = P(2,2) = \frac{1}{4}$.

No caso finito pode-se tomar sempre as P_i's como vindo de uma grande distribuição a priori independente. Obtém-se isto definindo uma nova função ganho: $v_i(a,s) = P_i(s_{-i}|s_i)u_i(a,s)$, e definindo $P_i'(s_{-i}|s_i) = \prod_{j\neq i} P_j(s_j)$ onde $P_j(s_j) = \frac{1}{\#S_j}$

Finalmente note-se que é possível olhar para um jogo de informação incompleta (na forma consistente) e tal que $\# S_i < +\infty$ $\forall i$, como sendo um jogo de informação completa mas informação imperfeita (como definido por Kuhn (1953) onde há uma jogada da natureza no início.

Seja o exemplo com 2 jogadores e dois tipos cada: O jogador 1 pode ser 1 ou 2, o dois a ou b. Suponha também que cada um possui duas alternativas, ou seja $\#A_1 = \# A_2 = 2$. Considera-se também o caso consistente.



4. Exemplos de Aplicações da Teoria dos Jogos em Economia: (não cooperativos).

1- Modelos simples de oligopólio: Cournot, Bertrand, Edgeworth, Stackelberg, Hotteling (ver Henderson e Quandt (1971), Simonsen (1967), Varian (1978)).

2- Modelos de leilões: por exemplo o das LTN → cada "dealer" é um jogador que tem que dar a taxa de desconto e quantidade que está disposto a comprar. (ver Milgrom e Weber (1982), Harris e Raviv (1981)).

3- Modelos de Votação (ou de escolha de bens públicos): Se há uma votação para governador, e há 5 candidatos, os quais podem ter qualquer ordem na preferência popular, como descobrir o vencedor? Haverá possibilidades de manipulação do resultado (mostrando uma preferência que na realidade não é a sua verdadeira)? E com os bens públicos? Como saber exatamente quanto vale para cada um dos consumidores um bem que muitos ou todos eles terão que consumir? (ver Gibbard (1973) Satterthwaite (1975), Maskin (1978) e Dasgupta, Hammond e Maskin (1979)).

4- Modelos de Entrada ou não de uma firma no mercado. (ver Dixit (1982)).

5- Modelos de investimento em novas tecnologias.

6- Modelos de negociação de dívidas externas. (ver Simonsen (1984)).

7- Modelos de interdependência das políticas monetária/fiscal de países grandes.

8- Modelos de salários (ver Werlang (1983)).

9- Modelos de greve e negociação salarial.

10- Modelos de mercado de ações imperfeito: há um grande comprador que se sabe que possui informação privilegiada. Como responderá o mercado? Como deve este comprador (ou vendedor) agir? (Ver Kyle(1981)).

11- Teoria dos Contratos: problemas de assimetria de informação, principal e agente, azar moral, seleção adversa.(Ver Myerson (1982) e (1983)).

5. Bibliografia

Berge, C (1957), Theorie Gênérale de Jeux A n Personnes, Mêmorial des Sciences Mathêmatiques nº 138, Paris: Gouthier-Villars.

Billingsley, P. (1968), Convergence of Probability Measures, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Dasgupta, P. , P.Hammond e E.Maskin (1979), "The Implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility", Review of Economic Studies, vol. 46.

Dixit, A. (1982), "Recent Developments in Oligopoly Theory" , Amer. Econ.Rev. vol.72, nº 2, pp. 12-17.

Gibbard, A. (1973), "Manipulation of Voting Schemes: A General Result", Econometrica, vol. 41, nº 4, pp 586-601.

Glicksberg, I.L. (1952), " A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Applications to Nash Equilibrium Points", Proc. Amer.Math. Soc. 3, pp. 170-174.

Harris, M. e A. Raviv (1981), "Allocation Mechanisms and the Design of Auctions", Econometrica vol. 49, nº 6, pp.1477-1499.

Harsanyi, J.C. (1967-68), "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, Parts I-III", Management Science 14, pp. 159-182, 320-334, 486-502.

Henderson, J. M. e R.E. Quandt (1971), Microeconomic Theory A Mathematical Approach, segunda edição, Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, LTD.

Herstein, I.N. e J. Milnor (1953), "An Axiomatic Approach to Measurable Utility", Econometrica vol. 21, nº 2, pp. 291-297.

Kuhn, H. (1953), "Extensive Games and the Problems of Information", Contributions to the Theory of Games, vol.II, 193-216, Princeton: Princeton University Press.

Kyle, P. (1981), Tese de doutoramento, University of Chicago.

Maskin, E. (1978), "Implementation and Strong Nash Equilibrium" Working Paper nº 216 (MIT, Cambridge, MA).

Milgrom, P.R. e R.J. Weber (1982), "A Theory of Auctions and Competitive Bidding", Econometrica vol.50, pp.1089-1122.

Myerson, R.B. (1982), "Optimal Coordination Mechanisms in Generalized Principal-Agent Problems" Journal of Math. Econ. vol. 10, nº 1, pp. 67-81.

Myerson R.B. (1983), " Bayesian Equilibrium and Incentive Compatibility: An Introduction", J.L. Kellog Graduate School of Management, Discussion Paper nº 548, Northwestern University.

Nash, J. (1951), "Non-Cooperative Games", Annals of Mathematics 54, pp. 286-295.

Neumann, J. e O. Morgenstern (1947), The Theory of Games and Economic Behavior, segunda edição, Princeton: Princeton University Press.

Satterthwaite, M.A. (1975), "Strategy-Proofness and Arrow's Conditions-Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions", Jour. Econ. Th. vol. 10, nº 2, pp. 187-217.

Selten, R. (1975), "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games", Intern. Jour. Game Th. 4, pp. 25-55.

Simonsen, M.H. (1967), Teoria Microeconômica: Teoria da Concorrência Imperfeita, Rio de Janeiro: Editora da Fundação Getúlio Vargas.

Simonsen, M.H. (1984) "The Developing-Country Debt Problem", a ser publicado pelo Banco Mundial.

Varian, H. (1978), "Microeconomic Analysis", New York: W.W. Norton & Company.

Werlang, S.R.C. (1983), "A Keynesian Model of Nominal Wages", não publicado.

ENSAIOS ECONÔMICOS DA EPGE

1. ANÁLISE COMPARATIVA DAS ALTERNATIVAS DE POLÍTICA COMERCIAL DE UM PAIS EM PROCESSO DE INDUSTRIALIZAÇÃO - Edmar Bacha - 1970 (ESGOTADO)

2. ANÁLISE ECONOMÉTRICA DO MERCADO INTERNACIONAL DO CAFÉ E DA POLÍTICA BRASILEIRA DE PREÇOS - Edmar Bacha - 1970 (ESGOTADO)

3. A ESTRUTURA ECONÔMICA BRASILEIRA - Mario Henrique Simonsen - 1971 (ESGOTADO)

4. O PAPEL DO INVESTIMENTO EM EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA NO PROCESSO DE DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO - Carlos Geraldo Langoni - 1972 (ESGOTADO)

5. A EVOLUÇÃO DO ENSINO DE ECONOMIA NO BRASIL - Luiz de Freitas Bueno - 1972

6. POLÍTICA ANTI-INFLACIONÁRIA - A CONTRIBUIÇÃO BRASILEIRA - Mario Henrique Simonsen - 1973 (ESGOTADO)

7. ANÁLISE DE SÉRIES DE TEMPO E MODELO DE FORMAÇÃO DE EXPECTATIVAS - José Luiz Carvalho - 1973 (ESGOTADO)

8. DISTRIBUIÇÃO DA RENDA E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO DO BRASIL: UMA REAFIRMAÇÃO - Carlos Geraldo Langoni - 1973 (ESGOTADO)

9. UMA NOTA SOBRE A POPULAÇÃO ÓTIMA DO BRASIL - Edy Luiz Kogut - 1973

10. ASPECTOS DO PROBLEMA DA ABSORÇÃO DE MÃO-DE-OBRA: SUGESTÕES PARA PESQUISAS - José Luiz Carvalho - 1974 (ESGOTADO)

11. A FORÇA DO TRABALHO NO BRASIL - Mario Henrique Simonsen - 1974 (ESGOTADO)

12. O SISTEMA BRASILEIRO DE INCENTIVOS FISCAIS - Mario Henrique Simonsen - 1974 (ESGOTADO)

13. MOEDA - Antonio Maria da Silveira - 1974 (ESGOTADO)

14. CRESCIMENTO DO PRODUTO REAL BRASILEIRO - 1900/1974 - Claudio Luiz Haddad 1974 (ESGOTADO)

15. UMA NOTA SOBRE NÚMEROS ÍNDICES - José Luiz Carvalho - 1974 (ESGOTADO)

16. ANÁLISE DE CUSTOS E BENEFÍCIOS SOCIAIS I - Edy Luiz Kogut - 1974 (ESGOTADO)

17. DISTRIBUIÇÃO DE RENDA: RESUMO DA EVIDÊNCIA - Carlos Geraldo Langoni - 1974 (ESGOTADO)

18. O MODELO ECONOMÉTRICO DE ST. LOUIS APLICADO NO BRASIL: RESULTADOS PRELIMINARES - Antonio Carlos Lemgruber - 1975

19. OS MODELOS CLASSICOS E NEOCLÁSSICOS DE DALE W. JORGENSON - Eliseu R. de Andrade Alves - 1975

20. DIVID: UM PROGRAMA FLEXÍVEL PARA CONSTRUÇÃO DO QUADRO DE EVOLUÇÃO DO ESTUDO DE UMA DÍVIDA - Clóvis de Faro - 1974

21. ESCOLHA ENTRE OS REGIMES DA TABELA PRICE E DO SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES: PONTO-DE-VISTA DO MUTUÁRIO - Clovis de Faro - 1975

22. ESCOLARIDADE, EXPERIÊNCIA NO TRABALHO E SALÁRIOS NO BRASIL - José Júlio Senna - 1975

23. PESQUISA QUANTITATIVA NA ECONOMIA - Luiz de Freitas Bueno - 1978

24. UMA ANÁLISE EM CROSS-SECTION DOS GASTOS FAMILIARES EM CONEXÃO COM NUTRIÇÃO, SAÚDE, FECUNDIDADE E CAPACIDADE DE GERAR RENDA - José Luiz Carvalho - 1978

25. DETERMINAÇÃO DA TAXA DE JUROS IMPLÍCITA EM ESQUEMAS GENÉRICOS DE FINANCIAMENTO: COMPARAÇÃO ENTRE OS ALGORÍTIMOS DE WILD E DE NEWTON-RAPHSON - Clóvis de Faro - 1978

26. A URBANIZAÇÃO E O CÍRCULO VICIOSO DA POBREZA: O CASO DA CRIANÇA URBANA NO BRASIL - José Luiz Carvalho e Uriel de Magalhães - 1979

27. MICROECONOMIA - Parte I - FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS PREÇOS - Mario Henrique Simonsen - 1979

28. ANÁLISE DE CUSTOS E BENEFÍCIOS SOCIAIS II - Edy Luiz Kogut - 1979

29. CONTRADIÇÃO APARENTE - Octávio Gouvêa de Bulhões - 1979

30. MICROECONOMIA - Parte 2 - FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS PREÇOS - Mario Henrique Simonsen - 1980

31. A CORREÇÃO MONETÁRIA NA JURISPRUDÊNCIA BRASILEIRA - Arnold Wald - 1980

32. MICROECONOMIA - Parte A - TEORIA DA DETERMINAÇÃO DA RENDA E DO NÍVEL DE PREÇOS
José Julio Senna - 2 Volumes - 1980

33. ANÁLISE DE CUSTOS E BENEFÍCIOS SOCIAIS III - Edy Luiz Kogut - 1980

34. MEDIDAS DE CONCENTRAÇÃO - Fernando de Holanda Barbosa - 1981

35. CRÉDITO RURAL: PROBLEMAS ECONÔMICOS E SUGESTÕES DE MUDANÇAS - Antonio Salazar

36. DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA TAXA INTERNA DE RETORNO: CONFRONTO ENTRE ALGORÍTIMOS DE BOULDING E DE WILD - Clovis de Faro - 1983

37. MODELO DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS - Fernando de Holanda Barbosa - 1983

38. A EFICIÊNCIA MARGINAL DO CAPITAL COMO CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE PROJETOS DE INVESTIMENTO - Clovis de Faro - 1983 (esgotado)

39. SALÁRIO REAL E INFLAÇÃO (TEORIA E ILUSTRAÇÃO EMPÍRICA) - Raul José Ekerman - 1984

40. TAXAS DE JUROS EFETIVAMENTE PAGAS POR TOMADORES DE EMPRÉSTIMOS JUNTO A BANCOS COMERCIAIS - Clóvis de Faro - 1984

41. REGULAMENTAÇÃO E DECISÕES DE CAPITAL EM BANCOS COMERCIAIS: REVISÃO DA LITERATURA E UM ENFOQUE PARA O BRASIL - Uriel de Magalhães - 1984

42. INDEXAÇÃO E AMBIÊNCIA GERAL DE NEGÓCIOS - Antonio Maria da Silveira - 1984

43. ENSAIOS SOBRE INFLAÇÃO E INDEXAÇÃO - Fernando de Holanda Barbosa - 1984

44. SOBRE O NOVO PLANO DO BNH: "SIMC"* - Clovis de Faro - 1984

45. SUBSÍDIOS CREDITÍCIOS À EXPORTAÇÃO - Gregório F.L. Stukart - 1984

46. PROCESSO DE DESINFLAÇÃO - Antonio C. Porto Gonçalves - 1984

47. INDEXAÇÃO E REALIMENTAÇÃO INFLACIONÁRIA - Fernando de Holanda Barbosa - 1984

48. SALÁRIOS MÉDIOS E SALÁRIOS INDIVIDUAIS NO SETOR INDUSTRIAL: UM ESTUDO DE DIFERENCIAÇÃO SALARIAL ENTRE FIRMAS E ENTRE INDIVÍDUOS - Raul José Ekerman e Uriel de Magalhães - 1984

49. THE DEVELOPING-COUNTRY DEBT PROBLEM - Mario Henrique Simonsen - 1984

50. JOGOS DE INFORMAÇÃO INCOMPLETA: UMA INTRODUÇÃO - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1984