Nº 292 ISSN 0104-8910

PROCESSUS STOCHASTIQUES EN FINANCE
(1ère partie)

Renato Flôres
Ariane Szafarz

Novembro de 1996

Nota Introdutória

Este documento é um texto didático destinado aos estudantes e pesquisadores em econometria e finanças. Baseia-se na experiencia dos autores em cursos de pós-graduação nos dois lados do Atlântico: na ULB, Bruxelles e na FGV/EPGE, Rio. Não há a pretensão de rigor matemático, e nem a de cobrir todas as aplicações financeiras da teoria dos processos estocásticos. Esta primeira parte discute as martingales e o movimento browniano, os processos de difusão e a integral estocástica, o lema de Itô e o modelo de Black e Scholes.

Os autores agradecem a Patrick Bolton por sua leitura atenta e suas observações construtivas.

Avertissement

Ce document est un texte didactique destiné aux étudiants et aux chercheurs en économétrie et en finance. Il est basé sur l'expérience des auteurs en cours de maîtrise et troisième cycle dans les deux côtés de l'Atlantique: à l'ULB, Bruxelles et à la FGV/EPGE, Rio. Il n'a ni la prétention d'une rigueur mathématique totale, ni l'objectif de couvrir toutes les applications financières de la théorie des processus stochastiques. Cette première partie discute les martingales et le mouvement brownien, les processus de diffusion, l'intégrale stochastique, le lemme d'Itô et le modèle de Black et Scholes.

Les auteurs remercient à Patrick Bolton pour sa lecture attentive et ses remarques constructives.

Processus Stochastiques en Finance : 1ère partie

Renato Flôres et Ariane Szafarz
Septembre 1996

I. Introduction

Le cadre général de la théorie des processus stochastiques est un **espace de probabilité** (Ω, a, P) où Ω est l'ensemble des états de la nature, a représente la σ-algèbre formée des sous-ensembles de Ω, ou événements, auxquels la fonction P permet d'attacher une probabilité. Dans cet espace, on définira des variables aléatoires réelles univariées, appliquant Ω dans R, ou multivariées, appliquant Ω dans R^p.

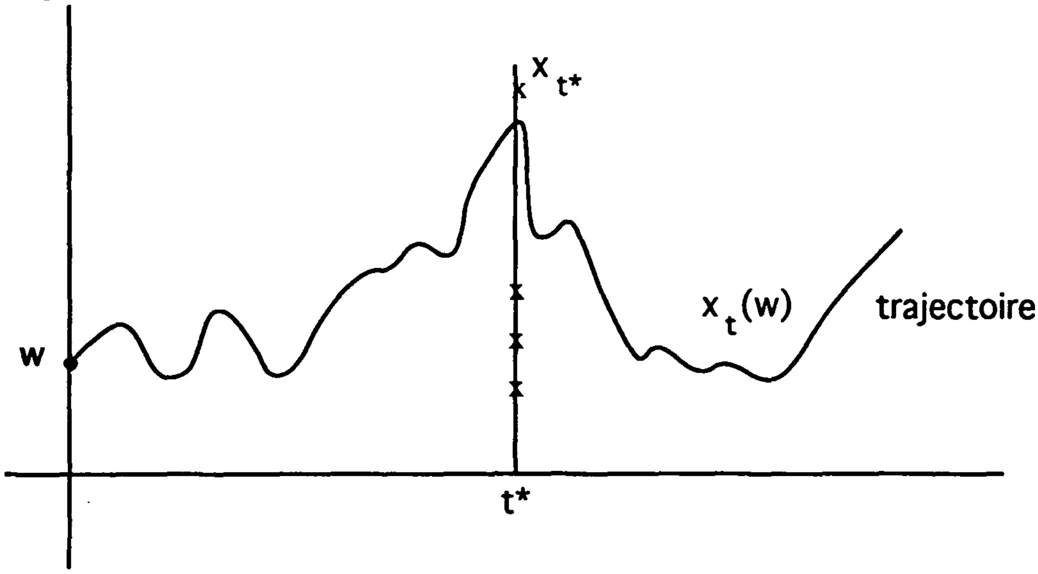
L'ensemble a s'interprète également en termes d'**information**. En effet, cet ensemble comporte tous les événements envisageables dans l'espace considéré. Ainsi, dans le cas particulier où une information relative à une réduction des événements est apportée au système, il devient possible de remplacer l'ensemble a original par un sous-ensemble (ou plus précisément une sous-σ-algèbre). Les probabilités résultant de la prise en compte de cette nouvelle information sont alors dites conditionnelles. Le cas le plus fréquent concerne l'information $\Im_x$ relative à la valeur prise par une variable aléatoire x donnée. On parle alors tout naturellement de **probabilité conditionnelle** à cette variable.

Soit T l'ensemble ordonné qui représente la **dimension temporelle**. Cet ensemble peut être continu ou discret. Dans ce chapitre, on considèrera le plus souvent le cas continu où $T = [0,+\infty)$. Toutefois, dans la mesure où plusieurs définitions sont d'application quelque soit T, nous conserverons les deux notations en parallèle.

Un **processus stochastique** modélise l'évolution d'un phénomène aléatoire au cours du temps. Formellement, le processus stochastique $\{x_t\}_{t\in T}$ est une fonction de

$T \times \Omega \rightarrow IR$ (ou IR^p dans le cas multivarié). Les deux arguments de la fonction peuvent être appréciés séparément. Pour $t \in T$ fixé, x_t est une **variable aléatoire** ; pour $w \in \Omega$ fixé, on détermine une **trajectoire** x(w) du processus (voir graphique 1).

graphique 1 : trajectoire d'un processus stochastique



L'origine de l'introduction des processus stochastiques en économie et en finance réside en la nécessité d'un contexte rigoureux permettant l'étude de la dynamique dans un contexte d'avenir incertain. Dans ce cadre, la notion d'apprentissage est cruciale. En effet, à mesure que le temps s'écoule, les agents recueillent les observations des réalisations passées des variables considérées. Ces observations constituent une source potentiellement importante d'information sur l'évolution future. Comme mentionné plus haut, la notion d'information apportée par une variable x_t est modélisée en termes de σ-algèbre."conditionnante". On définit alors l'information portant sur le processus, noté $\Im_t$ à la date t, comme la σ-algèbre engendrée par la réunion des σ-algèbres relatives aux variables dont la date de réalisation est antérieure ou égale à t :

(1.1) $\Im_t = \sigma - \text{algèbre engendrée par} \bigcup_{t' \leq t} \Im_{x_{t'}}$.

Enfin la **filtration naturelle**, ou histoire, du processus est la succession de ces informations $\left\{\Im_t\right\}_{t \in T}$. Notons d'emblée que, par construction, la filtration est non-décroissante, ce qui traduit l'idée de non-oubli de l'information passée.

Outre la filtration naturelle du processus étudié, on est souvent amené à introduire d'**autres filtrations**, c'est à dire des suites $\left\{\tilde{\Im}_t\right\}_{t\in T}$ telles que :

$$\forall t \leq t' : \tilde{\Im}_t \subseteq \tilde{\Im}_{t'} \quad \text{et } \forall t : \tilde{\Im}_t \subseteq \mathcal{A}.$$

Cela résulte du fait que l'information disponible aux agents excède bien souvent le passé du seul processus d'intérêt. Soit $\left\{\tilde{\Im}_t\right\}_{t\in T}$ une filtration quelconque ; le processus $\{x_t\}$ est dit **adapté à** $\left\{\tilde{\Im}_t\right\}$ si cette dernière contient sa filtration naturelle, ou encore, si à toute date la connaissance de $\tilde{\Im}_t$ permet de reconstituer l'information engendrée par les variables contemporaine x_t et passées $x_{t'}$ $(t' < t)$.

2. Martingale et mouvement brownien

La notion d'**espérance conditionnelle**, dite aussi **anticipation rationnelle** dans le cadre de la théorie économique, est au centre de la théorie des martingales. Le qualificatif "rationnel" fait référence à l'optimalité de l'anticipation (au sens de l'erreur quadratique moyenne) compte tenu de l'information détenue. Autrement dit, l'espérance conditionnelle d'une variable est exactement la meilleure prévision réalisable. Il est important de noter que cette notion dépasse largement le cadre des modèles de prévision usuels basés sur une hypothèse de linéarité. En effet, l'espérance conditionnelle, notée E[.lI] peut dépendre de l'information disponible I d'une manière quelconque, souvent impossible à expliciter[1].

La grande généralité de ce concept a quelque peu tendance a en obscurcir le contenu. Cela provient sans doute du fait que la définition de l'anticipation rationnelle est implicite, par opposition aux formules explicites caractérisant les autres schémas de prévision. Notons également que l'appelation d'espérance conditonnelle résulte du fait que la prévision rationnelle n'est autre que l'espérance de la loi de probabilité conditionnelle à l'information utilisée. Dans un contexte dynamique, ce conditionnement sera donc tout naturellement effectué à l'aide de la filtration représentant l'accumulation des informations passées.

[1] En fait, dès que l'on quitte le cadre des variables normales, il est en général difficile, voire impossible, d'obtenir une expression analytique de l'espérance conditionnelle.

Considérons à présent une filtration quelconque $\left\{\tilde{\Im}_t\right\}$. Le processus stochastique $\left\{x_t\right\}$ est appelé **martingale** par rapport à $\left\{\tilde{\Im}_t\right\}$ si les deux conditions suivantes sont remplies :

(i) $\left\{x_t\right\}$ est adapté à $\left\{\tilde{\Im}_t\right\}$

(ii) $\forall t > t' : E\left[x_t \middle| \tilde{\Im}_{t'}\right] = x_{t'}$.

Interprétant $\tilde{\Im}_t$ comme l'information disponible aux agents économiques à la date t, la première condition exprime simplement que les variables présente et passées sont connues par les agents en t. La seconde traduit la caractéristique majeure des martingales, à savoir que l'anticipation rationnelle de toute valeur future est obtenue en prenant la valeur présente du processus. Tout se passe donc comme si la valeur présente de la variable incorporait à elle seule toute l'information pertinente pour prédire son propre futur.

Une martingale, en temps discret ou continu, est donc un processus stochastique très particulier. On peut cependant fournir des exemples variés de tels processus (voir ci-dessous). Il est important de remarquer que la définition repose de façon essentielle sur la spécification de la filtration $\tilde{\Im}_t$. Ainsi, un même processus peut être martingale par rapport à une filtration sans pour autant jouir de la même propriété pour une autre filtration.

Le rôle de l'ensemble d'information apparaît clairement en finance dans la **théorie des marchés efficients**, intimement liée à la notion de martingale. En effet, on a coutume de distinguer trois niveaux d'efficience selon l'importance de l'information "reflétée dans les prix", c'est-à-dire selon la taille de la filtration par rapport à laquelle le processus des prix est une martingale. Lorsque la propriété n'est valable que par rapport à la filtration minimale (information apportée par les prix passés et présent), on parle d'efficience faible. Lorsque s'ajoute l'information publique, l'efficience est semi-forte. Enfin, lorsque la filtration est maximale (en termes de variables observables) et comporte notamment les informations privées de tous les agents, le marché est fortement efficient.

La notion de martingale s'applique tant dans un cadre temporel continu que discret. A titre de cas particulier en temps discret, on retient principalement la **marche**

aléatoire[2], qui, partant d'une variable initiale, est caractérisée par des accroissements non-correlés et équidistribués de moyenne nulle. Formellement le processus $\{M_t\}_{t=0,1,2,..}$ est une marche aléatoire (avec point de départ en zéro) si :

i) $M_0 \equiv 0$

ii) les accroissements $M_t - M_{t-1}, t > 0$, sont d'espérance nulle, non-correlés et équidistribués.

On peut donc écrire successivement :

$$M_t = M_{t-1} + \varepsilon_t = M_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \cdots = M_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i,$$

où le processus des accroissements, noté $(\varepsilon_t)_{t=1,2,\cdots}$, est une suite de variables d'espérance nulle, non-correlées et équidistribuées (bruit blanc fort[3]). Cette expression permet de mettre en évidence la non-stationnarité de la marche aléatoire puisque :

$$\operatorname{var}(M_t) = \operatorname{var} \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{t} \operatorname{var}(\varepsilon_i) = t\, \sigma_\varepsilon^2.$$

En temps continu, le concept correspondant est celui de mouvement brownien. Le **mouvement brownien standard**, ou **processus de Wiener** (1923), noté $\{B_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ est un processus stochastique vérifiant les conditions suivantes :

i) $B_0 \equiv 0$

ii) $\forall t > t'$, $B_t - B_{t'} \sim N(0, t-t')$

iii) $\forall\ 0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n < +\infty$; $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont non corrélés

[2] Il s'agit d'un cas particulier tellement utilisé en pratique qu'on rencontre fréquemment une confusion entre martingale en temps discret et marche aléatoire. Il est cependant intéressant de constater que la marche aléatoire constitue un cas particulier à deux égards : d'une part, la filtration implicite correspond à l'histoire du processus, d'autre part, l'hypothèse de linéarité est sous-jacente à la décomposition en valeur initiale plus accroissements successifs i.i.d.

[3] Le terme "fort" se rapporte à l'hypothèse d'équidistribution, par opposition à celle de variance constante, moins exigeante et plus courante en analyse des séries temporelles où seule la stationnarité au second ordre est imposée. Par ailleurs, aucune des deux notions de bruit blanc ne comporte a priori l'hypothèse de normalité.

iv) $\forall$ w $\in \Omega$, la trajectoire B(w) est continue.

Stricto sensu, le processus de Wiener est l'"équivalent" en temps continu de la **marche aléatoire à accroissements gaussiens normalisés.** La condition de normalité figurant dans la condition (ii) mérite un commentaire. Il peut en effet paraître surprenant que cette hypothèse figure d'emblée dans la définition. A vrai dire, on peut montrer (de façon non triviale, voir Wiener (1923) ou Feller (1966)) que cette définition est redondante. En effet, d'une part, la continuité (condition iv) peut être déduite des trois premières hypothèses. D'autre part, la normalité imposée par la condition ii résulte des autres éléments (conditions i, iii et iv). Autrement dit, partant d'une définition moins contraignante a priori, car dépourvue de contrainte distributionnelle sur les accroissements, il est possible d'établir la normalité comme une conséquence. Cette propriété n'a pas d'équivalent en temps discret. Intuitivement, cette différence est due à l'exigence de trajectoires continues, qui exclut notamment la présence de sauts dans la dynamique[4].

Tout comme la marche aléatoire, le processus de Wiener est non-stationnaire. Cela résulte directement de la condition (ii). En effet, comme :

$$\forall t > 0,\ B_t = B_t - B_0 \sim N(0,t),$$

la variance marginale croît avec t. De plus, on vérifie aisément que le mouvement brownien standard constitue une martingale par rapport à sa filtration naturelle notée $\{\Im_t\}_{t\in[0,+\infty)}$. En effet, la condition (i) de la définition d'une martingale est triviale dans le cas de la filtration naturelle et on a :

$$\begin{aligned}\forall t > t' > 0 :\ E\left(B_t|\Im_{t'}\right) &= E\left(\left(B_t - B_{t'}\right) + B_{t'}|\Im_{t'}\right)\\ &= \underbrace{E\left(B_t - B_{t'}\right)}_{0} + B_{t'}\end{aligned}$$

A titre d'exercice, on peut également montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à cette même filtration : $\left\{B_t^2 - t\right\}$, $\left\{e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}\right\}$.

[4] Néanmoins si on considère la classe plus générale des processus vérifiant les conditions i et iii, on obtient les processus de Lévy qui peuvent comporter des sauts.

3. Processus de diffusion et intégrale stochastique

Le processus à temps discret décrivant l'accroissement d'une marche aléatoire est un bruit blanc. Ajoutant les hypothèses de normalité et de variance unitaire (parallèles à celles apparaissant dans la définition du processus de Wiener), on obtient évidemment un bruit blanc gaussien de variance 1. Si l'on est amené à considérer une variance (constante mais) quelconque, il suffit de multiplier le bruit initial par l'écart-type voulu. Par analogie, on peut songer à généraliser la notion de mouvement brownien $\{B_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ en considérant $\{X_t\}_{t\in[0,+\infty)}$, où $X_t = \sigma B_t$, c'est à dire en permettant aux accroissements d'avoir un écart-type σ.

Dans le même ordre d'idées, on peut également introduire une dérive, ou un drift, traduisant la présente d'une composante déterministe dans l'évolution du processus. Partant d'une marche aléatoire $\{M_t\}_{t=0,1,2,..}$, on définit une **marche aléatoire avec drift** comme un processus $\{X_t\}_{t=0,1,2,..}$ tel que :

$$\forall t > 0 : X_t - X_{t-1} = M_t - M_{t-1} + \mu .$$

Le drift apparaît donc sous forme de constante additive μ. On peut reformuler l'expression précedente en utilisant l'opérateur différence Δ (tel que $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$) :

$$\forall t > 0 : \Delta X_t = \Delta M_t + \mu .$$

En ce qui concerne le mouvement brownien où le déroulement est continu, la présence d'un drift dans le processus $\{X_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ se traduit par une condition similaire en notation différentielle[5] :

$$\forall t > 0 : dX_t = dB_t + \mu \, dt$$

---

[5] A vrai dire, l'appelation "différentielle" est quelque peu usurpée ici. On peut en effet démontrer que les trajectoires d'un processus de Wiener sont (par définition) continues et non dérivables en tout point. Dès lors, la terminologie de différenciation utilisée dès à présent ne prendra véritablement une signification mathématique que comme opération inverse de l'intégration au sens de Itô qui sera présentée dans la suite de cette section.

L'effet déterministe instantané est linéaire en dt. Combinant la présence d'une variance quelconque et d'un drift, on obtient la formulation :

$$dX_t = \mu \, dt + \sigma \, dB_t.$$

Enfin, les applications développées dans la suite feront apparaître que la restriction imposant à μ et σ d'être constants est trop forte pour la modélisation des variables financières. On retiendra dès lors le cadre général des **processus de diffusion de Itô** définis par :

$$(3.1) \quad dX_t = \mu(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dB_t, \qquad X_0 \equiv x_0 \text{ (condition initiale donnée)}$$

sous les conditions de régularité :

$$\forall\, t > 0 : \int_0^t \mu(\tau,x_\tau)\,d\tau < +\infty,$$

et :

$$\forall\, t > 0 : \int_0^t \sigma^2(\tau,x_\tau)\,d\tau < +\infty\,.$$

La formule (3.1) se présente comme une équation différentielle stochastique (du fait de la présence de dB_t). Afin de mieux en percevoir le contenu, rappelons qu'un processus stochastique dépend de deux arguments : le temps (variable t), qui apparaît évidemment dans tout problème dynamique, aléatoire ou déterministe, et l'état de la nature (variable w) qui est spécifique à l'incertitude de l'environement. En fixant un état de la nature, w_0, on considère une trajectoire donnée du processus qui s'apparente à une simple fonction déterministe.

Considérons l'équation différentielle du premier ordre avec condition initiale fixée donnée par la "partie déterministe" de (3.1) :

$$dX_t = \mu(t,X_t)\,dt, \qquad X_0 \equiv x_0 \text{ (condition initiale donnée).}$$

Cette équation conduit à :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(t',X_{t'})\,dt'.$$

Cette dernière expression, basée sur l'intégrale usuelle (dite **intégrale de Riemann**), reste implicite lorsque la fonction μ dépend effectivement de X_t. Elle constitue néanmoins le point de départ intuitif pour comprendre comment on représente les processus stochastiques vérifiant (3.1).

Par analogie avec ce qui précède, on aimerait pouvoir écrire la solution de (3.1) sous la forme :

$$(3.2)\quad X_t = x_0 + \int_0^t \mu(t', X_{t'})\, dt' + \int_0^t \sigma(t', X_{t'})\, dB_{t'} .$$

Encore faudrait-il savoir ce que représente la seconde intégrale (dite **intégrale de Itô** (1944)) apparaissant dans le membre de droite de (3.2) !

La définition formelle de l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(t)\, dt$ repose sur le calcul des sommes de Darboux. Elle comporte 3 étapes que nous résumons ci-dessous :

a) L'intervalle [a, b] est partitionné en n sous-intervalles de longueur h. Dans chacun de ces intervalles, la fonction à intégrer f est remplacée par une valeur constante (la valeur prise par la fonction f en un bord du sous-intervalle ou celle prise en le milieu de ce sous-intervalle).

b) Au terme de l'étape précédente, on a construit une fonction en escalier. La surface comprise "sous les marches" de cet escalier est donnée par la somme des aires de rectangles ayant tous la même base h.

c) Lorsque h tend vers 0, la fonction en escalier tend vers la fonction f. L'intégrale de Riemann est alors définie comme la limite, pour h tendant vers 0, de la somme des aires des rectangles du b).

Une première généralisation de l'intégrale de Riemann, dans un cadre déterministe, est apportée par **l'intégrale de Stieltjes (ou de Riemann-Stieltjes)** qui repose sur le "remplacement" de la différentielle dt de la fonction identique par celle d'une fonction différentiable G(.). Cette intégrale s'exprime donc par : $\int_a^b f(t)\, dG(t)$. Sa

définition est obtenue au terme de trois étapes similaires à celles décrites ci-dessus, sauf en ce qui concerne la base constante h des rectangles de l'étape b qui est remplacée par la base variable G(t+h)-G(h).

Ensuite, considérant un univers probabiliste, l'idée naturelle pour aborder la notion d'intégrale stochastique consiste à reproduire la démarche précédente trajectoire par trajectoire (pour w fixé), aussi loin que possible pour donner un contenu à l'intégrale stochastique $\int_a^b f(t)\, dB_t$, où $\{B_t\}$ est un processus de Wiener[6]. A cet effet, on établira l'accroissement du processus de Wiener dans chaque intervalle de la subdivision considérée. Ainsi, dans le sous-intervalle [t, t+h], on prendra comme hauteur du rectangle la valeur f(t) tandis que la base sera [B(t+h) - B(t)]. Ce faisant, on peut songer à reproduire les étapes b) et c). Malheureusement, bien que continues, les trajectoires du mouvement brownien sont nulle part différentiables. Il en résulte que la tentative d'appliquer l'intégrale de Stieltjes pour w fixé n'est pas suffisante pour définir l'intégrale stochastique.

La contribution remarquable d'Itô réside en un "aménagement" de l'approche *à la* Riemann-Stietjes qui permette d'introduire dès le départ le caractère stochastique du problème traité. Il substitue aux fonctions en escalier déterministes des processus stochastiques dits "élémentaires" qui restent constants "le plus souvent". Formellent, un processus $\{H_t\}$ est dit **élémentaire** s'il existe des dates $a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq b$ et des variables aléatoires $H_0, H_1, \cdots, H_{n-1}$ mesurables respectivement par rapport à $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1, \cdots, \mathfrak{I}_{n-1}$ telles que :

$$\forall t \in [a,b]: \quad H_t = H_0\, I_{[a,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} H_i\, I_{(t_i,t_{i+1}]}(t) ,$$

où $I_{(c,d]}(t)$ désigne la fonction indicatrice sur l'intervalle (c, d] [7].

[6] De façon générale, f(t) ne doit pas se limiter à une fonction déterministe. L'intégrale stochastique définie ci-dessous sera appliquable à de nombreux processus stochastiques. Par ailleurs, on peut se demander si l'hypothèse de processus de Wiener est ici indispensable. Ce problème a fait l'objet d'une littérature spécifique, d'un niveau mathématique dépassant largement le cadre de cette note. Signalons toutefois que l'intégrale stochastique peut être envisagée de façon plus générale par rapport à une martingale continue, mais certainement pas par rapport à un processus quelconque.

[7] qui vaut 1 si t appartient à cet intervalle et 0 sinon.

On peut montrer que les suites de processus élémentaires permettent d'approcher (au sens de la convergence selon la distance-carré[8]) un ensemble important de processus qui seront appelés **"intégrables"**. A partir de là, on reproduit la démarche précédente, avec les processus élémentaires dans le rôle des fonctions en escalier. D'abord, l'intégrale stochastique d'un processus élémentaire est donnée par l'expression suivante (qui a un sens pour tout w) :

$$\int_a^b H_t \, dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

Ensuite, par passage à la limite, il est possible d'étendre la notion à tout processus intégrable. L'astuce qui permet de court-circuiter le problème de non-différentiabilité des trajectoires consiste donc en l'éviction de la limite pour Δt (ou h) $\rightarrow 0$ d'une somme dont le nombre de termes tend vers ∞ au profit d'une limite fonctionnelle de sommes en nombre fini.

Sans entrer dans les détails mathématiques, il est important d'observer que l'intégrale d'Itô évalue le processus élémentaire H en le bord gauche de la subdivision puisque c'est H_i qui multiplie $\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$. On peut montrer que, contrairement à l'intégrale de Riemann, l'intégrale stochastique est sensible à ce choix[9].

Considérons un processus stochastique $\{X_t\}_{t\in[0,+\infty)}$. Moyennant l'existence (sous conditions de régularité) de l'intégrale d'Itô, on peut, pour t fixé, considérer la nouvelle variable aléatoire :

$$\int_0^t X_{t'} \, dB_{t'} = \int_0^t X_{t'}(w) \, dB_{t'}(w),$$

et, en ajoutant la dimension temporelle, constituer le processus stochastique :

---

[8] La distance-carré entre deux variables aléatoires admettant des seconds moments finis s'écrit comme : $d(X,Y) = E\,(X-Y)^2$.

[9] Si l'on prend plutôt la valeur moyenne $\frac{1}{2}\left(H_i + H_{i+1}\right)$, le résultat final peut effectivement être différent. En réalité, il existe un concept concurrent d'intégrale stochastique, dite de Stratonovich, qui s'appuie précisément sur cette valeur moyenne. Cette approche est restée nettement plus confidentielle que celle d'Itô.

$$\left\{ \int_0^t X_{t'}\, dB_{t'} \right\}_{t \in [0,+\infty)} .$$

A titre d'exercice, on montrera que si le processus $\{X_t\}$ est adapté à la filtration naturelle du mouvement brownien standard $\{B_t\}$, alors le processus $\left\{ \int_0^t X_{t'}\, dB_{t'} \right\}$ est une martingale par rapport à cette filtration. Par conséquent, ce processus a une espérance constante et on a :

$$\forall\, t: \; E\left[\int_0^t X_{t'}\, dB_{t'} \right] = E\left[\int_0^0 X_{t'}\, dB_{t'} \right] = 0.$$

On peut également démontrer que le processus $\left\{ \left(\int_0^t X_{t'}\, dB_{t'} \right)^2 - \int_0^t X_{t'}^2\, dt \right\}$ est une martingale et en déduire que :

$$\forall\, t: \; V\left[\int_0^t X_{t'}\, dB_{t'} \right] = E\left(\int_0^t X_{t'}\, dB_{t'} \right)^2 = \int_0^t E\left[X_{t'}^2 \right] dt.$$

L'intégrale d'Itô jouit des propriétés usuelles d'additivité. Toutefois un certain nombre de formules "classiques " d'intégration ne sont plus d'application. Un exemple sera fourni dans la section suivante.

En conclusion, ce n'est que grâce à l'intégrale stochastique que l'expression différentielle (3.1) des processus de diffusion prend un sens mathématique. En effet, la formule (3.1) ne représente qu'une écriture commode de l'expression (3.2). La différence fondamentale avec le calcul différentiel classique apparaîtra au travers de la formule d'Itô (dite aussi lemme d'Itô).

4. Le lemme d'Itô

Le célèbre lemme d'Itô constitue un outil de base pour l'évaluation des actifs financiers en temps continu. Au départ, on suppose que le processus décrivant la source

des fluctuations du prix de l'actif considéré est un processus de diffusion. Il s'agira par exemple :

- du processus décrivant l'évolution du taux d'intérêt court dans le cas d'évaluation de titres à revenus fixes,

- du processus fournissant l'évolution du sous-jacent dans le problème d'évaluation des options.

Le prix de l'actif à évaluer se présentera alors comme une fonction des caractéristiques (drift et volatilité) de cette dynamique. Formellement, il est donc nécessaire de connaître le mécanisme de "dérivation" d'une fonction composée dans le cadre de la théorie des processus stochastiques. C'est précisément ce mécanisme qui fait l'objet du lemme d'Itô.

Considérons un processus de diffusion $\{X_t\}_{t\in[0,+\infty)}$:

$$dX_t = \mu \, dt + \sigma \, dB_t,$$

où $\mu = \mu\left(t, X_t\right)$ et $\sigma = \sigma\left(t, X_t\right)$, et f une fonction de $R^2 \to R$ de classe C^2. Cette fonction permet de définir le nouveau processus $\{Y_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ tel que $Y_t = f\left(t, X_t\right)$.

Le lemme d'Itô affirme que le processus $\{Y_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ est un processus de diffusion et peut être représenté par :

$$(4.1)\quad dY_t = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\mu + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2\right]dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma \, dB_t.$$

L'expression (4.1) mérite quelques commentaires. Observons d'abord qu'elle se distingue de la formule classique de dérivation en chaîne (ou "chain rule") des fonctions de deux variables. En effet, si l'on "oubliait" la complexité inhérente de dB_t et on le considérait comme différentielle usuelle, on obtiendrait, par dérivation en chaîne, une formule du type :

$$dY = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial X}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial B}dB = \left[\frac{\partial f}{\partial x}.\mu + \frac{\partial f}{\partial t}\right]dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma \, dB.$$

Or la formule correcte (4.1) comporte, au niveau du drift, un terme supplémentaire du $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2$. Cette adjonction, a priori curieuse, d'un terme comportant une dérivée seconde dans le terme du premier ordre de l'approximation de Taylor s'explique intuitivement en revenant à la définition du processus de Wiener. On se souvient en effet que la condition ii) de cette définition impose une variance des accroissements du processus égale à l'intervalle de temps sur lequel porte l'accroissement. Transposée au niveau infinitésimal, cette propriété s'interprète par une volatilité instantanée de l'ordre de dt. Il s'ensuit que, dans la formule précédente, il manque encore un terme de premier ordre qui provient du fait que $dB_t^2 = dB_t.dB_t$ est un infinitésimal de l'ordre de dt. Ainsi, il paraît raisonnable qu'une dérivée seconde par rapport à x, multipliée par σ^2, figure dans (4.1).

Un exemple permettra d'illustrer l'application du lemme d'Itô. Prenons comme processus initial un simple mouvement brownien $\{B_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ et comme la fonction :

$$f(t,x) = x^2$$

dont les dérivées partielles sont évidemment :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\ .$$

Le lemme d'Itô permet d'écrire :

$$dB_t^2 = \frac{1}{2}\,.\,2\,dt + 2\,B_t\,dB_t = dt + 2\,B_t\,dB_t.$$

Le premier terme est spécifique au calcul différentiel stochastique. En représentation intégrale, ce phénomène se traduit par :

$$(4.2)\quad B_t^2 = \int_0^t dB_{t'}^2 = \int_0^t dt' + 2\int_0^t B_{t'}\,dB_{t'},$$

ou encore :

$$\int_0^t B_{t'}\, dB_{t'} = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t .$$

On constate ici les modifications que la formule d'Itô apporte au calcul d'intégrales. Ainsi, un phénomène a priori purement aléatoire entraîne, par le biais de la variance instantanée, un effet déterministe (drift).

A titre d'exercice, on appliquera, en prenant pour point de départ le processus de Wiener $\{B_t\}_{t \in [0,+\infty)}$, le lemme d'Itô à la fonction :

$$f(t,x) = \exp\left(\alpha\, t + \sigma\, x\right),$$

où α et σ sont des constantes. On obtiendra de la sorte l'équation différentielle décrivant la dynamique du processus $\{Y_t\}_{t \in [0,+\infty)}$ tel que :

$$(4.3)\quad Y_t = \exp\left(\alpha\, t + \sigma\, B_t\right),$$

sous la forme :

$$(4.4)\quad dY_t = \left[\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right] Y_t\, dt + \sigma\, Y_t\, dB_t .$$

Ce résultat sera utile dans la section suivante.

5. Le modèle de Black et Scholes

La méthode d'évaluation des options européennes proposée par Black et Scholes (1973) a joué un rôle majeur à la fois au niveau pratique, où elle constitue encore actuellement la référence obligée en matière de pricing d'actifs contingents, et au niveau théorique, où elle a radicalement modifié la modélisation financière.

C'est à ce second aspect que nous nous attachons à présent, en reproduisant ici la présentation "pas à pas" de l'article original. En effet, la version plus récente et plus compacte de l'obtention de la formule de Black et Scholes repose sur la notion

d'évaluation risque-neutre que nous aborderons plus loin. Le schéma que nous suivons ici a néanmoins le mérite de mettre en lumière l'application des notions de calcul différentiel stochastique présentées précédemment.

Le problème traité concerne l'**évaluation d'une option d'achat** (call) européenne dont le sous-jacent est une action qui ne donne pas droit à l'octroi d'un dividende, du moins avant l'échéance de l'option. Le qualificatif "européen" signifie que le call ne peut être exercé qu'à l'échéance, notée T. On suppose que, outre l'option à évaluer, sont disponibles sur le marché d'une part le sous-jacent, dont le prix en t est noté S_t, et d'autre part un actif sans risque.

La dynamique des différents actifs est modélisée en temps continu. Ainsi l'actif sans risque a une valeur qui croît exponentiellement au taux r (capitalisation continue avec un taux constant). Partant d'une valeur initiale β_0, son prix en $t \geq 0$ est :

$$\beta_t = \beta_0 \exp(r\, t).$$

Cette dynamique déterministe peut également s'écrire sous forme différentielle :

$$(5.1) \quad d\beta_t = r\, \beta_t\, dt$$

L'action est pour sa part un actif risqué évoluant, pour un prix initial donné s_0, selon l'équation[10] :

$$(5.2) \quad S_t = s_0 \exp\left(\alpha\, t + \sigma\, B_t\right)$$

où α et σ sont des constantes et $\{B_t\}$ est un processus de Wiener. Ce processus est appelé **mouvement brownien géométrique**. Le lemme d'Itô permet de représenter l'évolution du prix par :

$$dS_t = \left[\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right] S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dB_t, \quad \text{où } S_0 = s_0.$$

ou encore :

[10] Cette expression impose en particulier une distribution log-normale au prix de l'action.

$$(5.3)\quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dB_t,$$

où $\mu = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$.

Avant d'aborder le problème d'évaluation de l'option, attardons-nous sur les hypothèses du modèle. D'une part, le taux d'intérêt sans risque, applicable tant pour les placements que pour les emprunts est supposé constant pour toutes les échéances. Cette hypothèse, simplificatrice compte tenu des fluctuations observées sur les taux d'intérêt, s'avère "raisonnable" en pratique dès lors que l'actif sous-jacent à l'option est une action ou tout autre titre dont le risque n'est pas lié aux taux d'intérêt. Les choses se compliqueront lorsqu'on sera amené à évaluer des dérivés sur obligations.

D'autre part, l'actif risqué est supposé ne donner lieu à aucun versement de dividende durant la vie de l'option. Cette limitation peut cependant être facilement contournée lorsque les revenus liés à la détention de l'actif sont connus à la date d'évaluation de l'option. En effet, il suffira alors de considérer pour S_t, non pas le prix de l'action mais ce prix moins la valeur actuelle des dividendes futurs qui seront versés avant l'échéance de l'option. Par ailleurs, la dynamique (5.3), conséquence de l'hypothèse (5.2), est cohérente avec des modèles classiques d'évaluation du type CAPM. L'interprétation courante des paramètres de (5.3) présente μ comme le taux de rentabilité attendu instantané et σ comme la volatilité instantanée de l'actif. L'application du lemme d'Itô fait apparaître une "prime de risque" $\frac{\sigma^2}{2}$ au niveau de la rentabilité attendue.

Une hypothèse fondamentale pour l'obtention de la formule de Black et Scholes postule **l'absence d'opportunité d'arbitrage** ("no free lunch"). Il en résulte que deux portefeuilles qui auront, à une date future connue, la même valeur dans tous les états de la nature, doivent avoir le même prix à l'instant présent. Si tel n'était pas le cas, l'arbitrage consisterait à vendre le plus cher, à acheter pour le montant de la vente réalisée (pas de mise de fonds) le portefeuille le moins cher et attendre la date future connue pour empocher, sans risque, la différence.

Enfin, le modèle impose la liquidité et la divisibilité des titres en présence, l'autorisation des positions à découvert et l'absence de frais de transactions.

Le call à évaluer (prix C_t en t) permet d'acheter une action au prix d'exercice K à la date T. Sa valeur à maturité sera donc :

(5.4) $C_T = \max(S_T - K\,,0)$,

traduisant le fait que l'exercice de l'option n'aura lieu que si la valeur du sous-jacent à l'échéance excède K. A toute date t située entre 0 et T, la valeur du call est supposée telle que :

(5.5) $C_t = C(S_t\,,t)$,

de sorte que le lemme d'Itô soit applicable et permette d'écrire :

(5.6) $$dC_t = \left[\frac{\partial C}{\partial S} S_t\,\mu + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\; S_t^2\,\sigma^2\right] dt + \left(\frac{\partial C}{\partial S}\,S_t\,\sigma\right)\, dB_t$$

Afin de déterminer la fonction C, définissons la notion de stratégie de transaction autofinancée comme un couple de fonctions déterministes (a_t , b_t) où $t \in [0,T]$, représentant la composition d'un portefeuille respectivement en actions et en titre sans risque, telles que à toute date t on ait :

(5.7) $$a_t\ S_t + b_t\ \beta_t = a_0\ s_0 + b_0\ \beta_0 + \int_0^t a_{t'}\ dS_{t'} + \int_0^t b_{t'}\ d\beta_{t'}\ .$$

c'est-à-dire que la valeur du portefeuille à tout instant soit égale à la valeur initiale plus les gains (positifs ou négatifs) générés par la détention des actifs. Les stratégies autofinancées permettent donc de modifier de façon déterministe la composition du portefeuille tout en respectant la mise initiale donnée $a_0\ S_0 + b_0\ \beta_0$. Dès lors, entre 0 et T, elles ne permettent aucun retrait ou ajout de fonds dans le portefeuille.

Considérons à présent une stratégie autofinancée telle qu'à l'échéance de l'option, le portefeuille ainsi constitué ait exactement la même valeur que le call :

(5.8) $a_T\ S_T + b_T\ \beta_T = C_T$,

sachant que cette valeur est donnée par (5.4). Par hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, cette égalité doit être également vérifiée à toute date comprise entre 0 et T.

Si tel n'était pas le cas, un arbitrage faisant intervenir la statégie autofinancée d'une part, le call de l'autre, serait automatiquement réalisable. On a donc :

(5.9) $\forall t \in [0,T] : C_t = a_t\, S_t + b_t\, \beta_t$.

Il s'ensuit que :

(5.10) $dC_t = a_t\, dS_t + b_t\, d\beta_t = \left(a_t\, \mu\, S_t + b_t\, \beta_t\, r\right) dt + \left(a_t\, \sigma\, S_t\right) dB_t$.

La comparaison des équations (5.6) et (5.10) permet alors de déduire que :

(5.11) $a_t = \dfrac{\partial C}{\partial S}$

et

(5.12) $\dfrac{\partial C}{\partial S} S_t\, \mu + \dfrac{\partial C}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}\, S_t^2\, \sigma^2 = b_t\, \beta_t\, r + a_t\, \mu\, S_t = b_t\, \beta_t\, r + \dfrac{\partial C}{\partial S}\, \mu\, S_t$.

En vertu de (5.9) et (5.11), on obtient alors :

$$\frac{\partial C}{\partial S} S_t + b_t\, \beta_t = C_t,$$

qui permet d'exprimer b_t sous la forme :

$$b_t = \frac{1}{\beta_t}\left(C_t - \frac{\partial C}{\partial S}.S_t\right)$$

et (5.12) conduit finalement à l'équation :

$$\frac{\partial C}{\partial S} S_t\, \mu + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S_t^2\, \sigma^2 = \frac{\partial C}{\partial S} S_t\, \mu + r\, C_t - \frac{\partial C}{\partial S} S_t\, r$$

qui, après simplification, se ramène à l'équation différentielle stochastique aux dérivées partielles suivante :

(5.13) $\dfrac{\partial C}{\partial S} S_t\, r + \dfrac{\partial C}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2} S_t^2\, \sigma^2 = r\, C_t$

sous la condition finale :

$$(5.14)\quad C_T = C(S_T, T) = \max\left(S_T - K, 0\right).$$

On observe que l'équation différentielle aux dérivées partielles (5.13), dite parabolique, ne fait plus intervenir le drift μ du processus du prix du sous-jacent de l'option. En effet, outre le prix du sous-jacent, les seuls paramètres figurant dans cette équation sont la volatilité σ^2 et le taux sans risque r. De plus, le prix d'exercice K et l'échéance T interviennent au niveau de la condition finale (5.14). En conséquence, le prix du call à la date t peut s'exprimer comme :

$$C_t = C\left(S_t, t; K, T, r, \sigma\right)$$

La théorie des équations différentielles paraboliques fournit la forme explicite de la solution de (5.13)-(5.14) :

$$(5.15)\quad C_t = S_t\,\Phi(z) - e^{-r(T-t)}\,K\,\Phi\left(z - \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et :

$$z = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Les dates t et T ne figurent dans le prix du call qu'au travers de la différence T-t représentant le délai restant à courir jusqu'à l'échéance de l'option. On peut donc encore écrire :

$$C_t = C\left(S_t, T-t, K, r, \sigma\right).$$

A titre d'exercice, on vérifiera que (5.15) est bien solution de l'équation (5.13).

6. Généralisation

La méthode utilisée par Black et Scholes pour évaluer un call européen peut être généralisée sous divers aspects : dynamique du sous-jacent, taux sans risque, condition finale. En effet, au niveau du processus de prix de l'action, on pourrait considérer une diffusion d'Itô quelconque :

$$(6.1) \quad dS_t = \mu(S_t, t)\, dt + \sigma(S_t, t)\, dB_t,$$

tandis que le taux sans risque, noté r(t), pourrait varier au cours du temps, ce qui entraînerait la dynamique suivante de l'actif sans risque[11] :

$$(6.2) \quad d\beta_t = \beta_t\, r(t)\, dt .$$

Pour ne pas limiter l'actif dérivé, dont le processus de prix est à présent noté (Y_t), au seul call, on écrit une condition finale générale[12] :

$$(6.3) \quad Y_T = g(S_T) ,$$

où g est une fonction réelle continue. Cette condition permet la prise en compte de divers actifs contingents. La continuité de la fonction g exprimant la valeur du titre dérivé à l'échéance est effectivent vérifiée pour les divers graphes linéaires par morceaux courants en pratique financière (voir Hull (1993) chap. 8 pour une description des "bull spread", "butterfly spread", "straddle", "strips", etc.). La démarche suivie ici n'est cependant pas applicable aux options américaines qui peuvent être exercées avant la date T.

Dans le cadre plus général (6.1), (6.2) et (6.3), on peut reproduire le développement donné dans la section précédente lors de l'obtention de la formule de Black et Scholes. En supposant que le prix du dérivé considéré s'exprime comme :

$$(6.4) \quad Y_t = Y(S_t , t),$$

on obtient une équation identique à (5.13) [à vérifier comme exercice] dont la solution, sous la condition finale (6.3) peut être représentée sous la forme suivante due à Feynmann-Kac (sous certaines conditions de régularité) :

---

[11] On peut même supposer que r dépend aussi de la valeur de S_t. Dans ce cas, il est alors logique de ne plus utiliser la dénomination de "taux sans risque", tout en conservant l'interprétation du processus β en termes de prix d'une obligation (voir Duffie(1994)).

[12] Cette écriture impose néanmoins que l'actif dérivé considéré est de type "européen".

(6.5) $Y_t = Y(S_t, t)$

où :

(6.6) $Y(x,t) = E\left(\exp\left[-\int_t^T r(s)\,ds\right] g\left(Z_T^{x,t}\right)\right)$,

et $\left(Z_s^{x,t}\right)_{s\geq 0}$, pour x et t donnés, est le processus d'Ito défini par :

(6.7) $Z_s^{x,t} = x \quad \text{pour } s \leq t$

(6.8) $dZ_s^{x,t} = r(s)\, Z_s^{x,t}\, ds + \sigma\left(Z_s^{x,t}, s\right) dB_s \quad \text{pour } s > t.$

On peut vérifier, comme exercice, que la formule (5.15) de Black et Scholes est un cas particulier de (6.6) dans lequel l'espérance peut être calculée explicitement. Comme précédemment, on voit que le drift du processus du sous-jacent n'intervient pas dans l'évaluation du dérivé. C'est donc la complexité des fonctions r(.) et σ(.,.) qui orientera le calcul de (6.6) vers une expression analytique exacte et/ou une détermination numérique.

Références

Demange G. et J.-C. Rochet (1992), *Méthodes mathématiques de la finance*, Economica, Paris.

Duffie, D. (1994), *Modèles dynamiques d'évaluation*, Presses Universitaires de France, Paris (traduction de l'ouvrage *Dynamic Asset Pricing Theory* paru en 1992 chez Princeton University Press, Princeton).

Feller, W. (1966), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. II, Wiley, New York.

Hull, J. C. (1993), *Options, Futures and other Derivative Securities* (2d edition), Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Lévy, P. (1965), *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien* (2ème édition), Gauthier-Villars, Paris.

Wiener, N. (1923), Differential Space, *Journal of Mathematics and Physics*, 2, pp. 131-74.

ENSAIOS ECONÔMICOS DA EPGE

215. DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS, ARBITRAGEM, MERCADO A TERMO E MERCADO FUTURO - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Flávio Auler - Agosto de 1993 - 69 pág. (esgotado).

216. SISTEMA MONETÁRIO VERSÃO REVISADA - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 - 69 pág. (esgotado).

217. CAIXAS DE CONVERSÃO - Fernando Antônio Hadba - Agosto de 1993 - 28 pág.

218. A ECONOMIA BRASILEIRA NO PERÍODO MILITAR - Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 - 50 pág. (esgotado).

219. IMPÔSTO INFLACIONÁRIO E TRANSFERÊNCIAS INFLACIONÁRIAS - Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 - 14 pág. (esgotado).

220. PREVISÕES DE M1 COM DADOS MENSAIS - Rubens Penha Cysne e João Victor Issler - Setembro de 1993 - 20 pág. (esgotado)

221. TOPOLOGIA E CÁLCULO NO Rn - Rubens Penha Cysne e Humberto Moreira - Setembro de 1993 - 106 pág. (esgotado)

222. EMPRÉSTIMOS DE MÉDIO E LONGO PRAZOS E INFLAÇÃO: A QUESTÃO DA INDEXAÇÃO - Clovis de Faro - Outubro de 1993 - 23 pág.

223. ESTUDOS SOBRE A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR, vol. 1 - Nelson H. Barbosa, Fábio N.P. Freitas, Carlos F.L.R. Lopes, Marcos B. Monteiro, Antonio Maria da Silveira (Coordenador) e Matias Vernengo - Outubro de 1993 - 249 pág (esgotado)

224. A SUBSTITUIÇÃO DE MOEDA NO BRASIL: A MOEDA INDEXADA - Fernando de Holanda Barbosa e Pedro Luiz Valls Pereira - Novembro de 1993 - 23 pág.

225. FINANCIAL INTEGRATION AND PUBLIC FINANCIAL INSTITUTIONS - Walter Novaes e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Novembro de 1993 - 29 pág

226. LAWS OF LARGE NUMBERS FOR NON-ADDITIVE PROBABILITIES - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Dezembro de 1993 - 26 pág.

227. A ECONOMIA BRASILEIRA NO PERÍODO MILITAR - VERSÃO REVISADA - Rubens Penha Cysne - Janeiro de 1994 - 45 pág. (esgotado)

228. THE IMPACT OF PUBLIC CAPITAL AND PUBLIC INVESTMENT ON ECONOMIC GROWTH: AN EMPIRICAL INVESTIGATION - Pedro Cavalcanti Ferreira - Fevereiro de 1994 - 37 pág. (esgotado)

229. FROM THE BRAZILIAN PAY AS YOU GO PENSION SYSTEM TO CAPITALIZATION: BAILING OUT THE GOVERNMENT - José Luiz de Carvalho e Clóvis de Faro - Fevereiro de 1994 - 24 pág.

230. ESTUDOS SOBRE A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR - vol. II - Brena Paula Magno Fernandez, Maria Tereza Garcia Duarte, Sergio Grumbach, Antonio Maria da Silveira (Coordenador) - Fevereiro de 1994 - 51 pág.(esgotado)

231. ESTABILIZAÇÃO DE PREÇOS AGRÍCOLAS NO BRASIL: AVALIAÇÃO E PERSPECTIVAS - Clovis de Faro e José Luiz Carvalho - Março de 1994 - 33 pág. (esgotado)

232. ESTIMATING SECTORAL CYCLES USING COINTEGRATION AND COMMON FEATURES - Robert F. Engle e João Victor Issler - Março de 1994 - 55 pág. (esgotado)

233. COMMON CYCLES IN MACROECONOMIC AGGREGATES - João Victor Issler e Farshid Vahid - Abril de 1994 - 60 pág.

234. BANDAS DE CÂMBIO: TEORIA, EVIDÊNCIA EMPÍRICA E SUA POSSÍVEL APLICAÇÃO NO BRASIL - Aloisio Pessoa de Araújo e Cypriano Lopes Feijó Filho - Abril de 1994 - 98 pág. (esgotado)

235. O HEDGE DA DÍVIDA EXTERNA BRASILEIRA - Aloisio Pessoa de Araújo, Túlio Luz Barbosa, Amélia de Fátima F. Semblano e Maria Haydée Morales - Abril de 1994 - 109 pág. (esgotado)

236. TESTING THE EXTERNALITIES HYPOTHESIS OF ENDOGENOUS GROWTH USING COINTEGRATION - Pedro Cavalcanti Ferreira e João Victor Issler - Abril de 1994 - 37 pág. (esgotado)

237. THE BRAZILIAN SOCIAL SECURITY PROGRAM: DIAGNOSIS AND PROPOSAL FOR REFORM - Renato Fragelli; Uriel de Magalhães; Helio Portocarrero e Luiz Guilherme Schymura - Maio de 1994 - 32 pág.

238. REGIMES COMPLEMENTARES DE PREVIDÊNCIA - Hélio de Oliveira Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso, Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Uriel de Magalhães - Maio de 1994 - 106 pág.

239. PUBLIC EXPENDITURES, TAXATION AND WELFARE MEASUREMENT - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1994 - 36 pág.

240. A NOTE ON POLICY, THE COMPOSITION OF PUBLIC EXPENDITURES AND ECONOMIC GROWTH - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1994 - 40 pág. (esgotado)

241. INFLAÇÃO E O PLANO FHC - Rubens Penha Cysne - Maio de 1994 - 26 pág. (esgotado)

242. INFLATIONARY BIAS AND STATE OWNED FINANCIAL INSTITUTIONS - Walter Novaes Filho e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Junho de 1994 -35 pág.

243. INTRODUÇÃO À INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA - Paulo Klinger Monteiro - Junho de 1994 - 38 pág. (esgotado)

244. PURE ECONOMIC THEORIES: THE TEMPORARY HALF-TRUTH - Antonio M. Silveira - Junho de 1994 - 23 pág. (esgotado)

245. WELFARE COSTS OF INFLATION - THE CASE FOR INTEREST-BEARING MONEY AND EMPIRICAL ESTIMATES FOR BRAZIL - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Julho de 1994 - 25 pág. (esgotado)

246. INFRAESTRUTURA PÚBLICA, PRODUTIVIDADE E CRESCIMENTO - Pedro Cavalcanti Ferreira - Setembro de 1994 - 25 pág.

247. MACROECONOMIC POLICY AND CREDIBILITY: A COMPARATIVE STUDY OF THE FACTORS AFFECTING BRAZILIAN AND ITALIAN INFLATION AFTER 1970 - Giuseppe Tullio e Marcio Ronci - Outubro de 1994 - 61 pág. (esgotado)

248. INFLATION AND DEBT INDEXATION: THE EQUIVALENCE OF TWO ALTERNATIVE SCHEMES FOR THE CASE OF PERIODIC PAYMENTS - Clovis de Faro - Outubro de 1994 -18 pág.

249. CUSTOS DE BEM ESTAR DA INFLAÇÃO - O CASO COM MOEDA INDEXADA E ESTIMATIVAS EMPÍRICAS PARA O BRASIL - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Novembro de 1994 - 28 pág. (esgotado)

250. THE ECONOMIST MACHIAVELLI - Brena P. M. Fernandez e Antonio M. Silveira - Novembro de 1994 - 15 pág.

251. INFRAESTRUTURA NO BRASIL: ALGUNS FATOS ESTILIZADOS - Pedro Cavalcanti Ferreira - Dezembro de 1994 - 33 pág. (esgotado)

252. ENTREPRENEURIAL RISK AND LABOUR'S SHARE IN OUTPUT - Renato Fragelli Cardoso - Janeiro de 1995 - 22 pág.

253. TRADE OR INVESTMENT ? LOCATION DECISIONS UNDER REGIONAL INTEGRATION - Marco Antonio F.de H. Cavalcanti e Renato G. Flôres Jr. - Janeiro de 1995 - 35 pág.

254. O SISTEMA FINANCEIRO OFICIAL E A QUEDA DAS TRANFERÊNCIAS INFLACIONÁRIAS - Rubens Penha Cysne - Janeiro de 1995 - 32 pág. (esgotado)

255. CONVERGÊNCIA ENTRE A RENDA PER-CAPITA DOS ESTADOS BRASILEIROS - Roberto G. Ellery Jr. e Pedro Cavalcanti G. Ferreira - Janeiro 1995 - 42 pág.

256. A COMMENT ON "RATIONAL LEARNING LEAD TO NASH EQUILIBRIUM" BY PROFESSORS EHUD KALAI EHUD EHUR - Alvaro Sandroni e Sergio Ribeiro da Costa Werlang - Fevereiro de 1995 - 10 pág.

257. COMMON CYCLES IN MACROECONOMIC AGGREGATES (revised version) - João Victor Issler e Farshid Vahid - Fevereiro de 1995 - 57 pág.

258. GROWTH, INCREASING RETURNS, AND PUBLIC INFRASTRUCTURE: TIMES SERIES EVIDENCE (revised version) - Pedro Cavalcanti Ferreira e João Victor Issler - Março de 1995 - 39 pág.(esgotado)

259. POLÍTICA CAMBIAL E O SALDO EM CONTA CORRENTE DO BALANÇO DE PAGAMENTOS - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 08 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 47 pág. (esgotado)

260. ASPECTOS MACROECONÔMICOS DA ENTRADA DE CAPITAIS - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 08 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 48 pág. (esgotado)

261. DIFICULDADES DO SISTEMA BANCÁRIO COM AS RESTRIÇÕES ATUAIS E COMPULSÓRIOS ELEVADOS - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 09 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 47 pág. (esgotado)

262. POLÍTICA MONETÁRIA: A TRANSIÇÃO DO MODELO ATUAL PARA O MODELO CLÁSSICO - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 09 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 54 pág. (esgotado)

263. CITY SIZES AND INDUSTRY CONCENTRATION - Afonso Arinos de Mello Franco Neto - Maio de 1995 - 38 pág.

264. WELFARE AND FISCAL POLICY WITH PUBLIC GOODS AND INFRASTRUCTURE (Revised Version) - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1995 - 33 pág.

265. PROFIT SHARING WITH HETEROGENEOUS ENTREPRENEURIAL PROWESS - Renato Fragelli Cardoso - Julho de 1995 - 36 pág.

266. A DINÂMICA MONETÁRIA DA HIPERINFLAÇÃO: CAGAN REVISITADO - Fernando de Holanda Barbosa - Agosto de 1995 - 14 pág. (esgotado)

267. A SEDIÇÃO DA ESCOLHA PÚBLICA: VARIAÇÕES SOBRE O TEMA DE REVOLUÇÕES CIENTÍFICAS - Antonio Maria da Silveira - Agosto de 1995 - 24 pág.

268. A PERSPECTIVA DA ESCOLHA PÚBLICA E A TENDÊNCIA INSTITUCIONALISTA DE KNIGHT - Antonio Maria da Silveira - Setembro de 1995 - 28 pág.

269. ON LONG-RUN PRICE COMOVEMENTS BETWEEN PAINTINGS AND PRINTS - Renato Flôres - Setembro de 1995 - 29 pág.

270. CRESCIMENTO ECONÔMICO, RENDIMENTOS CRESCENTES E CONCORRÊNCIA MONOPOLISTA - Pedro Cavalcanti Ferreira e Roberto Ellery Junior - Outubro de 1995 - 32 pág. (esgotado)

271. POR UMA CIÊNCIA ECONÔMICA FILOSOFICAMENTE INFORMADA: A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR - Antonio Maria da Silveira - Outubro de 1995 - 25 pág. (esgotado)

272. ESTIMATING THE TERM STRUCTURE OF VOLATILITY AND FIXED INCOME DERIVATIVE PRICING - Franklin de O. Gonçalves e João Victor Issler - Outubro de 1995 - 23 pág. (esgotado)

273. A MODEL TO ESTIMATE THE US TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES - Antonio Marcos Duarte Júnior e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Outubro de 1995 - 21 pág. (esgotado)

274. EDUCAÇÃO E INVESTIMENTOS EXTERNOS COMO DETERMINANTES DO CRESCIMENTO A LONGO PRAZO - Gustavo Gonzaga, João Victor Issler e Guilherme Cortella Marone - Novembro de 1995 - 34 pág.

275. DYNAMIC HEDONIC REGRESSIONS: COMPUTATION AND PROPERTIES - Renato Galvão Flôres Junior e Victor Ginsburgh - Janeiro de 1996 - 21 pág.

276. FUNDAMENTOS DA TEORIA DAS OPÇÕES - Carlos Ivan Simonsen Leal - Fevereiro de 1996 - 38 pág. (esgotado)

277. DETERMINAÇÃO DO PREÇO DE UMA OPÇÃO E ARBITRAGEM - Carlos Ivan Simonsen Leal - Fevereiro 1996 - 55 pág. (esgotado)

278. SUSTAINED GROWTH, GOVERNMENT EXPENDITURE AND INFLATION - Pedro Cavalcanti Ferreira - Fevereiro 1996 - 38 pág.

279. REFLEXOS DO PLANO REAL SOBRE O SISTEMA BANCÁRIO BRASILEIRO - Rubens Penha Cysne e Sérgio Gustavo Silveira da Costa - Junho 1996 - 28 pág.

280. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS, CAPÍTULOS I E II: FUNÇÕES, ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES - Rubens Penha Cysne e Humberto de Athayde Moreira - Junho 1996 - 75 pág. (esgotado)

281. PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR PATROCINADA: VALE A PENA? - Clovis de Faro e Moacyr Fioravante - Junho de 1996 - 23 pág.

282. OLIGOPOLISTIC COMPETITION UNDER KNIGHTIAN UNCERTAINTY - Hugo Pedro Boff e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Julho de 1996 - 37 pág.

283. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS - CAPÍTULO IV: OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA - Rubens Penha Cysne e Humberto de Athayde Moreira - Julho de 1996 - 71 pág.

284. RIO DE JANEIRO E INTERMEDIAÇÃO FINANCEIRA - Rubens Penha Cysne - Julho de 1996 - 30 pág.

285. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS CAPÍTULO III: CÁLCULO NO R^n - Rubens Penha Cysne e Humberto Athayde Moreira - Agosto de 1996 - 106 pág.

286. REFLEXOS DO PLANO REAL SOBRE AS FINANCEIRAS - Rubens Penha Cysne e Sergio Gustavo S. da Costa - Setembro de 1996 - 17 pág. (esgotado)

287. FUTUROS DE JUROS - Carlos Ivan Simonsen Leal - Setembro de 1996 - 49 pág.

288. PREVIDÊNCIA SOCIAL NO BRASIL: POR UMA REFORMA MAIS DURADOURA - Clovis de Faro - Setembro de 1996 - 38 pág.

289. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTA - CAPÍTULO V: OTIMIZAÇÃO DINÂMICA - Rubens Penha Cysne e Humberto de Athayde Moreira - Setembro de 1996 - 60 pág.

290. PERSPECTIVAS DE LONGO PRAZO DA ECONOMIA BRASILEIRA: UMA ANÁLISE EXPLORATÓRIA - Pedro C. Ferreira - Outubro de 1996 - 40 pág.

291. INTEGRAÇÃO, CRESCIMENTO E BEM-ESTAR - Marcelo Leite de Moura e Silva e Pedro C. Ferreira - Outubro de 1996 - 39 pág.

292. PROCESSUS STOCHASTIQUES EN FINANCE (1ère partie) - Renato Flôres e Ariane Szafarz - Novembro de 1996 - 31 pág.