Nº 83

NOTAS DE AULAS DE TEORIA ECONÔMICA AVANÇADA I

Carlos Ivan Simonsen Leal

Capítulo I. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

1. Introdução

Um dos mais fascinantes teoremas de topologia é o teorema do ponto fixo de Brouwer estabelecido por Brouwer entre 1909 e 1914. Este teorema diz que tôda função contínua f de um subconjunto compacto convexo de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo sempre possui um ponto fixo, isto é, sempre existe x^* tal que $f(x^*) = x^*$.

Este é um resultado muito importante. Vários teoremas de Matemática, e em particular de Economia Matemática, dependem dele. É assim, por exemplo, o que acontece na Teoria dos Jogos Não- Cooperativos quando estudamos a existência de equilíbrios de Nash (Nash, 1951) ou na Teoria do Equilíbrio Competitivo. Por outro lado, muitos teoremas com demonstrações complicadas podem ter a suas provas simplificadas quando o usamos. Este é o caso do famoso teorema de Frobenius- Perron, tão importante no modelo de Leontieff, sobre a existência de autovalores positivos numa matriz cujas entradas são todas positivas.

Uzawa (1962) observou que a existência de um equilíbrio competitivo é na verdade um postulado equivalente ao teorema de Brouwer.

O objetivo deste capítulo é demonstrar o teorema de Brouwer e dar alguns de seus equivalentes: o teorema que diz que não existe uma retração da bola de $\mathbb{R}^n$ em si mesma e o lema KKM. A demonstração do teorema de Brouwer será feita usando uma prova "computacional" do lema de Sperner seguindo as idéias de Scarf e Kuhn. No final do capítulo damos uma aplicação do teorema de Brouwer à Economia: um Teorema de Von Neumann sobre a existência de raio de um equilíbrio numa economia com funções de

produção com retornos constantes de escala, onde todo o excedente de produção é reinvestido na produção do período seguinte.

2. Simplexos

Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definido por $S^n := \{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0$ para todo i e $\Sigma_{i=0,n} x_i = 1 \}$. S^n é conhecido como o simplexo standard de $\mathbb{R}^n$. A i-ésima face de S^n é a interseção de S^n com um dos conjuntos $\{ x : x_i = 0 \}$. Um vértice v^i de S^n é o ponto de S^n com coordenada $x_i = 1$. Um simplexo m-dimensional, $m \leq n$, é a imagem de S^n através de uma transformação linear $\Pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cujo posto é m. As faces de um simplexo n- dimensional σ definido por uma transformação Π são as imagens das faces de S^n através da Π; da mesma forma se define os seus vértices.

Nós vamos provar que o teorema de Brouwer vale para S^n, isto é:

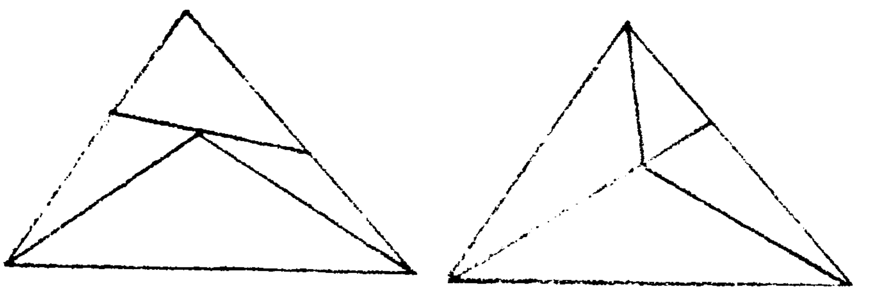
Teorema 1: Seja f: $S^n \to S^n$ uma função continua, então a f possui ao menos um ponto fixo, isto é, existe $x^* \in S^n$ tal que $f(x^*) = x^*$.

Para isso nós vamos precisar do lema de Sperner. Um lema que fala sobre divisões simpliciais e algo que em inglês é chamado de "labelling rule" (eu particularmente detesto a tradução "regra de etiquetagem").

Uma divisão simplicial Δ de S^n é uma coleção finita de simplexos n- dimensionais $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ tal que:

a) $S^n = \cup_{i=1,r}\sigma_i$; e

b) Dois simplexos diferentes no máximo se interceptam numa face ou num vértice e quando se tratar do primeiro caso a sua interseção será toda a face



Não é divisão simplicial   É divisão simplicial

Figura 1

O diametro de um dos σ_i é a distância maxima entre dois quaisquer de seus pontos. O diametro de Δ é máximo dos diametros dos σ_i.

Uma labelling rule é uma função $\ell: V \rightarrow \{0,1, \ldots, n\}$, onde V é o conjunto de todos os vértices da divisão simplicial. Em outras palavras, a labelling rule é uma função que a cada vértice da divisão simplicial associa um número inteiro entre 0 e n.

O lema de Sperner diz o seguinte:

Lema 2: Se $\ell(v^i) = i$ para todo i e $l(v) \neq i$ quando v pertencer a i-ésima face de S^n, então existe um simplexo σ_j da divisão simplicial que tem todos os labels, isto é, a imagem dos seus vértices através da função ℓ é exatamente o conjunto $\{0, 1, \ldots,$

n).

Exemplos da veracidade do lema Sperner

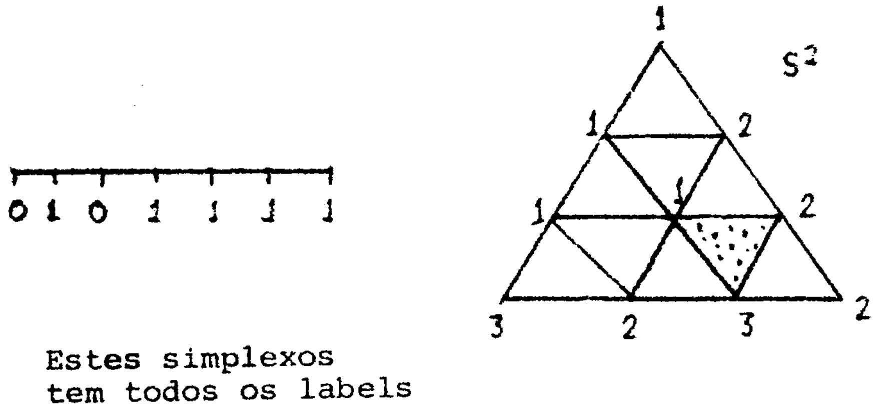


Figura 2

A prova do teorema de Brouwer pode ser então feita se usando a seguinte idéia devida a Knester, Kuretowski e Mazurkiewicz (1929):

Prova do Teorema 1: Fixe $d > 0$ e tome uma divisão simplicial qualquer de S^n com diametro d. Se f_j indica a j- esima função coordenada da função f e v_j a j- ésima coordenada de v, então considere a labelling rule dada por $\ell(v) = \min\{ j : v_j > f_j(v) \}$. É fácil verificar que uma das duas seguintes coisas acontece. Ou existe um vértice no qual a labelling rule não está definida, isto e, existe um vertice v para o qual $v_j \le f_j(v)$ para todo j, o que veremos implica que v seja um ponto fixo da f. Ou essa labelling rule está bem definida para todos os vértices. E neste segundo caso é fácil verificar que a labelling rule obedece as condições do lema de Sperner e portanto existe um simplexo σ_d da divisão simplicial que recebe todos os

labels, isto é, cujos vértices $w^0, w^1, \ldots, w^n$ são tais que $(w^i)_i > f_i(w^i)$.

Pondo $d = 1/n$, por exemplo, teremos que ou para algum n existe um vértice da n-ésima divisão que é um ponto fixo da f ou obtemos uma seqüência de simplexos $\sigma_{1/n}$ com todos os labels. No segundo caso, usando o fato que S^n é compacto podemos extrair uma subseqüência da seqüência dos $\sigma_{1/n}$ tal que os vertices dos simplexos nesta subseqüência se acumulem todos num mesmo ponto x^*. Neste caso, teremos $x^*_i \geq f_i(x^*)$ já que a f é contínua.

Para finalizar, observe que $\Sigma_{i=0,n}\, x^*_i = 1 = \Sigma_{i=0,n}\, f_i(x^*)$, o que implica que se $x^*_i \geq f_i(x^*)$ para todo i ou se $x^*_i \leq f_i(x^*)$ para todo i é porque de fato $x^*_i = f_i(x^*)$ para todo i, ou seja x^* é um ponto fixo.

QED

A prova do lema de Sperner será adiada para a proxima seção.

Nos lembramos que um conjunto C é convexo se dados dois quaisquer de seus pontos x e y e um numero $r \in (0,1)$, então $rx + (1-r)y \in C$, sendo que esta propriedade é equivalente a dizer que se $x_1, \ldots x_s \in C$ e $\lambda_1, \ldots \lambda_s$ são ≥ 0 e somam 1, então $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s \in C$, para qualquer s. E que em $\mathbb{R}^n$ um conjunto é compacto se e somente se ele é fechado e limitado, o que implica que toda sequência de elementos desse conjunto sempre possua uma subsequencia convergente.

O teorema 1 é facilmente estendivel ao seguinte resultado mais geral:

Teorema 3: **Seja $C \subset \mathfrak{R}^n$ um conjunto compacto e convexo e $f: C \to C$ contínua, então a f possui um ponto fixo.**

Prova: Todo subconjunto compacto convexo C de $\mathfrak{R}^n$ pode ser encarado como um subconjunto compacto convexo de $\mathfrak{R}^{n+1}$ o qual está contido na imagem de S^n através de uma transformação linear injetiva Π.

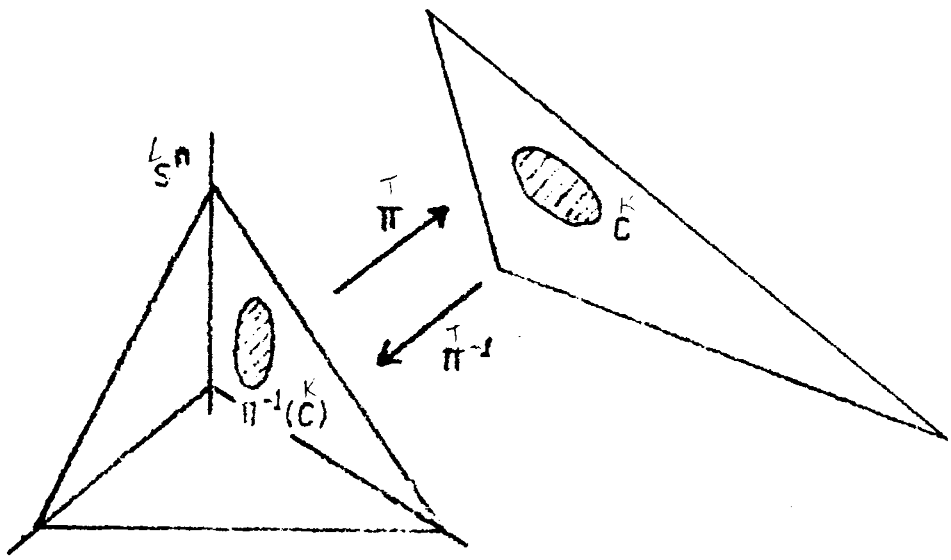


Figura 3

Assim, podemos estudar os pontos fixos da função $F: \Pi^{-1}(C) \to \Pi^{-1}(C)$ definida por $F(x) = \Pi^{-1}(f(\Pi(x)))$ ao invés de estudar os pontos fixos da f, pois é evidente que x^* é um ponto fixo da F se e somente se $\Pi(x^*)$ é um ponto fixo de f. Para provar que F possui um ponto fixo gostaríamos de poder usar o teorema 1, contudo o domínio da F é $\Pi^{-1}(C)$ que pode não necessariamente coincidir com S^n. Consideremos $g: S^n \to \Pi^{-1}(C)$ definida por $g(x) :=$ $\{ y \in \Pi^{-1}(C) : y$ minimiza $\| x - y \| = \Sigma_{i=0,n} (x_i - y_i)^2 \}$. Pode-se provar que g é uma função contínua a qual evidentemente possui a propriedade de que

$g(x) = x$ para todo $x \in C$. A função $F \circ g$ é uma função de S^n em $\Pi^{-1}(C) \subset S^n$ e pelo teorema 1 possui ao menos um ponto fixo x^*. Mas, $x^* \in \Pi^{-1}(C) \Rightarrow g(x^*) = x^*$, donde $F(x^*) = x^*$ e portanto a F possui um ponto fixo. Como já havíamos observado isto implica que a f também possui um ponto fixo e o teorema está demonstrado.

QED

3. O Lema de Sperner

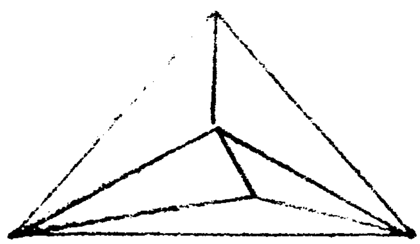
A demonstração que vou dar do lema de Sperner tem a sua origem no problema de se computar numericamente os pontos fixos de uma função. O primeiro a tratar deste aspecto foi Scarf (1967), tendo as suas idéias gerado um sem- fim de algoritmos para a computação de pontos fixos. A prova do lema de Sperner que apresentarei segue as idéias de Harold Kuhn, que me mostrou a seguinte demonstração:

Comece quando $n = 1$. Temos que S^1 é um segmento de reta. Uma divisão simplicial de S^1 é simplesmente uma divisão de S^1 em intervalos de acordo com a figura 2(a) acima. O extremo da esquerda, correspondente ao ponto $x_0 = 1$, tem label 0, o extremo direito, $x_1 = 1$, tem label 1. Se colocamos 0's e 1's nas extremidades dos simplexos da divisão simplicial, então andando da esquerda para a direita concluímos que deve haver um simplexo que leva numa extremidade o label 0 e na outra o label 1 (na figura 2(a) existem dois desses segmentos).

A idéia da demonstração no caso geral é semelhante.

Para simplificar a discussão vamos supor que nós só estejamos interessados em divisões simpliciais que só possuam vértices nas faces

de S^n se estes também forem vértices de S^n. A falta de um nome melhor eu vou chamar este tipo de divisão simplicial de <u>divisão simplicial restrita</u>.



Divisão Simplicial
Restrita

Figura 4

Mais tarde nos vamos ver que a demonstração do lema de Sperner no caso de divisões simpliciais restritas é suficiente para demonstrar o lema de Sperner no caso geral.

<u>Prova do Lema de Sperner com Divisões Restritas</u>. Nós percorremos um caminho que começa no simplexo que tem uma das faces igual a face $x_n = 0$ de S^n. Este simplexo σ_1 possui os labels $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, pois $v_0, \ldots, v_{n-1} \in \sigma_1$ e por hipótese $l(v_i) = i$ para todo i. Se o vértice v que falta de σ_1 tiver label n, o lema esta provado. Se não for este o caso substituimos o vertice v_i tal que $i = l(v)$ pelo vertice v. Os pontos $v_0, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}$ determinam uma face F comum a σ_1 e a um outro simplexo σ_2. Nós agora substituimos σ_1 por σ_2 e a face $x_n = 0$ pela face F. Podemos então repetir este processo.

É evidente que estamos obtendo um caminho através dos simplexos da divisão simplicial. A regra de passagem de um simplexo para outro é clara, nunca há a possibilidade de termos o caminho se bifurcando.

Eu afirmo que uma vez visitado um simplexo nunca é revisitado. Com efeito, suponha que existe um simplexo σ que é o primeiro a ser revisitado, isto é, no meu caminho não houve até σ nenhuma vez que eu passasse por um mesmo simplexo mais de uma vez. Se σ não é o primeiro simplexo, nós só poderemos entrar em σ atrvés de uma das suas duas faces que contêm os labels $0, \ldots, n-1$. Essas faces são comuns a dois simplexos adjacentes os quais não possuem todos os labels. Vamos chamar esses simplexos de σ_1 e σ_2 e as faces que têm em comum com σ de F_1 e F_2 respectivamente. Suponhamos que o caminho de reentrada em σ veio de σ_1 através da face F_1. Se σ é o primeiro simplexo a ser revisitado então quando entramos em σ pela primeira vez foi porque viemos de σ_2, mas neste caso quando saímos de σ pela primeira vez tivemos de ir para σ_1 e portanto σ_1 e não σ é o primeiro simplexo revisitado. Esta contradição pode ser repetida trocando σ_1 por σ_2, o que mostra que nenhum simplexo depois do primeiro pode ser o primeiro a ser revisitado. Um argumento semelhante mostrará que o primeiro simplexo também não pode ser o primeiro a ser revisitado. Portanto, nenhum simplexo é revisitado.

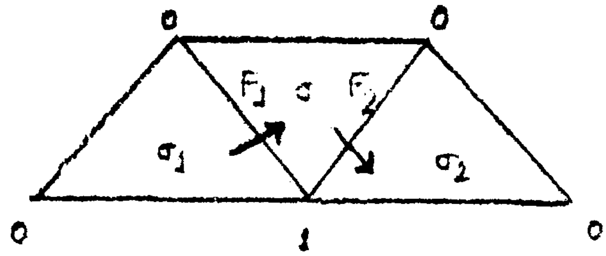


Figura 5

É impossível que o caminho deixe S^n, pois seria necessário que atravessasse a face $x_n = 0$ e assim o primeiro simplexo teria de ser revisitado.

Como o número de simplexos é finito concluímos que o caminho para em algum simplexo, isto é chegamos a um simplexo que tem no novo vértice o label n e portanto possui todos os labels.

QED

A figura abaixo dá um exemplo do funcionamento do algoritmo acima. O caminho para quando encontramos um simplexo com todos os labels.

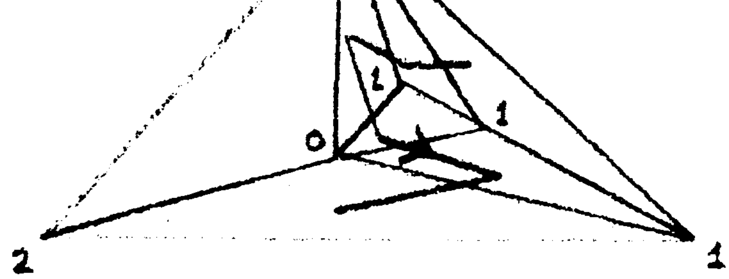


Figura 6

<u>Prova do Lema de Sperner (Caso Geral)</u>. Basta colocar o simplexo original, dentro de um novo simplexo. A divisão simplicial do primeiro induz uma divisão simplicial no segundo se unimos os vértices do simplexo exterior aos vértices da divisão simplicial do segundo que se encontram nas faces dele. Devido as hipóteses sobre a labelling rule é possível escolher os labels do simplexo de fora de forma a não criar nenhum simplexo novo que tenha todos os labels. Isto é possível, por exemplo, tomando o label do vértice oposto a face $x_i = 0$ como sendo $i+1$ para $i = 0, \ldots, n-1$ e 0 para $i = n$. Assim, deveremos, como conseqüência do lema de Sperner no caso restrito, aceitar que existe um simplexo com todos os labels. Isto prova o lema de Sperner para o caso geral.

QED

A figura abaixo mostra graficamente a idéia da estensão da prova do caso de divisões restritas para divisões quaisquer quando $n = 2$.

O Caso Restrito Implica o Geral

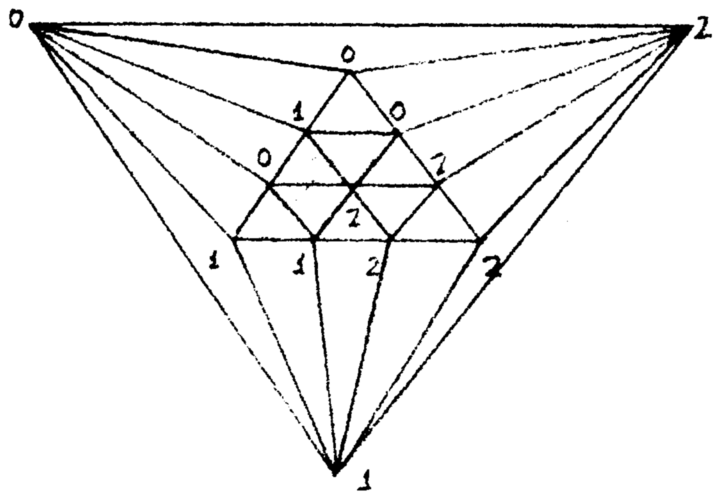


Figura 7

3. Teoremas Equivalentes ao Teorema de Brouwer

São vários os teoremas que são eqüivalentes ao teorema de Brouwer. Os mais importantes em Matemática são o teorema que diz que não existe uma retração da bola unitária de $\mathbb{R}^n$ em si mesma e o lema KKM (advinhem: de Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz). Para a Economia, o primeiro não é muito importante, o segundo contudo é crucial para simplificar determinadas demonstrações. Ainda para a Economia, é interessante notar que existe uma equivalência entre o postulado " existe um equilíbrio competitivo numa economia de trocas " e o teorema de Brouwer. Podemos mostrar que um implica o outro.

Nós vamos demonstrar a eqüivalência de cada um dos resultados citados com o teorema de Brouwer.

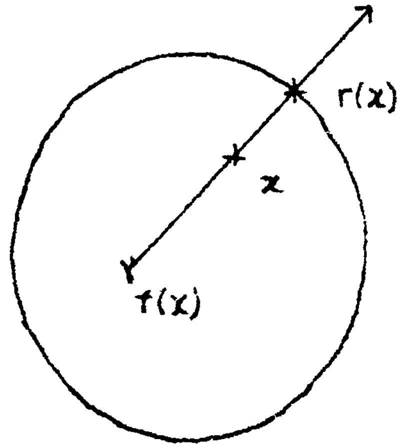
Comecemos pelo teorema da retração. Uma retração r da bola $B:=\{ x \in \mathbb{R}^n : \Sigma_{i=1,n}(x_i)^2 \leq 1\}$ em si mesma é uma função contínua $r: B \rightarrow \partial B:=$

$\{ x \in \mathbb{R}^n : \Sigma_{i=1,n}(x_i)^2 = 1\}$ tal que $r_{|\partial B}$ = identidade. O teorema que desejamos estudar é o seguinte.

Teorema 4: **Não existe retração da bola em si mesma.**

Proposição 4': **O teorema 4 é eqüivalente ao teorema de Brouwer.**

Prova. Vamos primeiro provar que o teorema 4 implica o teorema de Brouwer. Para tal vamos provar que a negação do teorema de Brouwer implica a negação do teorema 4, isto é vamos usar que uma proposição A implica uma outra proposição B se e somente se a negação de B implica a negação de A. Assim sendo, suponha que exista uma função contínua $f: B \rightarrow B$ que não possua um ponto fixo, tomemos $r(x)$ = interseção da semi- reta que começa em $f(x)$ e passa por x com ∂B. Isto define uma função a qual facilmente podemos verificar que é contínua e que coincide com a aplicação identidade quando restrita a ∂B. Logo existe uma retração.



A retração da la. parte da Proposição 4'

Figura 8

Para provar que Brouwer implica o teorema 4 suponhamos que existisse uma retração r. Neste caso, a função que leva x em $-r(x)$ é uma função contínua que não possui ponto fixo e portanto temos uma contradição ao teorema de Brouwer.

QED

Uma __correspondência__ é uma função $G: X \to 2^Y$, onde 2^Y é o conjunto das partes de Y, isto é o conjunto de subconjuntos de Y. Toda função $f: X \to Y$ é uma correspondência.

Se $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ indica o simplexo de $\mathbb{R}^n$ cujos vértices são $x_1, x_2, \ldots, x_r$, então uma correspondência $G: \mathbb{R}^n \supset X \to 2^X$ tem a __propriedade KKM__ se para quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_r$ tivermos $[x_1, x_2, \ldots, x_r] \subset \cup_{i=1,r} G(x_i)$

__Teorema 5 (Lema KKM)__: Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ qualquer e $G: X \to 2^X$ uma correspondência com a propriedade KKM tal que $G(x)$ é um conjunto fechado para todo $x \in X$, então a interseção de um número finito de elementos da famíla $\{ G(x) : x \in X \}$ é sempre não vazia.

__Prova__: Suponhamos por absurdo que existam $x_1, x_2, \ldots, x_r$ tais que $\cap_{i=1,r} G(x_i) = \emptyset$. Seja $C := [x_1, x_2, \ldots, x_r]$, a função $g_i: C \to \mathbb{R}$ definida por $g_i(c) := \inf\{ \Sigma_{i=1,n} (c_i - y_i)^2 : y \in G(x_i) \}$ é uma função contínua para cada i tal que $g_i(c) = 0$ implica que $c \in G(x_i)$, pois $G(x_i)$ é um conjunto fechado. Por

conseguinte, não podemos jamais ter $\Sigma_{i=1,r}\, g_i(c) = 0$, pois teríamos que $c \in G(x_i)$ para todo i, o que violaria que $\cap_{i=1,r} G(x_i) = \emptyset$. Definamos $f: C \to C$ colocando $f(c) := (\Sigma_{i=1,r}\, g_i(c))^{-1} \Sigma_{i=1,r}\, g_i(c)\, x_i$. Pelo teorema de Brouwer, esta função possui um ponto fixo c^*. Seja $\mathbf{I} := \{ i \,;\, g_i(c^*) > 0\}$, $\mathbf{I}$ é diferente de vazio e o ponto c^* não pode pertencer a nenhum dos $G(x_i)$ tais que $i \in \mathbf{I}$. Isto implica que $c^* \notin \cup_{i\in\mathbf{I}}\, G(x_i)$, mas, por outro lado c^* esta contido no simplexo cujos vértices são exatamente os x_i tais que $i \in \mathbf{I}$, assim, como G possui a propriedade KKM chegamos 'a contradição $c^* \in \cup_{i\in\mathbf{I}}\, G(x_i)$. Logo para qualquer coleção finita $x_1, \ldots, x_r$ temos sempre que $\cap_{i=1,r} G(x_i) \neq \emptyset$.

QED

<u>Corolário</u>: Seja $K_1, \ldots, K_n$ uma coleção de fechados com as seguintes propriedades:

a) $\cup_{i=0,n}\, K_i = S^n$; e

b) $[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n] \subset K_i$.

Então existe $x \in \cap_{i=0,n}\, K_i$.

<u>Prova</u>: Usando o teorema 5 tome X = vértices de S^n e G definida por $G(v_i) := K_{i+1}$ para $i = 0$ até $n-1$ e $G(v_n) = K_0$, onde v_i é o i-ésimo vértice de S^n, isto é o ponto de S^n cuja i-ésima coordenada é 1. É fácil verificar que G possui a propriedade KKM e que portanto existe $x \in \cap_{i=0,n}\, G(v_i) = \cap_{i=0,n}\, K_i$.

QED

Proposição 6: O teorema 5 implica o teorema de Brouwer.

Prova. Vamos usar o corolário do teorema 5. Coloque $K_i := \{ x : f_i(x) \geq x_i \}$, então existe $x^* \in \cap_{i=0,n} K_i$, logo, como $\Sigma_{i=0,n} (x)_i = \Sigma_{i=0,n} f_i(x) = 1$ para todo $x \in S^n$, não existe i tal que $f_i(x^*) > (x^*)_i$ e portanto x^* é um ponto fixo da f e vale o teorema de Brouwer.

QED

Finalmente, podemos passar ao último resultado desta seção. Uma função de excesso de demanda numa economia de trocas é uma função $Z: S^n \to \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in S^n$ temos $x{*}Z(x) := \Sigma_{i=0,n} x_i Z_i(x) = 0$. Um equilíbrio competitivo é um ponto $x^* \in S^n$ tal que $Z_i(x^*) \leq 0$ para todo i.

Teorema 7 (Uzawa): Se Z é uma função contínua, então a existência de um equilíbrio competitivo equivale ao teorema de Brouwer.

Prova. Primeiro vamos provar que o teorema de Brouwer implica a existência de um eqüilíbrio competitivo. Para isso, sejam $c_i(x) := \max(0, Z_i(x))$ e $d(x) := \Sigma_{i=0,n} c_i(x)$. A função $f: S^n \to S^n$ cujas coordenadas são dadas por $f_i(x) := (1+d(x))^{-1}(x + c_i(x))$ é uma função contínua e portanto, pelo teorema de Brouwer, possui um ponto fixo x^*. Temos que para todo i

vale que $(x^*)_i d(x^*) = c_i(x^*)$, o que implica que $0 = (x^* \cdot Z(x^*))d(x^*) = \Sigma_{i=0,n}\, c_i(x^*)Z_i(x^*) \geq 0$, donde $Z_i(x^*) \leq 0$ para todo i. O que prova que existe um equilíbrio competitivo

Suponhamos que dada uma função excesso de demanda contínua Z qualquer sempre exista um equilíbrio competitivo. Dada $f: S^n \to S^n$ contínua, coloquemos $d(x) := \left(\Sigma_{i=0,n}(x_i)^2\right)^{-1} x \cdot f(x)$ e $Z_i(x) := f_i(x) - d(x)x_i$. A função Z assim definida é uma função excesso de demanda e portanto existe $x^* \in S^n$ tal que $Z_i(x^*) \leq 0$ para todo i, ou seja $f_i(x^*) \leq d(x^*)(x^*)_i$ para todo i. Imitando o raciocínio da prova da Proposição 6 acima concluímos que $d(x^*) = 1$ já que $\Sigma_{i=0,n}\,(x^*)_i = \Sigma_{i=0,n}\, f_i(x^*) = 1$, o que vai acarretar que $f_i(x^*) = (x^*)_i$ para todo i

QED

5. O Teorema de Kakutani

Em (1947), S. Kakutani estendeu o teorema de Brouwer para uma determinada classe de correspondências. Ele estudou correspondências convexas e semi- contínuas superiormente ~~que fossem~~ que estivessem definidas sobre um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$, tomando valores no conjunto das partes desse mesmo conjunto.

Uma correspondência G é dita convexa se para todo x o conjunto G(x) for um conjunto convexo. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ compactos, uma correspondência $G: X \to 2^Y$ é dita semi- contínua superiormente se para toda seqüência $(x_n, y_n) \to (x,y)$ tal que $y_n \in G(x_n)$ tivermos $y \in G(x)$. O

teorema do ponto fixo de Kakutani se expressa da seguinte forma.

Teorema 8: Seja G: $S^n \to 2^{S^n} \setminus \{\emptyset\}$ é convexa e semi- contínua superiormente, então existe $x \in X$ tal que $x^* \in G(x^*)$.

Por analogia ao caso de funções chamamos um ponto $x^* \in G(x^*)$ de um ponto fixo da G.

Prova do Teorema 8. Tome uma divisão simplicial qualquer Δ de S^n e para cada vértice v dessa divisão tome um $y_v \in G(v)$. Podemos definir uma aplicação contínua f_Δ de S^n em si mesmo se tomarmos $f(v) = y_v$ e estendermos f_Δ linearmente dentro de cada simplexo da divisão. Pelo teorema de Brouwer essa f_Δ possui um ponto fixo x_Δ, o qual pertence a um simplexo σ_Δ de Δ. Agora, se tomarmos uma seqüência de divisões simpliciais Δ_m tais que $diam(\Delta_m) \to 0$ quando $m \to \infty$, teremos uma seqüência de pontos fixos $x_{\Delta n}$ tal que cada um pertence a um simplexo σ_n. Passando uma a uma subseqüência se necessário, podemos admitir que os simplexos σ_n formam uma seqüência convergente para um ponto x^*. É claro que x_n também converge para x^*, pois x_n é combinação convexa dos vértices de σ_n. Isto é existe $r_m \in S^n$ tal que $x_n = \Sigma_{i=0,n}\, r_{i,m} v^{i,m}$. Mas, como x_n é um ponto fixo temos $x_n = f_{\Delta n}(x_n) = \Sigma_{i=0,n}\, r_{i,m}\, f_{\Delta n}(v^{i,m}) = \Sigma_{i=0,n}\, r_{i,m} y^{i,m}$,

onde os $v^{i,m}$ são os vertices de σ_n e os $y^{i,m}$ pertencem a $G(v^{i,m})$. Já que X e S^n são compactos podemos admitir que cada sequencia $y^{i,m}$ e $r_{i,m}$ é convergente com limites y^i e r_i respectivamente. Como G é semi- contínua superiormente temos que cada y^i pertence a $G(x^*)$ e como G é convexa obtemos que $x^* = \Sigma_{i=0,n} r_i y^i \in G(x^*)$.

QED

<u>Corolário</u>: **S^n pode ser substituído por qualquer conjunto compacto convexo C no enunciado do teorema acima e este permanece válido.**

6. <u>Uma Aplicação à Economia. O Modelo de Von Neumann</u>

Em 1938, Von Neumann foi o primeiro a usar um teorema de ponto fixo para provar a existência de um equilíbrio num modelo económico. O seu modelo era o seguinte.

a) Existem n bens que podem ser produzidos através de m processos produtivos ou através de uma combinação linear com pesos positivos, chamados de intensidades, destes processos. No processo i se requer a_{ij} unidades do bem j para se produzir b_{ik} unidades do bem k.

b) Todos os bens levam o mesmo tempo para serem produzidos.

c) Tudo que se obtem num período é utilizado na produção do período seguinte.

O problema de Von Neumann era encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x^* \in S^m$ e $p^* \in S^n$ tais que:

a) no instante t os processos são utilizados com intensidades $\alpha^t x^*$ (chamamos α de coeficiente de expansão da economia);

b) em qualquer t o consumo do bem j é menor ou igual que a produção do mesmo bem no instante t-1, se a produção exceder o consumo, então o preço do bem cai a zero;

c) com a taxa de juros igual a β e aos preços p^* nenhum lucro pode ser feito com o i- ésimo processo, se existir prejuízo o processo não é usado. (Note que cada insumo deve ser remunerado por βp_j para que possa ser usado)

Matematicamente, essas condições se traduzem como:

1) $\alpha \Sigma_{i=1,m} a_{ij}(x^*)_i \le \Sigma_{i=1,m} b_{ij}(x^*)_i$ para todo j e se valer <, então $p_j = 0$;

2) $\beta \Sigma_{j=1,n} a_{ij}(p^*)_j \ge \Sigma_{j=1,n} b_{ij}(p^*)_j$ para todo j e se valer >, então $x_i = 0$.

Teorema 9: Existe uma solução para o problema de Von Neumann com $\alpha = \beta$ desde que $a_{ij} > 0$ para todo par (i,j).

Prova: Coloquemos $A:=[a_{ij}]$ e $B:=[b_{ij}]$. Sejam K_1 e K_2 o mínimo e o máximo do conjunto $\{(x'Ap)^{-1}x'Bp : p \in S^n \text{ e } x \in S^m\}$ respectivamente. Nos vamos definir uma função contínua $f: S^n \times S^m \times [K_1,K_2] \to S^n \times S^m \times [K_1,K_2]$ tal que um ponto fixo desta função seja também uma solução do problema de Von

Neumann. Pelo teorema de Brouwer existirá pelo menos um ponto fixo da f e nós teremos provado que o problema de Von Neumann tem solução. Para construir a f ponhamos $f = (p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_m, \beta)$, onde:

$$p_i := \frac{p_i + \max(0, \alpha x^+ Ae_i - x^+ Be_i)}{1 + \Sigma_{j=1,n}\ (\max(0, \alpha\ x^+ Ae_j - x^+ Be_j)} = \text{para } i = 1 \text{ até } n;$$

$$x_i := \frac{x_j + \max(0, e_i^+ Bp - \alpha e^+ Ap)}{1 + \Sigma_{j=1,m} \max(0, e_j^+ Bp - \alpha e_j^+ Ap)} = \text{para } i = 1 \text{ até } m; \text{ e}$$

$$\beta := (p^+ Ax)^{-1}\ (p^+ Bx)$$

onde e_i é o vetor que tem a i- ésima coordenada igual a 1 e as demais nulas. Um ponto fixo (p^*, x^*, α^*) da f obedecerá as seguintes condições:

a) $(p^*)_i \Sigma_{j=1,n} \max(0,\ \alpha^* x^{*\prime} Ae_j\ -\ x^{*\prime} Be_j)\ =\ \max(0,\ \alpha^* x^{*\prime} Ae_i\ -$ $x^{*\prime} Bxe_i\ )$ para $i = 1$ até m;

b) $(x^*)_i \Sigma_{j=1,n} \max(0,\ e_j{}' B(p^*)\ -\ \alpha^* e_j{}' A(p^*))\ =\ \max(0,\ e_i{}' B(p^*)\ -$ $\alpha^* e_i{}' A(p^*)\ )$ para $i = 1$ até n, e

c) $\alpha^* = (x^{*\prime} Ap^*)^{-1} (x^{*\prime} Bp^*)$.

Não pode ser que para todo i tal que $(p^*)_i > 0$ tenhamos $\alpha^* x^{*\prime} Ae_i$ -

$x^{*\prime}Bxe_j > 0$, pois neste caso chegaríamos ao absurdo que $0 < \Sigma_{j=1,n}(p^*)_j(\alpha^* x^{*\prime}Ae_j - x^{*\prime}Bxe_j) = \alpha^*(x^{*\prime}Ap^*) - (x^{*\prime}Bp^*) = 0$. Assim, existe i tal que $(p^*)_i > 0$ e $\alpha^* x^{*\prime}Ae_i - x^{*\prime}Bxe_i \leq 0$. Logo, pela equação em (a) concluímos que para todo i = 1 até n vale que $\alpha^* x^{*\prime}Ae_i - x^{*\prime}Bxe_i \leq 0$.

Da mesma forma podemos concluir que para todo i= 1 até m vale também que $e_i{}'B(p^*) - \alpha^* e_i{}'A(p^*) \leq 0$

Finalmente, essas desigualdades juntamente com a igualdade (c) nos permitem concluir que quando uma delas vale estritamente, então o $(p^*)_i$ ou o $(x^*)_i$ correspondente tem de ser igual a zero.

QED

<u>Observação</u>: A prova de Von Neumann é diferente desta prova. Von Neumann provou que havia uma solução impondo que $a_{ij} + b_{ij} > 0$ para todo par (i,j). Ele usou na sua prova um teorema que é equivalente ao teorema do ponto fixo de Kakutani (vide exercício 4 desta seção).

Problemas

Seção 2.

1) A definição que dei de um simplexo n-dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$ dizia que este é a imagem de S^n através de uma transformação linear injetiva Π. Mostre que se conhecemos os vértices $v^0, \ldots, v^n$ de um simplexo n-dimensional e se os vetores v^i, $i=0$ até n, são linearmente independentes, então podemos obter Π (mostre como) e Π é injetiva.

2) Dê exemplos em que se eliminando uma das seguintes condições $f: C \to C$ não possui um ponto fixo:

a) f não é contínua;

b) C não é fechado, embora seja limitado e convexo;

c) C é fechado e convexo, mas não é limitado.

3) Dois conjuntos X e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são homeomorfos se existe uma função contínua $f: X \to Y$ que é bijetiva e cuja inversa também é contínua. Prove que se toda função contínua $g: X \to X$ possui um ponto fixo, então toda função contínua $g^*: Y \to Y$ também possui um ponto fixo. Se X tiver a forma de uma garrafa, o que é que você pode me dizer sobre os pontos fixos de uma $f: X \to X$.

4) Demonstre que as propriedades da função g do teorema 3 são verdadeiras. O que acontece se eliminamos a hipótese de C ser convexo.

5) Um conjunto convexo $A \subset V$, onde V é um espaço vetorial, é dito:

a) <u>balanceado</u>, se $rA \subset A$ para todo r tal que $|r| \leq 1$;

b) <u>absorvente</u>, se para todo $x \in V$ existe $r > 0$ tal que $x \in r'A$ sempre que $r' > r$.

Seja C um conjunto convexo balanceado e absorvente. A função $p_C: V \to \mathbb{R}$ definida por $p_C(x) := \inf\{ r > 0 : x \in rC \}$ é chamada de funcional de Minkowski. Prove que p_C tem as seguintes propriedades:

1) $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ para todo $x, y \in V$; e

2) $p_C(rx) = |r|\, p_C(x)$ para todo $x \in V$ e $r \in \mathbb{R}$.

6) No problema anterior mostre que se $V = \mathbb{R}^n$, então p_C é contínuo se e somente se 0 pertence ao interior de C, isto é se e somente se existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset C$. (__Observação__: Este resultado é válido em geral para todo espaço vetorial topológico, mas isto está fora de nossa rota).

7) Sejam C e C' conjuntos convexos compactos tais que p_C e $p_{C'}$ são contínuos. Prove que C e C' são homeomorfos. Será que voce consegue dar uma outra prova do teorema 3 ?

8) Seja ℓ^2 o espaço vetorial das seqüências $x = (x_n)_{n \in N}$ de números reais tais que $\|x\|^2 := \Sigma_{n=1,\infty}(x_n)^2 < \infty$. Este espaço e um espaço vetorial com uma norma dada por $\| \bullet \|$. A bola unitária deste espaço $B = \{ x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1 \}$ é convexa, fechada e limitada. Considere $f: B \to B$ dada por $f(x) := ((1-\|x\|^2)^{1/2}, x_1, x_2, \ldots)$. Mostre que f não possui um ponto fixo.

__Seção 3__

1) Prove o lema de Sperner por indução da seguinte forma. Primeiro prove que quando n=1, então o número de intervalos com os dois labels 0 e 1 é ímpar (use a figura. A seguir, dada uma divisão simplicial de S^n, deixe F_n ser o numero de simplexos que possuem os labels $(0,1,\ldots,n-1,m)$ para $m = 0$ ate $n-1$ e C_n o numero de simplexos que têm todos os labels, prove que vale a seguinte relação.

$$2F_n + C_n = 2F_{n-1} + C_{n-1},$$

onde F_{n-1} e C_{n-1} são o número de faces (n-1)- dimensionais dos simplexos da divisão simplicial que possuem os labels $0,1,\ldots,n-1$ e que não estão ou estão contidas numa face de S^n respectivamente.

2) Prove a seguinte alternativa ao lema de Sperner devida a Scarf "Se $\ell(v)$ é qualquer dos números $0,1,\ldots,n$ quando v é um vértice interior a S^n e se $\ell(v)$ é um dos labels i tais que $v_i = 0$, então existe um simplexo que possui todos os labels"

Seção 4

1) Prove, usando o teorema de Brouwer, que não pode existir uma retração de S^n em si mesmo. (Sugestão. Use o mesmo tipo de prova usada na Proposição 4', mas tome cuidado com a continuidade da retração).

2) Mostre que o lema de Sperner pode ser demonstrado a partir do teorema de Brouwer. (Sugestão. Basta demonstrar Sperner no caso de divisões restritas. Se não existir um simplexo com todos os labels, então podemos construir uma retração de S^n em ∂S^n que leva cada simplexo da divisão simplicial numa face de S^n. Esta retração é construída da seguinte forma. Primeiro, cada vértice com label j da divisão simplicial é levado no j-ésimo vertice de S^n. Em seguida, este mapa é estendido linearmente dentro de cada simplexo).

3) Mostre que existe $r > 0$ tal que se H é uma família qualquer finita de conjuntos fechados F_a tais que $\operatorname{diam}(F_a) < r$ e $\cup_{\alpha \in H} F_a = S^n$, então existem (n+1) conjuntos de H, $F_{a_0}, F_{a_1}, \ldots, F_{a_n}$ tais que $\cap_{i=0,n} F_{a_i} \neq \emptyset$

Seção 5

1) Seja F uma correspondência semi- contínua superiormente de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Prove que se C é compacto, então F(C) é compacto.

2) Dado $C \subset \mathbb{R}^n$, definimos o convexificado de C, conv(C), como sendo o menor conjunto convexo que contem C, isto é, se C* é um conjunto convexo e $C^* \supset C$, então $C^* \supset \operatorname{conv}(C)$. Prove que:

a) conv(C) é a interseção de todos os conjuntos convexos que contem C.

b) se C é aberto, então conv(C) é aberto;

c) se C é compacto, então conv(C) é compacto

3) (Teorema de Caratheodory) Prove que se $x \in \operatorname{conv}(C) \subset \mathbb{R}^n$, então x pode ser expresso como combinação convexa de n+1 pontos de C. (Sugestão: Se x ∈ conv(C) é porque temos:

$$x_1 = z_{11}v_1 + z_{12}v_2 + \ldots + z_{1r}v_r$$

$$x_2 = z_{21}v_1 + z_{22}v_2 + \ldots + z_{2r}v_r$$

$$
\begin{aligned}
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n &= z_{n1}v_1 + z_{n2}v_2 + \dots + z_{nr}v_r \\
1 &= \quad v_1 + \dots \qquad + \quad v_r \\
v_1 &\geq 0 \dots\dots\dots\dots v_r \geq 0,
\end{aligned}
$$

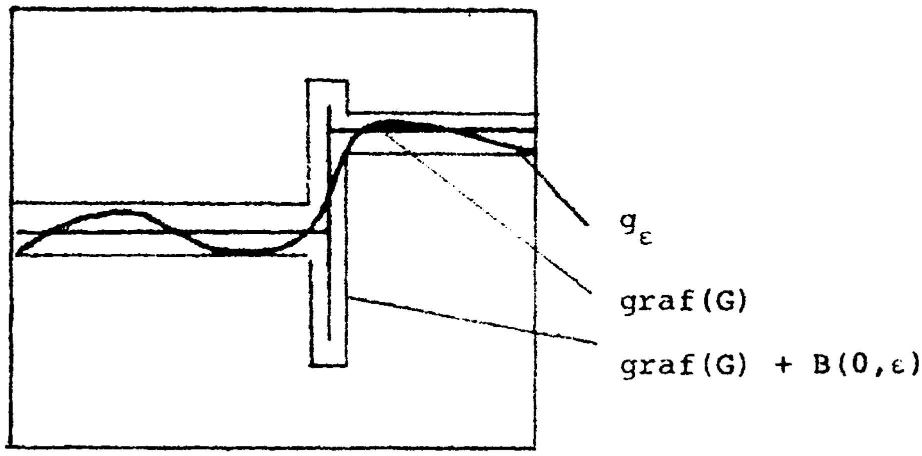
onde os vetores colunas da matriz do sistema são pontos de C aos quais adicionamos uma $(n+1)$- ésima coordenada igual a 1, z_{ij} e a i-ésima coordenada do j-ésimo ponto de C que entra na composição de x. Se $r > n$ podemos eliminar colunas até fazer $r = n+1$.)

4) Se F é uma correspondência semi- contínua superiormente de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo, então a correspondência G definida por $G(x) = \mathrm{conv}(F(x))$ para todo x também é semi- contínua superiormente. (Sugestão: Use o exercício acima)

5) Prove que o teorema de Kakutani vale quando substituímos S^n por um subconjunto compacto convexo qualquer de $\mathbb{R}^n$, isto é prove o corolário do teorema S.

6) Dada uma correspondência $G: X \to 2^X$, onde X é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, prove que os pontos fixos da correspondência $H: X\times X \to 2^{X\times X}$ definida por $H(x_1,x_2) = \{((1/2)(x_1+x_2), G((1/2)(x_1+x_2))\}$ estão numa relação 1-1 com os pontos fixos da G. Prove também que $\mathrm{graf}(G) = \{(x,y),\ y \in G(x)\}$ é igual à imagem de $X\times X$ pela H.

7) Uma outra prova do teorema de Kakutani: a) Prove que se X é um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$ e se $G: X \to 2^X$ é semi- contínua superiormente e convexa, então dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $g_\varepsilon : X \to X$ tal que $\mathrm{graf}(g_\varepsilon) \subset \mathrm{graf}(G) + B(0,\varepsilon) = \{(x,y) \in X\times X : \max(\|x-x'\|,\|y-y'\|) < \varepsilon$, onde $y' \in G(x')\}$



(Referência: Aubin e Celina, pag. 84).

b) Pelo teorema de Brouwer cada g_ε tem um ponto fixo x_ε. Deixe $\varepsilon \to 0$ e tome um ponto de acumulação x^* dos x_ε. Prove que x^* é um ponto fixo da G.

7) (Eaves, 1970) Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto e convexo e G uma correspondência semi- contínua superiormente de C nas partes de $\mathbb{R}^n$. Se existe $c \in \text{int}C$ tal que para todo $x \in \partial C$ tenhamos $c \in F(x)$, então F tem um ponto fixo em C. (Sugestão: $C^* := \text{conv}(C \cup F(C))$ é compacto e convexo. Tome $F^*: S^n \to 2^{S^n}$ definida por $F^*(x) := \text{conv}(F_1(x) \cup F_2(x))$, onde $F_1(x) = F(x)$ se $x \in C^*$ e $F_1(x) = \emptyset$ se $x \in S^n \setminus C^*$ e $F_2(x) = \{c\}$ se $x \in S \setminus \text{int}C^*$ e $F_2(x) = \emptyset$ em caso contrário.)

Seção 6

1) Prove que no modelo de Von Neumann o α é único se supusermos que $a_{ij} + b_{ij} > 0$ para todo par (i,j). (Sugestão: Primeiro mostre que se (x,p,α) e (x',p',α') são soluções, onde $\alpha > \alpha'$, então (x,p',α'') é uma solução para todo α'' tal que $\alpha \geq \alpha'' \geq \alpha'$.)

2) (a) Prove o teorema de Frobenius- Perron: " Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz nxn com todos os suas entradas positivas. Então A possui um autovalor λ_A positivo ao qual corresponde um autovetor com todas as suas coordenadas positivas". (Sugestão: Defina $d(x) := \Sigma_{i=1,n}\Sigma_{j=1,n}\, a_{ij}x_j$, então $f: S^{n-1} \to$

S^{n-1} dada por $f(x):=(d(x))^{-1}(\Sigma_{j=1,n}\, a_{1j}x_j, \ldots, \Sigma_{j=1,n}\, a_{nj}x_j)$ é bem definida e contínua. Use o teorema de Brouwer). (b) Prove que se $Ax \geq \mu x$ para algum $\mu \in \mathfrak{R}$ e algum $x \in S^{n-1}$, então o autovalor λ_A do item (a) é $\geq \mu$. (c) Prove que se w é um autovalor de A, então $\lambda_A \geq |\omega|$. (d) Prove que se $A_1 \geq A_2$, então $\lambda_{A_1} \geq \lambda_{A_2}$

3) O modelo de Leontieff (1949) estudava uma economia com n bens, cada um sendo produzido por um único setor da economia. O modelo era especificado da seguinte forma. Para a produção de $r > 0$ unidades do bem i são necessárias ra_{ij}, $i, j=1$ até n, unidades do bem j. Se supõe que $a_{ij} \geq 0$, com ao menos um dos $a_{ij} > 0$ para cada i. Se x_i é a produção do bem i, então a produção líquida do bem i é

$$x_i - \Sigma_{j=1,n}\, a_{ij}x_j.$$

A demanda total de cada bem i é $c_i \geq 0$ e iguala a produção líquida, isto é

$$x_i - \Sigma_{j=1,n}\, a_{ij}x_j = c_i \qquad (*).$$

Suponha que o modelo de Leontieff seja solúvel isto é que dado o vetor de demandas c exista $x \in \mathfrak{R}^n$ tal que $x_i \geq 0$ para todo i e que x seja solução de (*). Mostre que existe um vetor $p \in \mathfrak{R}^n_+$ e um número $\tau > 0$ tal que $p'A = (1+\tau)^{-1}p'$, onde p' é o vetor transposto de p. Interprete p.

O seguinte exercício eu aprendi em Princeton com Philip White. ele engloba, por exemplo o modelo de Graham de Comércio Internacional. Para uma revisão do que é o modelo de Graham leiam o artigo de McKenzie citado na bibliografia.

4) Vamos supor uma economia onde os consumidores gerem uma função excesso de demanda agregada $z(p)$ e onde a produção de bens se faça de acordo com uma tecnologia gerada por uma matriz mxn A de análise de atividades. Cada uma das colunas de A representa uma atividade que pode ser operada com uma intensidade ≥ 0. O uso de uma atividade não exclui o uso de outras.

a) Mostre que se as firmas estão maximizando lucro, então uma

atividade só pode ser usada aos preços p se nesses preços ela der lucro ≥ 0, isto é, a i- ésima atividade só pode ser usada se $p'Ae_i \geq 0$. Além disso, mostre também que se a atividade i è usada è porque de fato temos $p'Ae_i = 0$.

b) Mostre que o conjunto $G := \{ p \in S^n : p'Ae_i \leq 0$ para todo $i\}$ é um conjunto convexo e compacto.

c) Suponha que as primeiras m colunas de A sejam não- negativas. O que é que isso representa conceitualmente? Um vetor de preços p^* é um equilíbrio se e somente se existe $y \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $z(p^*) = Ay$ e $(p^*)'Ae_i \leq 0$ para todo i. Suponha que G seja não vazio e que z seja contínua. Defina $h: G \to G$ pondo $h(p) :=$ ponto de G que está mais perto de $p+z(p)$. h é uma função contínua. Prove que existe um equilíbrio da seguinte forma. Escreva o lagrangeano do problema de programação convexa necessário para se determinar h e escreva as condições de primeira ordem. A seguir use o teorema de Brouwer.

5) Prove que o seguinte teorema de Von Neumann implica e é implicado pelo teorema de Kakutani. " Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ compactos e convexos e E e F dois subconjuntos fechados de XxY. Se para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$ os conjuntos $E_x := \{ y : (x,y) \in E\}$ e $F_y := \{ x : (x,y) \in F\}$ são conjuntos convexos não- vazios, então $E \cap F \neq \emptyset$." (<u>Sugestão</u>: Para provar a ida ponha $X = Y$, $E =$ graf(P) e $F = \{(x,x) : x \in X\}$. Para provar a volta tome $P: X\times Y \to 2^{X\times Y}$ definida por $P(x,y) := (F_y, E_x)$.)

6) Vamos modificar o modelo de Von Neumann de forma a introduzir consumo público e poupança. Isto é feito da seguinte forma. Continuamos a ter duas matrizes mxn A e B que nos dão os insumos e os resultados de cada processo quando este é utilizado com intensidade igual a 1. Introduzimos uma nova matriz mxn W cujas entradas w_{ij} serão interpretadas como sendo o que os trabalhadores ganham do bem i no j-ésimo processo quando este é operado com $x_j = 1$. Se s é a propensão a poupar dos trabalhadores e c a sua propensão a consumir, queremos ter

a) $x'(B - \alpha(A+cW)) \geq 0$;

b) $(B - \beta(A+sW))p \leq 0$,

c) $x'(B - \alpha(A+cW))p = 0$;

d) $x'(B - \beta(A+sW))p = 0$.

Note que não supomos nenhuma relação entre c e s, isto é, podemos ter c + s <, =, ou > 1. Pede-se:

a) Explique o significado de cada uma dessas equações.

b) O que significa $c+s < 1$? E $c+s > 1$?

c) Mostre que existe uma solução do problema.

d) Mostre que se $c \geq s$, então na solução temos $0 < \alpha \leq \beta$ e que se $c \leq s$ temos $\alpha \geq \beta > 0$. Interprete.

Capítulo II: Teoria dos Jogos

(Jogos na Forma Normal)

1. Introdução

A Teoria dos Jogos é o ramo da Economia Matemática que tenta modelar as situações de conflito entre diferentes agentes econômicos. Seus primórdios se encontram nos trabalhos de Cournot, Bertrand e Edgeworth já no século XIX, se bem que uma formulação realmente precisa só foi alcançada após os trabalhos de John Von Neumann em 1928, de Von Neumann e Morgenstern em 1944 e de John Nash em 1951.

Cournot tem a primazia histórica. No seu livro " Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses", publicado em 1838, ele foi o primeiro a propor um modelo de oligopólio, onde n firmas diferentes escolhiam as quantidades que cada uma delas produziria de um certo produto. Ele supunha que havia uma curva de demanda para este produto a qual possuía uma inclinação diferente de zero, isto é que a elasticidade da demanda em relação ao preço não fosse infinita. A ação de uma firma influenciava o lucro das demais na medida em que se ela aumentasse a sua produção aumentaria a quantidade ofertada de produto, baixando o preço de equilíbrio. Cournot definiu um equilíbrio como sendo aquela situação em que nenhuma firma teria como aumentar o seu lucro se as demais firmas permanecessem como estavam.

Exemplo 1: Temos duas firmas produzindo um único produto. A curva inversa de demanda por este produto é dada por $p = 2 - q$, onde p é o preço e q é a quantidade. A tecnologia de cada uma das duas é expressa pelas suas

respectivas funções de custo, a saber:

$$C_1(q) = 1 - q$$

$$C_2(q) = 1.5 - q.$$

Assim, as funções de lucro são respectivamente

$$\Pi_1(q_1, q_2) = (2 - q_1 - q_2)q_1 - (1 - q_1)$$

e

$$\Pi_2(q_1, q_2) = (2 - q_1 - q_2)q_2 - (1.5 - q_2).$$

É fácil verificar que Π_1 e Π_2 são funções côncavas em q_1 e q_2 respectivamente. Portanto um equilíbrio de Cournot existirá se e somente se as curvas $\partial\Pi_1/\partial q_1 = 0$ e $\partial\Pi_2/\partial q_2 = 0$ se interceptarem. O gráfico abaixo mostra o comportamento dessas duas curvas, elas se interceptam no ponto $q_1 = q_2 = 1$. Costumamos chamar a curva $\partial\Pi_1/\partial q_1 = 0$ de <u>curva de reação</u> da firma 1 enquanto que $\partial\Pi_2/\partial q_2 = 0$ será a curva de reação da firma 2.

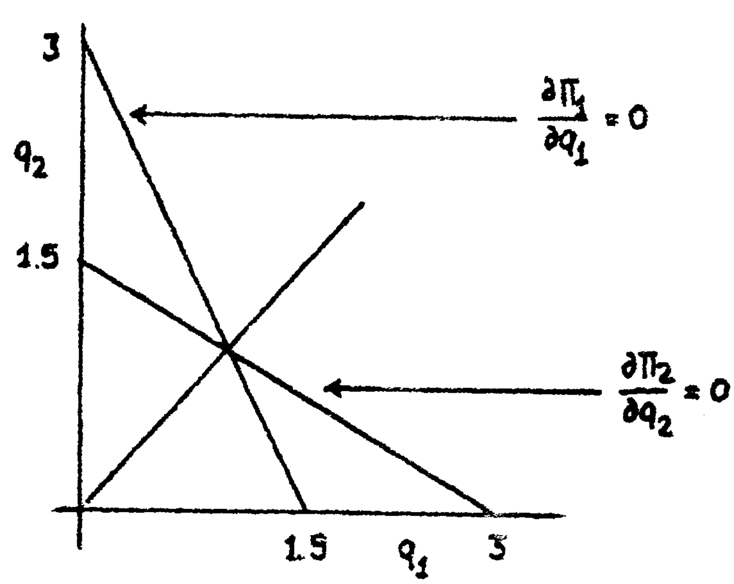


Figura 1

Cournot estudou problemas como o do duopólio acima e chegou mesmo a estudar algumas generalizações a problemas de oligopólio. Evidentemente, a prova de existência de um equilíbrio que ele pode fornecer jamais foi muito além do que foi visto no exemplo acima.

O segundo grande passo da Teoria dos Jogos foi dado por Von Neumann. Ele enunciou pela primeira vez o que ficou sendo conhecido como o Teorema Fundamental da Teoria dos Jogos. O nome, embora talvez um pouco exagerado, refletiu o entusiasmo com que esse resultado foi recebido. Esse teorema para o qual existem inúmeras e diferentes provas (ao que eu saiba 4 delas dadas pelo próprio Von Neumann), é equivalente ao teorema da dualidade na Programação Linear e foi uma das causas do aperfeiçoamento de métodos computacionais de Programação Linear tais como o método simplexo de Dantzig e Kantorovich.

Essencialmente, Von Neumann queria estudar um jogo com dois jogadores, cada um dos quais tinha um número finito de estratégias que poderia tomar. Digamos que o primeiro jogador tenha m estratégias enquanto que o segundo possui n. Nós vamos enumerar as estratégias de cada jogador e nós falaremos do par (i,j) como sendo o evento: o jogador 1 toma a sua i- ésima estratégia e o jogador 2 toma a sua j- ésima estratégia. Quando um par (i,j) é escolhido o primeiro jogador pagará a_{ij} unidades monetárias ao segundo (se a_{ij} for menor que zero será na verdade o segundo quem estará pagando ao primeiro).

Von Neumann supunha que os jogadores não colaborassem entre si. Desta forma, seria razoável supor que os dois jogadores adotassem os seguintes comportamentos:

(*) <u>Jogador 1</u>: Ele sabe que para qualquer estratégia que ele tome o jogador 2 sempre procurará maximizar o seu ganho. Portanto, ele escolhe i pensando em resolver $\min_i \max_j a_{ij}$.

(*) <u>Jogador 2</u>: O jogador 2 sabe que o jogador 1 sempre vai tentar minimizar o quanto lhe deve pagar. Desta forma ele escolhe j de forma a resolver o problema $\max_j \min_i a_{ij}$.

<u>Exemplo 2</u>: A matriz abaixo 'a esquerda nos dá um exemplo de um jogo matricial onde cada jogador tem duas estratégias e onde existe um equilíbrio. Já o jogo representado pela matriz da direita não possui um equilíbrio em estratégias puras.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para poder garantir a existência de um equilíbrio em jogos como o jogo com a matriz da direita Von Neumann teve de estender a idéia de estratégia. Ele admitiu que ao invés de escolher uma estratégia, que cada jogador escolhesse uma loteria sobre o seu conjunto de estratégias. Assim, por exemplo se eu possuía as estratégias "ir para a esquerda" e "ir para a direita", agora eu também possuo estratégias como " ir para a esquerda com probabilidade 1/2 e para a direita com probabilidade 1/2". Para distinguir o novo conjunto do original nós chamamos as estratégias com que começamos de <u>estratégias puras</u> e as loterias de <u>estratégias</u>

mistas.

É claro que quando permitimos que os jogadores adotem estratégias mistas que então devemos refrasear as hipótese comportamentais (*) e (*) acima. Para tal, sejam x' o vetor linha de S^{m-1} que dá a estratégia mista do jogador 1 e y o vetor coluna de S^{n-1} que dá a estratégia mista do jogador 2, então o lucro esperado do jogador 2 é $x'Ay$, onde $A = [a_{ij}]$ e (*) e (*) podem ser reescritas como

(*) Jogador 1: Ele escolhe x de forma a resolver $\min_x \max_{y|x} x'Ay$;

(*) Jogador 2: Ele escolhe y de forma a resolver $\max_y \min_{x|y} x'Ay$;

onde y|x significa " y dado x" e vice- versa.

Um jogo nas condições acima é chamado um jogo matricial. Um equilíbrio para esse jogo é um par de estratégias (x,y) que obedecem a (*) e (*) acima. O Teorema Fundamental de Von Neumann nos garante que um tal par existe e que $\min_x \max_{y|x} x'Ay = \max_y \min_{x|y} x'Ay$, sendo que este número chamamos de o valor do jogo.

Um equilíbrio de Nash num jogo onde não existe cooperação é uma coleção de estratégias, uma para cada jogador, tal que nenhum jogador tem um incentivo para se desviar se os demais se mantiverem como estão. Na seção 2 obteremos o teorema de Von Neumann, bem como o da existência do equilíbrio em um oligopólio, como corolário de um teorema mais geral que garante a existência de equilíbrios de Nash em jogos convexos.

2. Jogos Convexos

Um <u>jogo convexo</u> é um jogo com n jogadores, indexados $i = 1$ até n, cada um dos quais possui um conjunto de estratégias S_i que é um subconjunto convexo de algum espaço vetorial e uma função lucro L_i: $\Pi_{i=1,n} S_i \rightarrow \mathfrak{R}$. Por simplicidade, nós suporemos que cada S_i é um subconjunto de $\mathfrak{R}^n$ para algum $n < \infty$. Também suporemos que cada S_i é compacto, que as funções L_i sejam contínuas e que cada uma delas seja uma função côncava na sua i- ésima variável mantidas as demais variáveis fixas, isto é, L_i é côncava na estratégia do jogador i se as outras estratégias permanecem fixas.

Evidentemente os modelos usuais de oligopólio, bem como os jogos matriciais são jogos convexos. Porém, os jogos convexos incluem uma gama muito maior de jogos. Podemos, por exemplo, ter um jogo com dois jogadores, onde cada jogador tenha um número finito de estratégias puras, mas onde o lucro de um não necessariamente é o prejuízo do outro, isto é, temos uma situação onde os lucros dos jogadores não mais somam zero. Tal jogo também é um jogo convexo se admitirmos que os jogadores possam jogar com estratégias mistas. Este tipo de jogo é chamado <u>jogos bimatricial</u>. Ele é muito importante porque ajuda a diferenciar o problema da não- cooperação do problema do antagonismo, coisa que é impossível de se fazer nos modelos de oligopólio com um produto só ou nos jogos matriciais.

A idéia do equilíbrio de Cournot e a do equilíbrio do modelo de Von Neumann estão contidas na idéia mais geral do <u>equilíbrio de Nash</u> de um jogo convexo, o qual é definido da seguinte forma. Dados $s \in S := \Pi_{i=1,n} S_i$ e

$s'_j \in S_j$ quaisquer sejam $s_{-j} := (s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_n)$ e $(s_{-j}, s'_j) := (s_1, \ldots, s_{j-1}, s'_j, s_{j+1}, \ldots, s_n)$, um equilíbrio de Nash é um ponto $s^* \in S$ tal que de $j = 1$ até n tenhamos

$$L_j(s^*) = \max \{ L(s^*_{-j}, s_j) : s_j \in S_j \}.$$

O teorema que vamos provar diz que todo jogo convexo possui um equilíbrio de Nash. Antes, porém, será necessário o seguinte teorema devido a C. Berge:

<u>Teorema 1</u>: (Teorema do Máximo) Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos compactos não- vazios de $\mathbb{R}^n$. Se $L: S_1 x S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então:

a) A correspondência $G: S_2 \rightarrow 2^{S_1}$ definida por $G(s_2) := \{ s_1 \in S_1 : L(s_1, s_2) = \max_{s_1} L(s_1, s_2) \}$ é não- vazia para todo s_2 e semi-contínua superiormente;

b) A função $L_{max}: S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L_{max}(s_2) = \{ L(s_1, s_2) : s_1 \in G(s_2) \}$ é contínua.

<u>Prova</u>: Como S_1 é compacto é trivial que $G(s_2)$ é diferente de vazio para todo s_2. Suponha que G não seja semi- contínua superiormente. Então, podemos encontrar uma seqüência $(s^n_1, s^n_2) \rightarrow (s_1, s_2)$ tal que para todo n

$s^n_1 \in G(s^n_2)$ e $s_1 \notin G(s_2)$. Neste caso, existem $s'_1 \in S_1$ e $\varepsilon > 0$ tal que $L(s'_1,s_2) > L(s_1,s_2) + 2\varepsilon$. Além disso, para n suficientemente grande a continuidade da L nos garante que $|L(s'_1,s_2) - L(s'_1,s^n_2)| < \varepsilon$ e $|L(s'_1,s_2) - L(s^n_1,s^n_2)| < \varepsilon$. Assim, teremos

$$L(s'_1,s^n_2) + \varepsilon > L(s'_1,s_2) > L(s_1,s_2) + 2\varepsilon > L(s^n_1,s^n_2) - \varepsilon + 2\varepsilon$$

o que acarreta que

$$L(s'_1,s^n_2) > L(s^n_1,s^n_2) + \varepsilon,$$

uma contradição, pois por hipótese $s^n_1 \in G(s^n_2)$.

Para provar que a função L_{max} é contínua tome uma seqüência convergente $s^n_2 \to s_2$. Tome $s^n_1 \in G(s^n_2)$, passando a uma subseqüência n' podemos admitir que $L(s^{n'}_1,s^{n'}_2)$ converge para o limsup da seqüência $L(s^n_1,s^n_2)$. Se $s^{n'}_1$ convergir para s_1 então, pelo já visto acima, s_1 pertencerá a $G(s_2)$ e isto implicará que

$$\limsup L_{max}(s^n_2) = \limsup L(s^n_1,s^n_2) = L_{max}(s_2).$$

Da mesma forma, podemos provar que

$$\liminf L_{max}(s^n_2) = L_{max}(s_2),$$

o que juntamente com a igualdade anterior implica que

$$\lim_{n\to\infty} L_{max}(s^n_2) = L_{max}(s_2),$$

provando que a função L_{max} é contínua.

QED

Teorema 2: Todo jogo convexo possui um equilíbrio de Nash.

Prova: Para $i = 1$ até n seja G_i a correspondência de $\Pi_{j \neq i} S_j$ em S_i definida por $G_i(s_{-i}) := \{ s_i : L_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s^* \in S_i} L_i(s^*, s_{-i}) \}$. Pelo teorema 1 cada G_i é semi- contínua superiormente e $G_i(s_{-i}) \neq \emptyset$ sempre. Além disso, como cada L_i é côncava na variável s_i, teremos que cada correspondência G_i também é convexa. Com efeito, se s' e $s'' \in G_i(s_{-i})$ e $\lambda \in (0,1)$, então temos que $L_i(\lambda s' + (1-\lambda)s'', s_{-i}) \geq \lambda L_i(s', s_{-i}) + (1-\lambda) L_i(s'', s_{-i}) = \max_{s^* \in S_i} L_i(s^*, s_{-i})$ $\Rightarrow L_i(\lambda s' + (1-\lambda)s'', s_{-i}) = \max_{s^* \in S_i} L_i(s^*, s_{-i}) \Rightarrow \lambda s' + (1-\lambda)s'' \in G(s_{-i})$.

É fácil então checar que a correspondência $G: \Pi_i S_i \rightarrow 2^{\Pi_i S_i}$ definida por $G(s) := \{ s : s_i \in G(s_{-i})$ para $i = 1$ até $n \}$ é semi- contínua superiormente, convexa e não- vazia. Podemos usar o teorema de Kakutani e afirmar que a G possui um ponto fixo s^*. Pela definição da G temos que $(s^*)_i \in G((s^*)_{-i})$ para todo i, o que implica que s^* é um equilíbrio de Nash.

QED

É evidente que o teorema 2 implica a existência de equilíbrio em muitos dos modelos usuais de oligopólio. Vejamos o teorema de Von Neumann:

Teorema 3: (O Teorema Fundamental, também chamado de teorema minmax de Von Neumann) Seja um jogo matricial com matriz de lucro para o segundo jogador igual a B mxn. Existe

$(x,y) \in S^{m-1} \times S^{n-1}$ tal que:

a) $x^t Ay \geq x^t Ay'$ para qualquer $y' \in S^{n-1}$;

b) $x^t Ay \leq x'^t Ay$ para qualquer $x' \in S^{m-1}$;

e c) $\max_y \min_{x|y} x^t Ay = \min_x \max_{y|x} x^t Ay$.

<u>Prova</u>: Comecemos por observar que $\max_y \min_{x|y} x^t Ay \leq \min_x \max_{y|x} x^t Ay$, pois:

$$\min_{x|y} x^t Ay \leq x^t Ay \Rightarrow \max_y \min_{x|y} x^t Ay \leq \max_{y|x} x^t Ay \Rightarrow$$

$$\max_y \min_{x|y} x^t Ay \leq \min_x \max_{y|x} x^t Ay.$$

Eu afirmo então que se (a) e (b) são verdade, então $\max_y \min_{x|y} x^t Ay \geq \min_x \max_{y|x} x^t Ay$. Com efeito,

$$x^t Ay \geq x^t Ay' \Rightarrow x^t Ay \geq \max_{y|x} x^t Ay \Rightarrow x^t Ay \geq \min_x \max_{y|x} x^t Ay$$

e

$$x^t Ay \leq x'^t Ay \Rightarrow x^t Ay \leq \min_{x|y} x^t Ay \Rightarrow x^t Ay \leq \max_y \min_{x|y} x^t Ay,$$

o que acarreta este resultado. Desta forma provamos que se existe (x,y) que atende (a) e (b), então vale (c). Para provar que existe o par (x,y) basta considerar o jogo bimatricial com matrizes $(-A,A)$ para o primeiro e segundo jogadores respectivamente.

QED

3. <u>Jogos Matriciais</u>: <u>Uma outra prova da existência de equilíbrio</u>.

A existência de equilíbrio em jogos matriciais pode ser provada de

outras maneiras que não a apresentada acima. Se pode demonstrar a existência de um equilíbrio nestes jogos, sem sem que haja necessidade de se empregar um teorema de ponto fixo. Veremos agora uma dessas provas, a qual depende da seguinte versão do famoso lema de Farkas:

Teorema 4: Seja A uma matriz nxn anti- simétrica ($A=-A'$), então existe $x \in S^{n-1}$ tal que $e'_iAx \leq 0$ para todo i.

Prova: Nós começamos por observar que para toda matriz anti- simétrica A vale que $x'Ax = 0$ para qualquer vetor x de $\mathfrak{R}^n$. Com efeito, $x'Ax = (x'Ax)' = x'A'x = x'(-A)x = -x'Ax \Rightarrow x'Ax = 0$. Seja $C := \{ Ax: x \in S^{n-1}\}$. C é um conjunto compacto e convexo. Suponha, por absurdo, que não exista $x \in S^{n-1}$ tal que $e'_iAx \leq 0$ para todo i, então $C \cap (-\mathfrak{R}^n) = \emptyset$. Isto implica que para todo $c \in C$ e $r \in \mathfrak{R}^n_+$ tenhamos $c+r \neq 0$, isto é, que o ponto 0 não pertence ao conjunto $V := \{ c + r : c \in C \text{ e } r \in \mathfrak{R}^n_+ \}$. V é um conjunto convexo fechado e portanto existe $v^* \neq 0$ tal que $v^* \in V$ e v^* está a uma distância mínima de 0. Temos que $v^{*'}v > 0$ para qualquer $v \in V$. Eu afirmo que isto implica que:

1) $v^{*'}c > 0$ para todo $c \in C$; e

2) $v^*_i \geq 0$ para todo i.

Com efeito, (1) pode ser obtida colocando $r = 0$. Para se obter (2) note que $v^{*'}(c+\lambda e_i) > 0 \Rightarrow (1/\lambda)v^{*'}c + v^*_i > 0$ quando $\lambda > 0$, deixando $\lambda \to \infty$ vem que $v^*_i \geq 0$. A desigualdade (1) acarreta que $v^{*'}Ax > 0$ para todo $x \in S^{n-1}$. Mas isto nos dá uma contradição, pois do fato que $v^* \neq 0$ juntamente com (2)

concluímos que $\Sigma_{i=1,n}v^*_i > 0$, o que implicaria que $\mu^* := (\Sigma_{i=1,n}v^*_i)^{-1}v^* \in S^{n-1}$ e portanto $v^{*\prime}A\mu^* = (\Sigma_{i=1,n}v^*_i)^{-1}v^*Av > 0$, quando já vimos que $v^{*\prime}Av^* = 0$.

QED

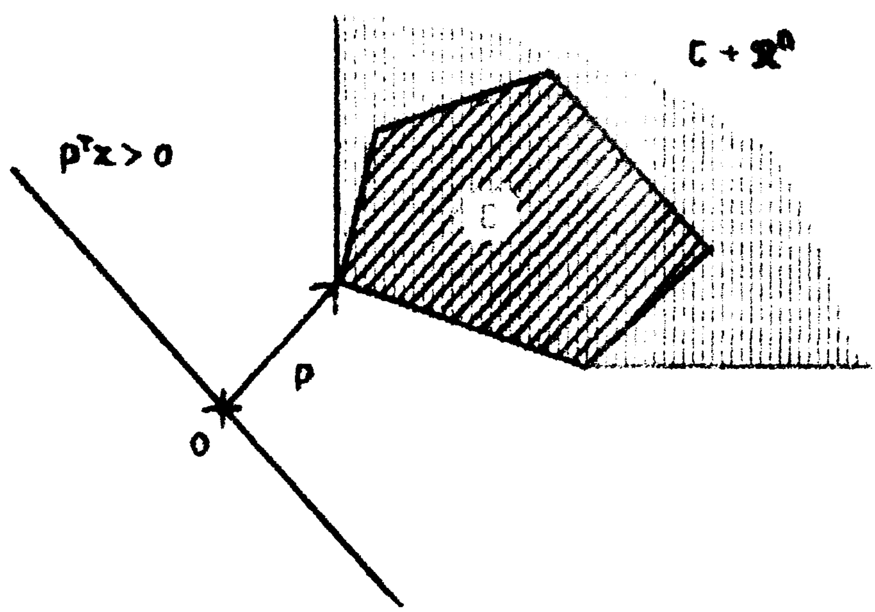


Figura 1: Idéia da prova do teorema 4.

<u>1a. Alternativa para a Prova do Teorema 3</u>: Pelo já visto, basta provarmos que existe (x,y) satisfazendo (a) e (b) do teorema 3. Para tal seja $f:\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots mn\}$, $f(k,l) = j$, nós consideraremos a matriz mnxmn $\tilde{A}$ definida por $\tilde{A} = [\tilde{a}_{j_1j_2}]$, onde $\tilde{a}_{j_1j_2} = a_{k_2l_1} - a_{k_1l_2}$. É fácil verificar que $\tilde{A}$ é anti- simétrica. Por conseguinte, o teorema 4 implica que existe $z \in S^{mn-1}$ tal que $\tilde{A}z \le 0$, isto é,

$$\Sigma_{j_2}\tilde{a}_{j_1j_2}z_{j_2} \le 0 \text{ para todo } j_1.$$

Ponhamos $x_{k_2} = \Sigma_{l_2=1,n}z_{f(k_2,l_2)}$ e $y_{l_2} = \Sigma_{k_2=1,m}z_{f(k_2,l_2)}$, é claro que os

vetores x e y pertencem respectivamente a S^{m-1} e S^{n-1}. Podemos reescrever a desigualdade acima como

$$\Sigma_{k_2,l_2}(a_{k_2 l_1} - a_{k_1 l_2}) z_{j(k_2,l_2)} \leq 0 \text{ para todo } (k_1,l_1),$$

o que implica que

$$\Sigma_{k_2} a_{k_2 l_1} x_{k_2} \leq \Sigma_{l_2} a_{k_1 l_2} y_{l_2} \text{ para todo par } (k_1,l_1).$$

Em notação matricial esta desigualdade quer dizer que

$$x^t A e_{l_1} \leq e^t_{k_1} A y \text{ ....}(*)$$

para todo par (k_1,l_1). Eu afirmo que esta desigualdade implica as desigualdades (a) e (b) do teorema de Von Neumann. Só mostrerei a desigualdade (a), pois a outra se obtem de forma análoga. Assim, tomemos $y' \in S^{n-1}$, nós temos que

$$x^t A y' = \Sigma_{l_1} y_{l_1} (x^t A e_{l_1}) \leq \Sigma_{l_1} y_{l_1} (e^t_{k_1} A y) = e^t_{k_1} A y \Rightarrow$$

$$x'^t A y = \Sigma_{k_1} x_{k_1} (x^t A y') \leq \Sigma_{k_1} x_{k_1} (e^t_{k_1} A y) = x'^t A y \Rightarrow$$

$$x^t A y' \leq x^t A y.$$

QED

Problemas

Seção 1

1) Se n firmas com a mesma tecnologia enfrentam uma mesma curva de demanda e se todas produzem uma quantidade positiva de produto, é verdade que todas produzirão a mesma quantidade ? (Suponha curvas de custo médio côncavas). Se isto não for verdade especifique condições para que tal comportamento aconteça.

2) Suponha que a função inversa de demanda de um bem seja $p = 2-q$ e que exista um número infinito de firmas dispostas a produzi- lo, todas com a mesma tecnologia dada pela função de custo $C(q) = q(q^2-0.5q+0.5)$. Calcule o número de firmas que produzirão $q > 0$ e a produção total.

3) Suponha no exercício 3 que a função de custo fosse $C_\alpha(q) = (q/\alpha)((q/\alpha)^2-0.5(q/\alpha)+0.5)$, o que acontece quando $\alpha \to \infty$. Interprete.

4) Nas condições do exercício 2 suponha que a função inversa de demanda seja $p = 3 - 2q$ e que a função de custo seja definida por:

$$C(q) = 1.5q - 0.5q^2 \text{ se } q \in [0,1]$$

$$C(q) = 0.5q + 0.5q^2 \text{ se } q > 1.$$

Mostre que não existe um equilíbrio com livre entrada das firmas.

Quase meio século após o aparecimento dos Princípios de Cournot Bertrand se perguntava por que é que num duopólio as variáveis de quantidades deveriam ser fixadas sobre a curva de demanda agregada. Edgeworth propôs o seguinte exemplo que formaliza a idéia de Bertrand.

5) Duas firmas podem produzir sem nenhum custo até 1.5 unidades, e nada mais, de água mineral de idêntica qualidade. Existem dois consumidores idênticos cada um com a sua demanda dada pela reta dd' da figura, de forma a que a demanda agregada seja DD'. Mostre que o preço de equilíbrio competitivo da água mineral é zero. Tomando as variáveis de decisão do problema como sendo os preços cobrados pelas firmas será que voce é

capaz de determinar um equilíbrio com preço diferente de zero.

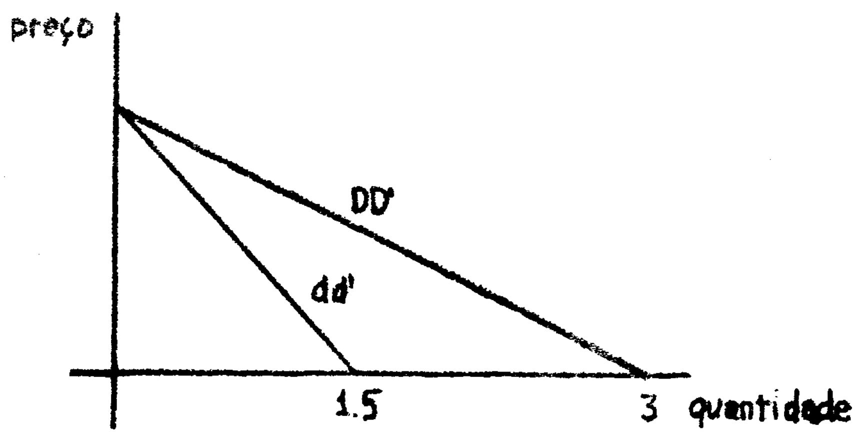


Figura 2

6) Prove que se (x,y) é um equilíbrio do jogo matricial com matriz A mxn, então (x,y) também é um equilíbrio do jogo com matriz $\lambda A + \rho E$, onde $\lambda > 0$, $\rho \in \mathbb{R}$ e E é a matriz mxn com todas as entradas iguais a 1.

7) Prove que o valor de um jogo cuja matriz de lucro é antisimétrica ($A = -A'$) é zero.

8) Prove que num jogo matricial com valor igual a v o primeiro jogador só dará um peso positivo aquelas estratégias puras i tais que $e'_i Ay = v$. Como se comportará o segundo jogador ? (Você concluirá que se (x,y) é um equilíbrio, então $v = x'Ay$.

9) Seja um jogo matricial com matriz de lucro $A = [a_{ij}]$ quadrada nxn. Prove que se A é invertível e se no equilíbrio cada estratégia recebe um peso positivo, então as estratégias de equilíbrio são $x' = (e'A^{-1}e)^{-1}e'A^{-1}$ e $y = (e'A^{-1}e)^{-1}A^{-1}e$, onde e é o vetor de $\mathbb{R}^n$ com todas as ordenadas iguais a 1. Qual o valor do jogo ?

__Seção 2__

1) Sejam Y é um conjunto compacto, dizemos que uma correspondência $G: X \to 2^Y$ é __semi- contínua inferiormente__ se para todo $(x,y) \in$ graf(G) e toda seqüência $x_n \to x$ existe $y_n \in G(x_n)$ tal que $y_n \to y$. Uma correspondência é

dita <u>contínua</u> se é semi- contínua superiormente e inferiormente. Prove a seguinte extensão do teorema 1:

"Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compacto e $\beta: X \to 2^Y$. Seja $L: Y \to \mathbb{R}$ contínua. Defina $\mu: X \to \mathbb{R}$ pondo $\mu(x) := \{ y \in \beta(x) : y$ maximiza L em $\beta(x) \}$ e $L_{max}: X \to \mathbb{R}$ pondo $L_{max}(x) := L(y)$ onde $y \in \mu(x)$. Se β é contínua, então μ é semi- contínua superiormente".

2) Usando o problema acima explique porque a função de utilidade indireta da Teoria do Consumidor é contínua. Dê um exemplo onde a função de utilidade indireta é contínua porém não é diferenciável. O que acontece quando ela é diferenciável na renda ?

3) Nas nossas hipóteses um jogador nunca pode afetar o conjunto de estratégias que um outro pode tomar. Mudemos isso e passemos a admitir que uma vez que os demais jogadores escolheram s_{-i} o jogador i tem de escolher $s_i \in K_i(s_{-i})$, onde $K_i: S \to 2^{S_i}$ é uma correspondência contínua convexa não- vazia. Prove que existe um equilíbrio de Nash, isto é, um ponto $s \in S$ tal que para todo i $s^*_i \in G_i(s^*) := \{ s_i \in S_i : L_i(s_i, s^*_{-i}) = \max_{s \in S_i} L_i(s, s^*_{-i})$ e $s_i \in K_i(s^*) \}$.

4) Mostre, usando o exercício acima que uma caixa de Edgeworth é redutível a um jogo com externalidades e mostre em que condições existe um equilíbrio. (A caixa de Edgeworth é definida no livro do Varian).

5) Determine os três equilíbrios de Nash do jogo bimatricial com matrizes de lucro dadas por:

$$\begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \\ \begin{bmatrix} 100 & 85 & 60 \\ 105 & 80 & 60 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 100 & 105 & 70 \\ 85 & 80 & 75 \end{bmatrix} \end{array}$$

6) Uma situação é um ótimo de Pareto quando nenhum jogador pode melhorar sem que pelo menos algum outro piore. Mostre um exemplo de um jogo com um único equilíbrio de Nash que não é um ótimo de Pareto.

<u>Seção 3</u>

1) Prove que se A é uma matriz anti- simétrica nxn, então existe $x \in S^{n-1}$

tal que $Ax + x > 0$.

2) Prove que se A é uma matriz mxn qualquer que então uma e sómente uma das duas seguintes coisas acontece:

a) existe $x \in S^{m-1}$ tal que $x'A \geq 0$;

b) existe $y \in S^{n-1}$ tal que $Ay < 0$.

3) Prove que se A e B são matrizes quaisquer mxp e mxq respectivamente então uma e sómente uma das duas seguintes coisas acontece:

a) existe $u \in S^{p-1}$ e $v \geq 0$ tais que $Au + Bv = 0$;

b) existe $x \neq 0$ tal que $x'A > 0$ e $x'B \geq 0$.

4) Dê uma outra prova do teorema 4 estudando a equação diferencial

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i - x_i\Sigma_{i=1,n}c_i \text{ .... } (*),$$

onde $c_i := \max(0, e'_i Ax)$. (Sugestão: Primeiro mostre que se a condição inicial de (*) é um ponto de S^{n-1}, então uma solução de (*) nunca deixa S^{n-1}. Isto implica que existem pontos de acumulação x_∞ de $x(t)$ quando $t \to \infty$. Seja $f(x) := \Sigma_{i=1,n}(c_i)^2$, mostre que

$$\frac{df(x)}{dt} = 2\ \Sigma_{i=1,n}c_i\frac{dc_i}{dt},$$

e que isto implicará que $f(x(t)) \to 0$ quando $t \to \infty$. Portanto, $f(x_\infty) = 0$, o que nos diz que x_∞ é um equilíbrio.)

5) A seguinte prova do teorema de Von Neumann foi dada por H. Kuhn. Seja um jogo matricial com matriz mxn A de lucro para o segundo jogador. Seja H^s o convexificado do conjunto formado pelos vetores coluna de A - sE, onde E é a matriz mxn com todas as entradas iguais a 1. Para s positivo suficientemente grande, H^s tem interseção não vazia com $-\mathbb{R}^n$. Para s negativo suficientemente grande em módulo, temos que H^s tem interseção vazia com $-\mathbb{R}^n$. Por conseguinte, podemos afirmar, já que H^s e $-\mathbb{R}^n$ são convexos que existe s^* tal que H^{s^*} e $-\mathbb{R}^n$ só se tocam, isto é a sua interseção é não- vazia e consiste exclusivamente de pontos na fronteira de ambos os conjuntos. Mostre que s^* é o valor do jogo. Você é capaz de determinar as estratégias ótimas ?

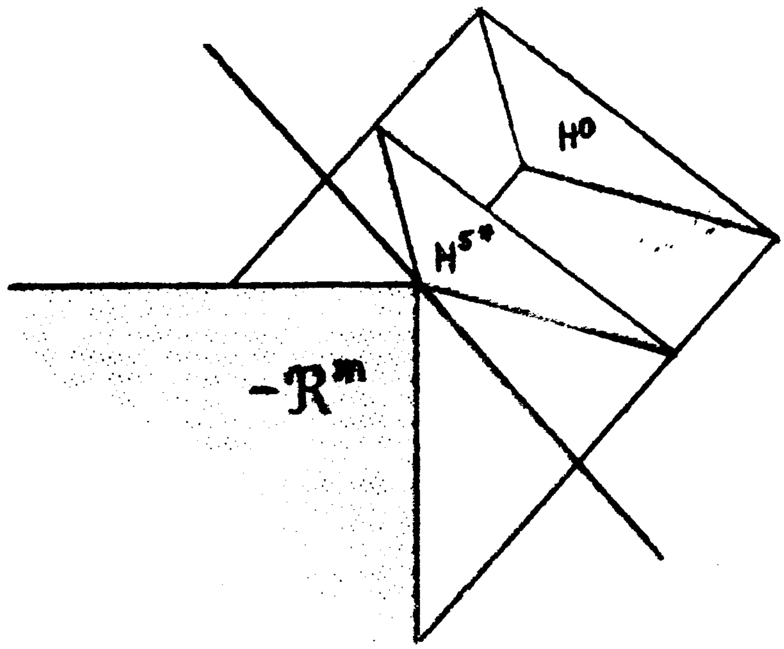


Figura 3

6) Dado um par de estratégias mistas $(x,y) \in S^{m-1} x S^{n-1}$ tal que $x_i > 0$ e $y_j > 0$ para todo par (i,j), será que voce é capaz de construir um jogo matricial que tenha essas estratégias como único ponto de equilíbrio. (Sugestão: Podemos supor que o valor do jogo é igual a 1. Assim, o problema é achar uma matriz A tal que $x'A = e'$ e $Ay = e$, onde e é um vetor com todas as coordenadas iguais a 1, pertencente a $\mathfrak{R}^m$ ou $\mathfrak{R}^n$ conforme o caso).

7) Suponha que num jogo de soma zero os dois jogadores possuem $i,j=1,2,3,...$ estratégias puras. Que a "matriz" de lucro seja dada por $a_{ij} = i-j$. E que uma estratégia mista seja uma seqüência de números $p_1, p_2, ...$ tais que $p_i \geq 0$ para todo i e $\Sigma_{i=1,\infty} p_i = 1$. Mostre que

$$max_y min_{x|y} \Sigma_{i,j=1,\infty} a_{ij} x_i y_j < min_x max_{y|} \Sigma_{i,j=1,\infty} a_{ij} x_i y_j.$$

8) Considere o jogo com matriz quadrada nxn $A = [a_{ij}]$, onde $a_{ij} = e^{-\beta(i-j)^2}$. Mostre que se $n \leq 4$, então para β grande este jogo possui uma única solução

O seguinte problema nos dá uma outra prova do teorema da seção 6

do capítulo 1.

9) (a) Seja A uma matriz mxn qualquer. Considere o valor $v(A)$ do jogo matricial em que A é a matriz de lucro do jogador 2 e este escolhe as colunas. Seja H o espaço vetorial das matrizes reais mxn, isto nos dá uma função $v: H \to \mathbb{R}$. É possível se definir uma distância em H se colocarmos $d(A,B) = \max_{i,j}|a_{ij}-b_{ij}|$. Prove que a função v é uma função contínua. (Sugestão: Tome uma sequência $A_k \to A$, e para cada k seja (x_k,y_k) um par de estratégias ótimas para o jogo com matriz A_k. Temos que $v(A_k) = x^t_k A_k y_k$. Tome uma subseqüência convergente $(x_{k'},y_{k'})$ com limite (x,y); então (x,y) é um par de estratégias ótimas para o jogo com matriz A. Por conseguinte, temos que $\lim_{k'\to\infty} v(A_{k'}) = \lim_{k'\to\infty} x^t_{k'} A_{k'} y_{k'} = x^t A y = v(A)$. A subseqüência k' é arbitrária e podemos então dizer que $\limsup v(A_k) = \liminf v(A_k) = v(A)$.)

(b) Tomemos o jogo com matriz $B-\alpha A$, onde $A > 0$ e $B \geq 0$. Temos que $v(B) \geq 0$ e que existe α_0 tal que $v(B-\alpha_0 A) < 0$, logo a função contínua definida por $g(\alpha) = v(B-\alpha A)$ tem pelo menos um zero α^* no intervalo $[0,\alpha_0]$. Mostre que se (x^*,y^*) é um equilíbrio do jogo com matriz $B-\alpha^* A$, então obtemos a solução do problema de Von Neumann.

10) (a) Mostre que para toda matriz simétrica nxn A existe $x \in S^{n-1}$ tal que $x^t A e_i = x^t A x$ para todo i tal que $x_i > 0$ (Sugestão: Use um argumento de ponto fixo). (b) Generalize a simetrização de Von Neumann, isto é, a matriz A da prova do teorema 3, para jogos bimatriciais. (c) Mostre que esses dois resultados implicam a existência de um equilíbrio em jogos bimatriciais.

11) Seja A uma matriz de lucro mxn. Suponha que $\min_i \Sigma_{j=1,n} a_{ij} y_j > 0$ e considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & A & -1 \\ -A^t & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostra que se $z^t = (x^t, y^t, r) \in S^{m+n+1}$ é tal que $Bz \leq 0$, então:

a) $\Sigma_{i=1,m} x_i = \Sigma_{j=1,n} y_j = \mu > 0$,
b) $r > 0$,
c) $(x^*, y^*) = (1/\mu)(x, y)$ é um equilíbrio do jogo com matriz A.

Bibliografia

Aubin, J. P. e A. Cellina, "*Differential Inclusions*", Springer- Verlag, New York.

Eaves, B. C. , "*Nonlinear Programming Via Kakutani Fixed Points*", Working paper # 294, Center for Research in Management Sciénce, University of California, Berkeley (1970).

Franklin, J., "*Methods of Mathematical Economics*", Springer- Verlag, New York.

Knaster, B., K. Kuratowski e S. Mazurkiewicz: "*Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*", Fundamenta Mathematica 14 (1929), 132- 137. (A demonstração do teorema de Brouwer dado nesse artigo pode ser encontrada em inglês no livro de Franklin citado acima, pag. 263).

McKenzie, L., "*On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems*", Econometrica 22 (1954), No. 2.

Todd, M., "*The Computation of Fixed Points and applications*", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems # 124 (1976), Springer Verlag, New York.

Uzawa, H., "*Walras's Existence Theorem and Brouwer's Fixed Point Theorem*", Economic Studies Quaterly 13, No.1.

Von Neumann, J., "*A Model of General Economic Equilibrium*", The Review of Economic Studies, vol 13, No. 1 (1945-46), pp. 1-9.

68. INFLAÇÃO E POLÍTICAS DE RENDAS - Fernando de Holanda Barbosa e Clovis de Faro - 1985 (esgotado)

69. BRAZIL INTERNATIONAL TRADE AND ECONOMIC GROWTH - Mario Henrique Simonsen - 1986

70. CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA: APLICAÇÕES - Clovis de Faro - 1986 (esgotado)

71. A RATIONAL EXPECTATIONS PARADOX - Mario Henrique Simonsen - 1986 (esgotado)

72. A BUSINESS CYCLE STUDY FOR THE U.S. FORM 1889 TO 1982 - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986

73. DINÂMICA MACROECONÔMICA - EXERCÍCIOS RESOLVIDOS E PROPOSTOS - Rubens Penha Cysne - 1986 (esgotado)

74. COMMON KNOWLEDGE AND GAME THEORY - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1986

75. HYPERSTABILITY OF NASH EQUILIBRIA - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986

76. THE BROWN-VON NEUMANN DIFFERENTIAL EQUATION FOR BIMATRIX GAMES - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986 (esgotado)

77. EXISTENCE OF A SOLUTION TO THE PRINCIPAL'S PROBLEM - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986

78. FILOSOFIA E POLÍTICA ECONÔMICA I: Variações sobre o Fenômeno, a Ciência e seus Cientistas - Antonio Maria da Silveira - 1986 (esgotado)

79. O PREÇO DA TERRA NO BRASIL: VERIFICAÇÃO DE ALGUMAS HIPÓTESES - Antonio Salazar Pessoa Brandão - 1986

80. MÉTODOS MATEMÁTICOS DE ESTATÍSTICA E ECONOMETRIA: Capítulos 1 e 2 Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986

81. BRAZILIAN INDEXING AND INERTIAL INFLATION: EVIDENCE FROM TIME-VARYING ESTIMATES OF AN INFLATION TRANSFER FUNCTION Fernando de Holanda Barbosa e Paul D. McNelis - 1986

82. CONSÓRCIO VERSUS CRÉDITO DIRETO EM UM REGIME DE MOEDA ESTÁVEL - Clovis de Faro - 1986

83. NOTAS DE AULAS DE TEORIA ECONÔMICA AVANÇADA I - Carlos Ivan Simonsen Leal-1986