Nº 295 **ISSN 0104-8910**

PROCESSUS STOCHASTIQUES EN FINANCE
(2ème partie)

Renato Flôres
Ariane Szafarz

Novembro de 1996

Nota Introdutória

Este documento é um texto didático destinado aos estudantes e pesquisadores em econometria e finanças. Baseia-se na experiencia dos autores em cursos de pós-graduação na ULB, Bruxelles e na FGV/EPGE, Rio. Não há a pretensão de rigor matemático, e nem a de cobrir todas as aplicações financeiras da teoria dos processos estocásticos. Esta segunda parte discute as medidas equivalentes de martingale e o resultado de Girsanov, a sua aplicação ao modelo de Black-Scholes e a questão da avaliação de um *call* europeu.

Os autores agradecem aos seus estudantes nos dois lados do Atlântico e a Patrick Bolton por sua leitura atenta e suas observações construtivas.

Avertissement

Ce document est un texte didactique destiné aux étudiants et aux chercheurs en économétrie et en finance. Il est basé sur l'expérience des auteurs en cours de troisième cycle à l'ULB, Bruxelles et à la FGV/EPGE, Rio. Il n'a ni la prétention d'une rigueur mathématique totale, ni l'objectif de couvrir toutes les applications financières de la théorie des processus stochastiques. Cette deuxième partie discute les mesures équivalentes de martingales, le théorème de Girsanov et son application au modèle de Black et Scholes, et l'evaluation d'un *call* européen sur une obligation.

Les auteurs remercient à leurs étudiants dans les deux côtés de l'Atlantique et à Patrick Bolton pour sa lecture attentive et ses remarques constructives.

Processus Stochastiques en Finance : 2ème partie

Renato Flôres et Ariane Szafarz
Septembre 1996

7. Martingales mesures équivalentes

Selon la présentation probabiliste classique, nous avons introduit d'entrée de jeu l'espace de probabilité (Ω, a, P) constituant le cadre formel de l'analyse des processus stochastiques. En réalité, cet espace comporte d'une part l'espace probabilisable (Ω, a) et d'autre part la fonction P qui définit une probabilité sur cet espace. On comprend dès lors qu'un même espace (Ω, a) peut servir de support à diverses probabilités.

A quoi cela peut-il servir en pratique de considérer diverses probabilités ? Avant de répondre à cette question, il est utile de rappeler qu'une probabilité n'est rien d'autre qu'une mesure. Un "changement de probabilité" s'apparente donc à un changement d'unité de mesure, un peu comme lorsqu'on passe des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit pour mesurer la température ou encore lorsqu'on mesure les longueurs en pieds et pouces plutôt qu'en centimètres et mètres. En théorie des probabilités, les objets mesurés sont les événements appartenant à a. Par ailleurs, la notion de variable aléatoire, en tant que telle, ne requiert pour point de départ que l'espace probabilisable (Ω, a). La probabilité elle-même n'intervient qu'au niveau de la distribution de la variable et permet de déterminer ses divers moments marginaux ou conditionnels. Un changement de probabilité astucieux pourrait donc nous permettre de fixer, pour une ou plusieurs variables données, des caractéristiques souhaitées. Autrement dit, les degrés de liberté offerts par la possibilité de changer l'instrument de mesure, nous permettent de cibler certaines propriétés "intéressantes" au niveau des applications financières.

La propriété "intéressante" retenue dans ce chapitre est celle de martingale. Au prix d'un changement de probabilité, nous souhaiterions transformer un processus stochastique donné en martingale par rapport à une filtration donnée[1]. Ce souhait ne

[1] En réalité, nous voulons transformer la probabilité et pas le processus. C'est un peu comme lorsque, d'un coup de baguette magique, la fée transforme Cendrillon en princesse : le personnage central (Cendrillon ou notre processus) ne se modifie pas tandis que l'environnement (la citrouille etc. ou la probabilité initiale) prennent une allure plus agréable (carrosse pour aller au bal ou probabilité nouvelle garantissant la propriéte de martingale).

semble a priori pas simple à réaliser puisqu'il s'agit ici d'imposer une propriété de l'espérance conditionnelle à toute une suite de variables aléatoires. S'il existe une fonction de probabilité comblant nos voeux, on l'appellera **mesure martingale équivalente** pour le processus considéré (et la fitration considérée). Avant d'énoncer le théorème de Girsanov fournissant des conditions suffisantes pour l'existence d'une mesure martingale équivalente, voici quelques définitions.

Soient P et Q deux probabilités définies sur l'espace (Ω, a). Elles sont appelées **probabilités équivalentes** si elles attribuent une probabilité nulle aux mêmes événements :

(7.1) $\forall A \in a \ : P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0.$

Si P et Q sont des probabilités équivalentes, alors il existe des variables aléatoires ξ et φ définies dans (Ω, a) telles que :

(7.2) $\forall$ variable aléatoire z telle que $E_Q[|z|] < \infty$: $E_Q[z] = E_P[\xi\ z]$ et

$\forall$ variable aléatoire z telle que $E_P[|z|] < \infty$: $E_P[z] = E_Q[\varphi\ z]$,

où $E_Q[.]$ et $E_P[.]$ désignent les espérances mathématiques selon, respectivement, les probabilités Q et P.

La propriété (7.2) donne la clé du changement de probabilité. En effet, elle permet d'exprimer l'espérance de toute variable aléatoire z calculée selon une nouvelle mesure Q en fonction de l'espérance "ancienne" (selon P) d'une variable transformée $\xi.z$. Pour cette raison, la variable ξ est appelée **dérivée de Radon-Nikodym** de Q par rapport à P et notée $\frac{dQ}{dP}$. Notons cependant que ces transformations ne sont légitimes que pour des mesures équivalentes c'est à dire en accord sur les ensembles de mesure nulle. Imaginons, à titre d'exemple, qu'on relève le prix des fruits dans une épicerie donnée. Ce prix peut être exprimé en francs ou en centimes. A priori, ces mesures sont équivalentes dès que le prix en francs est exprimé avec deux décimales. Toutefois, si on décide d'arrondir le prix en francs à l'entier le plus proche, les mesures ne sont plus équivalentes. En effet, une noix coûtant 35 centimes sera évaluée à 0 franc, et les ensembles (de fruits) de prix nul en francs seront plus nombreux que ceux de prix nul en centimes.

Les formules de passage (7.2) concernent l'espérance marginale d'une variable aléatoire. Or la définition de martingale fait intervenir des espérances conditionnelles. Il convient donc de rechercher une formule plus générale (l'espérance marginale étant une espérance conditionnelle par rapport à la σ-algèbre triviale[2]). La théorie fournit à cet égard la propriété suivante valable pour toute σ-algèbre I :

$$(7.3) \quad \forall\, z \text{ telle que } E_Q\big[|z|\big]<\infty : \quad E_Q\big[z|\, I\big] = \frac{1}{E_P\left[\frac{dQ}{dP}\Big|\, I\right]}\, E_P\left[\frac{dQ}{dP}\, z\Big|\, I\right].$$

Nous disposons ainsi de l'outil de base pour exprimer les espérances conditionnelles dans le nouvel espace de probabilité. Replaçons-nous alors dans un cadre dynamique où la suite des informations disponibles aux agents économiques est représentée par la filtration $\left\{\Im_t\right\}_{t\in T}$. Comme annoncé ci-dessus, l'objectif poursuivi réside en la transformation de la probabilité initiale P qui permette de rendre martingale un processus a priori quelconque $\left\{x_t\right\}_{t\in T}$ mais adapté[3] à la filtration donnée.

La probabilité Q donnant lieu à la propriété de martingale, si elle existe, sera appelée **mesure martingale équivalente pour le processus** $\left\{x_t\right\}_{t\in T}$ et devra être telle que :

$$(7.4) \quad \forall\, t > t' : \quad E_Q\big[x_t|\, \Im_{t'}\big] = \frac{1}{E_P\left[\frac{dQ}{dP}\Big|\, \Im_{t'}\right]}\, E_P\left[\frac{dQ}{dP}\, x_t\Big|\, \Im_{t'}\right] = x_{t'},$$

ce qui implique que la dérivée de Radon-Nikodym de Q par rapport à P vérifie :

$$(7.5) \quad \forall\, t > t' : \quad E_P\left[\frac{dQ}{dP}\, x_t\Big|\, \Im_{t'}\right] = x_{t'}\, E_P\left[\frac{dQ}{dP}\Big|\, \Im_{t'}\right].$$

---

[2] La σ-algèbre triviale est engendrée par les variables aléatoires constantes. Sous cette information dite "minimale", toute prévision rationnelle correspond à l'espérance marginale de la variable à prévoir. Autrement dit, la σ-algèbre triviale ne conduit qu'à une valeur constante pour prévision.

[3] Le fait d'être adapté ne dépend pas de la probabilité. Cette condition impose simplement que la variable aléatoire x_t est **mesurable** par rapport à $\Im_t$, c'est à dire que la connaissance de $\Im_t$ rend possible la détermination de la distribution de probabilité de cette variable, et ce quelque soit la probabilité considérée.

Au plan des applications à la finance, il est intéressant de disposer d'une interprétation de l'existence d'une mesure martingale équivalente (m.m.e.). Le résultat suivant donne un éclairage à ce niveau.

> ***Sous les hypothèses du modèle de Black et Scholes, s'il existe une m.m.e. pour tous les processus de prix actualisés, alors il y a absence d'opportunité d'arbitrage.***

Ce résultat, démontré dans Duffie (p.104), met en évidence l'importance des changements de mesure en théorie financière. On sait en effet que l'évaluation par absence d'opportunité d'arbitrage est extrêmement féconde, en particulier pour le pricing des actifs dérivés et celui des instruments sur taux d'intérêt.

Par ailleurs, ce résultat permet d'interpréter la nouvelle probabilité Q en termes de **"probabilité risque-neutre"**. Afin de justifier cette appelation, considérons un univers où tous les agents sont indifférents par rapport au risque (fonctions d'utilité linéaires). Dans ce cadre, on peut évaluer tout actif financier sur base de la valeur actuelle des flux futurs anticipés que sa détention engendre. Or, sous la probabilité Q, les prix actualisés des actifs sont des martingales, ce qui implique, par définition des martingales, que les prix présents (qui sont évidemment aussi des prix actualisés présents) sont égaux aux prix futurs actualisés anticipés. Pour tout actif (action, option, etc.) dont le processus de prix actualisé est noté $\{P_t\}$, on aura :

$$\forall t' > t : P_t = E_Q\left[P_{t'} \middle| \Im_t\right].$$

Notons que cette formule ne requiert **aucune hypothèse sur les fonctions d'utilité** (qui n'apparaissent d'ailleurs nulle part dans l'évaluation des actifs redondants). En fait la probabilité risque-neutre se comporte **comme si** on travaillait dans un monde indifférent au risque. Il s'agit donc d'une analogie technique qui facilite la compréhension de la méthode d'évaluation et rien de plus !

Le théorème de Girsanov, qui fournit les conditions analytiques d'existence et l'explicitation du changement de probabilité au niveau des processus de diffusions, se revèlera extrêmement utile. Après avoir énoncé ce théorème, nous tenterons d'en donner une interprétation intuitive et nous montrerons qu'il permet d'établir la formule de Black et Scholes d'une façon élégante et compacte, plus facile à généraliser que l'approche "pas à pas" présentée plus haut.

8. Le Théorème de Girsanov

Le théorème s'énonce comme suit :

Soit le processus d'Itô suivant, défini dans l'espace de probabilité (Ω, a, P), ***adapté à la filtration*** $\{\Im_t\}_{t\in[0,T]}$:

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t\,, \qquad t \in [0,T],$$

Si'il existe un processus $\{h_t\}_{t\in[0,T]}$ ***adapté à*** $\{\Im_t\}_{t\in[0,T]}$ ***tel que :***

(i) $E\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T h_t^2 dt}\right] < +\infty$ ***(condition de Novikov)***

(ii) $\int_0^T \upsilon_t\, dt < +\infty$ ***, où*** $\upsilon_t = \mu(t, X_t) - \sigma(t, X_t)\,h_t\,,$

Alors il existe une mesure de probabilité Q ***équivalente à*** P ***telle que :***

1) $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t h_s\, ds\,,\ \ t \in [0,T]$ ***, définit un mouvement brownien standard adapté à la filtration*** $\{\Im_t\}_{t\in[0,T]}$ ***dans l'espace de probabilité*** (Ω, a, Q) ***:***

2) $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ ***est un processus d'Itô dans*** (Ω, a, Q) ***et peut s'écrire :***

$$dX_t = \upsilon_t\, dt + \sigma(t, X_t)\, d\tilde{B}_t\,, \tag{8.1}$$

3) le changement de probabilité est donné par la variable aléatoire :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T h_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T h_s^2\, ds\right). \tag{8.2}$$

Le théorème de Girsanov fournit la transformation d'un processus d'Itô qui résulte d'un changement de mesure. En particulier, un choix judicieux du processus h permet (moyennant la condition de régularité de Novikov) de modifier le drift de manière à

rendre X martingale sous Q. Afin de mieux comprendre le contenu de ce théorème, nous nous proposons d'illustrer ci-dessous la construction d'une martingale par changement de probabilité à partir d'un processus de diffusion donné.

Afin de simplifier l'écriture, nous considérons des fonctions μ et σ constantes. Nous supposons donc que l'objet mathématique étudié est un processus de diffusion X défini dans (Ω, a, P) et adapté à la filtration $\{\Im_t\}_{t \in [0,T]}$:

$$dX_t = \mu \, dt + \sigma \, dB_t \,, \qquad t \in [0,T].$$

Pourquoi ce processus ne vérifie-t-il pas immédiatement la propriété de martingale ? Il est adapté à la filtration par hypothèse. Mais ce qui n'est pas en accord avec la définition de martingale provient des espérances conditionnelles du type :

$$E\left[X_t \middle| \Im_{t'}\right] = E\left[\mu \, t + \sigma \, B_t \middle| \Im_{t'}\right] = \mu \, t + \sigma \, B_{t'} \neq \mu \, t' + \sigma \, B_{t'} \qquad t' < t.$$

Pour avoir une martingale, on devrait obtenir t' au lieu de t dans le premier terme (c'est à dire μt) du membre de droite. On observe donc que le problème à traiter par le changement de probabilité se situe au niveau du drift du processus X. L'approche de Girsanov consiste en une transformation du processus de Wiener qui permette de réécrire X sans drift.

Nous savons par hypothèse que :

$$(8.3) \quad X_t = \sigma\left(B_t + \frac{\mu}{\sigma} t\right) = \sigma \, \tilde{B}_t \,,$$

où l'on définit $\tilde{B}_t = B_t + \frac{\mu}{\sigma} t$. S'il existe une nouvelle probabilité Q sous laquelle le processus $\{\tilde{B}_t\}$ est un processus de Wiener, alors le problème est résolu et X est une martingale dans (Ω, a, Q).

Il faut maintenant examiner plus précisément le processus $\{\tilde{B}_t\}$ et trouver, si possible, une probabilité sous laquelle il est un brownien standard. Par définition de $\{B_t\}$, nous avons sous P :

$$(8.4) \quad \tilde{B}_t - \tilde{B}_{t'} \approx N\left(\frac{\mu}{\sigma}(t - t'), (t - t')\right).$$

Or, grâce à (7.2), on peut aisément montrer qu'une variable aléatoire de distribution $N(a,b^2)$ sous P aura une distribution $N(0,b^2)$ sous la probabilité Q définie par la dérivée de Radon-Nikodym suivante :

$$(8.5)\ \frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\frac{a}{b}(X-a) - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\right) = \exp\left(-\frac{a}{b}X + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\right).$$

Dans notre cas, ceci suggère de prendre un changement de mesure du même type avec, dans l'exposant, une expression du type :

$$-\frac{\mu}{\sigma}\left(\tilde{B}_t - \tilde{B}_{t'}\right) + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(t-t') = -\frac{\mu}{\sigma}\left(B_t - B_{t'}\right) - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(t-t').$$

Evidemment, les choses sont un peu plus compliquées ici parce qu'on désire obtenir UNE SEULE probabilité Q pour tout le processus alors que l'expression ci-dessus dépend de t et t' (bien que la distribution reste invariante pour t-t' fixé). En réalité, on obtiendra cette probabilité en remplaçant t et t' par les valeurs extrêmes respectives de T et 0 :

$$(8.6)\ \frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}T\right).$$

Il reste alors à vérifier qu'il s'agit d'un bon choix et que $\left\{\tilde{B}_t\right\}$ est effectivement un processus de Wiener sous Q. Grâce à (7.3) nous pouvons calculer les espérances conditionnelles sous Q :

$$(8.7)\ E_Q\left[\tilde{B}_t|\Im_{t'}\right] = \frac{E_P\left[\tilde{B}_t \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}T\right)|\Im_{t'}\right]}{E_P\left[\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}T\right)|\Im_{t'}\right]}.$$

Comme $\left\{B_t\right\}$ est un processus de Wiener sous P et $t' < T$, le dénominateur se réduit à (voir 1ère partie p.6) :

$$E_P\left[\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}B_T-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}T\right)\middle|\Im_{t'}\right]=\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}B_{t'}-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}t'\right)$$

et on a (justifier, à titre d'exercice, chacune des transformations) :

$$E_Q\left[\tilde{B}_t|\Im_{t'}\right]=E_P\left[\tilde{B}_t\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}(B_T-B_{t'})-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(T-t')\right)\middle|\Im_{t'}\right]$$

$$=E_P\left[\left(\tilde{B}_t-\tilde{B}_{t'}+\tilde{B}_{t'}\right)\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}(B_T-B_{t'})-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(T-t')\right)\middle|\Im_{t'}\right]$$

$$=E_P\left[\left(\tilde{B}_t-\tilde{B}_{t'}\right)\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}(B_T-B_{t'})-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(T-t')\right)\middle|\Im_{t'}\right]$$
$$+E_P\left[\tilde{B}_{t'}\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}(B_T-B_{t'})-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(T-t')\right)\middle|\Im_{t'}\right]$$

$$=E_P\left[\left(\tilde{B}_t-\tilde{B}_{t'}\right)\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}(B_T-B_{t'})-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(T-t')\right)\right]$$
$$+\tilde{B}_{t'}\quad E_P\left[\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}(B_T-B_{t'})-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(T-t')\right)\middle|\Im_{t'}\right]$$

$$=E_P\left[\left(\tilde{B}_t-\tilde{B}_{t'}\right)\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}((B_T-B_t)+(B_t-B_{t'}))-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}((T-t)+(t-t'))\right)\right]$$
$$+\tilde{B}_{t'}\quad\exp\left(\frac{\mu}{\sigma}B_{t'}+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}t'\right)\ E_P\left[\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}B_T-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}T\right)\middle|\Im_{t'}\right]$$

$$=E_P\left[\left(\tilde{B}_t-\tilde{B}_{t'}\right)\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}(B_t-B_{t'})-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(t-t')\right)\right]$$
$$.\,E_P\left[\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}(B_T-B_t)-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(T-t)\right)\right]$$
$$+\tilde{B}_{t'}\quad\exp\left(\frac{\mu}{\sigma}B_{t'}+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}t'\right)\ \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}B_{t'}-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}t'\right)$$

$$= 0.\, E_P\left[\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}(B_T - B_t) - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(T-t)\right)\right] + \tilde{B}_{t'}.1$$

$$= \tilde{B}_{t'}.$$

Dans ce cas particulier, on observe que le changement de probabilité explicité par (8.6) correspond au cas où le processus h du théorème de Girsanov est simplement :

$$(8.8)\quad h_t = \frac{\mu}{\sigma} \quad \forall\, t.$$

Plus généralement, l'énoncé du thèorème de Girsanov a pour conséquence immédiate que le processus h satisfaisant la condition $\upsilon_t \equiv 0$ (pas de drift sous la probabilité Q) est donné par :

$$(8.9)\quad h_t = \frac{\mu(t, X_t)}{\sigma(t, X_t)} \quad \forall\, t.$$

Ce choix conduit alors (toujours selon le théorème de Girsanov) à écrire le brownien standard sous Q comme :

$$(8.10)\quad \tilde{B}_t = B_t + \int_0^t h_s\, ds = B_t + \int_0^t \frac{\mu(s, X_s)}{\sigma(s, X_s)}\, ds$$

et le processus étudié sera représenté par :

$$(8.11)\quad dX_t = \sigma(t, X_t)\, d\tilde{B}_t$$

Ces expressions seront utiles dans la section suivante consacrée à une nouvelle dérivation de la formule de Black et Scholes résultant de l'application d'un changement de probabilité.

9. La formule de Black et Scholes revisitée

Dans la section 5, nous avons exposé la logique de l'évaluation par absence d'opportunité d'arbitrage d'un call européen dont le sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique et ne distribue pas de dividende avant l'échéance du call. Dans la section 7, nous avons énoncé un résultat important selon lequel une condition suffisante pour qu'il y ait absence d'opportunité d'arbitrage réside en l'existence d'une mesure martingale équivalente (m.m.e.) pour les processus de prix actualisés. Rappelons que cette condition signifie qu'il existe une probabilité dite risque-neutre Q sous laquelle ces processus sont des martingales. Enfin, le théorème de Girsanov, présenté dans la section 8, fournit l'explicitation du changement de probabilité.

Il ne reste donc plus qu'à combiner ces divers éléments pour obtenir l'évaluation du call européen par changement de probabilité.

Les dynamiques supposées (voir section 5) pour l'actif sans risque et le sous-jacent de l'option sont respectivement données par (5.1) et (5.3) :

(9.1) $d\beta_t = r\,\beta_t\,dt$

(9.2) $\dfrac{dS_t}{S_t} = \mu\,dt + \sigma\,dB_t, \qquad \text{où } \mu = \alpha + \dfrac{\sigma^2}{2}.$

La procédure suivie consiste à trouver le changement de probabilité en utilisant le processus de prix du sous-jacent, puis, connaissant la probabilité risque-neutre Q, on applique la propriété de martingale pour déterminer le prix de l'option en fonction de la condition terminale donnée.

Le processus de prix actualisé du sous-jacent que nous notons $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$ est défini par :

(9.3) $Z_t = \dfrac{S_t}{\beta_t}.$

Appliquons le lemme d'Itô à la fonction $f(x,t) = \dfrac{x}{\beta_t}$ (où β_t est une fonction déterministe de t dont la dérivée est $\beta_t^{'} = r\ \beta_t$). Comme :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\beta_t}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial t}=\frac{-x}{\beta_t^2}\beta_t'=\frac{-r\,x}{\beta_t}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,$$

le processus de diffusion représentant la dynamique de $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$ satisfait l'équation suivante :

$$dZ_t=\left[\frac{1}{\beta_t}\mu-\frac{r\,S_t}{\beta_t}\right]dt+\frac{1}{\beta_t}\sigma\,dB_t\ ,$$

ou encore :

$$(9.4)\quad dZ_t=\left[\frac{1}{\beta_t}\mu-r\,Z_t\right]dt+\frac{1}{\beta_t}\sigma\,dB_t.$$

Supposons que la condition (suffisante pour l'absence d'opportunité d'arbitrage) d'existence d'une m.m.e. pour les prix actualisés soit vérifiée. Sous la nouvelle probabilité Q, définie par la fonction :

$$(9.5)\quad h_t=\frac{\frac{1}{\beta_t}\mu-r\,Z_t}{\frac{1}{\beta_t}\sigma}=\frac{\mu-r\,\beta_t\,Z_t}{\sigma}=\frac{\mu-r\,S_t}{\sigma},$$

on aura :

$$(9.6)\quad dZ_t=\frac{1}{\beta_t}\sigma\,d\tilde{B}_t.$$

Considérons à présent le call européen de prix d'exercice K en T. Par définition:

$$(9.7)\quad C_T=\max(S_T-K,0).$$

Sachant que le processus $\left\{\frac{C_t}{\beta_t}\right\}_{t\in[0,T]}$ est un martingale sous Q, on peut écrire :

$$(9.8)\quad \frac{C_t}{\beta_t}=E_Q\left[\frac{C_T}{\beta_T}|\Im_t\right]=E_Q\left[\frac{\max(S_T-K,0)}{\beta_T}|\Im_t\right]=\frac{1}{\beta_T}E_Q\left[\max(S_T-K,0)|\Im_t\right]$$

et finalement :

$$(9.9)\quad C_t = \frac{\beta_t}{\beta_T} E_Q\left[\max(S_T - K,0)|\Im_t\right] = e^{-r(T-t)} E_Q\left[\max(S_T - K,0)|\Im_t\right].$$

Pour retrouver la formule de Black et Scholes "classique" (5.15) à partir de (9.9), plusieurs étapes sont encore nécessaires. Bien que Duffie (p.106) laisse aimablement ce calcul à ses lecteurs, indiquons qu'il faut :

(i) écrire la dynamique du processus $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ suivi par le prix du sous-jacent sous la probabilité Q, en utilisant le lemme d'Itô pour $S_t = \beta_t\ Z_t$ puisque la dynamique de $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$ sous Q est connue et donnée par (9.6) . On obtient de la sorte :

$$(9.10)\quad dS_t = r\ S_t\ dt + \sigma\ S_t\ d\tilde{B}_t$$

(ii) en déduire, par intégration, l'expression de la variable aléatoire S_T sous Q :

$$(9.11)\quad S_T = S_t\ \exp\{r(T-t)\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 r + \sigma\left[\tilde{B}_T - \tilde{B}_t\right]\right\}\ ,$$

(iii) reformuler (9.9) compte tenu de (9.11) :

$$\begin{aligned} C_t &= E_Q\left[\max\left(e^{-r(T-t)} S_T - e^{-r(T-t)} K,0\right)|\Im_t\right] \\ &= E_Q\left[\max\left(S_t\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 r + \sigma\left[\tilde{B}_T - \tilde{B}_t\right]\right\} - K\ \exp[-r(T-t)],0\right)|\Im_t\right] \end{aligned}$$

(iv) faire explicitement le calcul de cette espérance par changement de probabilité, sachant que l'espérance d'un maximum se calcule par :

$$E[\max(X,0)] = E\left[X\ 1_{[X>0]}\right],$$

où 1_A désigne la variable indicatrice de l'événement A.

Cette dernière étape est la plus longue et la plus délicate (voir Demange et Rochet p.222).

10. Evaluation d'un call européen sur une obligation

10.1. Présentation du problème

Supposons, pour simplifier, qu'on veuille évaluer un call dont le sous-jacent est une obligation zéro-coupon. La première idée repose naturellement sur l'application de la formule de Black et Scholes. Bien entendu, cette méthode ne sera valide que si les hypothèses formulées initialement pour les options sur actions restent réalistes dans le cas des obligations. Autrement dit, peut-on raisonnablement supposer d'une part que le prix d'un zéro-coupon suit un mouvement brownien géométrique et d'autre part que le taux sans risque est déterministe et constant ?

La réponse est négative pour deux raisons :

1) Par nature, l'obligation est un titre à revenu fixe et la seule source d'incertitude affectant son prix provient précisément du fait que les taux d'intérêt évoluent de façon aléatoire. Dès lors intrinsèquement, les hypothèses de taux d'intérêt déterministe et de prix du zéro-coupon aléatoire sont antinomiques. Il s'ensuit que la formule de Black et Scholes qui repose sur une actualisation à taux constant est inadéquate pour évaluer les options sur obligation (ou tout autre dérivé sur taux d'intérêt).

2) Dans un mouvement brownien géométrique, la volatilité conditionnelle du prix du sous-jacent est croissante dans le temps[4]. Cette hypothèse adéquate pour les actions (dont les prix futurs sont d'autant plus incertains que l'on s'éloigne du présent) ne se justifie pas dans le cas d'un titre à durée de vie finie et à valeur finale fixe comme une obligation. En fait, dans ce cas, le niveau d'incertitude sur les valeurs futures commence par croître pour ensuite diminuer au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'échéance où la valeur de remboursement est connue.

On peut retorquer à ces arguments de fond que, en première approximation du moins, la formule de Black et Scholes reste valide[5] pour autant que la durée de vie de l'option soit courte par rapport à celle de son obligation sous-jacente. Il ne faut néanmoins pas

---

[4] On peut montrer que le prix en t' (> t) conditionnellement à l'information en t admet une distribution log-normale de variance $\sigma^2(t'-t)$.

[5] La littérature financière documente amplement la remarquable robustesse de la formule de Black et Scholes dans divers domaines.

oublier que, même dans ce cas favorable, on utilise un modèle d'évaluation dont la logique est intenable. En outre, pour des options de vie plus longue, la formule de Black et Scholes ne peut plus du tout se justifier et l'on se condamne à adopter une démarche incorporant explicitement la nature stochastique des taux d'intérêt.

Pour les raisons exposées ci-dessus, nous nous tournons à présent vers l'approche basée sur la modélisation directe des taux d'intérêt. Avant de formaliser précisément cette approche, remarquons que les dérivés sur taux d'intérêt seront plus difficiles à valoriser que ceux dont le sous-jacent est une action. En effet, le prix d'une action est par nature un processus univarié tandis qu'à tout instant coexistent un grand nombre de taux d'intérêt, en fonction de l'horizon considéré pour les transactions de prêt ou d'emprunt.

Tous les taux que nous utiliserons ici sont à considérer en temps continu (et donc en capitalisation continue) et formulés sur une base annuelle. Par exemple si l'on a un taux à 3 mois de 5%, cela signifie qu'un placement d'1 F pendant un an à ce taux en capitalisation continue génèrera $e^{0.05}$ F = 1.0513 F. Si, au contraire le taux est exprimé sur base d'une capitalisation discrète, il faudra d'abord le convertir en continu. Ainsi, si le taux à 3 mois est de 5% en capitalisation trimestrielle, on obtient, au bout d'un an : $\left(1+\frac{0.05}{4}\right)^4 = 1.0509$ F et le taux à 3 mois en capitalisation continue correspondant est déterminé par $e^R = 1.0509 \Rightarrow R = \ln(1.0509) = 4.97\%$. C'est ce dernier taux que nous retiendrons alors pour la suite.

Une modélisation complète des taux d'intérêt doit inclure la dynamique de **toute la structure temporelle des taux**. En effet, il n'y a aucune raison de postuler que les taux applicables à divers horizons sont égaux ("structure plate"). En réalité, on observe que, le plus souvent, la structure est croissante (taux longs plus élevés que les taux courts). Il existe d'ailleurs certaines théories visant à expliquer ce phénomène (notamment la théorie basée sur la préférence pour la liquidité). Toutefois, si l'on veut conserver un niveau suffisant de généralité, il est plus souhaitable de ne pas fixer a priori des contraintes extérieures aux taux eux-mêmes. Nous désignerons par $R(t,T)$ le taux d'intérêt au comptant appliqué en t aux opérations de durée T. En particulier, on appellera **taux court en t** le taux défini par :

(10.1) $r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} R(t, \Delta t)$.

La modélisation de l'évolution des taux d'intérêt repose sur l'hypothèse de dynamique du taux court suivante :

(10.2) $dr(t) = m(r,t)\,dt + s(r,t)\,dB_t.$

et sur le postulat que tous les taux comptants en t sont fonctions (déterministes mais a priori quelconques) du taux court :

(10.3) $R(t,T) = f\ (t,T,r(t)).$

Tout comme le taux court, chacun des R(t,T) est représenté par une variable aléatoire. Toutefois, comme ce modèle ne comporte, comme source d'incertitude qu'un seul processus de Wiener, il est dit **"à un facteur"**.

Dans la suite, nous présenterons certains cas particuliers de la formule générale (10.2) qui ont retenu l'attention des auteurs. Nous expliquerons ensuite comment, sur base d'un de ces modèles, on déduit l'évaluation des zéro-coupons d'abord, des options sur zéro-coupons ensuite.

10.2. Les modèles d'évolution du taux court

La formule (10.2) exprime que le taux court r suit un processus de diffusion. Comparée à l'hypothèse de mouvement brownien géométrique de Black et Scholes, elle offre un niveau de généralité largement supérieur puisqu'aucune forme précise n'est imposée aux fonctions m et s. Dans les applications pratiques, on sera souvent amené à postuler une forme paramétrisée par un petit nombre de coefficients. Une première classe de modèles est bâtie sur l'hypothèse que m et s ne dépendent pas explicitement de t :

(10.4) $\begin{cases} m(r,t) = m(r) \\ s(r,t) = s(r) \end{cases}.$

Dans cette classe, le modèle le plus simple qui postule des fonctions constantes $\begin{cases} m(r) = \alpha \\ s(r) = \sigma \end{cases}$ a été proposé par Merton (1973) :

(10.5) $dr = \alpha\,dt + \sigma\,dB.$

Certains modèles ultérieurs remplacent le drift constant par une fonction traduisant une tendance de retour à la moyenne :

$$m(r) = a(b - r), \quad a > 0, b > 0.$$

Cette expression traduit l'existence d'une force de rappel d'intensité a vers le niveau b. Elle a été retenue par Vasicek (1977) qui propose la dynamique suivante :

(10.6) $dr = a(b - r)\,dt + \sigma\,dB,$

et par Cox, Ingersöll et Ross (1985) qui, dans le cadre d'un modèle d'équilibre général, suggèrent :

(10.7) $dr = a(b - r)\,dt + \sigma\sqrt{r}\,dB,$

où le choix de la fonction $s(r) = \sigma\sqrt{r}$ dans le terme de volatilité traduit la contrainte de positivité du taux d'intérêt (lorsque r est positif et proche de zéro, il ne bouge presque plus).

Signalons encore, parmi les très nombreux modèles considérés dans la littérature, ceux de :

- Rendleman et Bartter (1980) : $dr = \alpha\, r\, dt + \sigma\, r\, dB$ (brownien géométrique) ;

- Dothan (1978) : $dr = \sigma\, r\, dB$ (drift nul) ;

- Brennan et Schwartz (1979) : $dr = a(b - r)\,dt + \sigma\, r\, dB$

- Cox et Ross (1975) : $dr = \alpha\, r\, dt + \sigma\, r^{\gamma}\, dB$

On peut regrouper tous ces modèles sous la formulation suivante à 4 paramètres :

(10.9) $dr = (\alpha + \beta r) + \sigma\, r^{\gamma}\, dB.$

Partant de ce constat, Chan, Karolyi, Longstaff et Sanders (1992), ont élaboré une procédure empirique, basée sur l'estimation par la méthode des moments généralisés d'une version discrétisée de (10.6), qui permet, pour le taux court en dollars US

d'obtenir des valeurs estimées des 4 paramètres. Sans entrer dans les détails (ni dans l'analyse de la méthode d'estimation !), signalons que l'estimation non contrainte leur fournit les valeurs suivantes :

$$\hat{\alpha} = 0.04 \,;\, \hat{\beta} = -0.59 \,;\, \hat{\sigma}^2 = 1.67 \,;\, \hat{\gamma} = 1.5$$

Des deux premières valeurs, on déduit un taux "de rappel" estimé à $\hat{b} = -\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = 6.8\%$.

Tous les modèles de la classe décrite par (10.6) concernent exclusivement le taux court. Comme on le verra dans la section suivante, ils conduisent à l'explicitation des autres taux sur base de l'hypothèse (10.3). Cependant, du fait même de leur écriture à l'aide d'un petit nombre de paramètres, ils ne peuvent pas reproduire fidèlement la structure par termes observée. Autrement dit, ces modèles sont "trop simples" par rapport au nombre de degrés de liberté qu'offre potentiellement l'observation, à toute date, des taux au comptant à divers horizons[6].

Pour faire face à cette objection, une nouvelle génération de modèles, appelés **"no-arbitrage models"**, a été suggérée[7]. Ces modèles comportent, au niveau du drift, une fonction de t qui sera déterminée de manière à reproduire exactement la structure par termes des taux à la date initiale. Dans cette catégorie, le modèle le plus simple est celui de Ho et Lee (1986) qui, outre l'ajustement de la structure des taux, n'inclut qu'un paramètre de volatilité :

(10.10) $dr = \theta(t)\, dt + \sigma\, dB.$

Parmi les extensions possibles, citons celle de Hull et White (1990) qui se caractérise par l'adjonction d'un "retour à la moyenne" :

(10.11) $dr = \left[\theta(t) - a\, r\right] dt + \sigma\, dB.$

---

[6] En réalité, les taux ne sont pas tous observables directement puisque les taux d'intérêt ne sont pas négociés tels quels. Seuls les zéro-coupons (provenant notamment des "strips" ou obligations démembrées) permettent d'obtenir directement un taux unique. Pour le reste, il convient d'extraire l'information du prix des obligations à coupons qui, du fait de versements à diverses dates, dépend de taux d'horizons distincts.

[7] L'appelation de "no-arbitrage models" provient du fait que ces modèles sont bâtis sur base de l'absence d'arbitrage entre les taux au comptant et les taux à terme implicites dans la structure des taux.

On remarque que cette seconde classe de modèles conserve une dynamique à un seul facteur. La littérature financière propose aussi des modèles à plusieurs (souvent deux) facteurs que nous ne présenterons pas ici. Retenons à ce stade que les taux d'intérêt, variables économiques cruciales s'il en est, ont une dynamique à ce point mystérieuse (du moins sur laquelle aucun consensus n'est manifestement atteint) que la première question qu'on se pose avant d'aborder l'évaluation d'options sur obligations est "Quel modèle choisir ?".

Sans fournir de réponse à cette question, nous aborderons le problème d'évaluation sur base du modèle simple de Vasicek (1977) qui a eu un impact considérable en ce domaine. Globalement la logique de l'évaluation par absence d'arbitrage reste similaire quelque soit le modèle retenu. Toutefois les difficultés techniques deviennent rapidemment insurmontables de sorte qu'une approche numérique est souvent indispensable. A cet égard, la simplicité du modèle de Vasicek permet, à l'instar du modèle de Black et Scholes pour les actions, de conserver des expressions analytiques. C'est la raison principale pour laquelle nous suivons cette approche ici.

10.3. Evaluation des zéro-coupons et des options selon le modèle de Vasicek (1977)

Le modèle de Vasicek repose sur la dynamique du taux court suivante :

(10.12) $dr = a(b - r)\,dt + \sigma\,dB,$

Les processus de ce type portent le nom de **"processus d'Ornstein-Uhlenbeck"**. A partir de cette équation il faut à présent déterminer les taux à horizons finis, les prix des zéro-coupons et ensuite le prix des options sur zéro-coupons. Comme dans le cas du modèle de Black et Scholes, on procède par principe d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Deux approches sont possibles : la manière "old-fashioned", suivie par Vasicek, qui établit pas-à-pas les divers éléments requis et la démarche rapide par changement de probabilité. La seconde approche a le mérite de l'efficacité. C'est pourquoi elle est unanimement suivie dans les articles scientifiques récents. Néanmoins, sur le plan

didactique, elle nous semble moins adéquate en première analyse parce qu'elle obscurcit la logique intrinsèque de l'évaluation de par la "brutalité" de l'écriture sous la probabilité risque-neutre ou corrigée du risque.

Nous adoptons les notations suivantes :

- $R(t, T)$: taux comptant en t pour les placements et emprunts de durée T ;

- $r(t) = \lim_{T \to 0} R(t,T)$: taux court en t ;

- $P(t, s)$: prix en t d'un zéro-coupon valant 1 F en s ;

- $W(t)$: prix en t d'un actif constamment placé au taux r (valeur initiale W_0) ;

Remarquons que, dans l'expression de R, le second argument est une durée tandis que, dans celle de P, le second argument est une date. Par définition, on a:

(10.13) $P(t,t) = 1$ et $P(t,t+T) = e^{-R(t,T)T}$,

(10.14) $R(t,T) = \frac{-1}{T} \ln[P(t,t+T)]$,

(10.15) $dW = W\, r(t)\, dt$.

a) Evaluation des zéro-coupons

La logique de l'évaluation des zéro-coupons est semblable à celle des options sur actions. En effet, au niveau technique, tout se passe comme si un zéro-coupon était un actif dérivé sur le taux court. Toutefois, pour pouvoir appliquer cette approche, il faut commencer par supposer, d'une part, qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage et, d'autre part, que les prix des zéro-coupons peuvent s'exprimer comme fonctions du taux court :

(10.16) $P(t,s) = P(t,s,r)$,

ce qui permet d'utiliser le lemme d'Ito (pour s fixé). Connaissant la dynamique (10.12) du taux court, on obtient de la sorte (en choisissant des notations facilitant les écritures ultérieures) :

(10.16) $dP = P\,\mu\,dt - P\,\gamma\,dB,$

où les fonctions $\mu = \mu(t,s,r)$ et $\gamma = \gamma(t,s,r)$ sont telles que :

$$\mu\,P = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r}\,a(b-r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\,\sigma^2$$
$$-\gamma\,P = \frac{\partial P}{\partial r}\,\sigma\ ,$$

ce qui conduit à :

(10.17) $$\mu = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial t} + a(b-r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]$$

et :

(10.18) $$\gamma = -\frac{\sigma}{P}\frac{\partial P}{\partial r}\ .$$

L'absence d'opportunité d'arbitrage ne peut pas être immédiatement utilisée pour un portefeuille combinant taux court et zéro-coupon (approche "à la Black et Scholes") pour la simple raison que le taux court, contrairement à une action, n'est pas négocié comme tel sur les marchés financiers. On doit donc avoir recours à une démarche plus générale[8] faisant appel à deux zéro-coupons de maturités distinctes s_1 et s_2 (où $s_1 < s_2$).

Considérons une stratégie autofinancée (a_t, b_t) représentant la composition d'un portefeuille en ces deux zéro-coupons, telle que, en s_1, elle fournisse le même résultat qu'un placement au taux r :

(10.19) $W(s_1) = a_{s_1}P(s_1,s_1) + b_{s_1}P(s_1,s_2) = a_{s_1} + b_{s_1}P(s_1,s_2)$

[8] Cette approche est suivie lorsqu'on désire évaluer des dérivés sur des sous-jacents (ou sources d'incertitudes) non traités sur les marchés (le climat par exemple). Notons cependant qu'il n'y aura redondance, et donc possibilité de faire appel à un argument d'arbitrage, que lorsque le nombre de dérivés excède le nombre de sources d'incertitude. C'est bien le cas ici où l'unique incertitude provient du processus de Wiener figurant dans la dynamique du taux court tandis que des zéro-coupons sont disponibles pour de nombreuses échéances.

A toute date t antérieure à s_1, on doit donc avoir :

$$W(t) = a_t\ P(t,s_1) + b_t\ P(t,s_2),$$

ou en notation simplifiée :

(10.20) $W = a_t\ P_1 + b_t\ P_2$

et, en conséquence :

(10.21) $dW = W\ r\ dt = a_t\ dP_1 + b_t\ dP_2.$

Comme le lemme d'Itô conduisant aux expressions (10.16) à (10.18) a été appliqué ci-dessus pour s fixé, il nous faut à présent reformuler les résultats relatifs aux deux zéro-coupons considérés. Avec des notations évidentes, on obtient grâce à (10.16) :

(10.22) $W\ r\ dt = \left(a_t\ P_1\ \mu_1 + b_t\ P_2\ \mu_2\right) dt - \left(a_t\ P_1\ \gamma_1 + b_t\ P_2\ \gamma_2\right) dB,$

et, en vertu de (10.20) :

(10.23) $\left(a_t\ P_1 + b_t\ P_2\right) r\ dt = \left(a_t\ P_1\ \mu_1 + b_t\ P_2\ \mu_2\right) dt - \left(a_t\ P_1\ \gamma_1 + b_t\ P_2\ \gamma_2\right) dB$

En identifiant membre à membre, on déduit que :

$$\left(a_t\ P_1 + b_t\ P_2\right) r = a_t\ P_1\ \mu_1 + b_t\ P_2\ \mu_2$$

$$a_t\ P_1\ \gamma_1 + b_t\ P_2\ \gamma_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_t = -a_t\ \frac{P_1\ \gamma_1}{P_2\ \gamma_2}$$

et, en conséquence :

$$\left(\gamma_2 - \gamma_1\right) r = \gamma_2\ \mu_1 - \gamma_1\ \mu_2,$$

ou encore :

(10.24) $\dfrac{\mu_1 - r}{\gamma_1} = \dfrac{\mu_2 - r}{\gamma_2}.$

La "prime de taux attendu par unité de risque" pour les zéro-coupons apparaît identique pour toutes les maturités (le raisonnement tenu pour s_1 et s_2 est aisément transposable à tout s, ce qui justifie que dorénavant nous omettrons l'indice correspondant). Dès lors, la quantité définie par :

$$(10.25)\quad q(t,r) = \frac{\mu - r}{\gamma},$$

est appelée **"prix de marché du risque sur les zéro-coupons"** et souvent supposée constante[9] : q(r,t) = q. Nous adopterons ici cette hypothèse.

Enfin, sachant que :

$$(10.26)\quad \mu = r + q\,\gamma,$$

on obtient, par (10.17) et (10.18), l'équation différentielle vérifiée par le prix d'un zéro-coupon de maturité s :

$$\frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial t} + a(b-r)\,\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right] = r - q\,\frac{\sigma}{P}\,\frac{\partial P}{\partial r}$$

ou :

$$(10.27)\quad \frac{\partial P}{\partial t} + \left[a(b-r) + q\,\sigma\right]\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = r\,P,$$

qui doit être résolue sous la condition finale :

$$(10.28)\quad P(s,s,r) = 1.$$

En réalité, le raisonnement suivi jusqu'ici ne dépend pas vraiment de l'hypothèse spécifique relative à la dynamique du taux court. Il suffit de supposer une diffusion quelconque pour être en mesure de dériver une équation du type (10.27). La forme particulière (10.12), dite de Vasicek, a simplement le mérite de rendre possible la résolution analytique qui conduit à :

---

[9] Cette hypothèse, présentée comme "technique" ou "simplificatrice" ne semble pas avoir de réel fondement théorique.

$$(10.29)\quad P(t,s,r)=\exp\left[\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(s-t)}\right)(R(\infty)-r)-(s-t)\,R(\infty)-\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(s-t)}\right)^2\right],$$

où :

$$(10.30)\quad R(\infty)=b+\frac{\sigma\,q}{a}-\frac{\sigma^2}{2\,a^2}\,.$$

Partant de cette évaluation des zéro-coupons, on peut directement établir, grâce à (10.14), l'expression des taux d'intérêt pour toutes les échéances. Ainsi, le taux en vigueur à la date t pour les opérations de durée T est donné par :

$$(10.31)\quad \begin{aligned} R(t,T,r) &= \frac{-1}{T}\ln P(t,t+T,r) \\ &= R(\infty)+\frac{1}{a\,T}\left(1-e^{-aT}\right)(r-R(\infty))+\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-aT}\right)^2 \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$(10.32)\quad \forall t:\ \lim_{T\to\infty} R(t,T,r)=R(\infty),$$

et justifie a posteriori la notation adoptée en (10.30).

Il s'ensuit que, dans le modèle de Vasicek, le taux long limite représenté par (10.32) est identique à toute date et indépendant du taux court présent. Toutefois, on peut montrer simplement, en étudiant la fonction R(.,T,.), (voir Hull (1993) p.391 par exemple) que la formulation (10.31) est suffisamment générale pour permettre une structure par termes des taux qui soit croissante, décroissante ou même mixte.

b) Evaluation d'un call européen sur zéro-coupon

L'évaluation d'un call européen (de prix d'exercice K et de date d'exercice T) dont le sous-jacent est un zéro-coupon (de maturité s > T) a été développée par Jamshidian (1989) sous l'hypothèse du modèle de Vasicek. C'est donc la suite logique de l'évaluation des zéro-coupons présentée ci-dessus.

Le raisonnement suivi s'inspire de celui de Black et Scholes (Jamshidian utilise la technique d'évaluation "risque-neutre"). Elle diffère néanmoins de celle-ci par l'absence évidente de l'hypothèse d'un taux sans risque constant. Notons aussi que le prix du zéro-coupon sous-jacent suit un processus de diffusion du type (voir (10.16)) :

$$(10.33) \quad \frac{dP}{P} = \mu \, dt + \gamma \, dB \, ,$$

où μ et γ ne sont pas des constantes (voir (10.17) et (10.18)).

Malgré ces complications, l'hypothèse de Vasicek rend possible une résolution exacte. Le prix du call à la date t s'exprime comme :

$$(10.34) \quad C_t = C(r, t \, ; K, T, s, a, b, \sigma) \, ,$$

et est donné par une formule du type :

$$(10.35) \quad C_t = P(t,s,r) \, \Phi(h) - K \, P(t,T,r) \, \Phi(h - \sigma_P) \, ,$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et :

$$(10.36) \quad h = \frac{1}{\sigma_P} \ln \left[\frac{P(t,s,r)}{K \, P(t,T,r)} \right] + \frac{\sigma_P}{2} ,$$

$$(10.37) \quad \sigma_P = \frac{\sigma}{a\sqrt{2a}} \left(1 - e^{-a(s-T)}\right) \sqrt{1 - e^{-2a(T-t)}} \, .$$

Sans entrer dans les détails, on constate que (10.35) a une structure similaire à celle de la formule de Black et Scholes (5.15). En effet le premier terme comporte le prix en t du sous-jacent tandis que le second fait apparaître la valeur actuelle (en t) du prix d'exercice de l'option. Toutefois, ici, l'actualisation est obtenue en multipliant par la valeur présente d'un zéro-coupon de maturité T, ce qui représente bien la valeur actuelle d'1 F disponible à la date d'exercice du call. On a en quelque sorte "endogénéisé" le taux d'actualisation, en conformité avec les objections émises dans la section 10.1 à l'approche schizophrénique qui voudrait considérer le zéro-coupon comme un sous-jacent "ordinaire" (de type action) sans rapport avec le taux d'intérêt fixe relatif à l'actif sans risque.

Enfin, rappelons que les résultats présentés ne constituent qu'un exemple d'évaluation de dérivés sur taux d'intérêt. Diverses simplifications ont été adoptés : choix du modèle de Vasicek, option européenne, sous-jacent ne distribuant pas de coupons. La relaxation de chacune de ces hypothèses conduit à des complications, au point qu'en pratique il sera souvent difficile, voire impossible, d'aboutir à une évaluation analytique. C'est pourquoi, les auteurs ont fréquemment recours à des méthodes numériques, souvent développées sur base de modèles binômiaux ou trinômiaux.

Références

Chan K.G., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff and A.B. Sanders (1992), "An empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *Journal of Finance*, 47, pp.1209-27.

Cox, J.C., J.E. Ingersöll and S.A. Ross (1985), "A theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, pp. 385-407.

Brennan M.J. and E.S. Schwartz (1979), "A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, 3, pp.135-55.

Cox, J.C.and S.A. Ross (1975)

Dothan, L.U. (1978), "On the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 6, pp. 59-69.

Demange G. et J.-C. Rochet (1992), *Méthodes mathématiques de la finance*, Economica, Paris.

Duffie, D. (1994), *Modèles dynamiques d'évaluation*, Presses Universitaires de France, Paris (traduction de l'ouvrage *Dynamic Asset Pricing Theory* paru en 1992 chez Princeton University Press, Princeton).

Ho T.S. and S. Lee (1986), "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *Journal of Finance*, 41, pp. 1011-28.

Hull, J. C. (1993), *Options, Futures and other Derivative Securities* (2d edition), Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Hull J.C. and A. White (1990), "Pricing Interest-Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, pp. 573-92.

Jamshidian, F. (1989), "Exact Bond Option Formula", *Journal of Finance*, XLIV, 1, pp. 205-19.

Merton R.C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Sciences*, 4, pp. 141-83.

Rendleman, R. and B. Bartter (1980), "The Pricing of Options on Debt Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, pp.11-24.

Vasicek, O. A. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp.177-88.

ENSAIOS ECONÔMICOS DA EPGE

200. A VISÃO TEÓRICA SOBRE MODELOS PREVIDENCIÁRIOS: O CASO BRASILEIRO - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira - Outubro de 1992 - 23 pág. (esgotado)
201. HIPERINFLAÇÃO: CÂMBIO, MOEDA E ÂNCORAS NOMINAIS - Fernando de Holanda Barbosa - Novembro de 1992 - 10 pág. (esgotado)
202. PREVIDÊNCIA SOCIAL: CIDADANIA E PROVISÃO - Clovis de Faro - Novembro de 1992 - 31 pág. (esgotado)
203. OS BANCOS ESTADUAIS E O DESCONTROLE FISCAL: ALGUNS ASPECTOS - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Armínio Fraga Neto - Novembro de 1992 - 24 pág. (esgotado)
204. TEORIAS ECONÔMICAS: A MEIA-VERDADE TEMPORÁRIA - Antonio Maria da Silveira - Dezembro de 1992 - 36 pág. (esgotado)
205. THE RICARDIAN VICE AND THE INDETERMINATION OF SENIOR - Antonio Maria da Silveira - Dezembro de 1992 - 35 pág. (esgotado)
206. HIPERINFLAÇÃO E A FORMA FUNCIONAL DA EQUAÇÃO DE DEMANDA DE MOEDA - Fernando de Holanda Barbosa - Janeiro de 1993 - 27 pág. (esgotado)
207. REFORMA FINANCEIRA - ASPECTOS GERAIS E ANÁLISE DO PROJETO DA LEI COMPLEMENTAR - Rubens Penha Cysne - fevereiro de 1993 - 37 pág. (esgotado)
208. ABUSO ECONÔMICO E O CASO DA LEI 8.002 - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - fevereiro de 1993 - 18 pág. (esgotado)
209. ELEMENTOS DE UMA ESTRATÉGIA PARA O DESENVOLVIMENTO DA AGRICULTURA BRASILEIRA - Antonio Salazar Pessoa Brandão e Eliseu Alves - Fevereiro de 1993 - 370pág. (esgotado)
210. PREVIDÊNCIA SOCIAL PÚBLICA: A EXPERIÊNCIA BRASILEIRA - Hélio Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso e Uriel de Magalhães - Março de 1993 - 35 pág - (esgotado) .
211. OS SISTEMAS PREVIDENCIÁRIOS E UMA PROPOSTA PARA A REFORMULACAO DO MODELO BRASILEIRO - Helio Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso e Uriel de Magalhães - Março de 1993 - 43 pág. - (esgotado)
212. THE INDETERMINATION OF SENIOR (OR THE INDETERMINATION OF WAGNER) AND SCHMOLLER AS A SOCIAL ECONOMIST - Antonio Maria da Silveira - Março de 1993 - 29 pág. (esgotado)
213. NASH EQUILIBRIUM UNDER KNIGHTIAN UNCERTAINTY: BREAKING DOWN BACKWARD INDUCTION (Extensively Revised Version) - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Abril de 1993 36 pág. (esgotado)
214. ON THE DIFFERENTIABILITY OF THE CONSUMER DEMAND FUNCTION - Paulo Klinger Monteiro, Mário Rui Páscoa e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Maio de 1993 - 19 pág. (esgotado)

215. DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS, ARBITRAGEM, MERCADO A TERMO E MERCADO FUTURO - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Flávio Auler - Agosto de 1993 - 69 pág. (esgotado).

216. SISTEMA MONETÁRIO VERSÃO REVISADA - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 - 69 pág. (esgotado).

217. CAIXAS DE CONVERSÃO - Fernando Antônio Hadba - Agosto de 1993 - 28 pág.

218. A ECONOMIA BRASILEIRA NO PERÍODO MILITAR - Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 - 50 pág. (esgotado).

219. IMPÔSTO INFLACIONÁRIO E TRANSFERÊNCIAS INFLACIONÁRIAS - Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 - 14 pág. (esgotado).

220. PREVISÕES DE M1 COM DADOS MENSAIS - Rubens Penha Cysne e João Victor Issler - Setembro de 1993 - 20 pág. (esgotado)

221. TOPOLOGIA E CÁLCULO NO Rn - Rubens Penha Cysne e Humberto Moreira - Setembro de 1993 - 106 pág. (esgotado)

222. EMPRÉSTIMOS DE MÉDIO E LONGO PRAZOS E INFLAÇÃO: A QUESTÃO DA INDEXAÇÃO - Clovis de Faro - Outubro de 1993 - 23 pág.

223. ESTUDOS SOBRE A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR, vol. 1 - Nelson H. Barbosa, Fábio N.P. Freitas, Carlos F.L.R. Lopes, Marcos B. Monteiro, Antonio Maria da Silveira (Coordenador) e Matias Vernengo - Outubro de 1993 - 249 pág (esgotado)

224. A SUBSTITUIÇÃO DE MOEDA NO BRASIL: A MOEDA INDEXADA - Fernando de Holanda Barbosa e Pedro Luiz Valls Pereira - Novembro de 1993 - 23 pág.

225. FINANCIAL INTEGRATION AND PUBLIC FINANCIAL INSTITUTIONS - Walter Novaes e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Novembro de 1993 - 29 pág

226. LAWS OF LARGE NUMBERS FOR NON-ADDITIVE PROBABILITIES - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Dezembro de 1993 - 26 pág.

227. A ECONOMIA BRASILEIRA NO PERÍODO MILITAR - VERSÃO REVISADA - Rubens Penha Cysne - Janeiro de 1994 - 45 pág. (esgotado)

228. THE IMPACT OF PUBLIC CAPITAL AND PUBLIC INVESTMENT ON ECONOMIC GROWTH: AN EMPIRICAL INVESTIGATION - Pedro Cavalcanti Ferreira - Fevereiro de 1994 - 37 pág. (esgotado)

229. FROM THE BRAZILIAN PAY AS YOU GO PENSION SYSTEM TO CAPITALIZATION: BAILING OUT THE GOVERNMENT - José Luiz de Carvalho e Clóvis de Faro - Fevereiro de 1994 - 24 pág.

230. ESTUDOS SOBRE A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR - vol. II - Brena Paula Magno Fernandez, Maria Tereza Garcia Duarte, Sergio Grumbach, Antonio Maria da Silveira (Coordenador) - Fevereiro de 1994 - 51 pág.(esgotado)

231. ESTABILIZAÇÃO DE PREÇOS AGRÍCOLAS NO BRASIL: AVALIAÇÃO E PERSPECTIVAS - Clovis de Faro e José Luiz Carvalho - Março de 1994 - 33 pág. (esgotado)

232. ESTIMATING SECTORAL CYCLES USING COINTEGRATION AND COMMON FEATURES - Robert F. Engle e João Victor Issler - Março de 1994 - 55 pág. (esgotado)

233. COMMON CYCLES IN MACROECONOMIC AGGREGATES - João Victor Issler e Farshid Vahid - Abril de 1994 - 60 pág.

234. BANDAS DE CÂMBIO: TEORIA, EVIDÊNCIA EMPÍRICA E SUA POSSÍVEL APLICAÇÃO NO BRASIL - Aloisio Pessoa de Araújo e Cypriano Lopes Feijó Filho - Abril de 1994 - 98 pág. (esgotado)

235. O HEDGE DA DÍVIDA EXTERNA BRASILEIRA - Aloisio Pessoa de Araújo, Túlio Luz Barbosa, Amélia de Fátima F. Semblano e Maria Haydée Morales - Abril de 1994 - 109 pág. (esgotado)

236. TESTING THE EXTERNALITIES HYPOTHESIS OF ENDOGENOUS GROWTH USING COINTEGRATION - Pedro Cavalcanti Ferreira e João Victor Issler - Abril de 1994 - 37 pág. (esgotado)

237. THE BRAZILIAN SOCIAL SECURITY PROGRAM: DIAGNOSIS AND PROPOSAL FOR REFORM - Renato Fragelli; Uriel de Magalhães; Helio Portocarrero e Luiz Guilherme Schymura - Maio de 1994 - 32 pág.

238. REGIMES COMPLEMENTARES DE PREVIDÊNCIA - Hélio de Oliveira Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso, Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Uriel de Magalhães - Maio de 1994 - 106 pág.

239. PUBLIC EXPENDITURES, TAXATION AND WELFARE MEASUREMENT - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1994 - 36 pág.

240. A NOTE ON POLICY, THE COMPOSITION OF PUBLIC EXPENDITURES AND ECONOMIC GROWTH - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1994 - 40 pág. (esgotado)

241. INFLAÇÃO E O PLANO FHC - Rubens Penha Cysne - Maio de 1994 - 26 pág. (esgotado)

242. INFLATIONARY BIAS AND STATE OWNED FINANCIAL INSTITUTIONS - Walter Novaes Filho e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Junho de 1994 -35 pág.

243. INTRODUÇÃO À INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA - Paulo Klinger Monteiro - Junho de 1994 - 38 pág. (esgotado)

244. PURE ECONOMIC THEORIES: THE TEMPORARY HALF-TRUTH - Antonio M. Silveira - Junho de 1994 - 23 pág. (esgotado)

245. WELFARE COSTS OF INFLATION - THE CASE FOR INTEREST-BEARING MONEY AND EMPIRICAL ESTIMATES FOR BRAZIL - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Julho de 1994 - 25 pág. (esgotado)

246. INFRAESTRUTURA PÚBLICA, PRODUTIVIDADE E CRESCIMENTO - Pedro Cavalcanti Ferreira - Setembro de 1994 - 25 pág.

247. MACROECONOMIC POLICY AND CREDIBILITY: A COMPARATIVE STUDY OF THE FACTORS AFFECTING BRAZILIAN AND ITALIAN INFLATION AFTER 1970 - Giuseppe Tullio e Marcio Ronci - Outubro de 1994 - 61 pág. (esgotado)

248. INFLATION AND DEBT INDEXATION: THE EQUIVALENCE OF TWO ALTERNATIVE SCHEMES FOR THE CASE OF PERIODIC PAYMENTS - Clovis de Faro - Outubro de 1994 -18 pág.

249. CUSTOS DE BEM ESTAR DA INFLAÇÃO - O CASO COM MOEDA INDEXADA E ESTIMATIVAS EMPÍRICAS PARA O BRASIL - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Novembro de 1994 - 28 pág. (esgotado)

250. THE ECONOMIST MACHIAVELLI - Brena P. M. Fernandez e Antonio M. Silveira - Novembro de 1994 - 15 pág.

251. INFRAESTRUTURA NO BRASIL: ALGUNS FATOS ESTILIZADOS - Pedro Cavalcanti Ferreira - Dezembro de 1994 - 33 pág. (esgotado)

252. ENTREPRENEURIAL RISK AND LABOUR'S SHARE IN OUTPUT - Renato Fragelli Cardoso - Janeiro de 1995 - 22 pág.

253. TRADE OR INVESTMENT ? LOCATION DECISIONS UNDER REGIONAL INTEGRATION - Marco Antonio F.de H. Cavalcanti e Renato G. Flôres Jr. - Janeiro de 1995 - 35 pág.

254. O SISTEMA FINANCEIRO OFICIAL E A QUEDA DAS TRANFERÊNCIAS INFLACIONÁRIAS - Rubens Penha Cysne - Janeiro de 1995 - 32 pág. (esgotado)

255. CONVERGÊNCIA ENTRE A RENDA PER-CAPITA DOS ESTADOS BRASILEIROS - Roberto G. Ellery Jr. e Pedro Cavalcanti G. Ferreira - Janeiro 1995 - 42 pág.

256. A COMMENT ON "RATIONAL LEARNING LEAD TO NASH EQUILIBRIUM" BY PROFESSORS EHUD KALAI EHUD EHUR - Alvaro Sandroni e Sergio Ribeiro da Costa Werlang - Fevereiro de 1995 - 10 pág.

257. COMMON CYCLES IN MACROECONOMIC AGGREGATES (revised version) - João Victor Issler e Farshid Vahid - Fevereiro de l995 - 57 pág.

258. GROWTH, INCREASING RETURNS, AND PUBLIC INFRASTRUCTURE: TIMES SERIES EVIDENCE (revised version) - Pedro Cavalcanti Ferreira e João Victor Issler - Março de 1995 - 39 pág.(esgotado)

259. POLÍTICA CAMBIAL E O SALDO EM CONTA CORRENTE DO BALANÇO DE PAGAMENTOS - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 08 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 47 pág. (esgotado)

260. ASPECTOS MACROECONÔMICOS DA ENTRADA DE CAPITAIS - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 08 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 48 pág. (esgotado)

261. DIFICULDADES DO SISTEMA BANCÁRIO COM AS RESTRIÇÕES ATUAIS E COMPULSÓRIOS ELEVADOS - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 09 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 47 pág. (esgotado)

262. POLÍTICA MONETÁRIA: A TRANSIÇÃO DO MODELO ATUAL PARA O MODELO CLÁSSICO - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 09 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 54 pág. (esgotado)

263. CITY SIZES AND INDUSTRY CONCENTRATION - Afonso Arinos de Mello Franco Neto - Maio de 1995 - 38 pág.

264. WELFARE AND FISCAL POLICY WITH PUBLIC GOODS AND INFRASTRUCTURE (Revised Version) - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1995 - 33 pág.

265. PROFIT SHARING WITH HETEROGENEOUS ENTREPRENEURIAL PROWESS - Renato Fragelli Cardoso - Julho de 1995 - 36 pág.

266. A DINÂMICA MONETÁRIA DA HIPERINFLAÇÃO: CAGAN REVISITADO - Fernando de Holanda Barbosa - Agosto de 1995 - 14 pág. (esgotado)

267. A SEDIÇÃO DA ESCOLHA PÚBLICA: VARIAÇÕES SOBRE O TEMA DE REVOLUÇÕES CIENTÍFICAS - Antonio Maria da Silveira - Agosto de 1995 - 24 pág.

268. A PERSPECTIVA DA ESCOLHA PÚBLICA E A TENDÊNCIA INSTITUCIONALISTA DE KNIGHT - Antonio Maria da Silveira - Setembro de 1995 - 28 pág.

269. ON LONG-RUN PRICE COMOVEMENTS BETWEEN PAINTINGS AND PRINTS - Renato Flôres - Setembro de 1995 - 29 pág.

270. CRESCIMENTO ECONÔMICO, RENDIMENTOS CRESCENTES E CONCORRÊNCIA MONOPOLISTA - Pedro Cavalcanti Ferreira e Roberto Ellery Junior - Outubro de 1995 - 32 pág. (esgotado)

271. POR UMA CIÊNCIA ECONÔMICA FILOSOFICAMENTE INFORMADA: A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR - Antonio Maria da Silveira - Outubro de 1995 - 25 pág. (esgotado)

272. ESTIMATING THE TERM STRUCTURE OF VOLATILITY AND FIXED INCOME DERIVATIVE PRICING - Franklin de O. Gonçalves e João Victor Issler - Outubro de 1995 - 23 pág. (esgotado)

273. A MODEL TO ESTIMATE THE US TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES - Antonio Marcos Duarte Júnior e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Outubro de 1995 - 21 pág. (esgotado)

274. EDUCAÇÃO E INVESTIMENTOS EXTERNOS COMO DETERMINANTES DO CRESCIMENTO A LONGO PRAZO - Gustavo Gonzaga, João Victor Issler e Guilherme Cortella Marone - Novembro de 1995 - 34 pág.

275. DYNAMIC HEDONIC REGRESSIONS: COMPUTATION AND PROPERTIES - Renato Galvão Flôres Junior e Victor Ginsburgh - Janeiro de 1996 - 21 pág.

276. FUNDAMENTOS DA TEORIA DAS OPÇÕES - Carlos Ivan Simonsen Leal - Fevereiro de 1996 - 38 pág. (esgotado)

277. DETERMINAÇÃO DO PREÇO DE UMA OPÇÃO E ARBITRAGEM - Carlos Ivan Simonsen Leal - Fevereiro 1996 - 55 pág. (esgotado)

278. SUSTAINED GROWTH, GOVERNMENT EXPENDITURE AND INFLATION - Pedro Cavalcanti Ferreira - Fevereiro 1996 - 38 pág.

279. REFLEXOS DO PLANO REAL SOBRE O SISTEMA BANCÁRIO BRASILEIRO - Rubens Penha Cysne e Sérgio Gustavo Silveira da Costa - Junho 1996 - 28 pág.

280. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS, CAPÍTULOS I E II: FUNÇÕES, ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES - Rubens Penha Cysne e Humberto de Athayde Moreira - Junho 1996 - 75 pág. (esgotado)

281. PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR PATROCINADA: VALE A PENA? - Clovis de Faro e Moacyr Fioravante - Junho de 1996 - 23 pág.

282. OLIGOPOLISTIC COMPETITION UNDER KNIGHTIAN UNCERTAINTY - Hugo Pedro Boff e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Julho de 1996 - 37 pág.

283. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS - CAPÍTULO IV: OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA - Rubens Penha Cysne e Humberto de Athayde Moreira - Julho de 1996 - 71 pág.

284. RIO DE JANEIRO E INTERMEDIAÇÃO FINANCEIRA - Rubens Penha Cysne - Julho de 1996 - 30 pág.

285. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS CAPÍTULO III: CÁLCULO NO R^n - Rubens Penha Cysne e Humberto Athayde Moreira - Agosto de 1996 - 106 pág.

286. REFLEXOS DO PLANO REAL SOBRE AS FINANCEIRAS - Rubens Penha Cysne e Sergio Gustavo S. da Costa - Setembro de 1996 - 17 pág. (esgotado)

287. FUTUROS DE JUROS - Carlos Ivan Simonsen Leal - Setembro de 1996 - 49 pág.

288. PREVIDÊNCIA SOCIAL NO BRASIL: POR UMA REFORMA MAIS DURADOURA - Clovis de Faro - Setembro de 1996 - 38 pág.

289. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTA - CAPÍTULO V: OTIMIZAÇÃO DINÂMICA - Rubens Penha Cysne e Humberto de Athayde Moreira - Setembro de 1996 - 60 pág.

290. PERSPECTIVAS DE LONGO PRAZO DA ECONOMIA BRASILEIRA: UMA ANÁLISE EXPLORATÓRIA - Pedro C. Ferreira - Outubro de 1996 - 40 pág.

291. INTEGRAÇÃO, CRESCIMENTO E BEM-ESTAR - Marcelo Leite de Moura e Silva e Pedro C. Ferreira - Outubro de 1996 - 39 pág.

292. PROCESSUS STOCHASTIQUES EN FINANCE (1ère partie) - Renato Flôres e Ariane Szafarz - Novembro de 1996 - 31 pág.

293. ANAIS DO II ENCONTRO NACIONAL SOBRE POLÍTICA MONETÁRIA E POLÍTICA CAMBIAL (Parte I) - SISTEMA FINANCEIRO E POLÍTICA MONETÁRIA - Rubens Penha Cysne (editor) - Novembro de 1996 - 78 pág.

294. ANAIS DO II ENCONTRO NACIONAL SOBRE POLÍTICA MONETÁRIA E POLÍTICA CAMBIAL (Parte II) - BALANÇA COMERCIAL E FLUXO DE CAPITAIS - Rubens Penha Cysne (editor) - Novembro de 1996 - 59 pág.

295. PROCESSUS STOCHASTIQUES EN FINANCE (2ème partie) - Renato Flôres e Ariane Szafarz - Novembro de 1996 - 34 pág.