FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO

12

HSIA, HUA SHENG

MÉTODOS PARA REPLICAÇÃO DE ÍNDICES: REVISÃO E APLICAÇÃO AO IBOVESPA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação da FGV/EAESP
Área de Concentração: Controladoria, Finanças e Contabilidade como requisito para obtenção de título de mestre em Administração.

Orientador: Prof. Dr. Richard Saito

SÃO PAULO
2000

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de usar este espaço para citar algumas pessoas e expressar meu sincero agradecimento.

Primeiramente, gostaria de fazer um agradecimento especial ao meu Prof. Orientador Richard Saito, que através de debates, recomendações precisas e incentivos no aprofundamento do conhecer, sempre disposto e paciente, transmitiu-me todo apoio não só neste trabalho mas também durante o curso de mestrado.

Aos Prof. Dr. Ricardo Matone, Prof. Dr. Wilton de Oliveira Bussab e Prof. Dr. Wladimir Puggina, pelos comentários e sugestões que contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

Aos amigos e amigas que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho: Alberto e Hebert da Ascent, que forneceram os dados e equipamentos para a pesquisa; Andrea, Carolina e Cristina, pela atenção e pela revisão de português que foram imprescindíveis para a finalização desta dissertação.

Aos meus amigos e colegas do curso de Pós-Graduação em Administração de Empresas e em Economia, cujo companheirismo proporcionou apoios nos momentos mais difíceis. A todos, muito obrigado.

Ao Capes, por ter me proporcionado as condições financeiras necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Em fim, ao amigo Roberto Boczko e aos meus pais, que tiveram a importância não só na elaboração deste trabalho mas também em toda minha vida. À vocês, a minha eterna gratidão.

RESUMO

Este trabalho revisa os principais métodos numéricos utilizados para reproduzir o comportamento de um índice, implementa quatro desses modelos ao caso brasileiro (Índice Bovespa) e discute a aplicação e os pontos favoráveis e desfavoráveis de cada modelo.

Em uma primeira etapa, a vantagem da administração passiva e a potencialidade de uso de uma carteira espelho são descritas. Em seguida, os modelos de replicação existentes na literatura no tocante a suas respectivas hipóteses, suas derivações matemáticas e suas propriedades teóricas são apresentados.

Após essa revisão, os modelos de replicação plena, de carteira de mínima variância global, de *Black* e de minimização quadrática sem venda a descoberto são implementados. Os resultados são verificados sob os parâmetros de *tracking error*, beta, R-quadrado e semelhança de série em relação à média e à variância.

A conclusão é de que existem diferentes objetivos ao se replicar um índice e que, para cada um destes objetivos, diferentes abordagens ou ferramentas são adotadas. Por exemplo, o administrador que busca o retorno de um índice de mercado, deve conseguir os melhores resultados utilizando o modelo de replicação plena. Já para aquele que visa arbitragem de índice, através de ativos do mercado à vista, a recomendação é aplicar os modelos que utilizam a otimização quadrática para montar a carteira espelho.

ABSTRACT

This dissertation revises the main numerical methods used to reproduce the behavior of an index, implements four of these methods under the Brazilian case (Bovespa Index) and discusses the applications, pros and cons of each model.

In a first stage the advantages of passive management and the power of the use of a replication portfolio are described. Next, the existing replication models are presented together with their respective hypotheses, mathematical derivatives and theoretical properties.

After this revision, the models – full replication, minimum global variance portfolio, Black model and square minimization with short selling – are implemented. The results are verified under the parameters of tracking error, beta, R^2 and serial similarity of average and variance.

The conclusion is that there are different objectives in the replication of an index and, for each of these objectives, different approaches and tools are adopted.

For example, the manager who seeks the return of a market index may achieve the best results by using the full replication model. Meanwhile, the manager who looks for an index arbitrage via market assets should use the models that apply square optimization to build a proxy portfolio.

ÍNDICE GERAL

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. EVOLUÇÃO DA ADMINISTRAÇÃO PASSIVA

O fracasso das políticas de reerguimento a partir da demanda, a estagflação do fim da década de 70 e o enfraquecimento das condições que ainda permitiam aos assalariados defenderem seu poder de compra e manterem suas conquistas sociais, corresponderam ao momento em que os fundos de pensão e as sociedades de aplicação coletiva de valores mobiliários (fundos mútuos de investimento) começaram a expandir rapidamente nos países anglo-saxônicos, que são os atores principais do regime de finanças do mercado mundializado (vide **Tabelas 1** e **2**).

Posição	País	1980	1988	1990	1991	1992	1993
1	Estados Unidos	667,7	1.919,2	2.257,3	3.070,3	3.334,3	3.571,4
2	Reino Unido	151,3	483,9	583,6	642,9	670,5	695,7
3	Japão	24,3	134,1	158,8	182,3	191,9	-
4	Canadá	43,3	131,3	171,8	188,4	191,7	-
5	Alemanha	17,2	41,6	55,2	58,6	62,6	53,5
Total		903,8	2.710,1	3.226,7	4.143,1	4.388,4	4.320,6

Fonte: FMI. 1995, p. 166. (em bilhões de dólares)

Tabela 1: Ativos dos fundos de pensão em alguns países da OCDE, 1980-1993

Anos	Montantes (bilhões de dólares)	Número de fundos
1960	17	-
1965	35	-
1970	47	-
1975	45	-
1980	134	564
1985	495	1.528
1990	1.066	3.105
1991	1.348	3.427
1992	1.599	3.850
1993	2.006	4.558
1994	2.150	4.700
1995*	2.600	5.655

Fonte: *Statistical abstract of the USA 1994* et *The Economist*, 21 outubro 1995, p.89. * (estimativa de agosto de 1995)

Tabela 2: Ativos líquidos dos Fundos Mútuos nos EUA (em bilhões de dólares)

Por esse motivo, é cada vez mais importante entender como os administradores de fundos gerênciam esses recursos. Duas principais estratégias são adotadas: a primeira é a administração ativa, na qual o administrador supera o retorno médio do mercado montando e atualizando uma carteira com ativos subavaliados ou utilizando os derivativos para apostas. A segunda estratégia é a administração passiva (*indexing*), em que administrador não pretende usufruir o ganho acima do mercado, mas escolhe compor uma carteira para seguir o retorno de um índice selecionado.

De acordo com *Fredman e Wiles (1993)*, a primeira estratégia já era largamente aplicada no final da década de 70 quando a estratégia passiva começou a ser interessante para os administradores de carteiras. O primeiro fundo que garante o retorno de um determinado índice alvo (fundo de índice), *the Vanguard Index Trust*, foi introduzido em 1976 e tem reproduzido o retorno do *Standard & Poor's 500 (S&P 500)* com o R-quadrado (R^2) e o Beta igual a 1 desde então. Os dois motivos principais que favoreceram a introdução da administração passiva:

- Primeiro, a evidência de que entre 50% a 75% dos fundos pesquisados tiveram desempenhos abaixo do retorno médio dos índices de mercado. Mesmo nas carteiras com desempenho acima do mercado, os administradores de fundos só poderiam usufruir de tal ganho se assumissem um risco maior. Algumas hipóteses foram levantadas para explicar esse fato: os enormes custos de transação associados com a administração ativa e a dificuldade de selecionar papéis rentáveis.

- Segundo, uma maior aceitação da hipótese de eficiência do mercado nos trabalhos acadêmicos. Os pesquisadores da Universidade de Chicago, por exemplo, começaram a estudar o tema desde a década de 60. O termo "eficiência do mercado" significa que os preços das ações não só refletem todas as informações disponíveis no mercado, mas também ajustam-se rapidamente à nova informação. Como resultado, os preços flutuam aleatoriamente sobre seus valores intrínsecos. Sob essa hipótese, pode-se inferir que, no mercado com elevado grau de eficiência, as ações geralmente são precificadas corretamente em qualquer momento e não oferecem ganhos

excepcionais de maneira consistente. Logo, não há a possibilidade de uma carteira superar o retorno do mercado.

Como a hipótese da eficiência de mercado é uma questão essencial para os administradores de carteiras, é proveitoso aprofundar mais sobre o assunto. Na verdade, segundo *Bodie, Kane e Marcus (1996)*, dependendo do entendimento sobre a expressão "todas informações disponíveis", há três formas de mercado eficiente:

- ✓ a forma fraca afirma que todas informações derivadas dos preços passados das ações já estão refletidas nos preços atuais das ações;
- ✓ a forma semi-forte afirma que todas informações públicas estão refletidas nos preços;
- ✓ a forma forte defende que as informações disponíveis, tanto as públicas quanto as privadas, são refletidas nos preços.

Se o mercado seguir a forma forte, provavelmente os administradores não farão mais esforço em pesquisar os ativos com valores subestimados pelo mercado. No entanto, os autores apontaram diversos casos, chamados anomalias, que enfraquecem a hipótese do mercado eficiente. Por exemplo, o efeito de pequenas empresas e o efeito janeiro. Atualmente, essas anomalias ainda são bastante discutidas.

Apesar da discussão das anomalias, os mesmos autores concluíram que o mercado americano é bastante eficiente devido à dificuldade dos ganhos consistentes dos fundos sobre os retornos de mercado. Na mesma linha, *Fredman e Wiles (1993)* argumentam que o mercado pode não ser perfeitamente eficiente, mas é mais eficiente do que era no passado. Portanto, a administração passiva e a metodologia de replicação de índice tendem a desempenhar papéis cada vez mais importantes no gerenciamento dos recursos financeiros.

Por exemplo, nos Estados Unidos, onde o mercado de capitais é bastante desenvolvido, os fundos de índice são bastante conhecidos entre os investidores. De acordo com o material institucional do grupo *Vanguard* (1999), um dos maiores administradores de fundos nos Estados Unidos com 435 bilhões de dólares, 30% do recurso foi investido nos fundos de índices. E dentro desses 30% , havia aproximadamente 74 bilhões de dólares investidos no *500 Index Fund* (o fundo que reproduz o retorno do S&P 500) em 1998.

1.2. POR QUE ESCOLHER A ADMINISTRAÇÃO PASSIVA?

Na prática, por que escolher a administração passiva de índice? O professor *Willian Sharpe* (1999), da *Stanford Graduate School of Business*, aponta alguns pontos básicos a favor da administração passiva: baixas despesas de administração, baixa movimentação e bom desempenho no passado. Ou seja, um dólar médio na estratégia ativa tem, na média custo líquido maior do que na passiva, embora a estratégia passiva resulte num retorno menor. Ao considerar estes benefícios, o investidor abre mão dos retornos excepcionais e aceita o desempenho médio do mercado. "Superar o mercado" não é o objetivo deste tipo de investidor.

Os estudiosos da área também compartilham essa visão, e levantam outros benefícios semelhantes para o uso da estratégia passiva:

a) ***Baixo risco através da diversificação***. Por definição, uma diversificação ampla diminui o risco. O investidor de índice deve se atrelar ao retorno médio do mercado independentemente do desempenho de cada ação individual que compõe a carteira. Com um investimento pulverizado sobre vários tipos de índices, um investidor pode diversificar o risco de sua carteira;

b) ***Taxas mínimas de administração.*** As taxas de administração da estratégia passiva são muito menores do que as da administração ativa de carteira. Baseada nas informações sobre os principais fundos do mercado brasileiro e do mercado americano, calcularam-se as taxas de administração média ponderada, conforme **Tabela 3**.

(Anual)

	Brasil	Estados Unidos
Administração Ativa	3,00%	1,00%
Administração Passiva	0,50%	0,19%

Fonte: Exame (os melhores fundos de investimentos de 1998) e Vanguard (1999)

Tabela 3: A taxa de administração média

c) ***Menores custos de transação***. Segundo *Bodie, Kane e Marcus (1996)*, devido às características operacionais da própria estratégia passiva, que consiste na compra e na manutenção de papéis que compõem um índice do mercado por um dado período de tempo, a estratégia economizaria os custos de transação relativos à freqüente compra e venda de ações realizadas na administração ativa. No mercado brasileiro, por exemplo, além do custo fixo para cada operação realizada, as corretoras cobram em média 0,25% da taxa de corretagem sobre o valor total da operação.

d) ***Menor custo de "spread".*** Esse custo é um dos componentes dos custos de transação, por isso, a baixa movimentação dos ativos da carteira reduz o custo com *spread*, o qual representa a diferença entre o preço de venda e o de compra da ação.

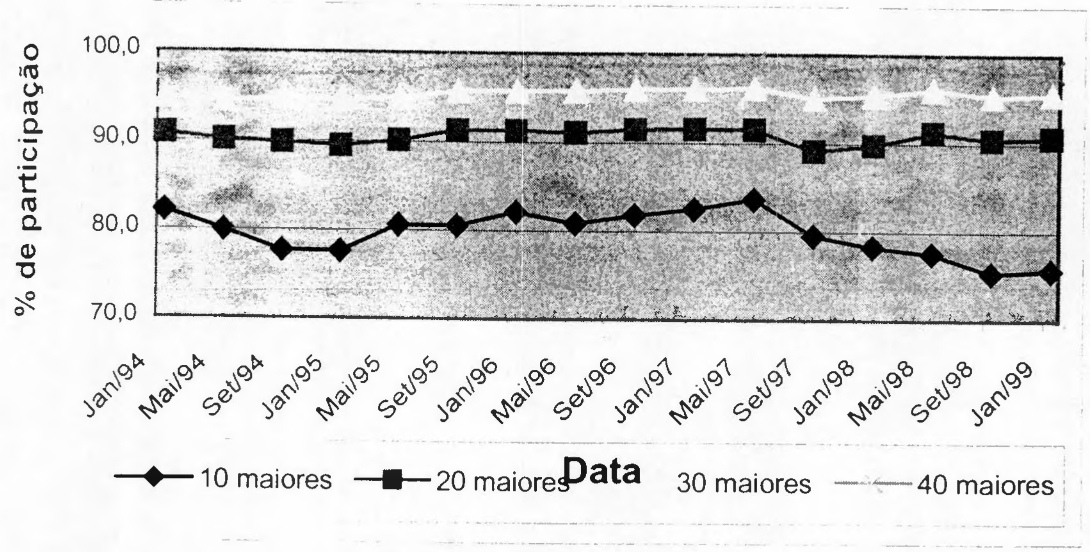
e) ***O fundo de índice possui apenas o risco de mercado,*** enquanto a carteira da administração ativa está sujeita aos dois componentes do risco: o risco de mercado e o risco específico;

f) ***Facilidade de avaliação de desempenho.*** Atualmente, a maioria dos fundos de rendas variáveis oferecidos no mercado não vincula seus retornos com uma referência e, por isso, os investidores encontram dificuldades em controlar o retorno do fundo investido. Com o fundo de índice, o processo de monitoramento torna-se mais fácil e transparente, uma vez que o retorno do índice alvo é publicamente conhecido e um retorno aproximado a esse retorno do índice é garantido para os cotistas do fundo.

1.3. CASO BRASILEIRO

No caso brasileiro, o estudo das técnicas de replicação do Ibovespa, o qual é considerado pelos agentes do mercado como o índice de referência para o mercado, ganhou uma importância ainda maior nos últimos anos por duas razões especiais:

- Primeira: há uma boa expectativa de crescimento de fundos de pensão privados. A decadência do sistema de seguridade social público brasileiro representa um grande potencial de crescimento dos recursos provenientes dos funcionários privados ou públicos para esse tipo de serviço financeiro nos próximos anos. Como os administradores dos fundos de pensão são mais conservadores em relação à exposição de riscos dos fundos, o fundo de índice poderá atrair os recursos dos fundos de pensão, uma vez que a carteira espelho (a carteira que reproduz o comportamento de um índice) de um índice do mercado possui riscos bastante reduzidos.
- Segunda: é a conduçãc de privatizações das empresas estatais brasileiras, particularmente nos setores de mineração, petroquímica e de telecomunicação. Baseado nas informações da Bovespa sobre a participação relativa de cada ação na composição da carteira teórica do Ibovespa, pode-se verificar que mais papéis negociados na Bolsa ganharam liquidez a partir de janeiro de 1994:



Fonte: Bovespa

Figura 1: Participações das ações no Ibovespa

Embora a participação acumulada dos 20, 30 e 40 papéis mais significativos (negociados) na carteira teórica não tenha variado, a participação dos dez maiores teve uma queda desde maio de 1997 . Esse fato aconteceu porque, com a privatização de sistema Telebrás, os dez maiores passaram a deter apenas 75% da carteira do mercado. Isso significa que os outros papéis negociados no Bolsa ganharam mais negociabilidade com a privatização. Por exemplo, a privatização da Telebrás representou o desmembramento em várias outras empresas menores cujas ações ganharam liquidez no mercado.

Portanto, o sucesso da privatização imprimiu efeitos no mercado de capitais. Antes do processo de privatização, apesar de um volume disponível razoável de papéis na Bolsa de Valores brasileira, as negociações eram muito concentradas em apenas alguns papéis das maiores empresas estatais, tais como Telebrás, Petrobrás e outras. Isto era conseqüência da elevada liquidez desses papéis. Após as privatizações, os títulos de outras empresas ganharam liquidez. Com um mercado mais pulverizado, os administradores passivos tendem a ter mais dificuldade em replicar o índice com poucos papéis.

As metodologias já consolidadas sobre a formação de carteira espelho de índices no Estados Unidos serão utilizadas como uma referência inicial a fim de encontrar uma metodologia que se adapte melhor ao Ibovespa.

A tabela que segue mostra os principais métodos utilizados no mercado americano.

TÉCNICAS	Vantagens	Desvantagens
CASH MARKETS		
Replicação plena	>desvio de replicação mais baixo > renda proveniente de empréstimos de ações > adequado para manter por um período longo > rebalanceamento menos freqüente > giro mais baixo	> custo de transação de rebalanceamento de carteira regular, isto é, mudanças de constituição, ações corporativas etc. > custos operacionais grandes > pode precisar comprar ações ilíquidas
Stratified Sampling	> diversificação lógica por setor, capitalização > prático para um índice amplo	> ignora correlações entre ações > não garante obter uma solução ótima.
Otimização Quadrática	> incorporar correlações para reduzir o tracking error > natural para adaptar restrições formais, isto é, liquidez, setor etc.	>desempenho sensível à mudança de correlação > a solução depende do método da estimação de correlação > solução múltiplo ótima; algumas podem ser contra a intuição.
MERCADOS DERIVATIVOS		
Futuros	> custos de transação baixo e fácil de ser implementado > evita dividendos com impostos	> tracking error entre futuros e índice local > tracking error entre índice local e padrão > alguns contratos podem ser ilíquidos > renovar contratos pode ser caro
Swaps	> não há riscos de base > flexibilidade para clientela > evita dividendos com impostos	> deve considerar risco de créditos de contraparte > pode requerer acordos de contraparte, se o investidor procurar mudança subseqüente na estratégia > dificuldade para precificar
Options	> retorno potencial alto proveniente do uso de combinações > pode ser uma alternativa mais barata do que usar futuros > Evita dividendos com impostos	> pode envolver tracking error adicional entre a posição sintética e o índice > opções muito específicas podem ser ilíquidas > renovar contratos pode ser caro
TÉCNICAS HÍBRIDAS	> técnica prática em situações especiais, isto é, quando aplicada para índices constituídos de empresas pequenas e médias	> exposição para o risco específico da empresa

Fonte: Salomon Brothers

Tabela 4: Os principais métodos de replicação no mercado americano

1.4. OBJETIVO E CONTRIBUIÇÃO DESTA DISSERTAÇÃO

Os objetivos desta dissertação são: (1) pesquisar e mostrar como as principais metodologias matemáticas da administração de carteiras podem ser utilizadas para a replicação de um índice alvo, especificamente o índice Ibovespa; (2) implementar os modelos selecionados (3) com base nos resultados, propor a técnica mais adequada de replicação do índice Bovespa.

A contribuição deste trabalho é, além de pesquisar as metodologias para reproduzir um índice alvo, testar empiricamente algumas técnicas de replicação estudadas na reprodução de retorno do Ibovespa. O autor desconhece qualquer trabalho feito com este propósito na literatura aplicada ao mercado brasileiro.

A interpretação dos resultados em um período predeterminado (1994-1998) é fundamentada em três parâmetros: primeiro, o coeficiente beta da regressão linear simples com o R-quadrado (R^2); segundo, os testes de hipóteses da média e da variância; por último, a amplitude de *tracking error* medidos. A comparação dos resultados entre as carteiras espelhos do Ibovespa permitirá a análise de vantagens e de desvantagens de cada uma das técnicas implementadas, e também ajudará escolher o modelo mais adequado para replicar o Ibovespa.

1.5. ROTEIRO DA DISSERTAÇÃO

Este capítulo apresenta uma breve discussão sobre o tema da dissertação antes de entrar na pesquisa das técnicas de replicação de índice. **O capítulo 2** descreve com mais detalhe a escolha do índice Bovespa e a importância da aplicação ampla da carteira espelho do índice no mercado financeiro, particularmente na operação de arbitragem. O capítulo enuncia as características necessárias de uma carteira replicada para que ela seja utilizada com sucesso em cada propósito. Mais tarde, essas características servirão de ferramenta

para auxiliar na análise de resultados. **O capítulo 3** traz uma revisão bibliográfica dos modelos financeiros e matemáticos que poderiam ser utilizados para reproduzir um índice alvo. Como o Ibovespa foi escolhido para aplicar as técnicas de replicação, haverá uma breve descrição de como usá-las para formar a carteira espelho do Ibovespa. **O capítulo 4** dá uma descrição detalhada da implementação de alguns modelos selecionados. A seqüência de procedimentos para se obter os resultados e os conceitos dos testes de hipóteses utilizados também são descritos neste capítulo. **O capítulo 5** envolve a interpretação dos resultados obtidos com os modelos escolhidos. O objetivo é mostrar a eficiência dos modelos selecionados em replicar um índice, especificamente o Ibovespa, com poucos papéis. **O capítulo 6** traz a conclusão do trabalho e sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 2

IMPORTÂNCIA DA CARTEIRA ESPELHO

2.1. ÍNDICE ALVO

Alguns índices americanos são bastante conhecidos e demandados pelos investidores, como por exemplo o Russell 2000 (composta pelas pequenas empresas), S&P 500 (composta pelas grande empresas) e Wilshire 5000 (uma amostra do mercado de capitais americano). Por essa razão, esses índices são alvos de fundos passivos. Já no mercado brasileiro, há três índices largamente utilizados: Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa), Índice Brasil (IBX), Índice de Setor Elétrico (IEE), além do índice do Rio de Janeiro (IBV). Entre esses índices, somente o Ibovespa e IBV possuem uma série histórica razoavelmente longa com vários papéis futuros, termos e opções associados.

Atualmente, os papéis derivados do Ibovespa possuem volume negociado superior aos do IBV. Além disso, a maioria dos bancos não só utiliza o desempenho do Ibovespa como padrão de rendimento para produtos de rendas variáveis, como também o utiliza para calcular o índice de *Sharpe* na avaliação do desempenho da carteira.

Segundo material institucional da BOVESPA (1999), o Índice Bovespa é o mais importante e representativo indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Essa idéia também é apoiada por *Sanvicente* e *Paula Leite* (1994). O Ibovespa retrata o comportamento e o perfil dos principais papéis negociados na BOVESPA, através de uma metodologia simples e de fácil acompanhamento e com procedimentos e fórmulas bem *definidos*. Assim, em qualquer momento é possível calcular, de forma transparente e segura, o grau de negociabilidade de todas as ações negociadas na Bolsa para determinar a composição da carteira teórica do Ibovespa.

Pode-se citar também a estabilidade metodológica de cálculo do Ibovespa, que não sofreu modificações desde sua implementação em 1968 e a importância da própria Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), que é responsável por aproximadamente 85% do total transacionado em todas as Bolsas de Valores brasileiras.

Apesar dos pontos fortes do Ibovespa, de acordo com *Puggina* (1974), o índice tem falhas fundamentais na sua metodologia de construção. Uma dela é a amostragem, que engloba apenas os papéis mais transacionados no período, ou seja, aqueles que apresentam maior índice de liquidez. Uma outra deficiência é a distribuição dos pesos dos papéis que compõem a carteira: quanto maior a liquidez, maior será a participação na carteira. Por fim, a metodologia do Ibovespa diferencia-se do modo de construção da carteira teórica de mercado como um todo, o qual abrange todas as empresas negociados na Bolsa de Valores, sejam grandes, médias ou pequenas. A participação de uma empresa na carteira é determinada pelo seu valor de mercado.

Comparando a evolução de desempenho do Ibovespa com uma carteira hipotética de mercado construida por *Puggina* (1974), que procurou seguir as recomendações teóricas para construção de um índice de mercado e evitar as deficiências apresentadas pelo Ibovespa, o autor constatou que, por causa das limitações teóricas da construção do Ibovespa, este tende a apresentar um viés para cima nos movimentos de subida e um viés para baixo nas quedas em relação à carteira hipotética. No entanto, surpreendentemente, os retornos do Ibovespa no período testado aproximam-se, em média, aos retornos da carteira hipotética do mercado. Esse fato pode ser explicado pela particularidade do mercado acionário brasileiro no período testado, em que as ações mais negociadas são empresas de maiores valores do mercado.

Na mesma linha de investigação, pode-se citar o trabalho de *Nakamura* (1998) que avaliou a eficiência da carteira teórica do Índice Bovespa. O autor verificou que, embora essa carteira não se situa no conjunto eficiente de *Markowitz* devido à existência de carteiras dominantes em relação a esta, em termos de média e de variância os testes não

rejeitaram a hipótese de que a carteira do índice é eficiente, utilizando os retornos históricos no período de dez anos.

Portanto, apesar das deficiências apontadas e do surgimento do IBX, que apresenta um melhoramento metodológico em relação ao Ibovespa, a carteira teórica do Ibovespa continua sendo considerada um *proxy* da carteira do mercado e assume uma importância significativa na decisão dos investidores na formação de carteiras ótimas. Por isso, o Ibovespa é escolhido como o índice alvo deste trabalho.

2.2. AS FINALIDADE DE UMA CARTEIRA ESPELHO

Uma carteira espelho de índice serve para:

- obter o retorno do mercado;
- efetuar operações de arbitragem.

Enquanto o primeiro objetivo apresenta idéias bastante claras, uma vez que a carteira espelho oferece aos investidores o retorno do índice do mercado no final do período, o segundo objetivo merece atenção especial devido à possibilidade de os gestores fazerem arbitragem de índice com as ações do mercado à vista, aplicando a estratégia de *cash and carry*. Hoje, os instrumentos derivativos, como por exemplo, opções e futuros, são mais utilizados para essa finalidade.

2.2.1. OBTER O RETORNO DO MERCADO

De acordo com a teoria de finanças, em especial na análise da média e da variância, um investidor que investe concomitantemente em uma carteira de risco representada pela carteira de mercado e em uma carteira livre de risco forma uma carteira ótima que domina todas as outras carteiras do mercado. A proporção que ele investe em cada ativo depende da utilidade marginal do investidor em relação ao risco e ao retorno: um

investidor amante do risco tende a compor uma carteira com maior participação do ativo com risco, enquanto que um investidor avesso ao risco tende compor uma carteira com maior participação de ativo livre de risco. Além disso, seguindo exemplo dos índices americanos que apresentaram um bom desempenho histórico (vide **Tabela 5**), de acordo com várias edições de melhores fundos da revista Exame (1997, 1998, 1999), também há indício forte de considerar o retorno de Ibovespa como um dos investimentos mais rentáveis quando comparado com os desempenhos de outros fundos (vide tabela 6). Deste modo, um fundo de índice Ibovespa fornece uma alternativa a mais para os investidores, principalmente para aqueles que possuem um plano de investimento mais longo.

	Retorno médio anual (em %)	Retorno alcançado em relação ao do mercado (em%)
Fundos com admin. Ativa	13,0%	85%
Fundos de índice	15,1%	99%

Fonte:Vanguard (1999)

Tabela 5: Retorno médio dos fundos americanos no período de 1983-1998

	Rentabilidade média nominal cumulada (em %)
Fundos balanceados	82,25
Fundos de ações	62,98
Ibovespa	92,11

Fonte: Exame (os melhores fundos de ivestimentos)

Tabela 6: rentabilidade média dos fundos em três anos (1996-1999)

Apesar de o índice alvo deste trabalho ser o Ibovespa, as técnicas poderão ser estendidas para replicar outros tipos de índice. Também é possível montar uma carteira espelho de índices particulares em determinado segmento da economia com maior crescimento e aplicar esta metodologia de replicação para aproveitar o retorno crescente.

Ademais, de acordo com *Worzel, Vassiadou-zeniou e Zenios* (1994), a metodologia de replicação também pode ser estendida para mercados de títulos de renda fixa. Na mesma linha, *Lamont* (1999) aplicou as técnicas de replicação para montar uma carteira espelho que lhe permitiu prever os comportamentos de algumas variáveis macroeconômicas. Por

fim, a metodologia ocupa uma posição fundamental quando o índice objeto é formado pelas ações de empresas pouco capitalizadas. *Keim* (1999) estudou a montagem de um fundo passivo que tem por objetivo reproduzir o retorno de um índice de mercado orientado pelos comportamentos de papéis das pequenas empresas. Segundo o autor, como uma parte da composição é feita por papéis das empresas pequenas, é necessária uma estratégia bem definida para contornar os problemas de liquidez e do elevado custo de transações desses papéis.

2.2.2. EFETUAR OPERAÇÕES DE ARBITRAGEM

Para atingir esse objetivo, o modelo teria que ser capaz, com acurácia, de formar uma carteira espelho com o menor número de papéis possível e com as menores volatilidades de *tracking error*, ou seja, um desvio esperado próximo de zero.

Existe uma relação forte entre os preços de contratos de futuros e o preço do objeto. O preço futuro converge para o preço à vista do objeto de negociação quando se aproxima o mês de vencimento de um contrato futuro. A força que está por trás desta relação é a força da arbitragem.

Os arbitradores procuram por lucros oferecidos pelas diferenças entre preços futuros e preços à vista e entre os contratos de futuros com datas de maturidades diferentes. À medida que os operadores exploram tais oportunidades de arbitragem, os preços de futuros ajustam-se e alcançam o patamar de equilíbrio onde as oportunidades de arbitragem não existem mais.

Segundo *Siegel & Siegel* (1990), a relação entre preços futuros e preços de mercado à vista, chamada de relação fundamental de arbitragem, pressupõe mercado perfeito e inexistência de transações e está expressa na seguinte equação:

Preços Futuros = Preços à vista + Juros

ou

$F_{t,T} = P_t(1 + r_{t,T})$

onde

$F_{t,T}$: preço futuro de data T na data t

P_t : preço a vista do ativo

$r_{t,T}$: taxa de juros de hoje t até o vencimento T

Há de se considerar, na prática da arbitragem, algumas imperfeições, tais como *Net Carry*. O *Net Carry* é uma taxa que expressa a rentabilidade real do investidor ao assumir uma posição de compra e de venda, ou seja, é uma taxa resultante da taxa de juros do mercado e de uma série de outras taxas intermediárias como por exemplo, a taxa de dividendos. Assim, pode-se expressar a nova equação de não arbitragem da seguinte maneira:

$$F_{t,T} = P_{t,T}(1 + r_{t,T}) - VF_T(\text{ pagamentos intermediários entre t e T})$$

$$F_{t,T} = P_{t,T}[1 + (r_{t,T} - \frac{VF_T(\text{ pagamentos intermediários entre t e T})}{P_t}$$

$$F_{t,T} = P_{t,T}[1 + \text{Net Carry}]$$

Onde :

VF_T é valor futuro de pagamentos intermediários entre t e T.

Quando esse equilíbrio é violado, surgem as oportunidades de arbitragem. Pode-se visualizar a equação de não arbitragem e as oportunidades de uma outra forma:

$$\Omega = F_{t,T} - [P_{t,T}(1 + NetCarry)]$$

Se $\Omega = 0$, então não há oportunidade de arbitragem

Se $\Omega \neq 0$, então há oportunidade de arbitragem

Com base na natureza da oportunidade de arbitragem, os arbitradores podem aplicar estratégia diferentes – conhecidas como estratégia de arbitragem - para obter o lucro. De acordo com *Siegel & Siegel* (1990):

- Se $\Omega > \mathbf{0}$, os preços futuros são maiores do que o preço à vista. Como ambos os preços convergem nas proximidades da data de vencimento, então os arbitradores podem aplicar a estratégia de ***cash-and-carry*** para aproveitar a oportunidade. Essa estratégia consiste em comprar o ativo, vender o contrato futuro e fazer a entrega.

- Se $\Omega < \mathbf{0}$, os preços futuros são menores que o preço à vista. Seguindo o mesmo raciocínio, os arbitradores podem aplicar a estratégia de arbitragem de ***reverse cash-and-carry*** para aproveitar estas oportunidades. Essa estratégia consiste em vender o ativo, comprar o contrato futuro e fazer a entrega.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, os arbitradores podem estender a estrutura de arbitragem pura através da estratégia de quase arbitragem e criar os ativos sintéticos.

Assim, um investidor pode criar, por exemplo, um ativo sintético equivalente a um *T-bill* comprado. Aplicando uma estratégia de ***cash-and-carry***:

*Estratégia de **cash-and-carry** = Posição comprada de T-bill sintético*
+ à vista – Futuro = + T-bill sintético
(o sinal positivo representa a posição comprada, e o sinal negativo, a posição vendida).

Da mesma forma, um investidor pode criar um ativo sintético equivalente a um *T-bill* vendido, fazendo a estratégia contrária ao caso anterior, ou seja, usando a ***reverse cash-and-carry***:

*Estratégia de **reverse cash-and-carry** = Posição vendida de T-bill sintético*
- à vista + Futuro = - T-bill sintético
(o sinal positivo representa a posição comprada, e o sinal negativo, a posição vendida).

Essas estratégias são bastante poderosas, pois permitem que um investidor, dependendo do sinal de Ω (conhecido no tempo t), crie ativos sintéticos variando combinações de posições. Por exemplo, pode-se criar uma posição comprada de um ativo no mercado à vista através da compra de uma *T-bill* e da compra de futuros. Essa estratégia é comprovada pela exame do fluxo de caixa da operação, conforme a expressão abaixo:

+ T-bill + Futuros = + à vista sintético

Se Ω < **0**, os contratos futuros são mais baratos que os ativos à vista. Isso significa que um ativo sintético à vista, quando por uma posição de compra de um futuro, tem um valor maior do que o ativo à vista. Logo, uma empresa que necessita de uma posição comprada de um ativo à vista deve optar pelo sintético em vez do ativo à vista verdadeiro. Isto porque o retorno é maior para um ativo sintético à vista do que para o ativo verdadeiro à vista. Assim, é vantajoso adotar esta estratégia no contexto de Ω < **0.**

Até aqui, não foram ainda considerados os custos de transação. Como o preço de compra e de venda de ativos, tanto no mercado à vista quanto no mercado futuro, é diferente, uma operação de arbitragem deve considerar esses "*transaction fees*" (**TF**) na equação fundamental de não arbitragem:

$$F_{t,T} = P_{t,T}[1 + NetCarry] \pm TF$$

O sinal dos custos de transação depende da estratégia adotada. Para a posição de ***cash-and-carry***, o sinal é positivo. Já para a posição oposta, o sinal é negativo. Essa mudança de sinal é uma conseqüência da interpretação da atribuição de custos para arbitragem. Por exemplo, a arbitragem ***cash-and-carry*** só existe se os preços futuros travados pela venda

a descoberto de posição de futuro cobrirem suficientemente tanto os custos de carregar o ativo, quanto as despesas de transações incorridas na montagem da arbitragem. Da mesma forma, na arbitragem ***reverse cash-and-carry***, o preço da venda a descoberto de um ativo menos os custos incorridos deve exceder o preço travado pela compra de futuros.

Portanto, a equação fundamental de não arbitragem sofre uma pequena alteração quando se considera os custos de transação:

$$\Omega = F_{t,T} - [P_{t,T}(1 + NetCarry) \pm TF]$$

Se $\Omega = 0$, não há oportunidade de arbitragem
Se $\Omega \neq 0$, há oportunidade de arbitragem

Mais especificamente,
Estratégia Cash - and - Carry: $\Omega^C = F_{t,T} - [P_{t,T}(1 + NetCarry) + TF]$
Estratégia Reverse Cash - and - Carry: $\Omega^R = F_{t,T} - [P_{t,T}(1 + NetCarry) - TF]$

Resumindo, nesse contexto só haverá oportunidade se $\Omega^C > 0$ ou se $\Omega^R < 0$

Na verdade, a arbitragem de índices é uma das aplicações do processo de arbitragem descrito acima. No entanto, para que haja arbitragem, é preciso que haja negociação do ativo objeto no mercado à vista. Exatamente essa é a questão central, pois não existe o índice à vista negociado nas Bolsas de Valores. Deste modo, a construção de uma carteira que imite o comportamento do índice torna-se essencial para a montagem de arbitragem de um índice.

A seguir apresentamos, a equação fundamental de não arbitragem de índice:

$$F_{t,T} = P_{t,T}(1 + r_{t,T}) - FV_T(\text{ Dividendos entre t e T})$$

ou

$$\Omega = F_{t,T} - P_{t,T}(1 + r_{t,T}) - FV_T(\text{ Dividendos entre t e T})$$

Se $\Omega = 0$, não há oportunidade de arbitragem,

Se $\Omega > 0$, usar estratégia de Cash - and - Carry para gerar o lucro de arbitragem,

Se $\Omega < 0$, usar estratégia de Reverse Cash - and - Carry para gerar o lucro de arbitragem.

Siegel & Siegel (1990) também esquematizaram esta estratégia da seguinte forma:

Posição de referência:	Investimentos em Letras do Tesouro (Investimento sem risco)	
$\Omega > 0$		
Arbitragem pura de Cash and Carry	**Quase - Arbitragem de Cash-and Carry**	**Preço ou Taxa relevantes**
1. Comprar a carteira espelho receber dividendos	1. Comprar a carteira espelho receber dividendos	compra
2. Tomar empréstimos para financiar a compra de carteira	2. Tomar empréstimos para financiar a compra de carteira	Venda
3. Vender futuro a descoberta	3. Vender Letras do Tesouro	Venda
Posição resultante:	Investimento nas Letras do Tesouro sintéticas	
Despesas de transação	TF=TF1+TF2+TF3	
1. Pagar TF1		
2. Pagar TF2		
3. Pagar TF3		

Tabela 7: A estratégia de *Cash and Carry*

Posição de referência:	Carregamento de carteiras de ativos	
$\Omega < 0$		
Arbitragem pura de Reverse Cash and Carry	**Quase - Arbitragem de Reverse Cash-and Carry**	**Preço ou Taxa relevantes**
1. Vender a decoberta a carteira espelho, pagar dividendos	1. Vender a decoberta a carteira espelho, pagar dividendos	Venda
2. Emprestar recursos proveniete da venda de carteira	2. Emprestar recursos proveniete da venda de carteira	Compra
3. Comprar futuros	3. Comprar futuros	Compra
Posição resultante:	Investimento na carteira sintética de ativos	
Despesas de transação	TF=TF1+TF2+TF3	
1. Pagar TF1		
2. Pagar TF2		
3. Pagar TF3		

Tabela 8: A estratégia de *Reverse Cash and Carry*

Portanto, tendo em vista as estratégias acima, pode-se listar algumas características chave da carteira espelho para que a arbitragem seja bem sucedida:

- A carteira deve ter um número pequeno de ações (carteira com menos de 10 papéis). Isto facilita a compra e a venda rápida da carteira replicada e implica menores custos de transação.

- A carteira espelho deve ser composta por ações com liquidez razoável. Devido à concorrência entre agentes do mercado, a oportunidade de arbitragem tem uma duração muito curta, por isso, é preciso que o ativo tenha liquidez, evitando, assim, o problema de diferença de preços entre a compra e a venda (custo de *spread*).

- O modelo de replicação deve ser bastante acurado. É preciso que o modelo consiga prever o comportamento de retorno do índice com menor desvio padrão possível. Um desvio muito grande, além de mostrar a ineficiência do modelo, gera incerteza na sua aplicação. Isto seria contrário ao espírito da arbitragem (obter lucro sem assumir risco).

Aplicação Prática

Dado que as carteiras espelho foram construídas de modo a imitar as mesmas características do índice alvo, ambas deveriam ter retornos iguais. Se, em determinado momento, houver uma diferença significativa entre os dois retornos no mercado à vista, há oportunidade de arbitragem.

Por exemplo, se a carteira espelho possui um retorno esperado mais elevado (o que significa que carteira à vista (espelho) está mais barata do que o futuro do índice, ou seja, $\Omega > 0$), o investidor deve realizar a arbitragem ***cash-and-carry***, isto é, comprar a carteira

espelho no mercado à vista, receber os dividendos provenientes dos ativos e vender o índice futuro.

No entanto, no mundo real, a operação de arbitragem é mais complexa, pois envolve os ajustes diários dos contratos futuros para determinar o preço justo. As correções das condições de arbitragem incorporando os ajustes estão descritas no artigo de *Feijó Filho (1995)*, que define o fator de desconto ajustado para compensar o efeito de ajuste diário.

CAPÍTULO 3

REVISÃO DOS MODELOS DE REPLICAÇÃO

Há inúmeros modelos matemáticos para formação ativa de carteiras. O objetivo deste capítulo é discutir as principais metodologias que podem ser aplicadas na formação de uma carteira espelho: (i) Replicação Plena, (ii) Modelos de equilíbrio, (iii) Modelo fatorial, (iv) Abordagem de programação quadrática e (v) Replicação sintética.

3.1. REPLICAÇÃO PLENA

3.1.1. Ponderação da Carteira Teórica

Uma forma simples de criar uma carteira espelho seria manter exatamente a mesma proporção das participações das ações que compõem a carteira teórica de um índice. A experiência americana mostra que o índice **S&P500**, num ano típico, como é citado no artigo de *Salomon Brother* (1995), sofre aproximadamente 13 mudanças de composição de papéis. Essas mudanças são resultado de fusões ou restrições surgidas de acordo com os critérios da Bolsa. Além disso, o *Standard & Poor's* faz um rebalanceamento dos índices toda vez que uma empresa emite ou recompra mais do que 5% das ações comuns disponíveis ao público. Verifica-se que, em média, ocorrem 100 mudanças deste tipo por ano.

Da mesma forma, para fazer uma replicação plena do Ibovespa, é imprescindível estudar:

- ✓ As causas da mudança de composição do Ibovespa;
- ✓ As alterações em um determinado período.

Uma outra variável importante para o sucesso da replicação é a freqüência de rebalanceamento da carteira espelho. O artigo do *Salomon Brother* (1995) enumera as freqüências mais utilizadas no mercado americano:

i) logo após as mudanças da composição da carteira ;

ii) mensal ou semanal de acordo com o critério dos administradores.

A escolha depende do ambiente de implementação e dos critérios de custos de transação e do tamanho de *tracking error* desejado.

Elton & Gruber (1995) apontam alguns problemas relacionados à replicação plena. Quanto maior a composição teórica de um índice, maior é a participação de pequenas empresas na sua computação. Como as pequenas empresas apresentam problemas de liquidez devido ao baixo volume de negociação, uma demanda e uma oferta relativamente grandes e súbitas podem provocar grandes variações no preço do papel, como por exemplo, a Lightpar. Por esse motivo, passa a ser mais custoso adquirir esses papéis na mesma proporção do índice. Assim, quanto maior a composição da carteira teórica de índice, menor será o interesse em fazer uma combinação exata das proporções.

Como já foi dito no capítulo anterior, a carteira teórica do Ibovespa é composta apenas por aproximadamente sessenta papéis, entre os quais alguns com participação muito elevada. Apesar da tendência de diminuição da concentração, o Ibovespa ainda é uma carteira altamente concentrada se comparada com os índices do mercado americano, como por exemplo, S&P500. Essa característica facilita a replicação plena dessa carteira, mesmo considerando os problemas com papéis de pequenas empresas. Ademais, no Brasil, os custos de transação do mercado acionário são extremamente baixos quando comparados com outros mercados do mundo.

3.1.2. Amostra estratificada (*Stratified Sampling*)

Essencialmente, esse método utiliza uma carteira proporcional em termos de algumas característica de um índice alvo para alcançar os mesmos retornos do índice. *Croxton & Cowden* (1952) descreveram a idéia original da amostra estratificada. Essa técnica decompõe a população em subgrupos, ou estratos, antes da extração da amostra. Retira-se, de cada estrato, uma amostra ao acaso. Geralmente, as dimensões da amostra de cada estrato são proporcionais à sua participação relativa na população. O reconhecimento da existência dos estratos e a seleção de amostras extraídas ao acaso introduzem elementos suplementares de controle na escolha da amostra e concedem maior segurança à representatividade. Esta representatividade cresce proporcionalmente ao aumento do número de estratos. Da mesma forma, os autores também afirmam que, comparando as amostras de tamanhos idênticos e extraídas da mesma população, a amostra estratificada é mais precisa do que a amostra retirada ao acaso.

Em outras palavras, uma *stratified sampling* seleciona um conjunto de títulos que melhor representa o universo através de construção de células ou estratos que comportam duas ou mais dimensões. De acordo com *Salomon Brother*(1995) e *Chan, Karceski and Lakonishok* (1999), as dimensões mais importantes são a capitalização de mercado (tamanho) e o setor. E, para uma aplicação global, uma terceira dimensão seria o país [illegible]de os títulos são comercializados.

[illegible]o o artigo de *Chan, Karceski and Lakonishok (1999)*, os dois modelos - o modelo [illegible] e o modelo de setor e de tamanho - são apropriados para vincular [illegible]lmente a composição de setor e o tamanho do índice. No modelo setorial, o [illegible]etores que compõem o índice é defindo. Neste caso, a contribuição [illegible]ada setor em relação à capitalização total de mercado de índice é [illegible]e ser mantida para ser alocada entre as ações disponíveis para a [illegible]va carteira.

3.1.2. Amostra estratificada (*Stratified Sampling)*

Essencialmente, esse método utiliza uma carteira proporcional em termos de algumas característica de um índice alvo para alcançar os mesmos retornos do índice. *Croxton & Cowden* (1952) descreveram a idéia original da amostra estratificada. Essa técnica decompõe a população em subgrupos, ou estratos, antes da extração da amostra. Retira-se, de cada estrato, uma amostra ao acaso. Geralmente, as dimensões da amostra de cada estrato são proporcionais à sua participação relativa na população. O reconhecimento da existência dos estratos e a seleção de amostras extraídas ao acaso introduzem elementos suplementares de controle na escolha da amostra e concedem maior segurança à representatividade. Esta representatividade cresce proporcionalmente ao aumento do número de estratos. Da mesma forma, os autores também afirmam que, comparando as amostras de tamanhos idênticos e extraídas da mesma população, a amostra estratificada é mais precisa do que a amostra retirada ao acaso.

Em outras palavras, uma *stratified sampling* seleciona um conjunto de títulos que melhor representa o universo através de construção de células ou estratos que comportam duas ou mais dimensões. De acordo com *Salomon Brother*(1995) e *Chan, Karceski and Lakonishok (*1999), as dimensões mais importantes são a capitalização de mercado (tamanho) e o setor. E, para uma aplicação global, uma terceira dimensão seria o país onde os títulos são comercializados.

Segundo o artigo de *Chan, Karceski and Lakonishok (1999),* os dois modelos - o modelo de setor e o modelo de setor e de tamanho - são apropriados para vincular proporcionalmente a composição de setor e o tamanho do índice. No modelo setorial, o número de setores que compõem o índice é defindo. Neste caso, a contribuição percentual de cada setor em relação à capitalização total de mercado de índice é computada e deve ser mantida para ser alocada entre as ações disponíveis para a formação de uma nova carteira.

Já no modelo de setor e de tamanho, cada setor deve ser dividido em dois conjuntos contendo ações que estão acima ou abaixo da média da capitalização das empresas participante no mercado de Bolsa. Em cada classificação de setor-tamanho, deve-se proceder uma formação de carteira igual à do modelo anterior.

3.2. MODELOS DE EQUILÍBRIO (CAPM E APT)

Muitos administradores de fundos de índices não mantêm cada ação na proporção teórica do índice alvo, mas escolhem a outra alternativa para evitar os problemas de replicação plena. Essa é uma tentativa de redução dos custos incorridos na montagem de uma carteira completa de índice padrão. De fato, os administradores que optam pela administração passiva procuram um ponto ótimo para equilibrar o *tracking error* com o custo de montagem.

Há várias formas de fazer replicação com menos papéis do que a carteira teórica do índice. *Elton & Gruber* (1995) e *Titman* (1997) apontam o uso de modelos de equilíbrio de mercado para construção da carteira espelho. Segundo *Stern (1995)*, os modelos de equilíbrio calculam propriedades de pontos de equilíbrio do mercado pressupondo um mercado eficiente e com expectativas homogêneas. Sendo assim, todos investidores racionais possuiriam a mesma carteira de ativos com riscos.

Há dois modelos clássicos de equilíbrio: *Capital Asset Pricing Model* (**CAPM**) e *Arbitrage Pricing Theory* (**APT**). O modelo CAPM pressupõe que todos investidores utilizam a abordagem de risco-retorno de Markowitz para formar uma carteira de ativos, ou seja: 1) há um ativo sem risco acessível a todos investidores que podem emprestar e tomar emprestado a uma mesma taxa e 2) todos investidores estão de acordo com retorno esperado e a matriz de covariância dos retornos dos ativos de risco no mercado. O

modelo CAPM usa o parâmetro **beta** para medir o inter-relacionamento entre o movimento de retornos de um ativo particular e a carteira do mercado. Esse movimento será recompensado na forma de retorno para investidores. Em razão da diversificação da carteira, não haverá prêmio para riscos não sistemáticos. Já o modelo de APT defende um estudo mais detalhado no tratamento do risco sistemático. Diferentemente do modelo de CAPM que trata o risco do mercado como um elemento único do risco sistemático, o APT procura dividir o risco sistemático em vários fatores do mercado, como por exemplo, a expectativa da inflação e o crescimento do PIB. Mais detalhes sobre esses dois modelos encontram-se no **Anexo II.**

3.3. MODELO FATORIAL

O modelo fatorial é um modelo de regressão linear que tenta relacionar, medir e investigar a sensibilidade de retorno de um papel a fatores externos. No caso da replicação (construção de uma carteira espelho), pode-se primeiro medir os coeficientes da sensibilidade do índice alvo em relação a um conjunto de fatores pré-determinados e depois fazer o mesmo para todos ativos. Por fim, pode-se elaborar uma carteira espelho de tal forma que os coeficientes dessa carteira sejam iguais aos do índice alvo. A matemática requerida é a resolução de um sistema de equações lineares.

Titman (1998) dá uma receita passo a passo para a construção de uma carteira espelho. A seqüência de passos é a seguinte:

a) Determinar o número de fatores relevantes;

b) Identificar os fatores;

c) Calcular os betas desses fatores do índice alvo;

d) Construir uma equação linear para cada beta de fator. No membro esquerdo da equação estão os betas das ações que compõem a carteira proporcionalmente ao seu peso na carteira. No membro direito da equação, está o beta do fator alvo;

e) Resolver a equação para determinar os pesos de carteira espelho, tendo certeza de que a soma total dos pesos seja igual a um.

É possível dividir o modelo fatorial em três abordagens principais:

- Modelo de Único Fator;
- Modelo Multifatorial;
- Modelo de Fator Puro.

3.3.1. Modelo de Único Fator

Uma carteira espelho pode ser criada usando o modelo de fator único através da combinação de uma carteira que tenha o mesmo do **beta** do índice alvo e da carteira que tenha o menor risco residual para um dado tamanho. O modelo de único fator (**F**) é especificado assim:

$$\mathrm{R} = \overline{\mathrm{R}} + \beta \mathrm{F} + \varepsilon$$

Onde :

R = retorno de um ativo;

$\overline{\mathrm{R}}$ = retorno esperado;

β = sensibilidade ao fator F;

ε = termo residual.

Os retornos do ativo individual *i* são expressos da seguinte forma :

$$R_i = \overline{R}_i + \beta_i F + \varepsilon_i$$

E o retorno de carteira (R_p) é a média ponderada dos retornos dos ativos individuais :

$$R_p = \overline{R}_p + \beta_p F + \varepsilon_p$$

onde.

$$\overline{R}_p = X_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2 + \ldots + X_N \overline{R}_N$$

$$\beta_p = X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + \ldots + X_N \beta_N$$

$$\varepsilon_p = X_1 \varepsilon_1 + X_2 \varepsilon_2 + \ldots + X_N \varepsilon_N$$

Apesar da aparência simples na estimação do beta, na verdade, há várias formas de **estimar o Beta.** *Elton e Gruber*(1995) afirmam que é possível estimar o **beta** através de betas históricos. Essa é a forma convencional, em que se calcula uma regressão simples com base em duas séries históricas. A variável dependente é o retorno do ativo enquanto que a variável independente é o retorno do mercado.

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

Ou,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma^2_m} = \frac{\sum_{t=1}^{T}[(R_{it} - \overline{R}_{it})(R_{mt} - \overline{R}_{mt})]}{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - \overline{R}_{mt})^2}$$

Os mesmos autores e os outros pesquisadores como por exemplo *Klemkosky* e *Martin* (1975) e *Rosenberg* (1976) discutiram o viés da estimativa e concluíram que o **beta** histórico de uma carteira ampla de ativos é um bom estimador para o beta futuro. No entanto, o beta histórico de um ativo individual não possui o mesmo grau de previsão, pois contém pouquíssimas informações sobre o **beta** futuro desse ativo. Esse fenômeno é provocado por uma constante mudança no risco desse ativo em relação ao mercado. Uma outra razão é que, a cada período, o componente de erro aleatório é incorporado no modelo de estimação do beta. Por esse motivo, os erros aleatórios associados a essa instabilidade geram uma incapacidade de previsão do **beta** de um ativo. Assim, como o beta calculado da carteira de replicação é resultado da combinação linear dos betas de cada ativo que compõe a carteira, se estes apresentam comportamentos instáveis e altamente voláteis, a estimativa da carteira espelho para beta calculado igual a 1 pode ser comprometida. É preciso, portanto, fazer uma correção desses betas dos ativos quando são instáveis.

Segundo a literatura acadêmica, há inúmeras formas de correção. *Elton e Gruber*(1995) destacam duas principais técnicas: (i) Técnica de Blume; e (ii) Técnica de Vasicek's :

i) Técnica de Blume

Blume utiliza a relação entre os betas de períodos diferentes para ajustar o estimador de beta futuro. Ele supõe que o beta no período de previsão aproxima-se mais de valor 1 do que as estimativas geradas pelos dados históricos. Dessa forma, Blume ajusta o beta histórico calculado de modo a incorporar a essa tendência, utilizando-se os coeficientes de ajuste que são definidos pela regressão linear entre os betas de dois períodos anteriores (cada um deles com cinco anos de duração) para estimar o Beta do próximo período. Conclui o autor que este modelo pode ser aplicado tanto para o beta da carteira como para o beta de um ativo.

ii) Técnica de Vasicek´s

A técnica adota a hipótese de que o verdadeiro beta do período de previsão tende a ficar mais próximo da média de todos betas do que a estimativa de beta histórico de um único ativo. Uma vez definida essa hipótese, ajusta-se cada beta para essa média geral. Baseado nos resultados dos testes, uma forma de ajuste sugerida pelo autor é estabelecer um peso para o beta histórico e um outro peso para a média dos betas, em seguida, somar os dois para obter um beta estimado para o futuro. A questão central é definir essa proporção para cada ativo ou carteira. *Vasicek* estabelece uma regra para atribuir o peso: a proporção da média do beta será a variância do beta histórico sobre o total de variâncias. Dessa forma, o beta ajustado é representado por

$$\beta_{i2} = \frac{\sigma^2_{\beta i1}}{\sigma^2_{\bar{\beta}1} + \sigma^2_{\beta i1}} \bar{\beta}_1 + \frac{\sigma^2_{\bar{\beta}1}}{\sigma^2_{\bar{\beta}1} + \sigma^2_{\beta i1}} \beta_{i1}$$

onde,

$\bar{\beta}_1$: média dos betas;

β_{i1} : beta histórico do ativo i;

$\sigma^2_{\beta i1}$: variância do beta histórico de i;

$\sigma^2_{\bar{\beta}1}$: variância da média dos betas.

Portanto, na prática, os investidores adotam uma das técnicas da estimação do beta e um índice amplo de mercado de ações – como o **S&P500** – e, no caso brasileiro, o Ibovespa, como o único fator. Dessa forma, usando o modelo de um único fator (retorno do Ibovespa), pode-se expressar o modelo de mercado conforme:

$$R = \overline{R} + \beta(R_{Ibovespa} - \overline{R}_{Ibovespa}) + \varepsilon$$

Existe uma semelhança muito grande entre o modelo de único fator e o modelo **CAPM**. Segundo *Ross* (1995), no **CAPM**, o **beta** mede a sensibilidade de um título em relação aos movimentos da carteira de mercado. Já no modelo de um único fator **APT**, o **beta** de um título mede a sua sensibilidade em relação a esse fator. Considerando uma carteira bem diversificada, o efeito de risco não sistemático é mínimo (próximo de zero) e a carteira de mercado é perfeitamente correlacionada com o fator único. Isto significa que a carteira de mercado é uma versão ampliada ou reduzida do fator. Com um ajuste apropriado, pode-se tratar a carteira de mercado como se fosse o próprio fator.

3.3.2. Modelo Multifatorial

A fórmula funcional do modelo multifatorial (modelo de fator com mais de um fator comum) é dada pela equação abaixo:

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \beta_{i1}\tilde{F}_1 + \beta_{i2}\tilde{F}_2 + \ldots + \beta_{ik}\tilde{F}_k + \tilde{\varepsilon}_i$$

A hipótese que está por trás desta equação é a de que os retornos de um título são gerados por um número relativamente pequeno de fatores comuns (fatores de riscos sistemáticos) simbolizados por **F**´s.

Os **F**'s também podem ser interpretados como uma *proxy* de novas informações sobre as variáveis macroeconômicas e microeconômicas, tais como produção industrial, inflação, taxa de juros, preços de óleo, e volatilidade dos preços das ações. Os **F**'s assumem, por hipótese, uma média igual a zero. Isto traz consigo o benefício conveniente de permitir que os β's sejam interpretados como uma média esperada dos retornos dos títulos.

Para completar a especificação do modelo, acrescenta-se os seguintes pressupostos básicos:

a) ε_i está normalmente ditribuída;

b) $E(\varepsilon_i) = 0$;

c) $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$;

d) $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \; (i \neq j)$

e) Não existe nenhuma relação linear exata entre qualquer das variáveis independentes.

Quanto à construção de fatores, *Titman & Grinblat* (1998) sugerem três caminhos diferentes.

Métodos de estimação	Vantagens	Desvantagens
Análise Fatorial Procedimento puramente estatistico para estimar fatores e sensibilidade de retorno para serem aplicados no modelo	Oferece a melhor estimativa de fatores dado pressupostos	A pressuposição de que covariâncias são constantes é essêncial, e provavelmente ela é violada na realidade; Os fatores criados não possuem nomes e dificultam a interpretação dos mesmos.
Variáveis Macroeconômicos Usar a serie temporal macroeconômica que capture as mudanças em produtividade, taxa de juros, e inflação como proxies para fatores que geraram os retornos da ação	Oferece a facilidade para a interpretação de fatores	Implica que os fatores apropriados sejam as mudanças não-antecipadas nas variáveis macroeconômicas. Na pratica, essas mudanças são dificeis de serem medidas.
Caracteristicas da empresa Usar as caracteristicas da empresa, tais como tamanho e setor, que são bastante conhecidas para relacionar com o retorno da ação.	Mais intuitiva que a analise fatorial da carteira; a formação não requer a covariância constante	O uso de estimação histórica pode não explicar os retorno futuros.

Tabela 9: método de estimação dos fatores

Além desses três métodos para selecionar os fatores, no caso de replicação de índices, pode-se também usar os índices locais de outra natureza para compor o conjunto de fatores que fazem a parte do modelo. Pode-se, por exemplo, utilizar o índice do setor elétrico (IEE) ou Índice Brasil (IBX) e estudar a influência desse indicador no comportamento do retorno do Ibovespa, uma vez que os mesmos ativos que participam do Ibovespa também participam a composição de outros índices do mercado.

A globalização do mercado de capitais permitiu que os investidores tivessem acesso aos índices de mercados de diversos países. Através dessa mesma técnica, é possível estudar o impacto de outros índices de mercado sobre o movimento do Ibovespa, definindo as sensibilidades de cada um deles e combinando-os de tal forma que o resultado seja uma carteira espelho do Ibovespa. A vantagem de se utilizar os diversos índices do mercado mundial é que cada um deles é composto por uma carteira bastante diversificada. Por esse motivo, as relações entre os índices são mais estáveis, conseqüentemente, um melhor resultado é atingido. Embora a idéia de usar outros índices para compor os quadros de fatores explicativos seja bastante fácil, na prática, os administradores devem solucionar o problema do elevado grau de multicolinearidade na especificação do modelo multifatorial devido à violação do pressuposto de que as variáveis independentes não estão correlacionadas entre si.

Em seguida, apresenta-se o procedimento algébrico para derivar uma carteira espelho:

Dado o K - fator modelo (ou fator modelo com K fatores distintos) de equação

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \beta_{i1}\tilde{F}_1 + \beta_{i2}\tilde{F}_2 + \ldots + \beta_{ik}\tilde{F}_k + \tilde{\varepsilon}_i$$

Para uma carteira composta de N títulos com peso x_i para cada ação i, o retorno é dado por :

$$\tilde{R}_p = x_1\tilde{r}_1 + x_2\tilde{r}_2 + \ldots + x_N\tilde{r}_N$$

a equação de fator é dado por :

$$\tilde{R}_p = \alpha_p + \beta_{p1}\tilde{F}_1 + \beta_{p2}\tilde{F}_2 + \ldots + \beta_{pk}\tilde{F}_k + \tilde{\varepsilon}_p$$

Onde,

$$\alpha_p = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots. + x_N\alpha_N$$
$$\beta_{p1} = x_1\beta_{11} + x_2\beta_{21} + \ldots + x_N\beta_{N1}$$
$$\beta_{p2} = x_1\beta_{12} + x_2\beta_{22} + \ldots + x_N\beta_{N2}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\beta_{pK} = x_1\beta_{1K} + x_2\beta_{2K} + \ldots + x_N\beta_{NK}$$
$$\tilde{\varepsilon}_p = x_1\tilde{\varepsilon}_1 + x_2\tilde{\varepsilon}_2 + \ldots. + x_N\tilde{\varepsilon}_N$$

Para o beta alvo que diz respeito ao primeiro fator no modelo K-fator, a equação seria:

$x_1\beta_{11} + x_2\beta_{21} + \ldots + x_N\beta_{N1}$ = Beta alvo no fator 1

$x_1\beta_{12} + x_2\beta_{22} + \ldots + x_N\beta_{N2}$ = Beta alvo no fator 2

Para terminar o procedimento, adiciona-se mais uma equação, cuja soma dos pesos é igual a 1:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = 1$$

Finalmente, resolvendo N equações para os pesos de ações, $x_1, x_2..x_N$, a carteira espelho com fator beta apropriado é construída.

3.3.3. Modelo Fatorial de Fator Puro

O modelo de carteira de fator puro é uma extensão da aplicação do modelo fatorial. De acordo com *Titman & Grinblatt* (1998), as carteiras de fator puro são carteiras com sensibilidade igual a 1 para o fator objetivo e igual a zero para os demais fatores do modelo. Pelo fato de a formação das carteiras ser calcada em uma base diversificada de ativos, a figura de risco específico desaparece, facilitando a construção. No modelo de n-fatores, é possível construir **n** carteiras de fator puro, uma para cada fator, de qualquer uma das **n+1** carteiras bem diversificadas.

3.3.4. Comentários sobre os modelos fatoriais

Em geral, os acadêmicos preferem o modelo multifatorial ao modelo de fator único para montar uma carteira espelho. Segundo *Titman & Grinblatt* (1998), o modelo de mercado de fator único oferece uma descrição simples de retornos de ações, mas, infelizmente, é muito irreal. Quando os papéis são sensíveis ao risco de taxa de juros, assim como aos riscos do mercado e aos riscos específicos da empresa, a taxa de juros gera correlações entre os resíduos de mercado. Dessa forma, mais de um fator comum gera os retornos de ação e, por esse motivo, o uso de modelo multifatorial é mais recomendado. *Elton & Gruber* (1995) também defendem essa idéia. O modelo multifatorial desempenha um papel importante para uma melhoria da administração passiva, uma vez que espelha melhor um índice e permite construir uma carteira apropriada para um determinado objetivo. Várias razões são apontadas:

- Primeiro: o modelo multifatorial contorna um dos problemas de modelo fatorial único, pois utilizando apenas o retorno de mercado, pode-se correr o risco de não

considerar outros fatores que afetam a carteira. Por exemplo, a sensibilidade em relação a inflação. Pode-se usar um exemplo de *Elton & Gruber* (1995) mostram que cada setor reage de maneira diferente a fatores comuns, mesmo que tenham a mesma sensibilidade à variação do retorno de mercado. Os retornos desses setores podem variar de forma diferente caso haja um impacto nos outros fatores comuns. Alguns exemplos de fatores: tamanho da empresa, valor contábil, valor de mercado, geração de dividendos, geração de fluxo de caixa e prêmio para inadimplência.

- Segundo: os autores também apontaram que, em geral, quanto menor o número de ações numa carteira espelho, menor é a probabilidade de a carteira conseguir uma combinação precisa dos fatores comuns que afetam a carteira e o índice e maior é a superioridade de modelos multifatoriais sobre os modelos de fator único. Isto é verdade porque mudanças não esperadas nos fatores implícitos terão impactos diferentes sobre o risco residual em um período futuro se a sensibilidade para esses fatores implícitos não permanecer constante.

- Terceiro: geralmente, as carteiras são formadas para servir como uma carteira arbitrária para negociações de opções e futuros. As empresas formam pequenas cestas de ações (25 ou 50) e podem negociá-las ativamente, mudando suas posições no mercado. O número de ações nestas cestas deve ser mantido em níveis baixos para permitir freqüentes compras e vendas de ações. O uso de modelos multifatorial é recorrente nesses casos.

- Quarto: o modelo *multi-index* é mais flexível, ou seja, pode-se melhorar os desempenhos das carteiras espelho sob determinadas condições exógenas impostas. Um investidor pode ajustar um índice com certas ações de uma carteira de acordo com seus fatores específicos. Isso depende da cultura de cada país ou de cada empresa.

- Quinto: o desejo de combinar ou ajustar a carteira administrada que exclui certos tipos de ações por motivos jurídicos ou morais. As causas sociais ou algumas preferências dos administradores freqüentemente restringem o conjunto de papéis que podem ser utilizados para ajustar um índice. Por exemplo, foi bastante comum, nos últimos dez anos, os fundos de pensão declararem não terem papéis de empresas de tabaco.

- Sexto: quanto ao modelo de fator puro, a principal vantagem é a facilidade de interpretação e de implementação de uma carteira espelho.

3.4. ABORDAGEM DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA

3.4.1. Modelos de otimização

Essa abordagem emprega o uso de programação quadrática para encontrar uma estratégia eficiente de investimentos. A idéia original está descrita no livro **Portfolio Selection** de *Henry Markowitz* (1959). Ao contrário de *Sharpe* (1964), que considerou somente o risco do mercado (**beta**) para o modelo de precificação, *Markowitz* incorporou o risco total para a composição de carteiras eficientes. A essência dessa técnica é encontrar a fronteira eficiente através da análise de média e de variância. Um conjunto eficiente é determinado pela minimização de risco para qualquer nível de retorno esperado (2). Em outras palavras, ao se especificar um determinado nível de retorno, minimizando o risco e restringindo a soma da participação de todos títulos a um (1), obtém-se um ponto na fronteira eficiente. Como não se impôs qualquer restrição positiva para a participação das ações, a venda descoberta é permitida, conforme a expressão:

Minimizar $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$

Sujeito a

1) $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$ (a soma das proporções de todas ações da carteira é igual a um)

2) $\sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i = \overline{R}_P$ (dado o retorno esperado)

Onde :

X_i = proporção da ação i na carteira;

R_i = retorno da ação i;

$\overline{R}$ = retorno esperado;

σ_p^2 = variância da carteira p;

σ_{ij} = covariância de retorno do título i e do título j.

A formulação acima é considerada nos cálculos envolvendo a minimização da variância de um portfolio. Através da programação quadrática deriva-se carteiras eficientes. Estas carteiras são divididas em carteiras com posições positivas, posição zero e posição negativa. No entanto, pode-se acrescentar várias outras restrições para esse modelo, dependendo da realidade da administração da carteira. A restrição relativa ao problema de venda a descoberto é dada por

$X_i > 0$

Reconhecendo o grande risco envolvido na posição de venda a descoberto (que está diretamente ligada ao grau de alavancagem) a prática é proibida por muitos investidores institucionais ou não. A participação das ações tem, deste modo, os sinais positivos.

Além disso, dependendo do ambiente de investimento (por escolha ou por força de legislação), pode-se adicionar outros tipos de restrições para encontrar a carteira ótima. É possível, por exemplo, que os administradores desejem que o nível de dividendos gerados pela carteira seja maior do que um certo nível D, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i d_i > D$$

Finalmente, um outro tipo de restrição freqüentemente imposta é relacionado com os limites superiores ou inferiores de participação de determinada ação em uma carteira. É possível, também, construir as restrições sobre o montante de giro na carteira e considerar os custos de transação no cálculo de retorno.

Pode-se estender a metodologia de minimização de variância para replicação de um índice. Num contexto de administração passiva de carteira, a questão mais importante é o controle de desvios da carteira espelho em relação ao índice alvo.

O objetivo é, portanto, minimizar a volatilidade do *tracking error* da carteira, dado um certo nível de desvios esperados. Isso também constitui uma análise de média e variância. Porém, em vez de encontrar a carteira com menor variância de retorno total para um dado nível de retorno esperado que esteja situado na fronteira eficiente (*Markowitz, 1959*), os administradores de estratégia passiva são obrigados a encontrar uma carteira de mínima variância de *tracking error* para um dado nível de desvio esperado em relação ao índice alvo.

Há várias formas para obter a carteira espelho ótima. Basicamente os modelos são semelhantes, diferenciando-se de acordo com a função objetiva que enfoca diferentes formas de calcular o *tracking error*.

3.4.1.1. A Carteira de Mínima Variância Global (MVG)

A carteira de Mínima Variância Global representa a carteira cuja composição tem a menor variância possível sob a análise de média e variância no conjunto da carteira eficiente. No caso da replicação, no lugar da volatilidade dos retornos, a preocupação está centrada na minimização de volatilidade do *tracking error*, sem um nível de *tracking error* pré definido.

Um motivo que viabiliza a aplicação deste modelo é a forma de entrada de dados. Em vez de utilizar o retorno dos papéis, utiliza-se o excesso de retorno de um papel em relação ao retorno do Ibovespa. Considerando este último como o retorno do mercado, os excessos de retornos representarão o prêmio pelo risco específico de cada ação. Quando o investidor possui uma carteira muito grande, o excesso positivo de alguns papéis tende a ser compensado pelo sinal negativo dos outros papéis e a média dos excessos de retornos tende a zero. Portanto, é provável que o retorno da carteira de MVG esteja muito próximo do eixo horizontal.

3.4.1.2. Modelo de *Black*

Segundo *Alexander* (1986), *Black (1972)* desenvolveu um modelo idêntico ao de Markowitz em termos de formulação, exceto na inclusão da restrição de não-negatividade dos pesos. Da mesma forma que os do modelo anterior, os ajustes necessários dos dados de entrada no modelo são realizados para montagem de carteira espelho.

Na década de 80, o próprio *Markowitz* (1987) também apresentou um modelo que incorpora a minimização de volatilidade do *tracking error*, que é gerada pela diferença entre a proporção investida nos elementos da carteira espelho e a carteira *benchmark* (a carteira teórica do índice alvo) multiplicada pelas relações de covariâncias entre cada um dos pares da carteira. Assim, o autor formalizou a otimização na seguinte maneira:

Minimizar x'Vx

x

sujeito as restrições,

x'1 = 0;

x'R = G.

Como x = q_P-q_B, pode-se representar o problema da seguinte forma:

$$Min(q_p - q_B)'V(q_p - q_B)$$

Sujeito a

$$(q_p - q_B)'1 = 0$$

$$(q_p - q_B)'R = G$$

onde:

x: vetor coluna (N x 1) que representa a diferença entre a proporção investida nos elementos da carteira espelho e a carteira de referência.
V: A matriz de covariância (N x N)
N: o número de ativos individuais no universo do administrador;
q: Um vetor (N x 1) apresentando os pesos dos papéis da carteira; .
G: A meta ou desempenho esperado em relação à carteira alvo, ou o ganho esperado acima do retorno da carteira de referência;
R: Retorno dos ativos

Na mesma linha de pesquisa, *Chan, Karceski e Lakonishok* (1999) também apresentam um modelo semelhante que usa o modelo fatorial para estimar a variância e covariância de excesso de retorno dos ativos em relação ao S&P500.

O processo de geração de *tracking error* é representado por:

$$r_{pt} - r_{Bt} = \beta_{p0} - \beta_{B0} + \sum_{j=1}^{K}(\beta_{pj} - \beta_{Bj})f_{jt} + (\varepsilon_{pt} - \varepsilon_{Bt})$$

onde:

r_{pt} e r_{Bt} : os retornos da carteira espelho e da carteira *benchmark* , respectivamente;

β's : as sensibilidades dos fatores *f* ;

f_{it} : fatores explicativos j no tempo t.

Geralmente, uma carteira espelho que possui uma sensibilidade de fator semelhante à sensibilidade de fator da carteira do *benchmark* tem melhor desempenho na minimização da volatilidade de excesso do retorno τ_p.

Em seguida, utiliza-se a programação quadrática para encontrar a carteira com mínima volatilidade de *tracking error*. Os pesos da carteira são restritos de modo a serem não-negativos e não serem maiores que 2%.

$$Min\,\tau_p = \sum_{j=1}^{K} (\beta_{pj} - \beta_{Bj})^2 \omega_j + \psi_p$$

sujeito a :

$0 < w_j < 2\%$

onde :

w_j = participação do ativo j na carteira;

φ_p = elemento de erro.

3.4.1.3. Crítica ao uso do modelo

Roll (1992) faz um alerta sobre o uso indiscriminado desse modelo para encontrar uma carteira ótima. Ele provou que a minimização de *tracking error* não leva necessariamente a uma carteira eficiente. Dependendo da eficiência da carteira do índice alvo, essa metodologia pode produzir uma carteira subótima. Em outras palavras, se o retorno do índice alvo não se localiza na fronteira eficiente, é possível encontrar uma carteira com *tracking error* maior, mas, com um retorno esperado maior e uma volatilidade menor.

3.4.2. Modelos de Estimação de Covariância

Como já foi visto para a formulação da carteira ótima, a matriz de covariância é um "insumo" muito importante para alimentar a função objetiva de minimização da covariância. Por isso, tanto para calcular a carteira de mínima variância na análise de média e de variância quanto para montar a carteira de mínimo *tracking error*, exige-se que se estime a covariância para cada par de títulos. Ou seja, o fator chave para sucesso da replicação é o poder de previsão da estimativa de matriz de covariância.

O artigo do *Salomon Brother* (1995) lista os principais métodos:

3.4.2.1. Retornos Históricos

Essa é a abordagem mais direta e prática. Calcula-se as covariâncias através de retornos históricos. No entanto, muitos estudos demonstraram a instabilidade da matriz de covariância histórica. A desvantagem consiste no fato de ser baseada em dados passados e ser sensível às observações *outliers*. As covariâncias históricas proporcionam previsões menos satisfatórias das covariâncias futuras porque refletem perturbações aleatórias e efeitos sistemáticos que não se repetem no futuro. Além disso, devido à formula da covariância que utililiza a média aritmética, *outliers* provocam viés significativo na estimativa. Por exemplo, a amostra de covariância entre as ações i e j é dada por:

$$\text{cov}_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(r_{it-k} - \bar{r}_i)(r_{jt-k} - \bar{r}_j)$$

na qual :

r_{it} = retorno excedente de ação i no mês t (n observações);

$\bar{r}_i$ = excesso médio de retorno do ativo i;

$\bar{r}_j$ = excesso médio de retorno do ativo j.

3.4.2.2. Modelo de fator

Assim como nos modelos de replicação, aplica-se o modelo fatorial para prever as covariâncias. Segundo *Chan, Karceski e Lakonishok* (1999), a formulação do modelo fatorial para estimar a covariância é dada por:

$$r_{it} = \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \beta_{ij} f_{jt} + \varepsilon_{it}$$

onde :

r_{it} = retorno da ação i no tempo t;

f_{it} = j - ésimo fator comum no tempo t;

ε_{it} = termo residual;

β_{ij} = representa a sensibilidade de ação i em cada um dos K fatores.

Supondo que não haja correlação entre os fatores e os resíduos e nem autocorrelações entre os resíduos, calcula-se a covariância:

$$Cov(r_i, r_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

3.4.2.3. Técnica de GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heterokedasticity*)

Ao contrário dos modelos que estimam a covariância como um subproduto do retorno, a técnica do GARCH modela diretamente a variância e a covariância. Essa abordagem tem diversas vantagens. O mais importante é que o modelo capta a reversão da média que conduz mudanças nas volatilidades e nas correlações. O modelo também incorpora, de

forma diferente, os dados históricos de cada papel, revelando o comportamento recente de dados nas previsões de covariâncias. Por essa razão, as covariâncias de GARCH são mais dinâmicas e mais realistas do que aquelas geradas por outras abordagens.

3.5. REPLICAÇÃO SINTÉTICA (uso de futuros e opções)

Essa é uma técnica largamente utilizada pelos analistas do mercado para replicar o comportamento de um índice. Neste caso, o objeto é o Ibovespa.

Os preços de opções e de futuros comportam-se da mesma forma que o do Ibovespa até seu vencimento, pois qualquer quebra de trajetória pode ser considerada como uma oportunidade de arbitragem pelos agentes econômicos. Em outras palavras, os investidores podem monitorar o comportamento desses derivativos para tomar posição combinada de compra ou de venda a fim de garantir o lucro de arbitragem.

A simplicidade de transacionar papéis e os baixos custos de transação gerados pela aplicação desse modelo à vista, favorecem o seu amplo uso para estratégia passiva.

Uma outra maneira de formar uma carteira espelho é aplicando os modelos fatoriais, utilizando-se os retornos dos derivativos de outros índices do mercado como variáveis independentes e o próprio índice alvo como variável dependente, pode-se derivar os coeficientes dos fatores para determinar os pesos dos componentes da carteira sintética.

Apesar dessa série de vantagens, a modalidade sintética ainda não alcança o amplo poder de aplicação em uma operação de arbitragem de índice, pois tal operação exige a manutenção de carteira espelho no mercado à vista. Mesmo com o uso de derivativos, a utilização de estratégias descritas no Capítulo 2 e a aplicação de metodologias de estimação das variáveis chaves, os administradores obterão somente uma carteira sintética da carteira espelho, e estão sujeitos a restrições para realizar determinadas

operações de arbitragem. Por esse motivo, destaca-se a importância de pesquisar as metodologias para espelhar um índice usando os papéis do mercado à vista.

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÃO

No presente capítulo, além de detalhar as principais etapas e os procedimentos utilizados para a implementação dos modelos selecionados (Replicação Plena, Carteira de Mínima Variância, *Black* e Mínimização Quadrática), apresentam-se as explicações das condições adotadas e os testes de hipóteses realizados para verificar os resultados obtidos.

4.1. FREQÜÊNCIA DOS DADOS

É comum que ocorra uma elevada autocorrelação de dados numa série temporal de retornos financeiros, o que afeta a estimação dos parâmetros. Autocorrelação é caracterizada pelo fato de que, a pertubação que ocorre num ponto de observação está correlacionada com qualquer outra pertubação. Isto significa que, quando as observações são feitas ao longo do tempo, o efeito da pertubação que ocorre, num período, afeta o período seguinte, logo, o estimador também é afetado.

Pope & Yadav (1994) testaram vários coeficientes de retornos e de *tracking error* de freqüências diferentes durante o mesmo período. Eles concluíram que a autocorrelação provoca um viés na estimação do *tracking error*, principalmente nas estimações com freqüências altas (por exemplo, diárias e semanais). Verificou-se também que a autocorrelação de dados defasados em primeira e segunda ordens provoca impactos diferentes sobre as carteiras com características - liquidez, tamanho e setor – diferentes, o que prejudica a comparação de estimativa de *tracking error*. A solução seria, ou fazer um ajuste depois do cálculo de *tracking error*, ou usar dados mensais, ou ainda, usar outros dados com freqüências mais baixas.

Considerando isso, fez-se um estudo da autocorrelação dos retornos da série do Ibovespa para saber quais são as freqüências de dados que sofrem menos com o efeito da

autocorrelação. Para definir o período dos testes, a intenção de evitar os eventos externos, que podem dificultar a visualização do verdadeiro efeito da autocorrelação sobre cada freqüência de dados, é considerada. Por isso, escolheu-se o período de julho de 1994 a setembro de 1998 (pós Plano Real) para evitar a mistura dos períodos da inflação alta e da inflação baixa. Além disso, proximidade com o período do *back-testing* dos modelos implementados também contribuiu para a escolha.

O coeficiente de autocorrelação entre os pontos próximos com defasagem k na série de tempo y_t é definido como:

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t+k})}{\sigma_{Y_t} \sigma_{y_{t+k}}}$$

De acordo com Greene (1997), um dos testes mais usados para identificar a estrutura de autocorrelação nas séries temporais são as **estatisticas-Q** de *Ljung-Box* (1979). **Estatísticas-Q** na defasagem **k** consistem em um teste estatístico para a hipótese nula de que não há autocorrelação até a ordem **k**. São calculadas através da fórmula:

$$Q_{LB} = T(T+2)\sum_{j=1}^{k} \frac{r_j^2}{T-j}$$

onde:

Q é assintoticamente distribuído para normal;

r é a j-ésima autocorrelação;

j é a ordem de defasagem;

T é o número de observações.

(p - valores)

	Diaria	Semanal	Mensal
Lag (1)	0,028	0,801	0,961
Lag (2)	0,025	0,876	0,939
Lag (3)	0,005	0,966	0,952
N observados	1051	221	52

Tabela 10: Resultado do teste das estatisticas-Q

Pode-se perceber que existe uma autocorrelação muito forte na seqüência diária em todos níveis de defasagens (1, 2 e 3) pois, os **p-valores** são menores do que o nível de significância de 5% (0,05); conseqüentemente, rejeita-se a hipótese nula. Somente as freqüências semanal e a mensal foram aprovadas nesse teste. Isso significa o viés gerado pela autocorrelação é significativamente reduzido nos dados semanais e mensais.

Entre as possíveis causas da autocorrelação, pode-se citar as pertubações cíclicas, as flutuações sazonais e o efeito da tendência da série. De fato, como sugere *Pindyck e Rubinfield* (1991), esse eventos deveriam ser adequadamente modelados para extrapolação da série temporal (previsão). Essa análise, porém está fora do escopo deste trabalho.

Tendo em vista (i) os resultados dos testes acima, (ii) os objetivos do trabalho e (iii) o interesse de comparar com os resultados obtidos nos Estados Unidos, entre os quais, alguns que utilizaram dados mensais para estimar não só *tracking errors*, mas também as matrizes de covariância, como por exemplo a pesquisa realizada por *Chan, Karceski e Lakonishok* (1999), então, adota-se os dados mensais na parte empírica dessa dissertação para garantir a comparabilidade de resultados.

A adoção da freqüência mensal prejudicou a formação de algumas carteiras em certos períodos do teste. Devido à falta de dados completos de alguns ativos que compõem a carteira teórica do Ibovespa no período anterior de 5 anos (60 observações) à data de formação da carteira espelho, esses foram eliminados do banco de dados utilizado para estimar a matriz de covariâncias, logo, não participam da formação da carteira espelho.

A qualidade da matriz influencia diretamente o resultado das carteiras espelho formadas pelos modelos selecionados. Para tentar amenizar o problema de ter uma série mais longa de todos ativos da carteira teórica do Ibovespa e alcançar uma estimativa mais fiel, utiliza-se também o período de 3 anos (36 observações) anteriores à data de formação da carteira espelho.

4.2. Fonte de Dados

Os dados foram obtidos através do sistema **Economática**. Foram utilizados os preços dos fechamentos mensais com o valor expresso em moeda local e os preços dos ativos ajustados pelos dividendos, bonificações e subscrições que ocorreram ao longo do período coletado. As ações que deixaram de ser negociadas ou que não faziam parte do banco de dados da **Economática** foram excluídas da análise. Essa questão fica clara no processo da estimação histórica da matriz de covariância: vários ativos são eliminados por falta de dados completos (60 ou 36 observações mensais).

4.3. Construção de Tabelas de Entrada de Dados no Modelo

O primeiro passo é calcular os retornos mensais de cada ação. O segundo é calcular o excesso dos retornos em relação ao retorno de Ibovespa no mesmo período e a partir desses dados estimar as matrizes de covariâncias, que por sua vez servirão como dados para os modelos de formação de carteira espelho e definirão a participação de cada ativo na carteira espelho.

O retorno é definido como:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

no qual :

r_t = retorno do ativo do período t;

P_t = preço do período t;

P_{t-1} = preço do período t - 1.

O excesso de retorno é definido como:

$r_{ti} - r_{tIbovespa} = \Delta r_{ti}$

no qual :

r_{ti} é o retorno de ativo i no período t;

$r_{tIbovespa}$ é o retorno de Ibovespa noperíodo t;

Δr_{ti} é o excesso de retorno de ativo i no período t.

4.4. Escolha de Modelos a Serem Implementados

A implementação inicia-se com o modelo original da própria replicação plena obedecendo à regra de formação do Ibovespa. Em seguida, utiliza-se a otimização quadrática e suas derivadas para modelagem da replicação do mesmo índice. A razão da escolha dos modelos de otimização recai sobre o fato de que a matriz de covariância representa as inter-relações entre os ativos, enquanto que os outros modelos fatoriais, como por exemplo o CAPM, mostram apenas o tratamento de risco de mercado na análise. Além disso, já existe uma vasta literatura sobre aplicação de modelos fatoriais na administração de carteiras.

4.4.1. Replicação Plena (por peso)

A construção deste modelo obedece às mesmas regras da construção do índice Ibovespa. Ou seja, é orientada pelo critério de negociabilidade dos ativos, que por sua vez, define a participação de cada ativo na carteira teórica do índice. Baseado nos critérios de formação da carteira teórica (**Anexo I**), a Bolsa realiza e divulga as recomposições quadrimestrais da quantidade teórica de cada ação do Ibovespa. Esta quantidade permanecerá constante pelos quatro meses de vigência da carteira teórica, somente sofrendo alterações caso ocorra a distribuição de proventos (dividendos, bonificações, subscrições) por parte da empresa. Com base nessas informações, constrói-se uma série de carteiras por ordem decrescente de participação de cada papel na carteira teórica. O peso de cada ativo nas carteiras espelho formadas é calculado pela razão entre a

participação original de cada ativo e a soma total das participações originais dos ativos participantes na carteira.

Primeiro, monta-se uma carteira aplicando 100% de capital inicial no papel de maior participação. Depois introduz-se o segundo papel mais negociado na carteira, formando uma carteira com dois ativos e assim sucessivamente até a entrada do último ativo na carteira. Esta carteira seria a carteira de replicação total. A seqüência dos resultados das carteiras espelho permite avaliar a contribuição marginal de cada papel para diminuir o *tracking error* e estabelecer um tamanho ótimo.

Além disso, é possivel aplicar o modelo de replicação plena em qualquer momento, desde que os administradores tenham a composição do Ibovespa, que pode ser obtida pela simulação de carteira teórica com atualização diária de proventos e de preços.

4.4.2. CARTEIRA DE MÍNIMA VARIÂNCIA GLOBAL (COM VENDA A DESCOBERTO)

A implementação desse modelo depende da solução algébrica do problema de minimização da variância de uma carteira. No caso, a venda a descoberto de ativos é permitida. O processo de derivação algébrica é idêntico ao do modelo apresentado adiante. A única diferença está no tratamento dos retornos médios desejados. Pode-se verificar que a variável de retorno desejado não pertence à fórmula da solução algébrica apresentada por *Ingersoll* (1987):

$$W_g = \frac{C^{-1}1}{1'C^{-1}1}$$

na qual :

W_g é o vetor com os elementos representativos dos pesos de cada ativo na carteira ótima;
C^{-1} é a inversa da matriz de covariância de retornos;
1 é o vetor unitário.

4.4.3. MODELO DE *BLACK*

Este modelo compõe, na ausência do ativo sem risco, as carteiras de mínima variância dado um nível de retorno desejado (**z**), sem a restrição para vendas a descoberto. No caso da replicação do índice, a entrada de dados é o excesso de retornos no lugar de retornos dos ativos. Como o objetivo da carteira é espelhar o retorno do índice, então o nível de excesso de retorno desejado (E') é igual a zero. Pode-se expressar o modelo matematicamente por:

$$Min\,Var(r_p) = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij}$$

sujeito a

$$\sum_i w_i \bar{r}_i = 0$$

$$\sum_i w_i = 1$$

Em que:

$\bar{r}_i$: média do excesso de retornos

r_i: excesso de retornos do ativo i em relação ao Ibovespa

w_i: peso de cada ativo i

Para resolvê-lo, forma-se a função objetiva *Lagrangiana*:

$$L = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda_1 (\sum w_i \bar{r}_i) + \lambda_2 (\sum w_i - 1)$$

Derivando L parcialmente com relação às varáveis endógenas :

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ para } i = 1,\ldots,n \text{ e } j = 1,\ldots,n.$$

As equações resultantes serão expressas por matrizes Jacobianas:

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \ldots & 2\sigma_{1n} & \bar{r}_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & & 2\sigma_{2n} & \bar{r}_2 & 1 \\ & & & & & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & & 2\sigma_{nn} & \bar{r}_n & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & & \bar{r}_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \\ w_n \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essa equação também pode ser representada na forma matricial

$$\mathbf{CW} = \mathbf{k}$$

onde,

C: matriz de coeficientes;

W: vetor de pesos;

K: vetor de constantes

Resolvendo para **W**

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{k}$$

A solução é dado a n+2 variáveis no vetor peso em termos do nível desejado de excesso de retornos (E'). Assim, as expressões de **n** pesos são:

$$w_1 = c_1 + d_1 E,$$
$$w_2 = c_2 + d_2 E,$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$w_n = c_n + d_n E,$$

em que :

$\sum_i w_i = 1.$

c_i e d_i são constantes.

Como o excesso de retorno desejado é zero, então E' é igual a zero. A solução do peso de cada papel ($\mathbf{w}_i$) na carteira é apenas o elemento ($\mathbf{c}_i$) correspondente na coluna **n+1** da matriz inversa de covariância ($\mathbf{C}^{-1}$).

4.4.4. MINIMIZAÇÃO QUADRÁTICA (SEM VENDA A DESCOBERTO)

Por causa de regulamentação interna ou externa, várias instituições financeira são impedidas de fazer operações de alavancagem com vendas a descoberto. Nesse caso, o administrador pode modificar a mesma rotina matemática do modelo anterior para usar a otimização quadrática.

De acordo com *Francis & Archer* (1971), é possível estender os algoritmos da solução de minimização de modo a não produzir participações negativas dos ativos na carteira. No ponto onde o cálculo atinge pesos negativos, é preciso parar a análise e remover as entradas de tal ativo da matriz de covariância e do vetor de retorno médio. Então, pode-se recomeçar a rotina, invertendo a nova matriz de covariância para encontrar um novo

vetor de pesos. No caso de ainda haver pesos negativos, deve-se eliminá-los. E, assim por diante, até encontrar uma carteira onde todas as participações sejam positivas. Esse raciocínio foi implantado na rotina computacional utilizada neste trabalho.

4.5. ESTIMAÇÃO E *BACK TESTING* (PERÍODO E TÉCNICA UTILIZADA)

O estudo acompanha a evolução dos papéis que compõem o Ibovespa de janeiro de 1989 a dezembro de 1998. No entanto, o período definido para o *back testing* foi de 60 meses - janeiro 1994 a dezembro de 1998.

Os outros anos incluídos no período de estudo foram utilizados para a estimação determinística da matriz de covariância, usando os sessenta meses ou trinta e seis meses anteriores à data de formação da nova carteira espelho (início de janeiro 19xx). Essas estimativas são fundamentais para processar os modelos da replicação, principalmente para aqueles que utilizam os métodos de minimização de variâncias sob o ponto de vista do binômio risco-retorno. O único modelo que não utiliza o período de estimação diretamente é o modelo de replicação plena. Isto é devido ao fato de sua formação obedecer proporcionalmente os pesos dos papéis da carteira teórica do Ibovespa.

A técnica de estimação histórica de covariância foi aplicada para estimar as matrizes de covariância. Como foi mostrado no capítulo anterior, há um conjunto muito grande de técnicas para modelar as volatilidades dos retornos e tentar chegar à melhor estimativa possível. Porém, como o objetivo do trabalho não é encontrar a melhor modelagem da variância, e sim estudar a modelagem da formação da carteira espelho, escolheu-se o modelo mais simples para gerar a entrada de dados e para testar o poder de replicação do modelo de mínima variância global, do modelo de *Black* e do modelo de minimização quadrática.

A fórmula da estimação de covariância histórica é apresentada como:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu_x)(y_j - \mu_y)$$

onde :

x_j = retorno da variável x na observação j;

y_j = retorno da variável y na observação j;

μ_x = retorno médio da variável x;

μ_y = retorno médio da variável y.

4.6. Programas Computacionais Utilizados para Processar os Dados e Obter os Resultados

O programa **Excel** foi utilizado para a estimação de matrizes de covariâncias e testes de covariância e de médias. Os testes de autocorrelação, os estudos de volatilidades, os gráficos, as regressões e os estudos de distribuição dos dados temporais foram obtidos com o auxílio do software de econometria **Econometrics Views (versão 3.0)**.

Conforme definições anteriores de implementação dos quatro modelos distintos, foram escritas várias rotinas em **Turbo Pascal** para processar os dados de entrada, gerar os resultados com os retornos da carteira espelho e produzir o relatório de *tracking error* do modelo aplicado (o essencial dos códigos das rotinas dos modelos desenvolvidos no trabalho estão no **Anexo III**).

4.7. Tamanho e a Formação das Carteiras Espelho

Tendo em vista o objetivo de reproduzir o índice alvo com menor número de ativos possível, concentrou-se as replicações com as carteiras compostas com 2, 4, 6, 8 e 10 ativos. Também foram testados as carteiras com 20, 30 e 40 ativos para verificar os comportamentos dos modelos para carteiras grandes. Assim, para cada modelo de replicação, foram montadas oito carteiras espelho de tamanhos diferentes.

As ordens de entrada de ativos na carteira espelho obedecem o critério da negociabilidade das ações (do mais negociado para o menos negociado). Por exemplo, a carteira com 4 ativos significa que a carteira é composta pelas quatro ações mais negociadas ao Bovespa nos últimos 12 meses. Esse critério foi adotado por vários motivos:

- Primeiro: a padronização de entradas de ações por ordem de negociabilidade iguala aproximadamente o impacto de custo de "spread" nas carteiras espelho do mesmo tamanho. Assim sendo, a padronização permite a comparação entre os resultados dos modelos e avaliação da eficiência de cada um em reproduzir o comportamento de Ibovespa.

- Segundo: a negociabilidade de uma ação influi fundamentalmente no sucesso de uma operação financeira, principalmente nas operações de *hedge*. Os papéis de baixa negociabilidade podem comprometer a rentabilidade da carteira no momento de compra e de venda desses papéis, devido ao custo elevado de *spread* provocado pelo baixo volume da demanda e da oferta no mercado.

4.8. AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

Para se avaliar o poder de replicação de cada modelo, é preciso estabelecer as formas de avaliação e os critérios de decisão. Utiliza-se o parâmetro *tracking error,* os testes de hipóteses de médias e de variâncias e o coeficiente beta da regressão linear simples, e o R-quadrado da mesma regressão para a avaliação.

4.8.1. *Tracking Error*

Esse critério é baseado no *tracking error* ou nos desvios entre os retornos da carteira espelho e da carteira do mercado. O retorno do índice Bovespa pode ser escrito como a média ponderada dos retornos dos componentes da carteira teórica:

$$R_{mt} = \sum_{j=1}^{n} w_j R_{jt}$$

onde :

R_{mt} é o retorno do Ibovespa no período t;

n é o número de ações na carteira teórica;

w_j é o peso associado a cada ação;

R_{jt} é o retorno da ação j no período t.

Da mesma forma, podemos definir o retorno da carteira espelho como:

$$R_{pt} = \sum_{j=1}^{n} x_j R_{jt}$$

onde :

R_{pt} é o retorno da carteira espelho no período t;

n é o número de ações na carteira espelho;

x_j é o peso associado a cada ação;

R_{jt} é o retorno da ação j no período t.

O x_j pode assumir valores positivos, zero ou negativos. Este último evento acontece quando a venda a descoberto é permitida.

A diferença entre dois retornos é calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} e_t &= R_{pt} - R_{mt} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - w_j) R_{jt} \end{aligned}$$

Portanto, a média e o desvio padrão do *tracking error* mensal são uma das medidas de avaliação de desempenho da carteira espelho. No entanto, a literatura americana utiliza a figura de anualização para expressar o *tracking error*. *Pope & Yadav* (1994), definiram o tracking error anualizado como:

$$S_e = \frac{1}{T-1}\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(e_t - \bar{e})^2}\sqrt{M}$$

em que :

T é número de períodos;

$\bar{e}$ é a média da amostra das diferenças de retornos;

M é o número de períodos no ano. No caso de dados mensais, M é igual a 12.

Para desenvolver a fórmula de anualização, os autores assumem algumas hipóteses sobre a evolução de retornos ao longo do tempo. Primeiro, a distribuição de probabilidades dos retornos em um determinado período é normal, aceitando-se a sugestão dos livros teóricos de que a hipótese da distribuição normal é adequada para os retornos de uma ação, principalmente, quando se considera o Teorema do Limite Central e a simulação com uma amostra suficientemente grande. Considerando o retorno de uma carteira como uma combinação linear dos retornos das ações da carteira, pode-se inferir que a distribuição dos retornos da carteira também segue uma distribuição normal, bem como a distribuição dos excessos dos retornos da carteira. Como segunda hipótese assume-se que a soma dos *tracking errors* mensais durante um ano é equivalente ao erro anual do mesmo período:

$$E = \sum_{1}^{12} e_t$$

em que :

E = erro anual

e_t = erro mensal

Resumindo, a fórmula apresentada supõe que a distribuição de "e" (*tracking error*) é normal:

$e : N(0;\sigma_t^2)$

o estimador ótimo de σ_t^2 é s^2, logo

$$s_e^2 = \frac{\sum (e_t - \bar{e})^2}{T - 1}$$

Dado que:

$$E = \sum_{1}^{12} e_t$$

Pode - se expressar a Var(E) e DP(E) como :

$$Var(E) = M * Var(e) = M * s_e^2$$

$$DP(E) = \sqrt{M} * s_e$$

Esses constituem pressupostos bastante fortes, pois, na realidade, o erro anual é diferente das somas acumuladas dos erros mensais. Para poder comparar com os resultados das pesquisas americanas, calcularam-se os *tracking errors* anualizados para avaliar os modelos.

Conclusão:

CRITÉRIO DE DECISÃO #1

O melhor modelo é aquele com a menor média e o menor desvio padrão mensal de tracking error.

4.8.2. Teste de Hipóteses de Média e de Variância

O objetivo primordial é comparar duas séries de amostras extraídas de duas populações. O critério de comparação é a semelhança entre médias e variâncias. A questão é: como o resultado do modelo assemelha-se com o alvo, e na análise média - variância, a que **nível p**? Qual é o grau de confiança desse modelo? Para a formalização do modelo, utilizam-se os seguintes conceitos:

Teste de Hipóteses: faz-se uma determinada afirmação sobre uma população, usualmente sobre um parâmetro desta, e o objetivo é saber se os resultados de uma amostra desta população contrariam ou não tal afirmação.

Teste do Erro Tipo I: rejeitar a hipótese nula (**Ho**) quando esta é verdadeira. Chama-se a probabilidade de cometer erro **alfa**, isto é:

Alfa = P(erro do tipo I) = P(rejeitar Ho/Ho é verdadeira)

A probabilidade de cometer um erro de primeira espécie (alfa) é um valor arbitrário e é o nível de significância do teste. O resultado da amostra é tão mais significativo para rejeitar **Ho** quanto menor for esse nível **alfa**. Usualmente, esses valores são fixados em 5%, 1% ou 0,1%.

Assim, de acordo com *Bussab* (1987), tendo-se duas séries independentes, utiliza-se a **distribuição F de *Snedecor*** para verificar se duas amostras pertencem a populações que têm a mesma variância. A hipótese nula assume que ambas têm a mesma variância. Por esse motivo, dado um nível de significância de 5%, para aqueles que tiverem um **p-valor** maior que 5%, **Ho** não é rejeitada e as variâncias das populações não são significativamente diferentes entre si.

Para verificar se duas amostras pertencem a uma mesma população cuja média é a mesma, utilizamos a **distribuição t de *Student***. Mais especificamente, utilizamos o **teste t** supondo que as duas amostras possuem variâncias equivalentes. Neste caso, a hipótese nula é que ambas possuem a mesma média. Adota-se um nível de significância de 5%. Por exemplo, para aqueles que tem um **p-valor** menor que 5%, rejeita-se **Ho**. Conclui-se, então, que as médias das populações são significativamente diferentes entre si.

Conclusão:

CRITÉRIO DE DECISÃO #2

Todos aqueles modelos que têm resultados com p-valor maiores que 0,05 (alfa = 5%) são considerados bons modelos, pois não rejeitaram a hipótese nula (Ho) dos respectivos testes. No entanto, aquele que possui o maior p-valor, também possui o maior poder de não rejeição da hipótese nula e deve ser escolhido como o melhor modelo de replicação.

4.8.3. O Coeficiente Beta da Regressão Simples

Essa forma de avaliação também é utilizada para avaliar o desempenho das carteiras de replicação. Essa metodologia foi aplicada em um artigo da *Salomon Brothers* (1994). O coeficiente beta da regressão simples fornece uma boa medida para avaliar a sensibilidade de movimento dos retornos da variável independente (retornos de carteira espelho) e do movimento de retornos da variável dependente (retornos do Ibovespa). No caso da replicação do índice, o ideal seria um beta igual a um.

O coeficiente beta estimado também é testado pela **distribuição t de *Student***, ao nível de 5% e **Ho**: beta = 0. Ou seja, a hipótese nula estabelece que as variáveis dependentes e independentes não são relacionados. Por exemplo, para o p-valor menor que 5% (nível de significância estabelecido), deve-se rejeitar a **Ho**. Isto é, pode-se dizer que o coeficiente da população não é nulo. Portanto, o coeficiente beta estimado é um bom estimador.

Apesar das sérias deficiências apontada por *Kmenta* (1988) e por outros estudiosos da área sobre o valor da informação do **R-quadrado (R^2)**, esse parâmetro ainda é muito utilizado. Já é costume comparar o valor de R^2 aos resultados do processo de estimação quando se apresentam os resultados da regressão. Quanto mais o valor de R^2 estiver próximo de 1, maior será o poder de explicação do modelo.

Conclusão:

CRITÉRIO DE DECISÃO #3

Comparação dos valores estimados de betas que rejeitaram significativamente a hipótese nula. O melhor modelo será aquele com uma estimativa de beta e com um R - quadrado (R^2) mais próximos de 1.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DE RESULTADOS

Conforme mencionado no capítulo anterior, implementar-se-ão quatro modelos:

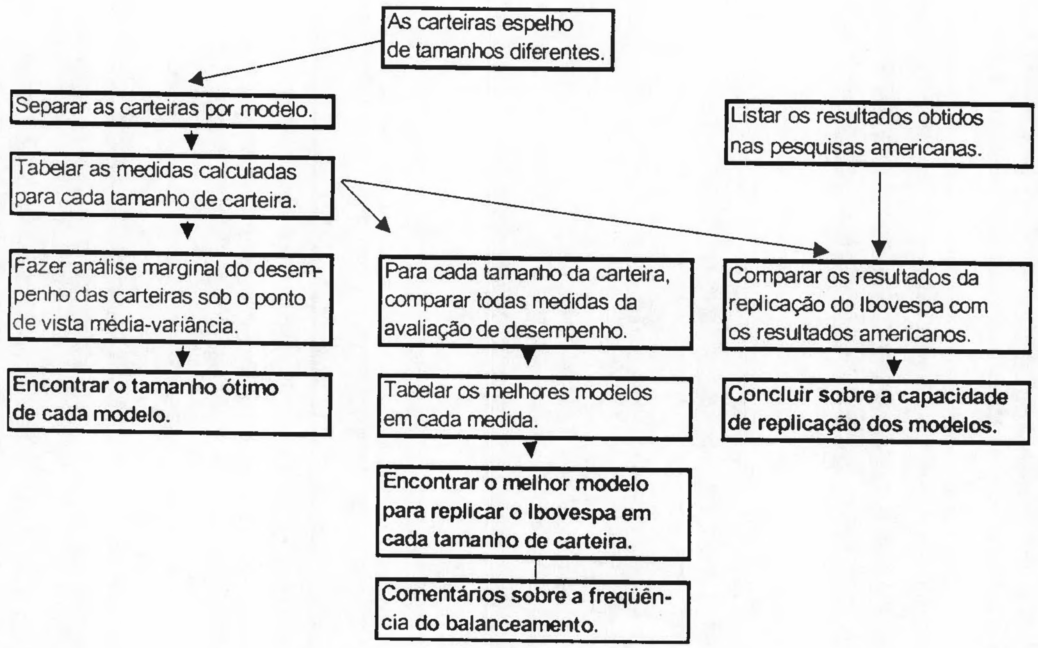
- Modelo **RP**: Replicação Plena;
- Modelo **MVG**: Carteira de Mínima Variância Global (com venda a descoberto);
- Modelo **B**: Modelo de *Black;*
- Modelo **MQ**: Minimização Quadrática (sem venda a descoberto).

A partir de um capital inicial hipotético, cada modelo gera oito carteiras espelho de tamanhos diferentes. Para que o desempenho dessas carteiras mantenha-se próximo do Ibovespa ao longo do período de *back-testing* (1994-1998), é feita uma reavaliação (balanceamento) anual da carteira, utilizando-se sempre a base nos **36 ou 60 meses** anteriores ao momento da reavaliação para estimar as matrizes de variância e gerar um novo peso para cada ativo conforme os resultados dos modelos.

No entanto, a reavaliação anual pode não ser capaz de reproduzir o Ibovespa com *tracking error* reduzido. Sabe-se que a quantidade teórica das ações que compõem o Ibovespa sofre alteração quadrimestral, então, se houver uma mudança significativa na composição do Ibovespa durante o ano, o desempenho final da carteira espelho pode ser prejudicado.

Para poder avaliar melhor essa questão, foi montada uma série de retornos para cada carteira gerada pelo procedimento da recomposição anual, utilizando-se somente os retornos nos quatro primeiros meses de cada ano. Dessa forma, o efeito da alteração quadrimestral do Ibovespa é eliminado.

A análise desse capítulo segue o fluxograma abaixo:



5.1. MODELO DE REPLICAÇÃO PLENA (MRP)

O MRP apresenta facilidade e rapidez na sua implementação. A principal facilidade deriva da computação da participação relativa dos ativos fundamentada em uma distribuição proporcional das quantidades teóricas dos ativos do Ibovespa, cuja divulgação é diária pelos de serviços de informações (como por exemplo, o sistema de Economática).

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	1,05	0,98	0,7%	3,4%	0,86	0,33
4	1,05	0,98	0,4%	2,9%	0,92	0,32
6	1,04	0,99	0,3%	2,1%	0,94	0,36
8	1,04	0,99	0,3%	1,9%	0,95	0,37
10	1,03	1,00	0,3%	1,6%	0,95	0,39
20	1,01	1,00	0,0%	0,9%	0,99	0,46
30	1,01	1,00	0,0%	0,7%	1,00	0,48
40	1,00	1,00	-0,1%	0,6%	0,98	0,50

Tabela 11: os resultados do MRP
(Recomposição anual de carteiras)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	1,03	0,98	0.4%	3,4%	0,98	0,49
4	1,05	0,98	0,0%	3,6%	1.00	0,41
6	1.04	0,99	0,0%	2,6%	1.00	0,43
8	1,05	0,99	0,2%	2,4%	0,99	0.42
10	1,03	1,00	0,2%	1,9%	0,98	0,44
20	1,02	1,00	0,1%	1,0%	0,99	0,47
30	1,01	1,00	0,1%	0,6%	0,99	0,48
40	1,00	1,00	0,0%	0,3%	1,00	0,50

Tabela 12: os resultados do MRP
(Recomposição quadrimestral de carteiras)

A **Tabela 11** confirma a expectativa de que, quanto maior o número de ativos proporcional aos pesos definidos na carteira, melhor é o desempenho do modelo de replicação. Assim, quando a carteira engloba os 40 ativos mais negociados da Bolsa, o coeficiente **beta** fica próximo de 1 (um) e o $\mathbf{R^2}$ da regressão também fica muito próximo de 1 (um). Essa tendência também é confirmada por outras duas medidas: o *tracking error*, que fica próximo de zero e o elevado p-valor dos testes de média e variância.

Além disso, devido à redução da taxa decrescente das medidas da média e variação de *tracking error*, a utilização da análise marginal de média e de variância resultaria em que uma carteira de 20 ativos seria melhor que uma e 40 ativos. Uma carteira iniciada com dois ativos e acumulada até 20 ativos reduz em 0,7% de *tracking error* médio e em 2,5% o desvio padrão, enquanto que numa carteira com 20 a 40 ativos a redução é de apenas 0,1% e 0,3% respectivamente. Esse resultado reflete a concentração de participação de alguns ativos no Ibovespa gerada pelo sistema de ponderação por negociabilidade da ação no Bovespa.

A análise marginal também pode ser interpretada a partir dos custos de transação envolvidos. Isto significa que o administrador da carteira precisa avaliar entre o benefício marginal com acréscimo de um ativo na carteira e o custo marginal envolvido com a inclusão do ativo para definir o tamanho ótimo.

No entanto, exceto ao custo de *spread* entre a compra e a venda, os outros componentes dos custos de transação, como por exemplo o custo de operação, têm o custo marginal igual a zero. De acordo com *Bozano Simonsen* (1999), o custo de uma operação é composto por duas partes: uma é o custo fixo, em torno de R$9,90, e a outra parte é o custo variável, em torno de 0,25%, sobre o valor total operado; logo, o custo marginal desse componente no acréscimo de um ativo na carteira é igual a zero. Além disso, esses custos ainda são menores para grandes volumes operados. Já o custo de *spread* varia com a liquidez dos ativos. Quanto mais líquido, menor é o custo. Por isso, à medida que aumenta o tamanho da carteira espelho, aumenta também a proporção de ativos ilíquidos na carteira; logo, maior custo para balancear essa carteira.

Portanto, dependendo do objetivo dos administradores de carteiras e do nível dos custos de transação envolvidos na operação, uma carteira com 6 ativos também seria uma outra alternativa. Para que o tamanho ótimo seja com 6 ativos, o ganho marginal, tanto no *tracking error* médio (a redução de 0,4% em apenas 4 ativos) quanto na variação do mesmo (a redução de 1,3%), é igual ao custo marginal. No caso da recomposição quadrimestral (**Tabela 12**), a conclusão obtida utilizando-se os mesmos critérios de análise da tabela 11 não difere significativamente e, a carteira com 20 ou 6 ativos mostra-se bastante consistente para replicar o índice com pequena margem de erro.

Os gráficos das **Figuras 2** e **3** também confirmam a análise acima. Pela curvatura dos gráficos (média e desvio padrão) apresentados, pode-se notar que a partir de carteira com 20 ativos, a melhoria marginal é bastante reduzida, ou seja, a curva começa a apresentar um formato mais plano e próximo do nível zero, o que implica que uma carteira com 20 ativos já é suficiente para reproduzir o Ibovespa com elevada consistência.

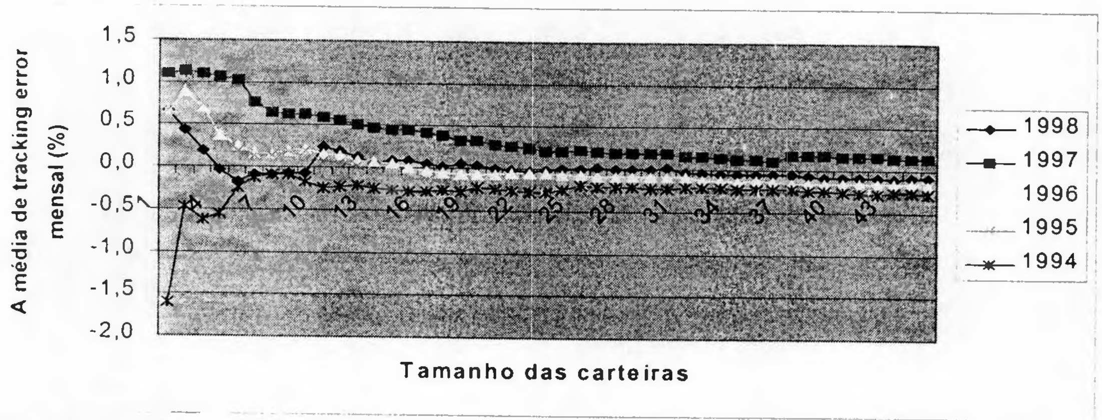


Figura 2: *Tracking error* médio das carteiras no período de 1994 a 1998 (balanceamento anual)

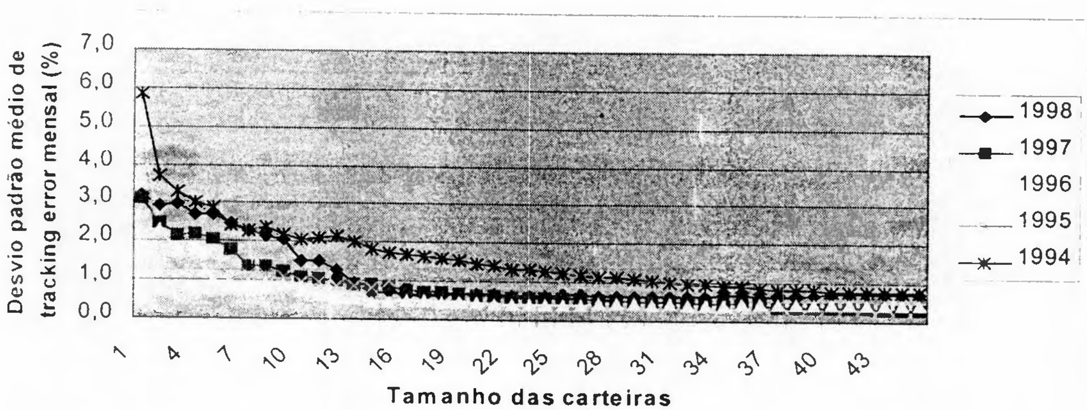


Figura 3: A variação de *Tracking error* médio das carteiras no período de 1994 a 1998 (balanceamento anual)

Outra observação importante é sobre a freqüência do ajuste. As medidas do balanceamento quadrimestral (**Tabela 12**) são superiores às do balanceamento anual (**Tabela 11**), principalmente nas carteiras pequenas. No entanto, o mesmo não ocorre com as carteiras maiores, como por exemplo, a carteira com 20 ativos teve o desempenho prejudicado. Esse fato é bastante inusitado, pois a expectativa é de que quanto maior a freqüência de balanceamento, melhor é o desempenho da replicação. De fato, pelas limitações dessa pesquisa, ela foi incapaz de responder com exatidão a razão desse

evento, porém, suspeita-se que o benefício trazido pelo balanceamento quadrimestral é contrabalançado (diluído) pelos efeitos da diversificação das carteiras grandes.

5.2. Modelo de Mínima Variância Global (MVG)

Diferentemente do modelo anterior que utiliza a abordagem linear para ponderar os ativos, o MVG utiliza o programa quadrático para encontrar a carteira ótima.

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	1,02	0,96	0,3%	4,2%	0,92	0,38
4	1,03	0,97	-0,2%	3,8%	0,96	0,36
6	1,07	0,95	0,2%	4,9%	0,97	0,24
8	1,06	0,96	0,0%	4,7%	1,00	0,26
10	1,03	0,97	-0,4%	4,0%	0,92	0,35
20	0,98	0,97	-0,5%	3,6%	0,89	0,49
30	1,01	0,97	-0,5%	3,8%	0,90	0,43
40	0,99	0,94	-0,2%	4,9%	0,95	0,44

Tabela 13:os resultados do MVG

(Recomposição anual de carteiras)

(Foram utilizados 60 meses para estimar a matriz de covariância)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	0,98	0,97	0,2%	4,7%	0,98	0,49
4	1,03	0,98	-0,7%	3,6%	0,93	0,44
6	1,15	0,96	0,8%	7,3%	0,93	0,25
8	1,15	0,97	0,7%	6,5%	0,94	0,25
10	1,12	0,98	0,4%	5,1%	0,96	0,30
20	1,03	0,98	0,8%	4,2%	0,92	0,42
30	1,06	0,98	0,7%	4,4%	0,93	0,39
40	1,04	0,96	0,2%	5,7%	0,99	0,39

Tabela 14: os resultados do MVG

(Recomposição quadrimestral de carteiras)

(Foram utilizados 60 meses para estimar a matriz de covariância)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	1,01	0,94	0,3%	5,2%	0,93	0,36
4	1,04	0,96	0,0%	4,5%	1,00	0,32
6	1,08	0,97	0,4%	4,3%	0,92	0,23
8	1,06	0,97	0,3%	4,2%	0,95	0,27
10	1,04	0,98	0,0%	3,3%	1,00	0,35
20	0,97	0,99	-0,4%	2,3%	0,91	0,44
30	1,00	0,92	-0,2%	5,9%	0,96	0,37
40	0,97	0,89	-0,3%	6,3%	0,91	0,35

Tabela 15: os resultados do MVG

(Recomposição anual de carteiras)

(Foram utilizados 36 meses para estimar a matriz de covariância)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	0,96	0,96	-0,3%	5,1%	0,96	0,47
4	1,02	0,98	-0,3%	4,1%	0,92	0,45
6	1,14	0,97	1,0%	6,4%	0,91	0,26
8	1,13	0,97	0,8%	6,1%	0,92	0,28
10	1,10	0,98	0,6%	4,8%	0,95	0,32
20	1,02	1,00	0,1%	1,6%	1,00	0,47
30	1,10	0,97	0,2%	5,7%	0,94	0,32
40	1,09	0,94	0,3%	6,7%	0,90	0,31

Tabela 16: os resultados do MVG

(Recomposição quadrimestral de carteiras)

(Foram utilizados 36 meses para estimar a matriz de covariância)

Embora cada tabela indique o ponto ótimo nos diferentes tamanhos da carteira, a impressão geral transmitida por todas tabelas, independentemente do período da estimação ou do período de balanceamento, é de que o MVG apresenta desempenho oscilatório nos resultados das carteiras espelho conforme o aumento de tamanho das carteiras. Essa característica é bem distinta da apresentada pelo MRP.

A **Tabela 14** mostra que, as medidas das carteiras com 2 ou 4 ativos são melhores que as das carteiras com 6 e 8 ativos, apesar de as médias dos *tracking errors* não serem tão diferente, as outras medidas apontam um ganho nas variâncias dos retornos (o grau de confiança é maior nos testes de hipótese de variâncias e os coeficientes do beta mais próximos de 1). As medidas voltam a melhorar com a adição de ativos menos negociados na Bolsa de Valores. Observa-se que as medidas da carteira com 20 ativos apresentam uma qualidade de replicação no mesmo patamar das carteiras com 2 ou 4 ativos. As medidas tendem a piorar quando a carteira passa a ter mais de 20 ativos. Assim, nota-se que o tamanho de carteira recomendada para replicar o índice é de 2 ou 4 ativos.

A principal explicação levantada para esse comportamento oscilatório é dada pela regra de entrada de dados no MVG. Como a seleção de entrada de ações não é por semelhança de comportamento e sim por liquidez, é possível que os primeiros ativos que entram no modelo comportem-se próximos do Ibovespa, uma vez que a otimização quadrática das relações entre os poucos com participação elevada consegue suprir a ausência dos outros

ativos com menor peso relativo e apresentar um resultado melhor que uma carteira maior. Em outras palavras, as ações acrescentadas podem distorcer as matrizes de covariância usadas para representar as correlações entre os ativos da carteira; por isso, a otimização não conseguiu um resultado satisfatório. No entanto, da mesma forma que o acréscimo de ativos pode desviar a otimização, a entrada de ações que favorecem o cálculo baseado na matriz de covariância pode ajudar a alcançar um resultado melhor.

Uma outra explicação que também pode auxiliar o entendimento do caráter oscilatório seria a permissão da venda a descoberto. É possível que o modelo matemático defina como a melhor combinação aquela cuja alavancagem de alguns ativos ilíquidos é muito grande. Sabe-se que os ativos ilíquidos têm volatilidade maior, logo, elevada alavancagem desses papéis pode tornar a carteira espelho bastante volátil. Por exemplo, as melhores carteiras geradas por MVG, em média, não fazem a operação de alavancagem, enquanto que em outras carteiras a proporção alavancada é em torno de 10%.

Quanto ao efeito da freqüência, o resultado é parecido com o do MRP , as **Tabelas 13** e **14** e as **Tabelas 15** e **16**, mostram que o aumento de freqüência imprimiu um efeito positivo apenas nas carteiras de 2 e de 4 ativos no modelo MVG, enquanto que nos outros tamanhos, as medidas indicam uma perda da qualidade de replicação.

Uma outra observação é com relação ao período de estimação da matriz de covariância. Baseada na comparação entre as **Tabela 13** e **15** e as **Tabelas 14** e **16**, ao contrário da expectativa, não foi possível perceber uma melhoria significativa nas medidas quando comparadas com aquelas de 60 meses anteriores, embora haja uma melhora sutil, utilizando-se a estimativa de 36 observações para balanceamento quadrimestral nas carteiras pequenas (até 10 ativos na carteira).

5.3. Modelo de *Black* (MB)

O MB segue o processo da otimização do modelo anterior com a incorporação da determinação ao nível zero de *tracking error*. Assim como o modelo anterior, o MB também apresenta desempenhos oscilatórios nos resultados à medida que aumenta o tamanho das carteiras. Os melhores resultados concentram-se nas duas faixas: entre 4 a 6 ativos e entre 20 a 30 ativos (**Tabelas 17, 18, 19 e 20**). Embora a venda a descoberto dos ativos seja permitida no MVG, diferentemente deste, no MB a carteira com 2 ativos não conseguiu um bom desempenho. Esse fato pode ser explicado pelo elevado grau de alavancagem de algumas carteiras geradas pelo MB, uma vez que a sua formulação matemática permite alavancar indefinidamente para alcançar o ponto ótimo, dado o nível de retorno exigido. Por exemplo, o MVG vende 10% da carteira a descoberto, enquanto que o MB usa 70% ou mais para atingir o ótimo.

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	0,96	0,61	1,3%	15,2%	0,76	0,06
4	0,97	0,87	-0,4%	7,4%	0,91	0,39
6	1,07	0,93	0,2%	6,2%	0,96	0,21
8	1,07	0,93	-0,1%	5,9%	0,99	0,21
10	1,06	0,94	-0,4%	5,6%	0,93	0,24
20	0,99	0,96	-0,3%	4,2%	0,94	0,45
30	1,00	0,96	-0,4%	4,0%	0,91	0,44
40	1,00	0,92	0,3%	6,1%	0,93	0,37

Tabela 17: os resultados do MB
(Recomposição anual de carteiras)
(Foram utilizados 60 meses para estimar a matriz de covariância)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	0,91	0,68	0,1%	16,0%	0,98	0,34
4	0,93	0,94	-1,1%	6,0%	0,89	0,43
6	1,17	0,94	0,1%	8,7%	0,90	0,21
8	1,20	0,96	1,0%	8,0%	0,92	0,19
10	1,20	0,97	0,7%	7,7%	0,94	0,20
20	1,07	0,98	1,4%	4,5%	0,87	0,37
30	1,05	0,98	0,6%	3,8%	0,95	0,35
40	1,16	0,94	0,5%	7,2%	0,95	0,36

Tabela 18: os resultados do MB
(Recomposição quadrimestral de carteiras)
(Foram utilizados 60 meses para estimar a matriz de covariância)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	0,95	0,51	0,0%	18,5%	0,54	0,02
4	1,08	0,89	-0,2%	7,9%	0,97	0,14
6	1,09	0,94	0,3%	5,8%	0,93	0,19
8	1,22	0,92	0,4%	5,4%	0,93	0,22
10	1,06	0,95	0,2%	4,8%	0,97	0,27
20	1,00	0,98	-0,1%	2,9%	0,98	0,48
30	1,01	0,93	-0,1%	5,5%	0,98	0,36
40	1,01	0,91	0,3%	6,9%	0,92	0,33

Tabela 19: os resultados do MB

(Recomposição anual de carteiras)

(Foram utilizados 36 meses para estimar a matriz de covariância)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	0,79	0,67	2,3%	15,2%	0,77	0,44
4	1,08	0,96	-0,5%	6,2%	0,87	0,34
6	1,18	0,96	0,9%	7,9%	0,92	0,21
8	1,42	0,95	1,3%	7,6%	0,89	0,22
10	1,16	0,96	1,0%	7,0%	0,91	0,24
20	1,06	0,99	0,8%	2,8%	0,93	0,39
30	1,09	0,97	0,3%	5,7%	0,92	0,33
40	1,16	0,93	0,9%	6,3%	0,90	0,29

Tabela 20: os resultados do MB

(Recomposição quadrimestral de carteiras)

(Foram utilizados 36 meses para estimar a matriz de covariância)

Em relação tanto à freqüência de balanceamento quanto ao período de estimação de covariância, a conclusão é semelhante à do MVG.

5.4. Modelo de Mínimização Quadrática (MMQ)

Basicamente esse modelo é igual ao MB, porém, nesse caso, a venda a descoberto não é permitida.

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	0,97	0,90	0,6%	6,6%	0,87	0,41
4	1,02	0,87	0,5%	7,9%	0,99	0,24

Tabela 21: os resultados do MMQ

(Recomposição anual de carteiras)

(Foram utilizados 60 meses para estimar a matriz de covariância)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	1,04	0,96	0,9%	5,7%	0,91	0,40
4	1,16	0,94	0,3%	8,4%	0,98	0,22

Tabela 22: os resultados do MMQ
(Recomposição quadrimestral de carteiras)
(Foram utilizados 60 meses para estimar a matriz de covariância)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	1,10	0,87	-0,4%	8,6%	0,93	0,10
4	1,01	0,93	-0,1%	5,4%	0,97	0,37

Tabela 23: os resultados do MMQ
(Recomposição anual de carteiras)
(Foram utilizados 36 meses para estimar a matriz de covariância)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	1,13	0,94	0,0%	8,0%	1,00	0,25
4	1,10	0,97	0,2%	5,2%	0,98	0,33

Tabela 24: os resultados do MMQ
(Recomposição quadrimestral de carteiras)
(Foram utilizados 36 meses para estimar a matriz de covariância)

Devido ao procedimento computacional adotado para processar o MMQ , os ativos com pesos negativos calculados são eliminados no processo da formação da carteira. Entrando-se com uma matriz de covariância de 40 ativos, apenas as carteiras de números muito reduzidos de ativos são geradas. Por esse motivo, somente os resultados de 2 e de 4 ativos são apresentados (**Tabelas 21, 22, 23** e **24**). Esse fato, no entanto, não prejudica a comparabilidade dos resultados com outros modelos, uma vez que os papéis selecionados para compor a carteira são, em geral, os mais negociados na Bolsa.

As **Tabelas 21** e **22** mostram que a carteira com 2 ativos apresenta variância superior à carteira com 4 ativos. Já as **Tabelas 23** e **24** mostram que o tamanho ideal seria a carteira com 4 ativos quando o período de estimação é de 36 meses. Fazendo comparações entre essas tabelas, percebe-se que a recomposição quadrimestral não melhora significativamente a qualidade de replicação. Enquanto a estimação com 60 meses anteriores favorece a carteira com 2 ativos, a estimação com 36 meses anteriores favorece carteiras com 4 ativos.

Comparando-se com o MB, as medidas dos resultados do MMQ são sensivelmente melhores nas carteiras com 2 e com 4 ativos. A principal explicação para esse fato é dada pela não permissão da alavancagem do último modelo, eliminando o efeito de alavancagem excessiva para atingir o ponto ótimo.

5.5. Comparação entre os modelos

Finalmente, confronta-se os resultados de todas carteiras obtidas para selecionar o melhor modelo para cada tamanho de carteira condicionado pela freqüência de recomposição de carteira.

Quando a recomposição é anual, pode-se concluir que os modelos de otimização, principalmente **MVG** e **MMQ**, apesar dos desempenhos oscilatórios, conseguiram melhores resultados nas carteiras com 2 ou com 4 ativos. Nas demais, a superioridade do **MRP** é dominante, particularmente quando se trata de uma carteira com um número de ativos maior do que 20. (vide **Tabela 25** e **Tabela 26**)

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-Valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	MVG	MRP	MB	MRP	MVG	MVG
4	MMQ	MRP	MVG	MRP	MVG	MVG
6	MVG	MRP	MVG	MRP	MVG	MRP
8	MRP	MRP	MVG	MRP	MVG	MRP
10	MRP	MRP	MVG	MRP	MVG	MRP
20	MB	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
30	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
40	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP

Tabela 25: os melhores modelos na recomposição anual de carteiras

Tamanho da carteira	Coeficiente Beta	R^2	Tracking Error		Teste Hipótese (P-valor)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Variância
2	MVG	MRP	MVG	MRP	MVG	MVG
4	MVG	MRP	MRP	MVG	MRP	MVG
6	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
8	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
10	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
20	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
30	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP
40	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP	MRP

Tabela 26: os melhores modelos na recomposição quadrimestral de carteiras

A necessidade de usar uma freqüência ou outra depende de dois indicadores. O primeiro é o tamanho das carteiras, como já foi discutidos nos ítens anteriores; o balanceamento quadrimestral proporciona redução significativa de *tracking error* apenas nas carteiras pequenas.

O segundo é a porcentagem das mudanças quadrimestrais na carteira teórica do Ibovespa. A **Tabela 27** mostra que, no ano de 95, cuja mudança percentual do Ibovespa alcançou o patamar de 23%, o balanceamento quadrimestral apresentou uma redução de *tracking error* médio em todos modelos. E para outros anos, o benefício só é percebido nos **MVG** e **MB**. Esses fatos indicam uma forte recomendação de balanceamento para todos modelos quando há uma mudança acima de 20% na carteira teórica do Ibovespa.

Mudanças no Ibovespa (%)	Ano	Recomposição	MRP Tracking Error (%)		MVG Tracking Error (%)		MB Tracking Error (%)	
			Média	Desv. Padrão	Média	Desv. Padrão	Média	Desv. Padrão
22,8	1994	Anual	(0,3)	1,8	0,3	5,6	0,8	5,9
		Quadrimestral	0,7	2,1	3,5	9,3	4,4	9,1
11,9	1995	Anual	0,4	1,9	(0,5)	3,1	(0,3)	3,4
		Quadrimestral	0,3	3,1	(0,1)	3,4	(0,1)	3,8
14,0	1996	Anual	0,1	0,7	(1,0)	2,6	(1,4)	3,3
		Quadrimestral	(0,4)	1,1	(1,0)	2,5	(1,2)	2,8
13,8	1997	Anual	0,5	1,1	(0,2)	0,9	(0,4)	1,9
		Quadrimestral	0,9	0,4	0,2	0,8	0,2	1,9
	1998	Anual	0,0	1,3	0,2	1,7	0,5	2,4
		Quadrimestral	(0,6)	1,4	(0,6)	1,7	(0,4)	2,4

Tabela 27: Comparação entre as duas freqüências

5.6. Como os modelos comportam-se nos momentos de crises econômicas

Conforme já citado nos capítulos anteriores, ocorreram algumas perturbações na economia nacional e internacional :

Julho de 1994 : introdução do Plano Real;
Dezembro de 1994 : crise do México;
Final de 1997: crise da Ásia;
Final de 1998: crise da Rússia.

Os gráficos exibidos abaixo derivam-se da média dos *tracking errors* apresentados em todos os tamanhos estudados do modelo durante o período de janeiro de 1994 a dezembro de 1998.

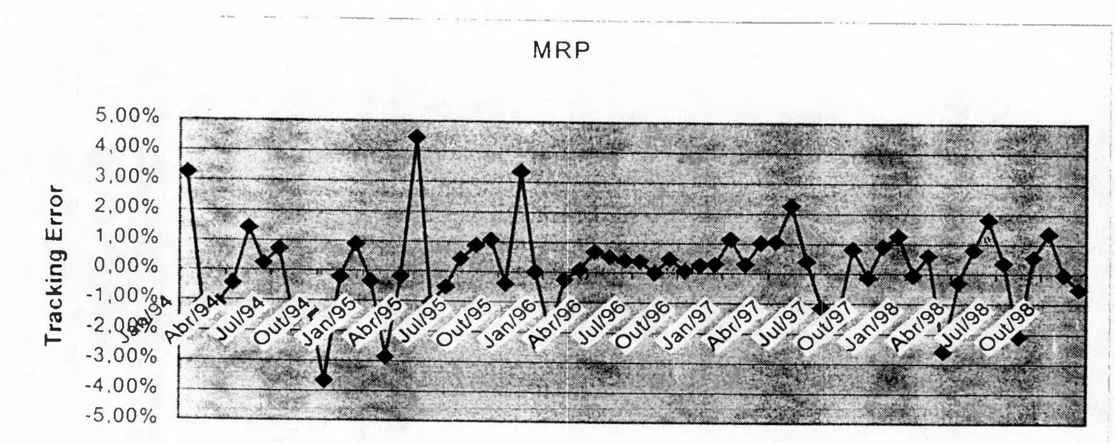


Figura 4: Evolução do *tracking error* médio das carteiras geradas pelo MRP

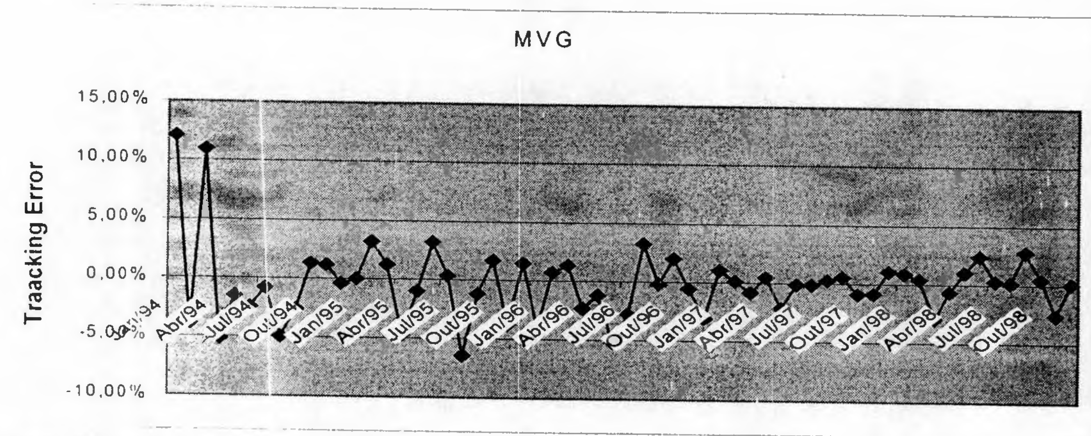


Figura 5: Evolução do *tracking error* médio das carteiras geradas pelo MVG

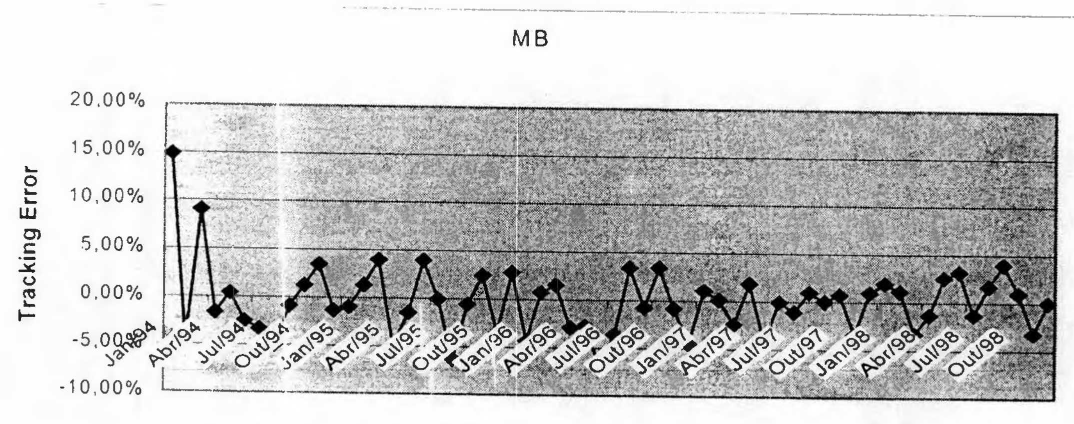


Figura 6: Evolução do *tracking error* médio das carteiras geradas pelo MB

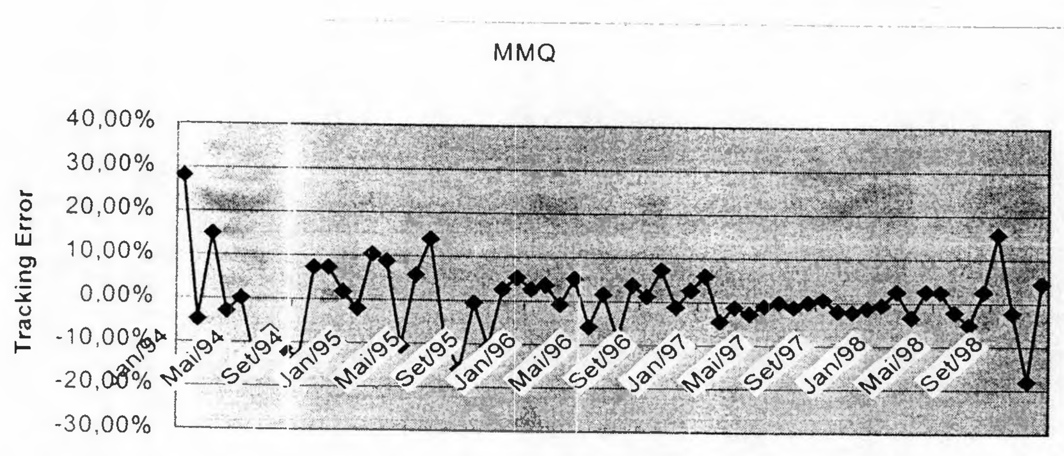


Figura 7: Evolução do *tracking error* médio das carteiras geradas pelo MMQ

A **Figura 4** mostra que o MRP sofreu fortes oscilações em três faixas (1) jan/1994 a Out/1994 (2) Jan/1995 a Fev/1996 e (3) Out/1997 a Dez/1998. Todos foram influenciados pelas crises econômicas. Porém, o modelo é bastante estável nos momentos de estabilidade nos períodos de Março/ 1996 a Maio/ 1997; o gráfico mostra uma linha quase reta e nível zero de *tracking error*. Isso significa que o **MRP** é mais estável e mais semelhante às oscilações do Ibovespa.

Os **MVG** e **MB** apresentam gráficos semelhantes nas **Figuras 5** e **6** respectivamente. Ao contrário do MRP, que mostra visivelmente um período de estabilidade, nota-se que no MB há uma distribuição mais regular de oscilações de *tracking error* ao longo do tempo. Mesmo nos momentos de crises econômicas, eliminando o momento inicial da condução do Plano Real na economia, a amplitude de oscilação permaneceu constante (5% na **Figura 5** e 9% na **Figura 6**). O mesmo comportamento é demonstrado pelo gráfico do **MMQ** (**Figura 7**).

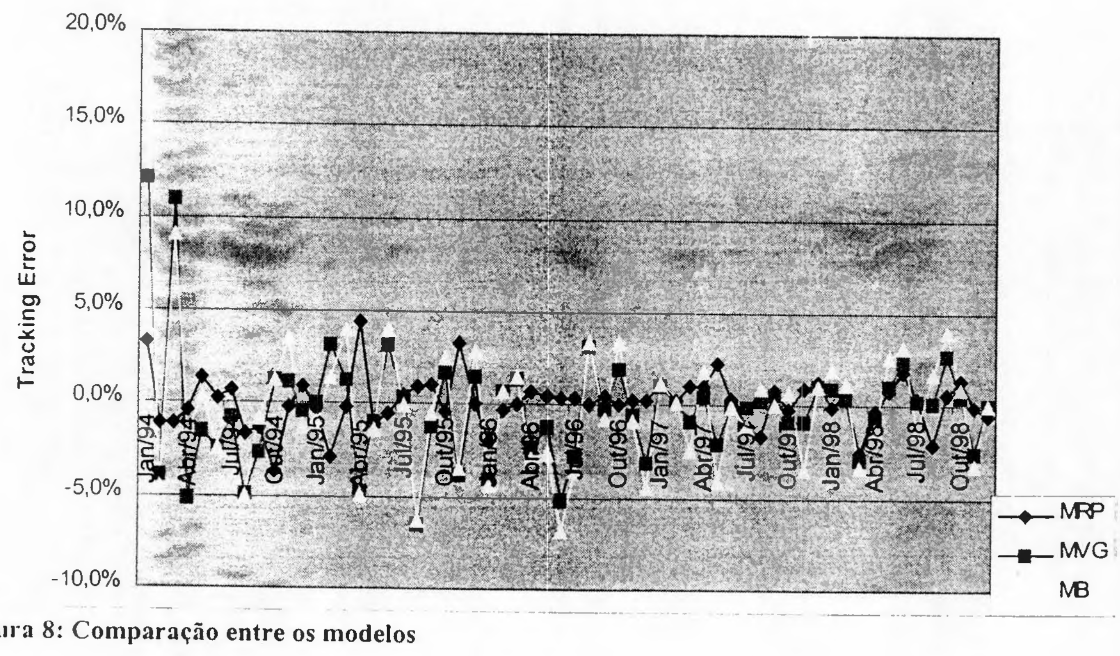


Figura 8: Comparação entre os modelos

Finalmente, consolida-se a evolução dos 3 modelos num único gráfico (**Figura 8**). O MRP destaca-se significativamente dentre todos modelos pela sua estabilidade relativa (a magnitude do desvio é de aproximadamente 3 %) . Os outros dois modelos apresentam oscilações semelhantes apesar das diferenças nas magnitudes. Colocando em ordem crescente de magnitudes, tem-se: MRP, MMQ e MB.

5.7. Comparação com as referências internacionais

O *tracking error*, o beta e o R^2 são medidas largamente utilizadas pelos pesquisadores estrangeiros. Os pesquisadores da *Salomon Brother* (1995), por exemplo, utilizaram esses parâmetros para avaliar o desempenho das carteiras de replicação para o índice **Wilshire 5000** (**Tabela 28**). Foram compostas várias carteiras, entre as quais, uma carteira espelho com 1750 ações, que era equivalente a 93% do peso do índice. Esta carteira, considerada a melhor, conseguiu um **beta** igual a 0,98, um $\mathbf{R^2}$ de 0,97 e um *tracking error* médio anualizado de 1,8%. Mais tarde, os pesquisadores utilizaram estratégias sintéticas para formar a carteira espelho do **Wilshire 5000**. Conseguiram um resultado ainda melhor, com um **beta** de 1,01, um $\mathbf{R^2}$ de 0,99 e um *tracking error* anualizado de 0,62%.

Carteiras de replicação do Wilshire 5000	Coeficiente Beta	R^2	Tracking error médio anualizado
Carteira composta pelas ações	0,98	0,97	1,80%
Carteira sintética	1,01	0,99	0,62%

Fonte: Salomon Brother (1995)

Tabela 28 : Referência americana sobre a replicação do Wilshire 5000

Com o resultado da replicação com ativos do mercado à vista apresentado, pode-se perceber que as carteiras escolhidas nos modelos implementados são bastante próximas

do resultado da carteira espelho **Wilshire 5000**. Embora alguns resultados não consigam **betas** muito próximos de 0,97, o $\mathbf{R^2}$ muito próximo de 1 revela a boa qualidade do modelo de previsão em termos de resíduos de regressão. Este é o exemplo da carteira gerada pelo **MVG** com apenas quatro ativos, que teve um **beta** de 0,94, um $\mathbf{R^2}$ de 0,97 e um *tracking error* anualizado de -2%.

Além disso, os modelos implementados conseguiram se igualar ao desempenho da replicação americana com o uso de derivativos. O resultado da carteira de 20 ativos utilizando o **MRP** superou levemente a referência americana em todos os aspectos comparados. O resultado mostra um **beta** de 0,99, um $\mathbf{R^2}$ de 0,99 e um *tracking error* anualizado de 0,4%. Portanto, as técnicas de replicação implementadas aqui obtiveram bons resultados quando comparadas às pesquisas norte americanas.

Uma outra forma de comparar resultados é baseada nas características desejáveis de um fundo de índice. De acordo com *Vanguard* (1999), um fundo de índice ideal é aquele que consegue reproduzir exatamente o comportamento do índice alvo. Porém, na prática, o fundo cujo R-quadrado é maior que 0,97 e cujo beta está entre 0,95 e 1,05 também é considerado. Dessa forma, as carteiras que satisfazem essas condições são listadas na tabela abaixo:

Modelos implementados	Tamanho da carteira
MRP	2; 4; 6; 8;10; 20; 30; 40
MVG	2; 4; 20
MB	30
MMQ	

Tabela 29: carteiras que satisfazem as exigências do fundo de índice

A **Tabela 29** mostra que os administradores podem construir um fundo de índice do Ibovespa com qualquer tamanho de carteira, uma vez que para cada tamanho descrito há uma ou mais de uma alternativa de construção, como por exemplo, é possível montar um fundo de índice com 4 ativos através do MRP ou do MVG.

5.8. Quadro resumo

O quadro seguinte resume os principais pontos fortes e fracos de cada modelo:

S: sim
N: não

Características	Modelos			
	Replicação Plena (MRP)	Mínima Variância Global (MVG)	Black (MB)	Minimização Quadrática (MMQ)
>Facilidade para implementar o modelo	S	S	N	N
>Estabilidade nos momentos de crise	S	N	N	N
>Baixo desvio na carteira pequena (2 - 6 ativos)	N	S	S	S
>Baixo desvio na carteira média (6 - 20 ativos)	S	S*	S*	S*
>Baixo desvio na carteira grande (20 - 40 ativos)	S	N	N	N
>Facilidade para incluir apenas ações liquidas	N	S	S	S
>Balanceamento menos frequente	S	N	N	N
>Incorporação das correlações entre ações na análise	N	S	S	S
>Flexibilidade para adaptar novas restrições	N	N	S	S
>Solução ótima para um nível de retorno pré-determinado	N	N	S	S
>Venda a descoberto	N	S	S	N

* Somente para a carteira com 20 ativos

Tabela 29: os pontos fortes e fracos de cada modelo

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Devido à globalização financeira - cujas características principais são a livre circulação de capitais à procura de remuneração elevada e à crescente demanda dos fundos de pensões - o mercado acionário brasileiro torna-se cada vez mais eficiente e transparente. Por essa razão, a metodologia da administração passiva passa a desempenhar um papel mais importante.

Este estudo concentrou-se na pesquisa e nas aplicações dos modelos para replicar o comportamento de um índice com freqüência mensal. Por falta de uma literatura nacional específica sobre o tema, as principais técnicas da administração de carteiras foram pesquisadas, extendidas e adaptadas para o contexto passivo, construindo-se assim uma carteira espelho.

Várias características apontadas pelas pesquisas americanas sobre os modelos de replicação na reprodução dos principais índices do mundo, particularmente as vantagens e as desvantagens demonstradas no capítulo 1, foram confirmadas nos testes aplicados para o Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa).

Os resultados dos modelos mostraram que é possível reproduzir o Ibovespa com bastante consistência para qualquer tamanho de carteira desejado. Nesse contexto, o resultado é bastante animador, não só para os pequenos investidores que desejam aproveitar o retorno do mercado (Bolsa de valores) sem correr alto risco e sem pagar taxa de administração, mas também para os investidores institucionais.

A limitação de recursos do investidor para diversificar sua carteira, o elevado custo de transações, a falta de conhecimento sobre o assunto e a falta de tempo para acompanhar os movimentos do mercado têm impedido a prática de obter retorno próximo do Ibovespa

através da montagem própria de uma carteira espelho. Esse problema é resolvido por aplicação do MRP, que apesar de não ser a melhor opção para replicar o índice com menos de 6 ativos, é fácil de ser implementado, é considerado de baixo desvio mesmo nas crises e oferece um retorno próximo do Ibovespa com baixa freqüência de balanceamento.

Já para uma Instituição Financeira (um banco, por exemplo) o resultado pode aumentar o lucro por dois caminhos. Primeiro, aumentando o produto bancário com a criação de um fundo de índice. Diferentemente do caso dos pequenos investidores, as instituições financeiras trabalham com grande volume de recursos que lhes permitem a montagem de várias sub-carteiras de índices dentro de um fundo de índice, utilizando outros modelos (MVG e MB por exemplo) recomendados por esta dissertação. Conseqüentemente, o beta e R-quadrado desse fundo ser muito próximos de 1, ou seja, um fundo que capta todos movimentos do Ibovespa.

O segundo caminho é usar a operação de arbitragem para aumentar o lucro. Essa não é uma tarefa fácil pois essa operação demanda um controle muito mais rigoroso e mais freqüente sobre *tracking error*. Como as simulações foram feitas sobre os dados mensais, os testes para verificar o poder de replicação numa freqüência mais elevada não foram testadas, mas mesmo assim, alguns aspectos foram identificados como prováveis fatores que podem ajudar a replicar o índice no nível de dia. São os seguintes: (1) o uso de modelo de programação quadrática (MVG, MMQ e MB) mostrou bastante eficiência no caso de carteira pequena; (2) o balanceamento freqüente aumenta a precisão de replicação; (3) utilizar os modelos de estimação de matriz de covariância que ponderam o efeito do tempo na estimação, como por exemplo, GARCH; (4) selecionar um conjunto de ações pré-analisado para inserir no modelo de otimização.

Sugestões para pesquisas futuras

Tendo em vista a natureza estática das análises, este trabalho não considerou os problemas causados pelas imperfeições de mercado: os custos de transação e os custos de

spread entre o momento de compra e de venda. Embora a comparação entre as carteiras espelho do mesmo tamanho e do mesmo nível da negociabilidade ajudou a reduzir o impacto da imperfeição do mercado, o ideal, no entanto, é considerar os custos ocorridos nos momentos de balanceamento de carteira, pois a amplitude de mudança é diferente em cada carteira. Além disso, a consideração de tais custos como uma terceira variável, além das medidas da média e da variância na análise marginal das carteiras, também poderia aperfeiçoar a escolha da carteira ótima.

Uma outra sugestão está relacionada com o uso combinado dos modelos apresentados. Balanceando os pontos fortes e os pontos fracos de cada modelo, o administrador pode criar um fundo, cujo resultado é a ponderação das carteiras geradas por diversos modelos, para replicar o índice com mais precisão. Por exemplo, a combinação da replicação sintética com a replicação de mercado à vista.

Portanto, sob a enorme possibilidade de explorar esse campo, especificamente a aplicação de modelos de replicação na vida real do mercado de capitais, esse trabalho é apenas um ponto inicial para mostrar alguns caminhos possíveis para realizar novos estudos que tentem uma análise mais dinâmica. Um dos grandes desafios seria, além de incorporar as imperfeições do mercado na análise, garantir resultados melhores, ou pelo menos iguais, aos dos níveis alcançados nessa dissertação para uma freqüência mais alta.

BIBLIOGRAFIA

ALEXANDER, Gordon J. FRANCIS, Jack Clark. Portfolio Analysis. 3.ed. Prentice-Hall, 1986. p.55-57

BOLLERSLEV, T. CHOU, Ray Y. KRONER, Kenneth F. *ARCH modeling in Finance: A review of the theory and empirical evidence.* Journal of Econmetrics 52 , North-Holland, 1992, p. 5-59.

BODIE, Zvi, KANE, Alex & MARCUS, Alan J. Investments, 3 ed. Irwine, 1996. Pag 338 – 340.

BOVESPA. *Índice Bovespa definições e metodologia.* Material institucionl da Bovespa.1999.

BUSSAB, Wilton O. *Análise de Variância e de regressão: uma introdução.* 2. Ed. São Paulo: Atual, 1988.

CHAN, Louis K.C. KARCESKI, Jason LAKONISHOK, Josef. *On portfolio optimization: forecasting covariance and choosing the risk model.* Working paper 7039. National Bureau of Economic Research, Cambridge, March 1999.

CROXTON, F.E. COWDEN, D.J. *Applied General Statistics*, 1.ed. Prentice-Hall, 1953.

ELTON, Edwin J. GRUBER, Martin J. *Modern portfolio theory and investment analysis.*5.ed. New York, John Wiley & Sons, 1995. Section 2.

EVIEWS 3. *Eviews 3 User's Guide.* 1994-1997.

FEIJÓ FILHO, Cyprino Lopes. *Arbitrgem de carteira de ações contra futuro de índice.* Revista Brasileira de Economia, Rio de Janeiro 49 (4): p.663-83 Out./Dez. 1995.

FMI. o relatório do Fundo Monetário Internacional 1995, pag.166

FRANCIS, Jack Clark. ARCHER, Stephen H. *Portfolio Analysis.* 1.ed. Prentice-Hall, 1971. Capítulo 4.

FREDMAN, A. J. and WILES,R., *How mutual funds work,* New York Institute of Finance (1993). Pag. 83-93

GREENE, William H. *Econometric Analysis*, 3. Ed. Prentice-Hall,1997, New Jersey. Pag 595.

HULL, John. *Introduction to futures and options markets.* 2.ed. Prentice Hall, 1995.

INGERSOLL, Jonathan E. *Theory of financial decision marking.* 1.ed. Rowman & Littlefield Publishers, 1987. Capítulo 4.

LAMONT, Owen. *Economic tracking portfolios*, Working paper 7055, National Bureau of Economic Research. March, 1999.

LEITE, Helio de Paula, SANVICENTE, Antonio Zoratto Sanvicente. *Índicce Bovespa: Um padrão para os investimentos brasileiros.* São Paulo: Atlas, 1994. 140p.

KMENTA, Jan. Elementos de econometria, Volume 2. 2 ed. São Paulo: Atlas,1988. Pag 280.

KEIM, Donald B. *An analysis of mutual fund design: the case of investing in samall-cap stocks.* Philadelphia, Journal of financial economics 51 (1999) 173-194.

MARKOWITZ, Harry. M. *Portfolio Selection.: efficient diversification of investment.* Originalmente publicado por John Wiley & Sons em 1959 e reeditado pela Blackwell Publishers. 1991.

MARKOWITZ, Harry M. *Mean-variance analysis in portfolio choice and capital Markets.* 1.ed. Blackwell Publishers. 1987. Capítulo 7.

MATLAB. *Matlab- The student edition.* The Matworks, 1997

NAKAMURA, Wilson Toshiro. *Eficiência da carteira teórica do Índice Bovespa no contexto da moderna teoria de carteiras.* São Paulo: departamento de administração, Faculdade de economia , administração e contabilidade, Universidade de São Paulo.1998 (Tese, Doutorado, Finanças) p.89-106

POPE, Peter F. YADAV Pradeep K. *Discovering errors in tracking error.* The journal of portfolio management, winter 1994, p. 27-32.

PINDYCK, Robert S and RUBINFIELD, Daniel L. *Econometric Models & Economic Forecasts,* 3 e.d. McGraw-Hill International.1991. Pag 417,446 e 447.

PUGGINA, Wladimir A. Analysis of rates of return and risk for common and preferred stocks: The brazilian experience. Department of accounting and financial administration, Michigan State University. 1974 (Tese, Doutorado, Finanças) p. 173-182

ROLL, Richard. *A mean/Variance Analysis of Tracking Error,* The Journal of Potfolio Management, Summer 1992. P.13-22.

ROSS, Stephen A. WESTERFIED, Randolph W. JAFFE, Jeffrey F. *Administração financeira: Corporate finance*; tradução Antônio Zorato Sanvicente. São Paulo: Atlas, 1995. Parte 3.

SALOMON BROTHERS. *Index replication strategies: all over again.* Relatório técnico do Salomon Brothers, February 1995.

SHARPE, William F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under condition of risk. The Journal of Finance 19, 1964. p.425-442

SIEGEL, Daniel R. SIEGEL. Daniel F. *Futures Markets.* 1.ed. The Dryden Press, 1990. Capítulos 2 a 4.

STERN, Julio M. *Modelos matemáticos para formação de portfólios. Reltório técnico* RT-MAC-9404, 16-03-94. revisão RT-MAC-9510, 31-07-95. MAC-IME-USP, 1995.

TITMAN, Sheridan. GRINBLATT, Mark. *Financial Markets and Corporation Strategy.* McGraw-Hill 1998. Part 2.

WORZEL, K.J., VASSADOU-ZENIOU, Christiana. ZENIOS, Stavros A. *Integrated simulation and optimization models for tracking indices of fixed-income sedurities.* Operations Researchs, Pennsylvania, No.2, March-April, 1994. P. 223-233.

MALKIEL, Burton G. *A Randon Walk Down Wall Street.* 6ª. ed. Norton & Company 1996.

FREDMAN, A. J. and R. Wiles, "*How Mutual Funds Work*" New York Institute of Finance 1993. P. 83-93

SHARPE, William. **Prof. William Sharpe, Part I.** 1999. Endereço eletrônico: http://www.Indexfundonline.com

BOVESPA, os materiais institucionais, 1997. Endereço eletrônico: http://www.bovespa.com.br

VANGUARD, os materiais institucionais, 1999. Endereço eletrônico: http://www.vanguard.com

ANEXO I

Metodologia do cálculo do Índice BOVESPA

1) Apuração do Índice Bovespa

O Índice Bovespa nada mais é do que o somatório dos pesos (quantidade teórica da ação multiplicada pelo último preço da mesma) das ações integrantes de sua carteira teórica. Assim sendo, pode ser apurado, a qualquer momento, através da seguinte fórmula:

$$\text{Ibovespa T} = \sum_{i=1}^{n} P_{it} * Q_{it}$$

onde:
Ibovespa T= Índice Bovespa no instante T
n = número total de ações componentes da carteira teórica
P = último preço da ação i no instante T
Q = quantidade teórica da ação i na carteira no instante T

2) Ajuste da Quantidade Teórica em Função de Proventos

O mecanismo de alteração é semelhante ao utilizado para o ajuste da carteira como um todo, ou seja, considerando-se que o investidor realizou (vendeu) as ações ao último preço de fechamento anterior ao início da distribuição de provento e utilizou os recursos na compra das mesmas ações sem o provento distribuído (Ex provento).

Fórmula de Alteração na Quantidade Teórica (por ocasião de distribuição de proventos)

$$Q_n = \frac{Q_o * P_o}{P_{ex}}$$

onde:
Q_n = quantidade nova

Q_o = quantidade antiga
P_o = último preço de fechamento anterior ao início da distribuição do provento
P_{ex} = preço ex-teórico, calculado com base em P

Fórmula Geral de Cálculo do Preço Ex-Teórico

$$P_{ex} = \frac{P_c + (\%S * Z) - Div}{1 + \%B + \%S}$$

onde:
P_{ex} = preço ex- teórico
P_c = último preço de fechamento anterior ao início da distribuição do provento
%S = percentual de subscrição
Z = valor em moeda corrente de emissão de cada ação a ser subscrita
Div = valor em moeda corrente recebido por ação a título de dividendo
%B = percentual de bonificação

3) Critérios para Inclusão de Ações na Carteira

Para que uma ação seja incluída no Índice Bovespa é necessário que ela atenda, simultaneamente, aos seguintes parâmetros, sempre com relação aos 12 meses anteriores:

a) estar incluída em uma relação de ações resultantes da soma, em ordem decrescente,dos índices de negociabilidade até 80% do valor da soma de todos os índiceindividuais;
b) apresentar participação, em termos de volume, superior a 0,1% do total;
c) ter sido negociada em mais de 80% do total de pregões do período.

4) Recomposições Quadrimestrais

Segundo fórmula adiante indicada, a BOVESPA calcula o índice de negociabilidade para cada uma das ações nela negociadas nos últimos doze meses.

Esses índices são colocados em uma tabela, em ordem decrescente, e uma coluna apresenta a soma de tais índices à medida que se percorre a tabela do maior para o menor. Calcula-se a participação percentual de cada índice no somatório desses, listando-se as ações até que o montante das participações atinja 80%.

As ações assim selecionadas irão compor a carteira do índice, desde que atendam aos aos outros dois critérios. Caso não atendam, são substituídas pelas ações que vierem a seguir na listagem decrescente e que consigam atender a tais parâmetros.

Uma vez alcançado o mínimo de 80% da soma dos índices de negociabilidade, tem-se a relação das ações que irão compor o Índice Bovespa para os próximos quatro meses. Assim, os índices das ações escolhidas são listados novamente, apurando-se o percentual de participação de cada uma em relação à soma dos índices de todos os papéis da carteira. Multiplica-se o resultado pelo índice de negociabilidade original e obtém-se a participação ajustada.

A participação ajustada de cada ação, aplicada sobre o valor do índice do último dia do quadrimestre anterior, determinará a composição da carteira para o quadrimestre seguinte.

A quantidade teórica de cada ação - resultante da divisão de sua parcela na composição do índice pelo seu preço de fechamento no último dia do quadrimestre anterior - permanecerá constante pelos quatro meses de vigência da carteira, somente sendo alterada caso ocorra a distribuição de proventos (dividendos, bonificações, subscrições), por parte da empresa.

Por outro lado, uma vez selecionada uma ação para participar da carteira do índice, ela só deixará de constar dessa carteira quando não conseguir atender a pelo menos dois critérios indicados.

Índice de negociabilidade das ações:

$$I_{negociabilidade} = \left[(n/N) * (v/V)\right]^{0,5}$$

onde:

n = número de negócios com a ação, realizados no mercado a vista (lote-padrão), nos últimos 12 meses

N = número de negócios total do mercado a vista (lote-padrão) dos últimos 12 meses

v = valor em moeda corrente movimentado com a ação no mercado a vista (lote-padrão) nos últimos 12 meses

V = valor em moeda corrente total do mercado a vista (lote-padrão) dos últimos 12 meses

ANEXO II

Modelos de CAPM e APT

1) *Capital Asset Pricing Model* (CAPM)

Fundamentalmente, o modelo **CAPM** aplica o Princípio de Dominância de Risco e Retorno para estabelecer a relação de equilíbrio de preços. O modelo pressupõe que um agente econômico racional sempre prefere as carteiras com maior retorno ao mesmo nível de risco ou menor risco ao mesmo nível de retorno.

O modelo **CAPM** foi desenvolvido, simultânea e independentemente por *Lintner* (1965), *Sharpe* (1964) e *Mossin* (1966). A discussão desse assunto teve origem no início da década de 50, quando *Markowitz* (1952) começou estudar a seleção de ativos para montar uma carteira ótima de investimentos. Ele analisou os papéis em duas dimensões – média e variância dos retornos das carteiras. Colocando todos os pontos num plano, e com base no Princípio de Dominância, ele traçou uma fronteira eficiente, no qual os agentes econômicos racionais teriam as melhores carteiras em relação às demais. A medida de risco - a variância foi substituída por desvio padrão.

Mais tarde, *Tobin* (1958) introduziu a taxa livre de risco na análise. Traçando uma linha entre essa taxa e o ponto tangente da fronteira eficiente, teremos uma nova fronteira eficiente que domina a anterior. Esta reta é denominada de *Capital Market Line* (**CML**). *Tobin* também introduziu o conceito de **Teorema de Separação**.

Considerando a expectativa homogênea e a inexistência de imperfeições de mercado, o ponto de tangência seria a carteira do mercado. Em condições de equilíbrio, os

investidores, dependendo do grau de aversão ao risco, passaram a escolher um ponto na **CML**, variando somente a proporção da carteira com risco e da carteira sem risco.

Em seguida, *Sharpe* sugeriu um parâmetro **beta** para medir o inter-relacionamento entre o movimento de retornos de um ativo particular e a carteira do mercado. De acordo com *Sharpe*, esse movimento será recompensado em forma de retorno para investidores. Em razão da diversificação da carteira, não haverá prêmio para riscos não sistemáticos. O surgimento do **beta** também contribuiu para simplificação de processos de cálculos para estimar a covariância.

*Hipóteses do **CAPM**:*

1- Os investidores se preocupam apenas com a média e a variância dos retornos de suas carteiras.

2- Não há atritos no mercado (não há custos de transação na compra ou venda de qualquer ativo).

3- Os ativos são infinitamente divisíveis. Isso significa que um investidor pode tomar qualquer posição num investimento, independente do tamanho de seu investimento.

4- Não se verifica incidência de impostos de renda.

5- É permitido fazer venda a descoberta.

6- Os investidores podem tomar e emprestar a uma mesma taxa livre de risco.

7- Os investidores têm expectativas homogêneas, o que significa que todos investidores chegam às mesmas conclusões sobre a média e desvios padrão de todas carteiras viáveis.

A partir das hipóteses acima, os teóricos foram capazes de desenvolver o **CAPM** e concluíram que a carteira tangente deve ser a carteira de mercado

Modelos de CAPM :

$$\overline{R}_i = R_F + \beta_i(\overline{R}_M - R_F)$$

$\overline{R}_i$ é o retorno esperado de um título i

R_F é o retorno do ativo sem risco

β_i é o beta do título

$\overline{R}_M$ 'o retorno esperado do mercado

Segundo *Ross* (1995), os pesquisadores têm mostrado que a melhor medida do risco de um título numa carteira ampla é o **Beta** do título.

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$

onde

$\sigma^2(R_M)$ é a variância do retorno do mercado,

$Cov(R_i, R_M)$ é a covariância entre retorno do ativo e retorno do mercado,

β_i é o beta do título i.

O **beta** de uma carteira é, portanto, uma combinação linear de todos títulos que compõem a carteira. Assim, encontrar uma carteira espelho, dado que o índice assume o papel do indicador do mercado, significaria encontrar uma carteira cujo beta fosse igual a um. Dessa forma, teoricamente, essa carteira teria a mesma sensibilidade de variação de um índice alvo.

Na prática, os agentes econômicos usam um índice de mercado - o Ibovespa é um exemplo - como representante da carteira de mercado, apesar de todas as deficiências da estrutura desses índices.

2) *Arbitrage Pricing Theory* (APT)

Assim como o **CAPM**, o uso de um modelo multifatorial (próximo tópico)está em consonância com o objetivo de criar uma carteira de ações que espelhe um índice. Conforme as palavras de Stern(1995), o modelo APT é um modelo de equilíbrio baseado no modelo fatorial , que supõem ser possível construir "portfólios de arbitragem" com seguintes características:

1. $x'\mathbf{1}=0$,

2. $x'B=0$,

3. $Var(x'a)=0$.

Isto é, portfólios de valor zero, imunes a todas taxas de crescimento setorial e quase livres de risco próprio. Essas características implicam que, em condição de equilíbrio, a taxa esperada de retorno de um portfólio de arbitragem deve ser nula. xE(a)=0. Esta condição de equilíbrio é motivada pela possibilidade de ganhar dinheiro sem risco, caso condição não seja satisfeita.

No modelo **CAPM**, o **beta** mede a sensibilidade da taxa de retorno de um título em relação a um fator específico de risco - retorno do mercado. Generalizando esse conceito, pode-se considerar tipos múltiplos de riscos sistemáticos, inclusive o risco do mercado. O **APT** além de incorpora esses fatores até que o risco não sistemático de um ativo não se correlacione mais com o risco não sistemático de quaisquer outros ativos, esse modelo atribui esses fatores como geradores do retorno.

Portanto, conclui-se que o retorno esperado de um dado ativo, no modelo APT, é taxa livre de risco mais termos proporcionais aos prêmios de risco de cada setor, ponderados pelos fatores de sensibilidade.

ANEXO III

Rotinas computacionais de cálculo

1) Programa Modelo 1: Modelo de replicação plena

```
label CalcularDeNovo,Comeco;

const
    NumDeDiasT= 12;    {-1..12}        {colocar o num de meses do arquivo}
    NumDeEmpT = 60;

{...................................................................}

function xAy(x,y : extended) : extended;
begin
                              {xAy= x^y          x[positivo] elevado a y }
xAy:=exp(y*ln(x));

End;

{/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\}

begin

{Usa o modelo de replicacao total}

Comeco:

Capital:=1000000;

{...................................................................}

write('Entrar nome do arquivo de fechamento = ');
readln(NomeArqPreco);
readln(ArqPreco,NumDeEmp);

for NumDaEmp:=0 to 13 do read(ArqPreco,Emp[NumDaEmp]);

readln(arqPreco);

for l:=-1 to NumDeDiasT do
   begin                        {leitura dos valores diarios do fechamento}
   read(ArqPreco,ddmmaa);
   for NumDaEmp:=1 to 13 do read(ArqPreco,FecDaEmpP[l,NumDaEmp]);
   readln(ArqPreco);
   dia[l]:=l;
   end;

NumDeBlocos:=(NumDeEmp + 1) div 14;
UltimoBloco:=false;

for Bloco:=1 to NumDeBlocos do
   begin
   NumDaEmpIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaEmpFin:=NumDaEmpIni+13;
   if NumDaEmpFin>NumDeEmp then
      begin
      NumDaEmpFin:=NumDeEmp;
      UltimoBloco:=true;
      end;

   for NumDaEmp:=NumDaEmpIni to NumDaEmpFin do
      begin
```

```
      read(ArqPreco,Emp[NumDaEmp]);
      if (NumDaEmp>0) and (length(Emp[NumDaEmp])<17) then
         begin                {garantir 17 colunas p/ cada nome de empresa}
         for i:=1 to 17-length(Emp[numDaEmp]) do
         Emp[NumDaEmp]:=Emp[NumDaEmp]+' ';
         end;
      end;

   for l:=-1 to NumDeDiasT do
      begin                      {leitura dos valores diarios do fechamento}
      for NumDaEmp:=NumDaEmpIni to NumDaEmpFin do
         begin
         read(ArqPreco,FecDaEmpP[l,NumDaEmp]);
         end;
      if UltimoBloco then read(ArqPreco,ib[l]);
      readln(ArqPreco);
      end;

   end;

{..........................................................................}

write('Entrar nome do arquivo de peso = ');
readln(NomeArqPeso);
write('Entrar numero de meses a serem considerados = ');
readln(NumDeDias);

NumDaEmp:=0;
while not eof(ArqPeso) do
   begin
   NumDaEmp:=NumDaEmp+1;
   readln(arqPeso,EmpNaCar[NumDaEmp],Participacao[NumDaEmp]);
   end;

NumDeEmpTot:=NumDaEmp;      {num total de emp na carteira dada}

{..........................................................................}

for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpTot do
   begin                          {criar matriz de fechamento ordenada}
   Achou:=false;
   for i:=1 to NumDeEmp do
      begin
      if EmpNaCar[NumDaEmp]=Emp[i] then
         begin
         for l:=-1 to NumDeDiasT do FecDaEmp[l,NumDaEmp]:=FecDaEmpP[l,i];
         Achou:=true;
         end;
      end;
   if Achou=false then
      begin
      writeln('Nome da empresa da certeira nao aparece no Ibovespa!!!!');
      writeln(EmpNaCar[NumDaEmp]:17);
      end;
   end;

{..........................................................................}

rdi[0]:=0;

for l:=1 to NumdeDias do rdi[l]:=((ib[l]-ib[l-1])/ib[l-1])*100;
                     {retorno da dif do IBOVESPA}
{..........................................................................}

CalcularDeNovo:

for NumDeEmpNaCar:=1 to NumDeEmpTot do
   begin                                  {para cada carteira escolhida}
   PesoDaCar:=0;
   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
                               PesoDaCar:=PesoDaCar+Participacao[NumDaEmp];
```

```
for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
            ParNaCar[NumDaEmp]:=(Participacao[NumDaEmp]/PesoDaCar)*100;
{...................................................................}

for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNacar do
         valor[NumDaEmp]:=ParNaCar[NumDaEmp]*Capital/100;

{para o dia Zero}
for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
         NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]:=Valor[NumDaEmp]/FecDaEmp[0,NumDaEmp];
{...................................................................}

Retorno[0]:=0;

for l:=1 to NumDeDias do
   begin

   {........................................Ontem}

   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
       Ontem[NumDaEmp]:=NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]*FecDaEmp[l-1,NumDaEmp];
   CarteiraOntem:=0;
   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
       CarteiraOntem:=CarteiraOntem+Ontem[NumDaEmp];

   {.........................................Hoje}

   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
        Hoje[NumDaEmp]:=NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]*FecDaEmp[l,NumDaEmp];

   CarteiraHoje:=0;
   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
       CarteiraHoje:=CarteiraHoje+Hoje[NumDaEmp];

   {....................................Retorno}

   Retorno[l]:=((CarteiraHoje-CarteiraOntem)/CarteiraOntem)*100;

   DifDeRet[l]:=Retorno[l]-rdi[l];
   end;

{...................................................................}

Soma:=0;
for l:=1 to NumDeDias do Soma:=Soma+DifDeRet[l];
Media[NumDeEmpNaCar]:=Soma/NumDeDias;

{...................................................................}

Soma:=0;
for l:=1 to NumDeDias do Soma:=Soma+Sqr(DifDeRet[l]-Media[NumDeEmpNaCar]);
Variancia[NumDeEmpNaCar]:=Soma/(NumDeDias-1);
DesPad[NumDeEmpNaCar]:=SqRt(Variancia[NumDeEmpNaCar]);
{...................................................................}

DesPadAnual[NumDeEmpNaCar]:=SqRt(12)*DesPad[NumDeEmpNaCar];
{...................................................................}
writeLn(NumDeEmpNaCar:3,
        '  Med=',Media[NumDeEmpNaCar]:8:3,'%',
        '  Var=',Variancia[NumDeEmpNaCar]:8:4,
        '  DesPad=',DesPad[NumDeEmpNaCar]:8:4,'%',
        '  DesPadAnual=',DesPadAnual[NumDeEmpNaCar]:8:3,'%');
end;
{...................................................................}
end.
```

2) Programa Modelo 2: Carteira de Mínima Variância Global (com venda a descoberto)

Parte A

```
label Recomecar,Sequencial;

{.......................................................................}

procedure LUDcmp (var a: RealArrayNPbyNp;
                      n : integer;
               var indx : IntegerArrayNP;
                  var d : real);

{Objetivo: Dada a matriz a[1..n,1..n], decompor a[] em 2 matrizes triangulares:
           L: triang inferior  e U: triang superior.
           O resultado de L e U sai em a[].
           Indx[]: vetor de saida com as permutacoes efetuadas no pivoteamento.
           d eh saida: Se d=+1 o num de permut de lin foi par
                       Se d=-1 o num de permut de lin foi impar.
           Pode ser usada p/ resolver sist de equ com o LUBkSb como p/ inverter
           uma matriz}

begin
end;

{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}

procedure LUBkSb (var a: RealArrayNPbyNp;
                      n : integer;
               var indx : IntegerArrayNP;
                  var b : RealArrayNP);

{Objetivo: Resolver ax=b por retro-substituicao.
           Dada a matriz a[1..n,1..n] = L*U onde
           L: triang inferior  e U: triang superior (obtidas por LUDcmp),
           e o vetor b[1..n] resolver a equ ax=b.
           Indx[]: vetor de saida com as permutacoes efetuadas no pivoteamento.
           X sai em b[] no final}

begin

end;

{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}

procedure LerArq(var A : RealArrayNPbyNP;
               var Emp : Str17ArrayNP;
                 var l : integer;
           var NumColA : integer;
           var NumColB : integer);

begin
{ler arquivo matricial na forma da matriz A[n,n] e B[n,m]}
{n=num de incognitas  m=num de diferentes conjuntos de dados independentes}

write('Nome do arquivo de covariancias a ser lido    = ');
readln(ArqExt);

Write('Numero de colunas da matriz A  = ');
readln(NumColA);

NumLinA:=NumColA;
NumColB:=1;

readln(Arq);        {linha dos nomes das empresas}
```

```
for lin:=1 to NumLinA do
   begin
   read(Arq,Emp[lin]);
   colF:=lin;                          {colun final a ser lida}
   if lin>13 then colF:=13;
   for col:=1 to colF do read(Arq,a[lin,col]);
   readln(arq);
   end;

NumDeBlocos:=(NumColA + 1) div 14;
UltimoBloco:=false;

for Bloco:=1 to NumDeBlocos do
   begin
   {writeln('Bloco',bloco:3);}
   readln(Arq);                   {linha cóm os nomes das empresas}
   NumDaLinIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaLinFin:=NumDaLinIni+13;

   for lin:=1 to NumDaLinIni-1 do readln(Arq); {linhas em branco da triang}

   NumDaColIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaColFin:=NumDaColIni+13;
   if NumDaColFin>NumLinA then
      begin
      NumDaLinFin:=NumLinA;
      UltimoBloco:=true;
      end;

   for lin:=NumDaLinIni to NumLinA do
      begin
      colF:=lin;
      if lin>NumDaColFin then colF:=NumDaColFin;
      for col:=NumDaColIni to colF do read(Arq,a[lin,col]);
      if not eof(arq) then readln(arq);
      end;

   end;

for lin:=1 to NumLinA-1 do for col:=lin+1 to NumColA do a[lin,col]:=a[col,lin];

end;

{----------------------------------------------------------------------}

BEGIN

LerArq(a,Emp,1,NumColA,NumColB);     {a[]=matriz de covariancia dada}

for i:=1 to NumColA do for j:=1 to NumColA do aux[i,j]:=a[i,j];

NumColTot:=NumColA;

Recomecar:

NumColA:=0;

for i:=1 to NumColTot do for j:=1 to NumColTot do a[i,j]:=aux[i,j];

write('Numero de empresas a participar da carteira = ');
readln(NumColA);

LUDcmp(a,NumColA,indx,d);

for j:=1 to NumColA do
   begin
   for i:=1 to NumColA do coluna[i]:=0.0;
   coluna[j]:=1.0;
   LUBkSb(a,NumColA,indx,coluna);
   for i:=1 to NumColA do y[i,j]:=coluna[i];    {y[]=matriz inversa de a[]}
```

```
   end;

for j:=1 to NumColA do
   begin
   soma:=0;
   for i:=1 to NumColA do soma:=soma+y[i,j];
   x[j]:=soma;           {x[]=1'.y[]  pag 86 do theory of financial decision}
   end;

soma:=0;
for j:=1 to NumColA do soma:=soma+x[j];
Den:=soma;                               {den = soma das colunas de x[]}

for i:=1 to NumColA do
   begin
   soma:=0;
   for j:=1 to NumColA do soma:=soma+y[i,j];
   num[i]:=soma;        {num[i]=soma das colunas de y[]}
   end;

for i:=1 to NumColA do w[i]:=Num[i]/Den;  {w=peso}

for i:=1 to NumColA do writeln(i:3,' ',emp[i]:17,w[i]:10:5);

soma:=0;
for i:=1 to NumColA do soma:=soma+w[i];

write('[N]ovo numero de empresas     [G]ravar pesos       [F]im = ');
tecla:=UpCase(ReadKey);

if tecla='N' then goto Recomecar;

writeln;
write('[N]ovo numero de empresas [F]im = ');
tecla:=UpCase(ReadKey);
writeln;
if tecla='N' then goto Recomecar;

END.
```

Parte b

```
{.............................................................................}
function xAy(x,y : extended) : extended;
begin
                             {xAy= x^y         x[positivo] elevado a y }
xAy:=exp(y*ln(x));

End;

{/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\}

begin

Comeco:

Capital:=1000000;

{.............................................................................}

write('Entrar nome do arquivo de fechamento = ');
readln(NomeArqPreco);
readln(ArqPreco,NumDeEmp);

for NumDaEmp:=0 to 13 do
   begin
   read(ArqPreco,Emp[NumDaEmp]);
   if (NumDaEmp>0) and (length(Emp[NumDaEmp])<17) then
      begin                   {garantir 17 colunas p/ cada nome de empresa}
```

```
      for i:=1 to 17-length(Emp[numDaEmp]) do
      Emp[NumDaEmp]:=Emp[NumDaEmp]+' ';
      end;
   end;

readln(arqPreco);

for l:=-1 to NumDeDiasT do
   begin                          {leitura dos valores diarios do fechamento}
   read(ArqPreco,ddmmaa);
   for NumDaEmp:=1 to 13 do read(ArqPreco,FecDaEmpP[l,NumDaEmp]);
   readln(ArqPreco);
   dia[l]:=l;
   end;

NumDeBlocos:=(NumDeEmp + 1) div 14;
UltimoBloco:=false;

for Bloco:=1 to NumDeBlocos do
   begin
   NumDaEmpIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaEmpFin:=NumDaEmpIni+13;
   if NumDaEmpFin>NumDeEmp then
      begin
      NumDaEmpFin:=NumDeEmp;
      UltimoBloco:=true;
      end;

   for NumDaEmp:=NumDaEmpIni to NumDaEmpFin do
      begin
      read(ArqPreco,Emp[NumDaEmp]);
      if (NumDaEmp>0) and (length(Emp[NumDaEmp])<17) then
         begin              {garantir 17 colunas p/ cada nome de empresa}
         for i:=1 to 17-length(Emp[numDaEmp]) do
         Emp[NumDaEmp]:=Emp[NumDaEmp]+' ';
         end;
      end;

   readln(arqPreco);
   for l:=-1 to NumDeDiasT do
      begin                     {leitura dos valores diarios do fechamento}
      for NumDaEmp:=NumDaEmpIni to NumDaEmpFin do
         begin
         read(ArqPreco,FecDaEmpP[l,NumDaEmp]);
         end;
      if UltimoBloco then read(ArqPreco,ib[l]);
      readln(ArqPreco);
      end;

   end;
{...............................................................}

write('Entrar nome do arquivo de peso (SEM extensao) PesoAA = ');
readln(NomeDoArquivo);

LerPeso:

write('Entrar nome da Extensao do arquivo de peso XX = ');
readln(Extensao);
NomeArqPeso:=NomeDoArquivo+'.'+extensao;
write('Entrar numero de meses a serem considerados = ');
readln(NumDeDias);

NumDaEmp:=0;
while not eof(ArqPeso) do
   begin
   NumDaEmp:=NumDaEmp+1;
   readln(arqPeso,EmpNaCar[NumDaEmp],Participacao[NumDaEmp]);
   end;

NumDeEmpTot:=NumDaEmp;      {num total de emp na carteira dada}
```

```
{...................................................................}

for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpTot do
   begin                         {criar matriz de fechamento ordenada}
   Achou:=false;
   for i:=1 to NumDeEmp do
      begin
      if EmpNaCar[NumDaEmp]=Emp[i] then
         begin
         for l:=-1 to NumDeDiasT do FecDaEmp[l,NumDaEmp]:=FecDaEmpP[l,i];
         Achou:=true;
         end;
      end;
   if Achou=false then
      begin
      writeln('Nome da empresa da certeira nao aparece no Ibovespa!!!!');
      writeln(EmpNaCar[NumDaEmp]:17);
      end;
   end;

{...................................................................}

rdi[0]:=0;

for l:=1 to NumdeDias do rdi[l]:=((ib[l]-ib[l-1])/ib[l-1])*100;
                     {retorno da dif do IBOVESPA}
{...................................................................}

CalcularDeNovo:

for NumDeEmpNaCar:=NumDeEmpTot to NumDeEmpTot do
   begin                            {para cada carteira escolhida}
   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
            ParNaCar[NumDaEmp]:=(Participacao[NumDaEmp])*100;
   {.................................................................}

   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNacar do
         valor[NumDaEmp]:=ParNaCar[NumDaEmp]*Capital/100;

   {para o dia Zero}
   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
         NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]:=Valor[NumDaEmp]/FecDaEmp[0,NumDaEmp];
   {.................................................................}

   Retorno[0]:=0;

   for l:=1 to NumDeDias do
      begin

      {.......................................Ontem}

      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          Ontem[NumDaEmp]:=NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]*FecDaEmp[l-1,NumDaEmp];

      CarteiraOntem:=0;
      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          CarteiraOntem:=CarteiraOntem+Ontem[NumDaEmp];

      {........................................Hoje}

      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          Hoje[NumDaEmp]:=NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]*FecDaEmp[l,NumDaEmp];

      CarteiraHoje:=0;
      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          CarteiraHoje:=CarteiraHoje+Hoje[NumDaEmp];

      {.....................................Retorno}

      Retorno[l]:=((CarteiraHoje-CarteiraOntem)/CarteiraOntem)*100;
```

```
        DifDeRet[l]:=Retorno[l]-rdi[l];
        end;

    {.......................................................................}
    Soma:=0;
    for l:=1 to NumDeDias do Soma:=Soma+DifDeRet[l];
    Media[NumDeEmpNaCar]:=Soma/NumDeDias;

    {.......................................................................}

    Soma:=0;
    for l:=1 to NumDeDias do Soma:=Soma+Sqr(DifDeRet[l]-Media[NumDeEmpNaCar]);
    Variancia[NumDeEmpNaCar]:=Soma/(NumDeDias-1);
    DesPad[NumDeEmpNaCar]:=SqRt(Variancia[NumDeEmpNaCar]);

    {.......................................................................}

    DesPadAnual[NumDeEmpNaCar]:=SqRt(12)*DesPad[NumDeEmpNaCar];

    {.......................................................................}

    writeLn(NumDeEmpNaCar:2,
            '  Med=',Media[NumDeEmpNaCar]:8:3,'%',
            '  Var=',Variancia[NumDeEmpNaCar]:8:4,
            '  DesPad=',DesPad[NumDeEmpNaCar]:8:4,'%',
            '  DesPadAnual=',DesPadAnual[NumDeEmpNaCar]:8:3,'%');

    end;

    {.......................................................................}

writeln;
write('NovoP[r]eco    Novo[P]eso  ou [F]im desse processamento= ');
tecla:=upCase(ReadKey);
if tecla='R' then goto Comeco;
if tecla='P' then goto LerPeso;
if tecla='C' then goto CalcularDeNovo;

end.
```

3) Programa Modelo 3: Modelo *Black*

Parte A

```
label Recomecar,Sequencial;
{.......................................................................}

procedure LUDcmp (var a: RealArrayNPbyNp;
                     n : integer;
              var indx : IntegerArrayNP;
                 var d : real);

{Objetivo: Dada a matriz a[1..n,1..n], decompor a[] em 2 matrizes triangulares:
           L: triang inferior  e U: triang superior.
           O resultado de L e U sai em a[].
           Indx[]: vetor de saida com as permutacoes efetuadas no pivoteamento.
           d eh saida: Se d=+1 o num de permut de lin foi par
                       Se d=-1 o num de permut de lin foi impar.
           Pode ser usada p/ resolver sist de equ com o LUBkSb como p/ inverter
           uma matriz}
begin
end;
{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}
```

```
procedure LUBkSb (var a: RealArrayNPbyNp;
                     n : integer;
              var indx : IntegerArrayNP;
                 var b : RealArrayNP);

{Objetivo: Resolver ax=b por retro-substituicao.
           Dada a matriz a[1..n,1..n] = L*U onde
           L: triang inferior  e U: triang superior (obtidas por LUDcmp),
           e o vetor b[1..n] resolver a equ ax=b.
           Indx[]: vetor de saida com as permutacoes efetuadas no pivoteamento.
           X sai em b[] no final}
begin
end;
{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}

procedure LerArq(var A : RealArrayNPbyNP;
               var Emp : Str17ArrayNP;
                 var l : integer;
           var NumColA : integer;
           var NumColB : integer);

begin
{ler arquivo matricial na forma da matriz A[n,n] e B[n,m])
{n=num de incognitas  m=num de diferentes conjuntos de dados independentes}
{a primeira linha deve ser so de informacoes e nao de dados}

write('Nome do arquivo de covariancias a ser lido    = ');
readln(ArqExt);

NumLinA:=NumColA;

readln(Arq);        {linha dos nomes das empresas}

for lin:=1 to NumLinA do
   begin
   read(Arq,Emp[lin]);
   colF:=lin;                           {colun final a ser lida}
   if lin>13 then colF:=13;
   for col:=1 to colF do read(Arq,a[lin,col]);
   readln(arq);
   end;

NumDeBlocos:=(NumColA + 1) div 14;
UltimoBloco:=false;

for Bloco:=1 to NumDeBlocos do
   begin
   {writeln('Bloco',bloco:3);}
   readln(Arq);                    {linha com os nomes das empresas}
   NumDaLinIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaLinFin:=NumDaLinIni+13;

   for lin:=1 to NumDaLinIni-1 do readln(Arq); {linhas em branco da triang}

   NumDaColIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaColFin:=NumDaColIni+13;
   if NumDaColFin>NumLinA then
      begin
      NumDaLinFin:=NumLinA;
      UltimoBloco:=true;
      end;

   for lin:=NumDaLinIni to NumLinA do
      begin
      colF:=lin;
      if lin>NumDaColFin then colF:=NumDaColFin;
      for col:=NumDaColIni to colF do read(Arq,a[lin,col]);
      if not eof(arq) then readln(arq);
      end;

   end;
```

```
for lin:=1 to NumLinA-1 do for col:=lin+1 to NumColA do a[lin,col]:=a[col,lin];

end;

{--------------------------------------------------------------------------}
procedure LerArqRetorno(var Retorno : realArrayNP; var NumDeEmp : integer);

begin

write('Nome do arquivo dos retornos a ser lido = ');
readln(NomeArqRetorno);

Emp:=0;

while not eof(arqRetorno) do
   begin
   Emp:=Emp+1;
   readln(arqRetorno,CodDaEmp[Emp],Retorno[Emp]);
   end;

NumDeEmp:=Emp;

end;

{--------------------------------------------------------------------------}
procedure LerRetornoDesejado;

begin

write('Entrar valor do Retorno Desejado = ');
readln(RetornoDesejado);

end;

{--------------------------------------------------------------------------}
BEGIN

LerArqRetorno(Retorno,NumDeEmp);     {matriz de retorno e num de empresas}

NumColA:=NumDeEmp;
NumColB:=1;

LerRetornoDesejado;

LerArq(a,CodDaEmp,1,NumColA,NumColB);     {a[]=matriz de covariancia dada}

for i:=1 to NumColA do for j:=1 to NumColA do aux[i,j]:=a[i,j];

NumColTot:=NumColA;

Recomecar:

NumColA:=0;

for i:=1 to NumColTot do for j:=1 to NumColTot do a[i,j]:=aux[i,j];

write('Numero de empresas a participar da carteira = ');
readln(NumColA);

{.................montar a matriz c e b do sistema cw=b..................}

for i:=1 to NumColA do for j:=1 to NumColA do c[i,j]:=a[i,j]*2.0;
for i:=1 to NumColA do
   begin
   c[i,NumColA+1]:=Retorno[i];
   c[i,NumColA+2]:=1.0;
   end;
for j:=1 to NumColA do
   begin
   c[NumColA+1,j]:=1.0;
```

```
    c[NumColA+2,j]:=Retorno[j];
    end;
for i:=NumColA+1 to NumColA+2 do for j:=NumColA+1 to NumColA+2 do c[i,j]:=0.0;

for i:=1 to NumColA do b[i]:=0.0;
b[NumColA+1]:=1.0;
b[NumColA+2]:=RetornoDesejado;

{...............................................................}

NumColC:=NumColA+2;

LUDcmp(c,NumColC,indx,d);

LUBkSb(c,NumColC,indx,b);

for i:=1 to NumColA do writeln(i:3,' ',CodDaEmp[i]:6,b[i]:10:4);

write('[N]ovo numero de empresas [F]im = ');
tecla:=UpCase(ReadKey);
if tecla='N' then goto Recomecar;

END.

{ +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++ }
```

Parte B

```
label CalcularDeNovo,Comeco,LerPeso;

{...............................................................}

function xAy(x,y : extended) : extended;
begin
                              {xAy= x^y          x[positivo] elevado a y }
xAy:=exp(y*ln(x));

End;

{/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\}

begin

Comeco:

Capital:=1000000;

{...............................................................}

write('Entrar nome do arquivo de fechamento = ');
readln(NomeArqPreco);
readln(ArqPreco,NumDeEmp);

for NumDaEmp:=0 to 13 do
    begin
    read(ArqPreco,Emp[NumDaEmp]);
    if (NumDaEmp>0) and (length(Emp[NumDaEmp])<17) then
       begin               {garantir 17 colunas p/ cada nome de empresa}
       for i:=1 to 17-length(Emp[numDaEmp]) do
       Emp[NumDaEmp]:=Emp[NumDaEmp]+' ';
       end;
    end;

readln(arqPreco);

for l:=-1 to NumDeDiasT do
    begin                     {leitura dos valores diarios do fechamento}
    read(ArqPreco,ddmmaa);
    for NumDaEmp:=1 to 13 do read(ArqPreco,FecDaEmpP[l,NumDaEmp]);
    readln(ArqPreco);
```

```
   dia[l]:=l;
   end;

NumDeBlocos:=(NumDeEmp + 1) div 14;
UltimoBloco:=false;

for Bloco:=1 to NumDeBlocos do
   begin
   NumDaEmpIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaEmpFin:=NumDaEmpIni+13;
   if NumDaEmpFin>NumDeEmp then
      begin
      NumDaEmpFin:=NumDeEmp;
      UltimoBloco:=true;
      end;

   for NumDaEmp:=NumDaEmpIni to NumDaEmpFin do
      begin
      read(ArqPreco,Emp[NumDaEmp]);
      if (NumDaEmp>0) and (length(Emp[NumDaEmp])<17) then
         begin            {garantir 17 colunas p/ cada nome de empresa}
         for i:=1 to 17-length(Emp[numDaEmp]) do
         Emp[NumDaEmp]:=Emp[NumDaEmp]+' ';
         end;
      end;

   readln(arqPreco);
   for l:=-1 to NumDeDiasT do
      begin                  {leitura dos valores diarios do fechamento}
      for NumDaEmp:=NumDaEmpIni to NumDaEmpFin do
         begin
         read(ArqPreco,FecDaEmpP[l,NumDaEmp]);
         end;
      if UltimoBloco then read(ArqPreco,ib[l]);
      readln(ArqPreco);
      end;
   end;
{...................................................................}

write('Entrar nome do arquivo de peso (SEM extensao) PesoAA = ');
readln(NomeDoArquivo);

LerPeso:

write('Entrar nome da Extensao do arquivo de peso XX = ');
readln(Extensao);
NomeArqPeso:=NomeDoArquivo+'.'+extensao;
write('Entrar numero de meses a serem considerados = ');
readln(NumDeDias);

NumDaEmp:=0;
while not eof(ArqPeso) do
   begin
   NumDaEmp:=NumDaEmp+1;
   readln(arqPeso,EmpNaCar[NumDaEmp],Participacao[NumDaEmp]);
   end;

NumDeEmpTot:=NumDaEmp;     {num total de emp na carteira dada}

{...................................................................}

for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpTot do
   begin                         {criar matriz de fechamento ordenada}
   Achou:=false;
   for i:=1 to NumDeEmp do
      begin
      if EmpNaCar[NumDaEmp]=Emp[i] then
         begin
         for l:=-1 to NumDeDiasT do FecDaEmp[l,NumDaEmp]:=FecDaEmpP[l,i];
         Achou:=true;
         end;
```

```
      end;
   if Achou=false then
      begin
      textcolor(lightred);
      writeln('Nome da empresa da certeira nao aparece no Ibovespa!!!!');
      writeln(EmpNaCar[NumDaEmp]:17);
      end;
   end;

{.........................................................................}

rdi[0]:=0;

for l:=1 to NumdeDias do rdi[l]:=((ib[l]-ib[l-1])/ib[l-1])*100;
                      {retorno da dif do IBOVESPA}

{.........................................................................}

CalcularDeNovo:

for NumDeEmpNaCar:=NumDeEmpTot to NumDeEmpTot do
   begin                                    {para cada carteira escolhida}

   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
               ParNaCar[NumDaEmp]:=(Participacao[NumDaEmp])*100;
   {......................................................................}

   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNacar do
            valor[NumDaEmp]:=ParNaCar[NumDaEmp]*Capital/100;

   {para o dia Zero}
   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
            NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]:=Valor[NumDaEmp]/FecDaEmp[0,NumDaEmp];
   {......................................................................}

   Retorno[0]:=0;

   for l:=1 to NumDeDias do
      begin

      {........................................Ontem}

      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          Ontem[NumDaEmp]:=NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]*FecDaEmp[l-1,NumDaEmp];

      CarteiraOntem:=0;
      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          CarteiraOntem:=CarteiraOntem+Ontem[NumDaEmp];

      {........................................Hoje}

      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
           Hoje[NumDaEmp]:=NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]*FecDaEmp[l,NumDaEmp];

      CarteiraHoje:=0;
      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          CarteiraHoje:=CarteiraHoje+Hoje[NumDaEmp];

      {.....................................Retorno}

      Retorno[l]:=((CarteiraHoje-CarteiraOntem)/CarteiraOntem)*100;

      DifDeRet[l]:=Retorno[l]-rdi[l];
      end;

   {......................................................................}

   Soma:=0;
   for l:=1 to NumDeDias do Soma:=Soma+DifDeRet[l];
   Media[NumDeEmpNaCar]:=Soma/NumDeDias;
```

```
{.........................................................................}

Soma:=0;
for l:=1 to NumDeDias do Soma:=Soma+Sqr(DifDeRet[l]-Media[NumDeEmpNaCar]);
Variancia[NumDeEmpNaCar]:=Soma/(NumDeDias-1);
DesPad[NumDeEmpNaCar]:=SqRt(Variancia[NumDeEmpNaCar]);

{.........................................................................}

DesPadAnual[NumDeEmpNaCar]:=SqRt(12)*DesPad[NumDeEmpNaCar];

{.........................................................................}

writeLn(NumDeEmpNaCar:2,
        ' Med=',Media[NumDeEmpNaCar]:8:3,'%',
        ' Var=',Variancia[NumDeEmpNaCar]:8:4,
        ' DesPad=',DesPad[NumDeEmpNaCar]:8:4,'%',
        ' DesPadAnual=',DesPadAnual[NumDeEmpNaCar]:8:3,'%');
end;

{.........................................................................}

write('NovoP[r]eco    Novo[P]eso  ou [F]im desse processamento= ');
tecla:=upCase(ReadKey);
if tecla='R' then goto Comeco;
if tecla='P' then goto LerPeso;
if tecla='C' then goto CalcularDeNovo;

end.
```

4) Modelo 4: Minimização Quadrática (sem venda a descoberto)

Parte A

```
program Modelo4;

{Usa o modelo de programacao quadratica
 com minimizacao de variancia da carteira
 e supressao das empresas com peso negativo}

label Recomecar,Sequencial,MontarMatriz,Iniciar;

{.........................................................................}

procedure LUDcmp (var a: RealArrayNPbyNp;
                      n : integer;
                 var indx : IntegerArrayNP;
                    var d : real);

{Objetivo: Dada a matriz a[1..n,1..n], decompor a[] em 2 matrizes triangulares:
          L: triang inferior  e U: triang superior.
          O resultado de L e U sai em a[].
          Indx[]: vetor de saida com as permutacoes efetuadas no pivoteamento.
          d eh saida: Se d=+1 o num de permut de lin foi par
                      Se d=-1 o num de permut de lin foi impar.
          Pode ser usada p/ resolver sist de equ com o LUBkSb como p/ inverter
          uma matriz}

begin

end;

{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}

procedure LUBkSb (var a: RealArrayNPbyNp;
                      n : integer;
                 var indx : IntegerArrayNP;
```

```
               var b : RealArrayNP);

{Objetivo: Resolver ax=b por retro-substituicao.
           Dada a matriz a[1..n,1..n] = L*U onde
           L: triang inferior  e U: triang superior (obtidas por LUDcmp),
           e o vetor b[1..n] resolver a equ ax=b.
           Indx[]: vetor de saida com as permutacoes efetuadas no pivoteamento.
           X sai em b[] no final}

begin

end;

{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}

procedure LerArq(var A : RealArrayNPbyNP;
              var Emp : Str17ArrayNP;
                var l : integer;
          var NumColA : integer;
          var NumColB : integer);

begin
{ler arquivo matricial na forma da matriz A[n,n] e B[n,m]}
{n=num de incognitas  m=num de diferentes conjuntos de dados independentes}

write('Nome do arquivo de covariancia a ser lido    = ');
readln(ArqExt);

NumLinA:=NumColA;

readln(Arq);       {linha dos nomes das empresas}

for lin:=1 to NumLinA do
   begin
   read(Arq,Emp[lin]);
   colF:=lin;                          {colun final a ser lida}
   if lin>13 then colF:=13;
   for col:=1 to colF do read(Arq,a[lin,col]);
   readln(arq);
   end;

NumDeBlocos:=(NumColA + 1) div 14;
UltimoBloco:=false;

for Bloco:=1 to NumDeBlocos do
   begin
   readln(Arq);                  {linha com os nomes das empresas}
   NumDaLinIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaLinFin:=NumDaLinIni+13;

   for lin:=1 to NumDaLinIni-1 do readln(Arq); {linhas em branco da triang}

   NumDaColIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaColFin:=NumDaColIni+13;
   if NumDaColFin>NumLinA then
      begin
      NumDaLinFin:=NumLinA;
      UltimoBloco:=true;
      end;

   for lin:=NumDaLinIni to NumLinA do
      begin
      colF:=lin;
      if lin>NumDaColFin then colF:=NumDaColFin;
      for col:=NumDaColIni to colF do read(Arq,a[lin,col]);
      if not eof(arq) then readln(arq);
      end;

   end;

for lin:=1 to NumLinA-1 do for col:=lin+1 to NumColA do a[lin,col]:=a[col,lin];
```

```
end;

{---------------------------------------------------------------------}

procedure LerArqDeNovo(var A : RealArrayNPbyNP;
                     var Emp : Str17ArrayNP;
                       var l : integer;
                 var NumColA : integer;
                 var NumColB : integer);

begin

{ler arquivo matricial na forma da matriz A[n,n] e B[n,m]}
{n=num de incognitas  m=num de diferentes conjuntos de dados independentes}

NumLinA:=NumColA;

readln(Arq);       {linha dos nomes das empresas}

for lin:=1 to NumLinA do
   begin
   read(Arq,Emp[lin]);
   colF:=lin;                          {colun final a ser lida}
   if lin>13 then colF:=13;
   for col:=1 to colF do read(Arq,a[lin,col]);
   readln(arq);
   end;

NumDeBlocos:=(NumColA + 1) div 14;
UltimoBloco:=false;

for Bloco:=1 to NumDeBlocos do
   begin
   readln(Arq);                   {linha com os nomes das empresas}
   NumDaLinIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaLinFin:=NumDaLinIni+13;

   for lin:=1 to NumDaLinIni-1 do readln(Arq); {linhas em branco da triang}

   NumDaColIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaColFin:=NumDaColIni+13;
   if NumDaColFin>NumLinA then
      begin
      NumDaLinFin:=NumLinA;
      UltimoBloco:=true;
      end;

   for lin:=NumDaLinIni to NumLinA do
      begin
      colF:=lin;
      if lin>NumDaColFin then colF:=NumDaColFin;
      for col:=NumDaColIni to colF do read(Arq,a[lin,col]);
      if not eof(arq) then readln(arq);
      end;

   end;

for lin:=1 to NumLinA-1 do for col:=lin+1 to NumColA do a[lin,col]:=a[col,lin];

end;

{---------------------------------------------------------------------}

procedure LerArqRetorno(var Retorno : realArrayNP; var NumDeEmp : integer);

begin

write('Nome do arquivo dos retornos a ser lido = ');
readln(NomeArqRetorno);
```

```
Emp:=0;

while not eof(arqRetorno) do
   begin
   Emp:=Emp+1;
   readln(arqRetorno,CodDaEmp[Emp],Retorno[Emp]);
   end;

NumDeEmp:=Emp;

end;

{---------------------------------------------------------------------}

procedure LerArqRetornoDeNovo(var Retorno : realArrayNP; var NumDeEmp : integer);

begin

Emp:=0;

while not eof(arqRetorno) do
   begin
   Emp:=Emp+1;
   readln(arqRetorno,CodDaEmp[Emp],Retorno[Emp]);
   end;

NumDeEmp:=Emp;

end;

{---------------------------------------------------------------------}

procedure LerRetornoDesejado;

begin

write('Entrar valor do Retorno Desejado = ');
readln(RetornoDesejado);

end;

{=========================================================================}

BEGIN

Inicio;

tecla:='W';                        {W indica primeira leitura dos arquivos}

Iniciar:

if tecla='W' then
   begin
   LerArqRetorno(Retorno,NumDeEmp);    {matriz de retorno e num de empresas}
   NumColEnt:=NumDeEmp;
   end
else
   LerArqRetornoDeNovo(Retorno,NumDeEmp); {matriz de retorno e num de emp}

NumColA:=NumDeEmp;
NumColB:=1;

if tecla='W' then
   begin
   LerRetornoDesejado;
   LerArq(a,CodDaEmp,1,NumColA,NumColB);     {a[]=matriz de covariancia dada}
   end
else
   begin
   LerArqDeNovo(a,CodDaEmp,1,NumColA,NumColB);  {a[]=mat de covar dada}
   end;
```

```
for i:=1 to NumColA do for j:=1 to NumColA do aux[i,j]:=a[i,j];{preservar a[]}
NumColTot:=NumColA;

Recomecar:

NumColA:=0;

for i:=1 to NumColEnt do for j:=1 to NumColEnt do a[i,j]:=aux[i,j];

write('Numero de empresas a participar da carteira = ');
readln(NumColA);

{..................montar a matriz c e b do sistema cw=b..................}

MontarMatriz:

for i:=1 to NumColA do for j:=1 to NumColA do c[i,j]:=a[i,j]*2.0;
for i:=1 to NumColA do
   begin
   c[i,NumColA+1]:=Retorno[i];
   c[i,NumColA+2]:=1.0;
   end;
for j:=1 to NumColA do
   begin
   c[NumColA+1,j]:=1.0;
   c[NumColA+2,j]:=Retorno[j];
   end;
for i:=NumColA+1 to NumColA+2 do for j:=NumColA+1 to NumColA+2 do c[i,j]:=0.0;

for i:=1 to NumColA do b[i]:=0.0;
b[NumColA+1]:=1.0;
b[NumColA+2]:=RetornoDesejado;

{........................................................................}

NumColC:=NumColA+2;

LUDcmp(c,NumColC,indx,d);    {decomposicao em triangulares sup e inf}
LUBkSb(c,NumColC,indx,b);    {b = matriz dos pesos calculados}

HaPesoNegativo:=false;

for k:=NumColA downto 1 do
   begin                    {retirar as linhas e colunas da empresa com peso<0}
   if b[k]<0 then
      begin
      HaPesoNegativo:=true;   {retirar a linha e a coluna k da matriz de cov}
      writeln(k:3,' ',CodDaEmp[k]:17,b[k]:10:4,' Retirado por ter peso negativo');
      for i:=k to NumColA-1 do CodDaEmp[i]:=CodDaEmp[i+1];
      for i:=k to NumColA-1 do Retorno[i]:=Retorno[i+1];
      for i:=k to NumColA-1 do for j:=1 to NUmColA do aux[i,j]:=aux[i+1,j]; {lin}
      NumColA:=NumColA-1;
      for j:=k to NumColA-1 do for i:=1 to NUmColA do aux[i,j]:=aux[i,j+1]; {col}
      end;
   end;

NumColTot:=NumColA;
if HaPesoNegativo then
   begin
   write('[C]ontinuar');;
   tecla:=readkey;
   NumColTot:=NumColA;
   for i:=1 to NumColTot do for j:=1 to NumColTot do a[i,j]:=aux[i,j]; {nova a[]}
   goto MontarMatriz;
   end;

soma:=0;
for j:=1 to NumColA do soma:=soma+b[j];
writeln('Soma dos pesos = ',soma:10:4);
```

```
for i:=1 to NumColA do
   begin
   writeln(i:3,' ',CodDaEmp[i]:17,b[i]:10:4);
   end;

write('[N]ovo numero de empresas     [G]ravar pesos        [F]im = ');
tecla:=UpCase(ReadKey);

if tecla='N' then goto Iniciar;
write('[N]ovo numero de empresas [F]im = ');
tecla:=UpCase(ReadKey);
if tecla='N' then goto Recomecar;

END.

{ ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++ }
```

Parte B

```
program Modelo4B;

{Usa o modelo de programacao quadratica
 com minimizacao da variancia do portfolio
 e retirada das empresas de peso negativo}

label CalcularDeNovo,Comeco,LerPeso;

{...................................................................}

function xAy(x,y : extended) : extended;
begin
                              {xAy= x^y          x[positivo] elevado a y }
xAy:=exp(y*ln(x));

End;

{/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\}

begin

Comeco:

Capital:=1000000;

{...................................................................}

write('Entrar nome do arquivo de fechamento = ');
readln(NomeArqPreco);

readln(ArqPreco,NumDeEmp);          {num de empresas no arq de fechamento}

for NumDaEmp:=0 to 13 do
   begin
   read(ArqPreco,Emp[NumDaEmp]);
   if (NumDaEmp>0) and (length(Emp[NumDaEmp])<17) then
      begin                  {garantir 17 colunas p/ cada nome de empresa}
      for i:=1 to 17-length(Emp[numDaEmp]) do
      Emp[NumDaEmp]:=Emp[NumDaEmp]+' ';
      end;
   end;

readln(arqPreco);

for l:=-1 to NumDeDiasT do
   begin                        {leitura dos valores diarios do fechamento}
   read(ArqPreco,ddmmaa);
   for NumDaEmp:=1 to 13 do read(ArqPreco,FecDaEmpP[l,NumDaEmp]);
   readln(ArqPreco);
   dia[l]:=l;
```

```
   end;

NumDeBlocos:=(NumDeEmp + 1) div 14;
UltimoBloco:=false;

for Bloco:=1 to NumDeBlocos do
   begin
   NumDaEmpIni:=14+(Bloco-1)*14;
   NumDaEmpFin:=NumDaEmpIni+13;
   if NumDaEmpFin>NumDeEmp then
      begin
      NumDaEmpFin:=NumDeEmp;
      UltimoBloco:=true;
      end;

   for NumDaEmp:=NumDaEmpIni to NumDaEmpFin do
      begin
      read(ArqPreco,Emp[NumDaEmp]);
      if (NumDaEmp>0) and (length(Emp[NumDaEmp])<17) then
         begin              {garantir 17 colunas p/ cada nome de empresa}
         for i:=1 to 17-length(Emp[numDaEmp]) do
         Emp[NumDaEmp]:=Emp[NumDaEmp]+' ';
         end;
      end;

   readln(arqPreco);
   for l:=-1 to NumDeDiasT do
      begin                  {leitura dos valores diarios do fechamento}
      for NumDaEmp:=NumDaEmpIni to NumDaEmpFin do
         begin
         read(ArqPreco,FecDaEmpP[l,NumDaEmp]);
         end;
      if UltimoBloco then read(ArqPreco,ib[l]);
      readln(ArqPreco);
      end;

   end;
{...........................................................................}

write('Entrar nome do arquivo de peso (SEM extensao) PesoAA = ');
readln(NomeDoArquivo);

LerPeso:

write('Entrar nome da Extensao do arquivo de peso XX = ');
readln(Extensao);
NomeArqPeso:=NomeDoArquivo+'.'+extensao;
write('Entrar numero de meses a serem considerados = ');
readln(NumDeDias);

NumDaEmp:=0;
while not eof(ArqPeso) do
   begin
   NumDaEmp:=NumDaEmp+1;
   readln(arqPeso,EmpNaCar[NumDaEmp],Participacao[NumDaEmp]);
   end;

NumDeEmpTot:=NumDaEmp;      {num total de emp na carteira dada}
{...........................................................................}

for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpTot do
   begin                          {criar matriz de fechamento ordenada}
   Achou:=false;
   for i:=1 to NumDeEmp do
      begin
      if EmpNaCar[NumDaEmp]=Emp[i] then
         begin
         for l:=-1 to NumDeDiasT do FecDaEmp[l,NumDaEmp]:=FecDaEmpP[l,i];
         Achou:=true;
         end;
      end;
```

```
    if Achou=false then
       begin
       textcolor(lightred);
       writeln('Nome da empresa da certeira nao aparece no Ibovespa!!!!');
       writeln(EmpNaCar[NumDaEmp]:17);
       readln;
       end;
    end;

{........................................................................}

rdi[0]:=0;

for l:=1 to NumdeDias do rdi[l]:=((ib[l]-ib[l-1])/ib[l-1])*100;
                     {retorno da dif do IBOVESPA}
{........................................................................}

CalcularDeNovo:

for NumDeEmpNaCar:=NumDeEmpTot to NumDeEmpTot do
   begin                                  {para cada carteira escolhida}
   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
               ParNaCar[NumDaEmp]:=(Participacao[NumDaEmp])*100;
   {.....................................................................}

   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNacar do
            valor[NumDaEmp]:=ParNaCar[NumDaEmp]*Capital/100;
   {.....................................................................}

   {para o dia Zero}
   for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
            NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]:=Valor[NumDaEmp]/FecDaEmp[0,NumDaEmp];
   {.....................................................................}

   Retorno[0]:=0;

   for l:=1 to NumDeDias do
      begin

      {..........................................Ontem}

      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          Ontem[NumDaEmp]:=NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]*FecDaEmp[l-1,NumDaEmp];

      CarteiraOntem:=0;
      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          CarteiraOntem:=CarteiraOntem+Ontem[NumDaEmp];

      {..........................................Hoje}

      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
           Hoje[NumDaEmp]:=NumDeAcoesNaCar[NumDaEmp]*FecDaEmp[l,NumDaEmp];

      CarteiraHoje:=0;
      for NumDaEmp:=1 to NumDeEmpNaCar do
          CarteiraHoje:=CarteiraHoje+Hoje[NumDaEmp];

      {.......................................Retorno}

      Retorno[l]:=((CarteiraHoje-CarteiraOntem)/CarteiraOntem)*100;

      DifDeRet[l]:=Retorno[l]-rdi[l];
      end;

   {.....................................................................}

   Soma:=0;
   for l:=1 to NumDeDias do Soma:=Soma+DifDeRet[l];
   Media[NumDeEmpNaCar]:=Soma/NumDeDias;

   {.....................................................................}
```

```
    Soma:=0;
    for l:=1 to NumDeDias do Soma:=Soma+Sqr(DifDeRet[l]-Media[NumDeEmpNaCar]);
    Variancia[NumDeEmpNaCar]:=Soma/(NumDeDias-1);
    DesPad[NumDeEmpNaCar]:=SqRt(Variancia[NumDeEmpNaCar]);

    {.................................................................}

    DesPadAnual[NumDeEmpNaCar]:=SqRt(12)*DesPad[NumDeEmpNaCar];

    {.................................................................}

    writeLn(NumDeEmpNaCar:2,
            '  Med=',Media[NumDeEmpNaCar]:8:3,'%',
            '  Var=',Variancia[NumDeEmpNaCar]:8:4,
            '  DesPad=',DesPad[NumDeEmpNaCar]:8:4,'%',
            '  DesPadAnual=',DesPadAnual[NumDeEmpNaCar]:8:3,'%');
    end;

    {.................................................................}

write('NovoP[r]eco    Novo[P]eso  ou [F]im desse processamento= ');
tecla:=upCase(ReadKey);
if tecla='R' then goto Comeco;
if tecla='P' then goto LerPeso;
if tecla='C' then goto CalcularDeNovo;

end.
```