



14

## **VALUE-AT-RISK**

**Aplicação de Cinco Metodologias a Carteiras Teóricas Compostas  
por Ações e Títulos de Renda Fixa no Brasil**

### **Banca examinadora**

Prof. Orientador William Eid Júnior

Prof. Wladimir Antonio Puggina

Prof. José Evaristo dos Santos

**MARCIA LOMBARDO** Marcia Vitorino de Lima, de Cinco Metodologias e Carteira Técnica Comprova por Ações e Títulos de Renda Fixa no Brasil. São Paulo: EABSP-FGV, 2000. 120p. (Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação da EABSP-FGV, Área de Concentração: Administração Contábil-Financeira).

**Aplicação de Cinco Metodologias a Carteiras Teóricas Compostas por Ações e Títulos de Renda Fixa no Brasil**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação da FGV/EAESP, Área de Concentração Administração, Contábil Financeira como requisito para obtenção de título de mestre em Administração.

**Orientador: Prof. William Eid Júnior**

ii

Escola do Advogado L. de	
S. de	
10.04	330.131.7
	L842v
	DIS.
458/2000	e.1

SP-00016130-1

LOMBARDO, Márcia. Value-at-Risk: Aplicação de Cinco Metodologias a Carteiras Teóricas Compostas por Ações e Títulos de Renda Fixa no Brasil. São Paulo: EAESP/FGV, 2000. 120p. (Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação da EAESP/FGV, Área de Concentração: Administração Contábil-Financeira).

**Resumo:** Faz revisão teórica dos modelos de *value-at-risk* (VAR). Revisa principais estudos anteriores sobre VAR no Brasil e no exterior. Testa o desempenho de cinco metodologias de VAR, a saber: metodologia Paramétrica com uso da Volatilidade Histórica, Paramétrica com uso da Volatilidade EWMA, Paramétrica com uso da Volatilidade GARCH(1,1), Simulação Histórica e uma Metodologia Híbrida proposta por BOUDOUKH et al. (1998). Aplica as metodologias a carteiras teóricas compostas por proporções diversas de ações e títulos de renda fixa de 30 dias no mercado financeiro brasileiro. O trabalho encontra evidências da superioridade da Metodologia Híbrida com fator de decaimento de 0,99 e da Simulação Histórica, sendo esta apenas marginalmente inferior. Estes resultados se coadunam com evidências encontradas nas séries em estudo de não-normalidade, heterocedasticidade e autocorrelação.

**Palavras-Chaves:** *Value-at-Risk* – VAR – Metodologia Paramétrica – Volatilidade – EWMA – GARCH(1,1) – Simulação Histórica – Metodologia Híbrida – Ações – Títulos de Renda Fixa – Mensuração – Risco de Mercado – Mercado Financeiro Brasileiro.

## **ABSTRACT**

This work analyses the performance of five value-at-risk methodologies, namely the Parametric Methodology making use of Historic Volatility, Parametric Methodology making use of Exponential Weighting Moving Average (EWMA), Parametric Methodology making use of GARCH(1,1), Historic Simulation and a Hybrid Methodology proposed by BOUDOUKH et al. (1998). These models were applied to the return time series of Ibovespa and 30-day fixed rate bonds, setting up five theoretic portfolios with varying weights of these two assets.

Evidences in the studied period showed a superior performance of the Hybrid Methodology using a decay factor of 0,99, followed closely by Historic Simulation. These results agree with the main time series characteristics, that is, non-normality, autocorrelation and heteroskedasticity of returns.

Considering the remaining Parametric Methodologies, the EWMA volatility with decay factor of 0,99 achieved better results than GARCH(1,1) and historic volatility. The worst results were provided by historic volatility.

The initial hypothesis of this work, referring to a possible relationship between the performance of different VAR methodologies and the volatility level of the portfolio, that is, high/low volatility assets could have a major/minor response to methodology change, was not sustained by empirical evidences.

## **SUMÁRIO**

	<b>Pag.</b>
<b>Capítulo 1 – Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2 - VAR: Conceitos Básicos.....</b>	<b>9</b>
<b>2.1 - O Conceito de <i>Value-at-Risk</i>.....</b>	<b>10</b>
<b>2.2 - Metodologias de Cálculo do <i>Value-at-Risk</i>.....</b>	<b>15</b>
2.2.1 – Paramétrica.....	16
2.2.2 – Delta-Gama.....	24
2.2.3 – Simulação Histórica.....	27
2.2.4 – Simulação de Monte Carlo.....	28
2.2.5 – Teste de Estresse.....	34
<b>2.3 - Métodos de Previsão de Volatilidade.....</b>	<b>35</b>
2.3.1 – Histórica.....	36
2.3.2 – Modelos ARCH/GARCH.....	37
2.3.3 – Média Móvel Ponderada Exponencialmente (EWMA).....	40
2.3.4 – Volatilidade Implícita.....	42
<b>Capítulo 3 - Estudos Anteriores.....</b>	<b>46</b>
<b>3.1 – Testes Empíricos sobre Métodos de Previsão de Volatilidade.....</b>	<b>46</b>
<b>3.2 – Testes Empíricos sobre Comparação de Metodologias de VAR.....</b>	<b>48</b>
<b>3.3 – Outros Testes Empíricos de VAR.....</b>	<b>53</b>
<b>3.4 – Quadro Comparativo.....</b>	<b>55</b>

<b>Capítulo 4 - Teste Empírico no Mercado Brasileiro.....</b>	<b>58</b>
<b>4.1 – Coleta e Preparação dos Dados.....</b>	<b>60</b>
4.1.1 – Ibovespa.....	60
4.1.2 – Contratos DI1 Futuros.....	61
<b>4.2 – Testes Preliminares.....</b>	<b>64</b>
4.2.1 – Testes de Heterocedasticidade dos Retornos.....	66
4.2.2 – Testes de Normalidade dos Retornos.....	70
4.2.3 – Testes de Autocorrelação dos Retornos.....	72
4.2.4 – Testes de Estacionariedade dos Retornos.....	74
<b>4.3 – Aplicação dos Modelos de <i>Value-at-Risk</i>.....</b>	<b>76</b>
4.3.1 – Metodologia Paramétrica.....	78
4.3.2 – Simulação Histórica.....	81
4.3.3 – Metodologia Híbrida.....	82
<b>4.4 – Metodologia de Avaliação dos Resultados.....</b>	<b>85</b>
<b>4.5 – Resultados Empíricos.....</b>	<b>87</b>
<b>4.6 – Conclusão Geral.....</b>	<b>97</b>
<b>Anexo I – Comparação de Fatores de Decaimento na Eficiência do Método EWMA.....</b>	<b>100</b>
<b>Anexo II – Resultados Obtidos nos Testes Empíricos.....</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>117</b>

## **CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

A gestão de riscos, em especial dos riscos financeiros, está no cerne das atividades das Instituições Financeiras (IF). Seus riscos provêm, em parte, do descasamento de ativos e passivos em relação a prazos, moedas e taxas, e também da tomada de posições no mercado.

Destaque-se que o objetivo da Instituição Financeira não é eliminar totalmente esses riscos (visto que daí provêm parte de seus lucros), mas sim administrá-los adequadamente a um nível compatível com o seu perfil (sua aversão em relação ao risco), tentando ao mesmo tempo maximizar sua rentabilidade.

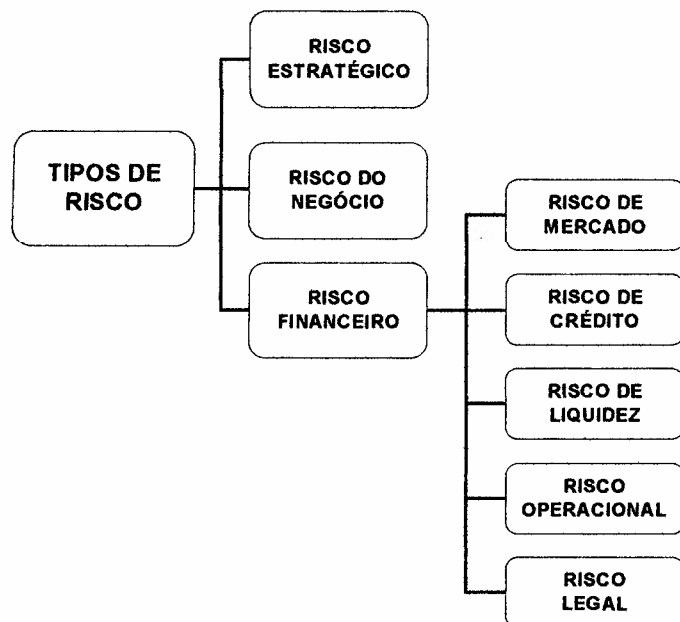
O desenvolvimento de técnicas de gerenciamento de riscos (dentre elas o *VAR – Value-at-Risk*) vem conquistando cada vez mais importância na atual conjuntura mundial. Tal importância deve-se, de acordo com JORION (1997), à crescente volatilidade dos mercados financeiros, no que diz respeito a variáveis como taxa de juros, câmbio, preços de ações e *commodities*. Poderíamos enumerar como algumas causas dessa maior volatilidade, segundo o mesmo autor, a conjuntura econômica mundial, o processo de globalização dos mercados financeiros e os avanços tecnológicos da atualidade.

O *Value-at-Risk* (ou valor em risco) insere-se dentro deste conceito como uma forma de se mensurar o risco de mercado, um dos riscos financeiros enfrentados pelas IF. A fim de tornar este ponto mais claro, descreveremos sucintamente os tipos de risco a que as organizações estão sujeitas.

### Tipos de Risco<sup>1</sup>

Os riscos enfrentados pelas organizações estão esquematizados na Figura 1, elaborada a partir de JORION (1997).

FIGURA 1 - TIPOS DE RISCO



O risco estratégico está relacionado a mudanças inesperadas no mercado financeiro devido a acontecimentos nos ambientes econômico e/ou político, como uma guerra, revolução ou plano econômico. O risco do negócio diz respeito às operações da empresa no contexto do mercado ao qual ela pertence, incluindo tanto variáveis como inovação tecnológica quanto peculiaridades da empresa, como por exemplo seu processo produtivo diferenciado e a qualidade de sua administração.

Já o risco financeiro está ligado a possíveis perdas no mercado financeiro. As IF estão, geralmente, mais sujeitas a este risco. Podemos classificar os riscos financeiros em cinco tipos: risco de mercado, de crédito, de liquidez, operacional e legal.

Risco de mercado é o risco de que o valor de um instrumento financeiro ou carteira de instrumentos financeiros diminua como resultado de uma variação na taxa de juros, câmbio, preços das ações ou *commodities*. É o risco de preços e taxas. Podemos analisá-lo considerando as quatro variáveis citadas acima separadamente (FEDERAL RESERVE, 1994).

O risco da taxa de juros provém da possibilidade de perdas decorrentes de variações nas taxas de juros. A IF se expõe a esse risco a partir do momento

---

<sup>1</sup> Um maior aprofundamento sobre conceituação de riscos em Instituições Financeiras e sua gestão pode ser obtido em BESSIS e BESSIE (1998), KOCK (1995), e SAUNDERS (1997).

em que apresenta descasamento de prazos (maturidades) entre seus ativos e passivos (SAUNDERS, 1994). Ela incorrerá em risco de refinanciamento, no caso de seus ativos possuírem prazos maiores do que seus passivos, e risco de reinvestimento, caso ocorra o contrário. Além disso, há o risco do valor de mercado, ou seja, caso a taxa de juros aumente, o preço unitário (PU) do título diminuirá e a Instituição incorrerá em perdas no valor de seus ativos.

O risco cambial é o risco de que movimentos adversos nas taxas de câmbio resultem em perda nas posições da IF em moeda estrangeira.

O risco de preço das ações é, do mesmo modo que os anteriores, o risco de perdas devido a movimentos adversos nos preços das ações. Ele pode ser dividido em risco sistemático ou não-diversificável (fatores que afetam todas as ações ao mesmo tempo, mas não necessariamente na mesma magnitude) e risco não-sistemático ou diversificável (risco específico de cada ação).

Finalmente, o risco de preço das *commodities* é o risco de perdas devido a variações dos preços das comanditeis.

Voltando aos demais riscos financeiros, podemos definir risco de crédito como o risco de que a contraparte de uma transação não honre sua obrigação nos termos e condições do contrato.

Quanto ao risco de liquidez, podemos separá-lo em dois tipos: o risco de liquidez de financiamento, que se refere à habilidade de equacionar desequilíbrios no fluxo de caixa através de novas captações de recursos; e risco de liquidez de mercado, que se refere ao risco de não se conseguir fechar posições abertas em tempo hábil, na quantidade suficiente e a um preço justo.

Risco operacional é o risco de erro ou fraude humana, ou de que o sistema falhe no registro, monitoramento e contabilização das transações ou posições.

Por fim, o risco legal é o risco de que uma transação não possa ser consumada devido a alguma barreira legal, como documentação inadequada, proibição legal da contraparte, ou a não obrigatoriedade da liquidação devido à falência da contraparte (FEDERAL RESERVE, 1994).

### Objetivos

Este trabalho tem por motivação o grande desenvolvimento teórico observado na gestão do risco de mercado no decorrer dos últimos anos. Seu foco será o estudo do *Value-at-Risk* (VAR), um modelo que se utiliza de conceitos estatísticos para a mensuração da perda máxima prevista do valor de um instrumento financeiro ou carteira de instrumentos financeiros em dado horizonte de tempo, sob condições normais de mercado, e a dado intervalo de

confiança. Cabe ressaltar que o VAR vem se tornando, nos últimos anos, um “padrão” nos mercados financeiros nacional e internacional para a mensuração do risco de mercado.

A importância deste novo método na conjuntura atual pode ainda ser evidenciada pela sua inclusão no *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risk* (Emenda ao Acordo da Basileia para Incorporação do Risco de Mercado), editado pelo *Bank of International Settlements* (BIS) em janeiro de 1996, segundo o qual modelos internos de VAR podem ser usados para a determinação do capital mínimo exigido para o funcionamento de Instituições Financeiras.

Os objetivos deste trabalho podem ser divididos basicamente em dois. O primeiro é o estudo do arcabouço teórico que envolve o modelo de VAR, abrangendo os conceitos embutidos nas suas diferentes metodologias de cálculo, bem como nos parâmetros necessários para sua estimação, com atenção especial para a volatilidade.

O segundo objetivo é a realização de um teste empírico no mercado brasileiro, envolvendo a aplicação de cinco metodologias de VAR a carteiras teóricas com participações percentuais distintas de ações (representadas pelo Índice Bovespa) e títulos de renda fixa de 30 dias (obtidos através da estrutura temporal das taxas de juros – calculada a partir dos contratos DI Futuros

negociados na BM&F). Este teste objetiva, basicamente, procurar evidências quanto ao desempenho de tais metodologias em relação às carteiras estudadas, e verificar se níveis crescentes de volatilidade tornam as carteiras mais sensíveis a mudanças de metodologia. Os dados utilizados compreendem o período de julho de 1994 a junho de 1998.

As metodologias utilizadas neste trabalho são:

1. Paramétrica, com o uso da volatilidade histórica com média móvel;
2. Paramétrica, com o uso da volatilidade histórica com média móvel ponderada exponencialmente (EWMA – *Exponential Weigthed Moving Average*);
3. Paramétrica, com o uso da volatilidade estimada pelo modelo GARCH (1,1);
4. Simulação Histórica;
5. Abordagem Híbrida, representada pela combinação da Simulação Histórica com o método EWMA de cálculo da volatilidade, conforme proposto por BOUDOUKH et al. (1998).

### Estruturação do Trabalho

O segundo capítulo (*VAR: Conceitos Básicos*) discorrerá sobre as diversas metodologias existentes para o cálculo do *Value-at-Risk*: paramétrica, delta-gama, simulação histórica, simulação de Monte Carlo e teste de estresse.

Além disso, ele irá apresentar sucintamente as diversas técnicas de previsão de volatilidade, visto esta ser uma variável chave para o cálculo do VAR.

Os principais estudos empíricos já realizados sobre o assunto, englobando tanto o Brasil quanto o exterior, serão resenhados no capítulo três (*Estudos Anteriores*).

Já o quarto capítulo (*Teste Empírico no Mercado Brasileiro*), foco central deste trabalho, apresentará os testes realizados no mercado brasileiro em relação às cinco metodologias de VAR selecionadas.

## **CAPÍTULO 2 – VAR: CONCEITOS BÁSICOS**

O *Value-at-Risk* tem evoluído no sentido de se tornar um padrão internacional para a mensuração e o gerenciamento do risco de mercado. O primeiro passo para isto pode ser atribuído à publicação, pelo *Morgan Guaranty Trust Company*, do documento *RiskMetrics™* (MORGAN GUARANTY TRUST COMPANY, 1998), livremente disponível na Internet, o qual detalha o cálculo do VAR, enfocando a metodologia paramétrica, e também fornece diariamente estimativas de volatilidades e correlações para vários instrumentos em diversos países.

Este capítulo irá analisar o conceito do *Value-at-Risk*, comentar acerca de suas origens, e descrever as diversas metodologias existentes para o seu cálculo. Na última parte, serão comentados alguns métodos de previsão de volatilidade e correlações, visto que estas variáveis são de fundamental importância no cálculo do VAR. Como poderá ser constatado no capítulo seguinte, o valor em risco irá variar consideravelmente em decorrência da utilização de metodologias e métodos de previsão de volatilidade/correlações distintos.

## **2.1 – O Conceito de Value-at-Risk**

### **Definição**

Uma definição formal do VAR é feita por JORION (1997). Primeiramente, a definição é feita para distribuições gerais e, em seguida, para distribuições normais.

- VAR para Distribuições Gerais

Dadas as seguintes variáveis:

$W_0$  = investimento inicial

$R$  = taxa de retorno do investimento, com retorno esperado  $\mu$  e volatilidade  $\sigma$

$W$  = valor do investimento ao final do horizonte estudado;  $W = W_0(1+R)$

$W^*$  = menor valor da carteira ao nível de confiança  $c$ ;  $W^* = W_0(1+R^*)$

O VAR pode ser definido como a perda, em unidades monetárias, em relação à média:

$$VAR(\text{rel. média}) = E(W) - W^*$$

$$VAR(\text{rel. média}) = -W_0(R^* - \mu)$$

O VAR também pode ser definido como a perda absoluta, em unidades monetárias, sem a consideração do retorno médio:

$$VAR(zero) = W_0 - W^*$$

$$VAR(zero) = -W_0 R^*$$

Pode-se derivar o VAR da distribuição de probabilidade do valor futuro da carteira  $f(w)$ . Considerando um nível de confiança  $c$ , queremos encontrar  $W^*$  de tal forma que a probabilidade de exceder este valor seja  $c$ , ou, alternativamente, de que a probabilidade de um valor menor que  $W^*$  seja  $(1 - c)$ :

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w) dw$$

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w) dw$$

- VAR para Distribuições Normais

Aproximando a distribuição de retornos a uma normal, e denominando o grau de confiança por  $\alpha$ , temos que  $R^*$  pode ser encontrado pela equação:

$$R^* = -\alpha\sigma + \mu$$

Generalizando, admitimos que  $\mu$  e  $\sigma$  estão em base anual, e que o intervalo em anos considerado é  $\Delta t$ . O VAR, em relação à média, será:

$$VAR(rel. \text{ média}) = -W_0(R^* - \mu) = W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}$$

E o VAR, definido em termos absolutos,

$$VAR(zero) = -W_0R^* = W_0(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t)$$

Deste modo, transformando a distribuição geral  $f(w)$  em uma distribuição normal padronizada  $\Phi(\varepsilon)$ , com média zero e desvio-padrão unitário, teremos que:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{w^*} f(w)dw = \int_{-\infty}^{-|R^*|} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-\alpha} \Phi(\varepsilon)d\varepsilon$$

### Origens do Value-at-Risk

É necessário ressaltar que o conceito de VAR não é, absolutamente, novo. DOWD (1998) mostra que o VAR tem como base a teoria de carteiras

desenvolvida por Harry Markowitz na década de 50 (MARKOWITZ, 1952). Assim, dada uma carteira de dois ou mais títulos, temos que seu retorno esperado será a média dos retornos dos títulos ponderados pelo peso de cada título na carteira:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,t+1}$$

onde  $w_{i,t}$  é o peso de cada título  $i$  na carteira em  $t$  e  $R_{i,t+1}$  é o retorno esperado de cada título  $i$  em  $(t+1)$ . A variância da carteira, por sua vez, dependerá das variâncias individuais e das covariâncias entre os títulos:

$$\sigma^2(R_{p,t+1}) = w_t' \Sigma_{t+1} w_t$$

onde  $\Sigma_{t+1}$  é a matriz de covariância e  $w_t$  é o vetor de pesos. A inclusão das covariâncias permite que se reconheça no nosso cálculo o efeito da diversificação, que existirá sempre que a correlação (calculada pela razão entre a covariância de dois títulos pela multiplicação de seus desvios-padrão) for menor que 1.

O VAR fará uso extenso dos conceitos desenvolvidos na teoria de carteiras, considerando as correlações entre todos os ativos e classes de ativos (ações, títulos de renda fixa, ativos sensíveis à taxa de câmbio, etc.), e obtendo um valor único para o risco de mercado. Deste modo, o VAR é qualificado por

DOWD (1998) como uma evolução natural da teoria de Markowitz, podendo-se observar ainda algumas vantagens do VAR.

DOWD (1998) enumera essas vantagens: em primeiro lugar, a teoria de carteiras interpreta o risco como o desvio-padrão do retorno, enquanto o VAR o considera em termos da perda máxima provável; segundo, enquanto a teoria de carteiras está limitada ao risco de preços de mercado, o VAR também pode ser aplicado aos riscos de crédito e liquidez<sup>1</sup>; terceiro, o VAR é mais flexível, podendo-se utilizar diferentes metodologias a diferentes circunstâncias; quarto, o VAR lida melhor com problemas como a não normalidade dos retornos; quinto, o VAR fornece melhores orientações que a teoria de carteiras para decisões de investimento, *hedging* e administração de *carteiras*; e, por fim, o VAR provê uma filosofia de gestão de risco global, inclusive para sistemas de remuneração.

### Fatores Quantitativos

Há variáveis importantes a serem escolhidas no modelo, como o grau de confiança ( $\alpha$ ) e o horizonte temporal, para as quais devem existir critérios estabelecidos pela administração.

---

<sup>1</sup> Para maiores detalhes, ver Dowd (1998).

O grau de confiança escolhido será função do uso que se fará do VAR. De acordo com JORION (1997), se ele se destina à determinação de uma reserva de segurança de caixa, a sua escolha é de grande importância e deverá refletir o grau de aversão ao risco da corporação; quanto maior a aversão ao risco, maior deverá ser o grau de confiança, o que acarretará um VAR maior (e portanto custos maiores). Se a intenção é apenas a comparação do risco entre diferentes mercados, a escolha do nível de confiança não é tão importante.

A escolha do período de tempo, por sua vez, deveria corresponder ao tempo necessário para a liquidação total da *carteira*, o que depende essencialmente de sua liquidez (JORION, 1997). Deste modo, podemos identificar um relacionamento estreito entre o risco de mercado e o risco de liquidez.

## **2.2 – Metodologias de Cálculo do *Value-at-Risk***

Existem diversas metodologias para se obter o valor em risco de um instrumento individual ou de uma *carteira*. De acordo com JORION (1997), elas podem ser divididas em dois grupos:

- Metodologias de Avaliação Local:
  - Paramétrica ou Delta-Normal
  - Delta-Gama
  
- Metodologias de Avaliação Completa:
  - Simulação Histórica
  - Simulação de Monte Carlo
  - Teste de Estresse

A diferença básica entre estes dois grupos é que o segundo lida melhor com instrumentos não-lineares, como opções, que estão sujeitos a várias fontes de risco. Em contrapartida, as metodologias paramétrica e delta-gama são de mais fácil implementação, sendo que a delta-gama é uma variação da primeira, considerando as derivadas de primeira e de segunda ordem.

### **2.2.1 – Metodologia Paramétrica ou Delta-Normal**

Essa metodologia tem como principal hipótese a normalidade dos retornos, o que torna a sua implementação relativamente fácil e proporciona

grande flexibilidade na conversão do VAR para diferentes níveis de confiança e horizontes temporais.

Ao considerar que os retornos seguem uma distribuição normal, estamos admitindo determinadas características quanto à evolução dos retornos no tempo. A evolução dos retornos é usualmente baseada na hipótese de que os preços seguem um processo de *random walk*, que pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_t &= \mu + P_{t-1} + \sigma \varepsilon_t \\ P_t - P_{t-1} &= \mu + \sigma \varepsilon_t \end{aligned} \quad \varepsilon_t \sim IID N(0,1)$$

onde IID representa “idêntica e independentemente distribuídos” e  $N(0,1)$  uma distribuição normal com média 0 e variância 1.

A fim de evitar a ocorrência de preços negativos, o documento *RiskMetrics*<sup>TM</sup> aconselha o uso de retornos calculados na forma:

$$R_t = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

Isto equivale a considerar os retornos continuamente compostos, tornando a distribuição lognormal.

A hipótese IID implica que a média e a variância dos retornos são homocedásticas, ou seja, não variam no tempo (identicamente distribuídos), e que os retornos não estão relacionados no tempo (independentemente distribuídos).

Evidências empíricas, no entanto (BOLLERSLEV, 1986 e RiskMetrics™, 1998), evidenciam o fato de a volatilidade se apresentar em “clusters”, o que denota heterocedasticidade. Testes de autocorrelação, por sua vez, revelam que a autocorrelação dos retornos é baixa, mas a variância dos retornos é altamente autocorrelacionada, assim como a covariância.

O RiskMetrics™ admite, diante destas evidências, um modelo de *random walk* modificado, com retorno médio zero ( $\mu = 0$ ). Os retornos são gerados por:

$$r_{i,t} = \sigma_{i,t} \varepsilon_{i,t} \quad \varepsilon_{i,t} \sim N(0,1)$$

$$\varepsilon_t \sim MVN(0, R_t) \quad \varepsilon_t = [\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{Nt}]$$

onde N é o número de títulos e  $R_t$  representa uma matriz de correlação  $N \times N$  dependente do tempo, t. Este modelo implica que os retornos seguem uma distribuição normal condicional (ao tempo), o que significa que os retornos não seguem necessariamente uma distribuição normal, mas a distribuição padronizada ( $r_t / \sigma_t$ ) sim.

A fórmula geral para o cálculo do VAR sob a metodologia paramétrica (SAUNDERS, 1997) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$VAR = \left( \begin{matrix} \text{Valor Monetário} \\ \text{da Posição} \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} \text{Sensibilidade} \\ \text{ao Preço} \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} \text{Movimento Adverso} \\ \text{Potencial no Retorno} \end{matrix} \right)$$

$$VAR = \left( \begin{matrix} \text{Valor Monetário} \\ \text{da Posição} \end{matrix} \right) \times (\text{Volatilidade do Preço})$$

Citando DOWD (1998), o cálculo do VAR dos instrumentos de determinada *carteira* pode ser mais facilmente obtido se procedermos a uma decomposição desses instrumentos em seus elementos básicos (ou “building blocks”), a fim de obtermos uma *carteira* equivalente. Esses elementos básicos poderiam ser ações, *commodities*, títulos de renda fixa sem pagamento de cupons (“zero-coupon bonds”) e ativos sensíveis à taxa de câmbio. Por exemplo, uma posição em um título de renda fixa com pagamento de cupons seria equivalente a diversas posições em “zero-coupon bonds” com vencimentos coincidentes às datas de pagamento dos cupons. A compra de um título de um governo estrangeiro, por sua vez, geraria tanto risco de taxa de juros quanto risco cambial.

O documento RiskMetrics™ propõe o mapeamento dos fluxos de caixa no tempo para instrumentos de renda fixa, posições em moeda estrangeira, ações e *commodities*.

Os instrumentos de renda fixa poderiam ser mapeados através de três métodos: (i) “duration map”, que caracteriza todas as posições pela duration da carteira (ou seja, pela vida média da posição considerando-se todos os pagamentos/recebimentos intermediários de juros, bem como o principal, na proporção do valor presente de cada componente); (ii) “principal map”, que considera somente os prazos finais dos instrumentos; e (iii) “cash flow map”, que irá tratar cada fluxo de caixa separadamente, sendo o utilizado pelo RiskMetrics™.

Após o mapeamento dos fluxos de caixa, devemos proceder ao cálculo do valor de mercado das posições, fazendo uso de uma estrutura temporal da taxa de juros.

A seguir, os fluxos (já marcados a mercado) são agrupados em vértices predeterminados (no caso, são usados 14 vértices), para os quais existam volatilidades e correlações disponíveis. Isso é feito de forma a preservar o valor de mercado e o risco da posição.

Digamos, por exemplo, que desejamos alocar um fluxo de 6 anos nos vértices de 5 e 7 anos. Interpolando linearmente a sua volatilidade, podemos definir a proporção do fluxo de 6 anos que será alocada no vértice de 5 anos ( $\alpha$ ) e no vértice de 7 anos ( $1-\alpha$ ):

$$\sigma_6^2 = \alpha^2 \sigma_5^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_7^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{5,7}\sigma_5\sigma_7$$

onde  $\rho_{5,7}$  representa a correlação entre os vértices de 5 e 7 anos. A equação acima pode, então, ser resolvida para  $\alpha$ .

Após este agrupamento em vértices, o VAR pode ser facilmente calculado. Por exemplo, para o cálculo do VAR de ações, podemos utilizar o modelo beta, que não considera o risco residual (para carteiras bem diversificadas, este risco deveria tender a zero), mas somente o sistemático, ambos representados na expressão abaixo (SAUNDERS, 1997):

$$\text{Risco Total} = \text{Risco Sistemático} + \text{Risco não Sistemático}$$

$$\sigma_{it}^2 = \beta_{it}^2 \sigma_{mt}^2 + \sigma_{eit}^2$$

onde  $\sigma_{mt}^2$  representa a volatilidade do índice de mercado em t. Lembrando que o beta de uma *carteira* é simplesmente a ponderação dos betas individuais pela posição em cada título, o VAR seria dado por:

$$Var = \left( \begin{matrix} \text{Valor Monetário} \\ \text{da Posição} \end{matrix} \right) \times (\beta_{\text{portfólio}}) \times (\sigma_{\text{índice mercado}} \times \alpha)$$

onde o  $\beta$  é a medida de sensibilidade da posição mantida em ações em relação à volatilidade do índice de mercado,  $\alpha$  é retirado de uma tabela normal padronizada de acordo com o grau de confiabilidade desejado, e o termo  $(\sigma_{\text{índice mercado}} \times \alpha)$  é o movimento potencial adverso no rendimento.

Um outro método para o cálculo do VAR de ações seria a utilização da volatilidade total da carteira, levando em consideração, assim, o risco residual.

Para ativos sensíveis à taxa de câmbio ou *commodities*, o VAR seria simplesmente:

$$Var = \left( \begin{matrix} \text{Valor Monetário} \\ \text{da Posição} \end{matrix} \right) \times (\sigma \times \alpha)$$

No tocante aos títulos de renda fixa, a volatilidade poderia ser calculada tanto pelos retornos dos preços dos títulos quanto através da taxa (*yield*). No caso do cálculo através do preço, devemos considerar o fato do preço de um título de renda fixa tender ao seu valor de face, o que afetaria o cálculo da volatilidade (MORGAN GUARANTY TRUST COMPANY, 1998).

Já no caso do cálculo da volatilidade através da taxa de juros, podemos utilizar o conceito de *duration* modificada como medida de sensibilidade do preço do ativo a pequenas variações na taxa de juros (SAUNDERS, 1997):

$$Var = \left( \text{Valor Monetário da Posição} \right) \times \left( \text{Duration Modificada} \right) \times (\sigma_{taxa} \times \alpha)$$

O VAR da *carteira* inteira pode ser então agregado, considerando-se as correlações tanto entre vértices quanto classes de ativos. Por exemplo, a agregação de 3 instrumentos se daria do seguinte modo (SAUNDERS, 1997):

$$VAR_{\text{portfólio}} = \left[ (VAR_1)^2 + (VAR_2)^2 + (VAR_3)^2 + (2 \times \rho_{1,2} \times VAR_1 \times VAR_2) + (2 \times \rho_{1,3} \times VAR_1 \times VAR_3) + (2 \times \rho_{2,3} \times VAR_2 \times VAR_3) \right]^{1/2}$$

A suposição de normalidade oferece grande flexibilidade à metodologia paramétrica, pois a conversão do VAR para diferentes níveis de confiança torna-se direta. Supondo que os retornos de diferentes períodos sejam independentes (seguem um caminho aleatório ou *random walk*) e que são identicamente distribuídos ao longo do tempo, podemos também converter o VAR para diferentes horizontes de tempo, bastando para isso multiplicar o desvio-padrão do retorno da *carteira* pela raiz quadrada do tempo (JORION, 1997). Cabe notar, no entanto, que estas hipóteses geralmente não ocorrem, como comentado anteriormente.

Ainda acerca da normalidade dos retornos, temos que considerar que, mesmo se os retornos dos ativos individuais não forem normais, os retornos da *carteira* poderão sê-lo (DOWD, 1998). Isto se deve ao teorema do limite central, que implica que, se a *carteira* for bem diversificada e os retornos individuais suficientemente independentes entre si, a distribuição dos retornos da *carteira* poderá assumir a forma normal.

### 2.2.2 – Metodologia Delta-Gama

A metodologia delta-gama representa um passo além da anterior. A metodologia paramétrica considerava somente o delta ( $\Delta$ ), ou seja, o efeito de variações nos preços dos ativos. Quando, porém, estamos lidando com ativos não-lineares, como opções, a avaliação apenas da sensibilidade em relação ao preço do ativo objeto não representa adequadamente a variação no preço do derivativo.

Esta metodologia irá considerar o componente linear ( $\Delta$ ) e o não-linear do risco, gama, que mede a taxa de variação do delta da *carteira* em relação ao preço do ativo objeto.

Pode-se encontrar o VAR assumindo que o fator de risco  $(\Delta S)^2$  também é uma variável normalmente distribuída (DOWD, 1998). Utilizando a expansão de Taylor:

$$dc = \Delta dS + \frac{1}{2} \Gamma dS^2 + \dots$$

onde  $d_c$  representa a variação do preço da opção,  $dS$  a variação no preço do ativo objeto, e  $\Gamma$  o gama da opção. O VAR é, então, aproximado utilizando-se estas medidas de sensibilidade:

$$VaR = \left| \Delta \right| (\alpha \sigma S) - \frac{1}{2} \Gamma (\alpha \sigma S)^2$$

Sob a hipótese de que  $(\Delta S)^2$  é uma variável normalmente distribuída, o VAR é encontrado utilizando-se o parâmetro  $\alpha$  de uma distribuição normal padronizada. No entanto, esta hipótese é claramente errada, pois se  $\Delta S$  é normalmente distribuída,  $(\Delta S)^2$  deve ser uma distribuição de qui-quadrado, e a soma de uma distribuição normal com uma distribuição qui-quadrado é também qui-quadrado.

Zangari sugere dois métodos para o cálculo do VAR sob a metodologia delta-gama. O primeiro (ZANGARI, 1996a) utiliza a expansão de Cornish-Fisher, que se baseia no princípio de que uma distribuição pode ser descrita

pelos parâmetros de outra. Desta forma, podemos ajustar o intervalo de confiança ( $\alpha$ ) da distribuição normal pelas medidas de assimetria e curtose da distribuição de qui-quadrado:

$$v \approx \left(\frac{1}{6}\right)(z_\alpha^2 - 1)\rho_3 + \left(\frac{1}{24}\right)(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\rho_4 - \left(\frac{1}{36}\right)(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\rho_3^2$$

onde  $z_\alpha$  representa o parâmetro  $\alpha$  da distribuição normal escolhido para o cálculo do VAR,  $\rho_3$  é a medida de assimetria da distribuição, e  $\rho_4$  a medida de curtose. O parâmetro utilizado para o cálculo do VAR será então  $-(\alpha - v)$ .

O segundo método sugerido por ZANGARI (1996b) consiste na estimação dos quatro primeiros momentos da distribuição de retornos (média, variância, assimetria e curtose), e então na utilização de uma das distribuições de Johnson que tenha os mesmos quatro momentos.

HO, CHEN e ENG (1996) propõem o cálculo do VAR através de uma metodologia delta-gama, aplicável a *carteiras* globais e com grande quantidade de opções. A carteira seria separada em “blocos”, sendo que o mais alto nível destes é ocupado pelas diferentes moedas envolvidas. Abaixo de cada moeda, os títulos são distribuídos, de acordo com sua maior fonte de risco, entre três outros blocos: ações, taxa de juros e taxa de câmbio. Para títulos de renda fixa, são então utilizadas medidas de *duration* e convexidade, e para opções

medidas de seus deltas e gamas para o cálculo do VAR. O valor em risco é calculado para cada sub-bloco, de forma a se conhecer o risco de cada subgrupo em particular e de cada moeda.

Porém, quando a presença de opções na carteira avaliada for substancial, a abordagem delta-gama exigirá grande esforço computacional, e, de acordo com JORION (1997), a utilização de modelos de simulação torna-se mais conveniente.

### **2.2.3 – Simulação Histórica**

A simulação histórica é um método relativamente fácil de se capturar não-linearidades e distribuições não-normais. Ela consiste, basicamente, em retornar no tempo e reconstruir uma série de retornos para um portfólio, mas usando as ponderações atuais dos ativos. O VAR é então obtido da distribuição de retornos hipotéticos.

Além desta metodologia lidar bem com não-linearidades e não inserir no modelo a suposição de normalidade dos retornos, ela descarta a necessidade do cálculo de volatilidades e correlações, que já estariam implicitamente embutidas na série histórica dos retornos (DOWD, 1998).

As principais críticas desta metodologia (JORION, 1997) são: somente uma sequência de valores é utilizada (a histórica), o que supõe que o passado representa adequadamente o futuro; o mesmo peso é dado para todas as observações; os erros de estimação podem ser muito grandes em uma amostra pequena; e exige grande base de dados no caso de *carteiras* grandes e complexas.

#### 2.2.4 – Simulação de Monte Carlo ou Estocástica

Este é, certamente, o método de cálculo mais poderoso do *Value-at-Risk*. Ele considera completamente não-linearidades e correlações, e é o mais adequado para *carteiras* que contemplam grande volume de opções.

Enquanto a simulação histórica considerava apenas uma trajetória dos fatores de risco (a que realmente ocorreu), a simulação de Monte Carlo levará em consideração o fato de que cada variável possui um comportamento estocástico, e uma distribuição própria de valores passíveis de ocorrência. Assim, podemos simular centenas ou milhares de possíveis trajetórias que poderiam ser seguidas pelos fatores de risco, e determinar o valor da *carteira* em cada situação. A partir destes dados, podemos então construir a distribuição de frequência dos retornos possíveis da *carteira* e calcular o VAR (JORION, 1997).

A simulação estocástica é feita em basicamente dois passos:

1. Especificação de um processo estocástico para as variáveis financeiras e também dos parâmetros desse processo (volatilidades e correlações);
2. Simulação de trajetórias de preços para todas as variáveis. Para cada trajetória, a *carteira* é avaliada a mercado, e a distribuição resultante é utilizada para o cálculo do VAR.

### Processos Estocásticos

Um processo estocástico muito utilizado é o Movimento Browniano Geométrico (MBG), utilizado pelo modelo *Black-Scholes* na precificação de opções. De acordo este processo, teríamos que (HULL, 1997):

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta z$$

onde  $S$  é o preço da ação,  $\Delta S$  é uma variação no preço da ação ocorrida no intervalo de tempo  $\Delta t$ ,  $\mu$  é o retorno esperado da ação (o retorno requerido de mercado), e  $\sigma$  é a volatilidade do preço da ação.  $\Delta z$  representa um processo de Wiener, sendo igual a  $\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ , onde a variação de  $z$  ( $\Delta z$ ) é um movimento aleatório de uma distribuição normal padronizada (ou seja, com média zero e

desvio-padrão  $1,0 \sqrt{\Delta t}$ ) no período de tempo  $\Delta t$ . Assim, o primeiro termo à direita da equação acima é o valor esperado do retorno da ação, e o segundo termo é o componente estocástico desse retorno. O Movimento Browniano Geométrico é obtido quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , onde encontraríamos que:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt}$$

Quando, no entanto, estamos modelando o preço de títulos de renda fixa, podemos utilizar o modelo proposto por Cox, Ingersoll, e Ross (CIR):

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dz$$

Este modelo leva em consideração o fato destes ativos apresentarem como característica a reversão à média (o valor de um título de renda fixa no vencimento é o seu valor de face).  $\kappa < 1$  representa a velocidade de reversão à média  $\theta$ , e a variância é proporcional ao nível das taxas de juros (JORION, 1997).

### Geração de Números Aleatórios

PAIVA, C. e PAIVA, S. (1997) ressaltam a importância da qualidade do gerador de números aleatórios utilizado no sucesso da implementação do método de Monte Carlo.

Os números gerados por computador são obtidos por meio de algum algoritmo numérico, e chamados de números pseudo-aleatórios (pois não são, verdadeiramente, aleatórios). Quando o algoritmo proporciona uma distribuição mais uniforme no intervalo  $[0,1]$ , temos números *quasi*-aleatórios, base para o que chamamos de Métodos de *Quasi*-Monte Carlo.

Uma outra característica importante é o período do gerador, que representa o ciclo após o qual inicia-se a mesma sequência de números aleatórios. Quanto maior o ciclo, melhor a qualidade do gerador.

Ao invés da geração de números pseudo ou *quasi* aleatórios, podemos também optar pela técnica conhecida como *bootstrap*, que irá coletar retornos de uma base de dados histórica, com reposição (JORION, 1997). Esta técnica apresenta vantagens como a não imposição de qualquer forma de distribuição aos retornos e a consideração das correlações entre as séries. Seus pontos fracos recaem na disponibilidade de uma amostra pequena, e na suposição de independência entre os retornos.

### Simulação de Trajetórias

Quando estamos simulando o comportamento de um único ativo, o processo a ser seguido é relativamente simples e direto. Quando, no entanto, estamos lidando com carteiras compostas por mais de um ativo, devemos considerar, no processo de simulação, as correlações envolvidas.

DOWD (1998) mostra que os casos mais simples se apresentam quando temos preços independentes ou perfeitamente correlacionados (positiva ou negativamente). No primeiro caso, admitindo um processo estocástico simples em que  $dp_t = \sigma dZ_t$ , ou seja, a variação do preço dependendo da volatilidade e de uma variável normal padronizada  $Z$  (este processo é uma simplificação do Movimento Browniano Geométrico, admitindo  $\mu=0$ ), e dois ativos na carteira, temos:

$$p_{1,t} = p_{1,t-1} + \sigma_1 Z_{1,t}$$

$$p_{2,t} = p_{2,t-1} + \sigma_2 Z_{2,t}$$

ou

$$\begin{bmatrix} p_{1,t} \\ p_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,t-1} \\ p_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix}$$

No caso de ativos perfeitamente correlacionados:

$$p_{1,t} = p_{1,t-1} + \sigma_1 Z_{1,t}$$

$$p_{2,t} = p_{2,t-1} \pm \sigma_2 Z_{1,t}$$

ou

$$\begin{bmatrix} p_{1,t} \\ p_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,t-1} \\ p_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \pm \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix}$$

Quando os ativos são imperfeitamente correlacionados, pode-se usar a decomposição de Choleski. A partir de:

$$\begin{bmatrix} p_{1,t} \\ p_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,t-1} \\ p_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix}$$

onde os termos  $a_{ij}$  são funções das variâncias e correlações entre os ativos, e denominando a matriz de elementos  $a_{ij}$  como  $A$ , chegamos a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & (1 - \rho^2)^{1/2} \end{bmatrix}$$

onde  $\rho$  é a correlação estimada entre os ativos 1 e 2. A decomposição de Choleski pode ser utilizada também para uma carteira de  $n$  ativos. A partir dos

preços obtidos, pode-se obter o valor da *carteira* e, procedendo-se a todas as simulações, obtemos o VAR da distribuição resultante.

### Críticas

As críticas a esta metodologia referem-se principalmente ao seu custo computacional. Outra fraqueza potencial é a suposição de determinado processo estocástico e de modelos de precificação, como *Black-Scholes* (JORION, 1997, e DOWD, 1998).

#### **2.2.5 – Teste de Estresse**

O teste de estresse é um método subjetivo, algumas vezes chamado de análise de cenários, que avalia o efeito de grandes variações simuladas nas variáveis financeiras da *carteira*, como por exemplo nas taxas de juros e ações.

JORION (1997) sugere a simulação de vários cenários, com a atribuição de uma probabilidade a cada um. A *carteira* seria reavaliada em cada cenário e, da distribuição resultante, retirado o *Value-at-Risk*.

Já DOWD (1998) não atribui probabilidades aos cenários estudados. Ao invés disso, os cenários seriam elaborados a partir da definição de grandes alterações nas variáveis financeiras ou considerando-se cenários já ocorridos.

em crises anteriores. O valor da *carteira* em tal situação, subtraído de seu valor atual, resultaria na perda sofrida pela Instituição.

O maior problema desta técnica, de acordo com DOWD (1998), é a sua total dependência dos cenários escolhidos, que por sua vez serão função do discernimento e experiência das pessoas envolvidas. No entanto, o teste de estresse é colocado como um complemento natural do VAR, dado que ele nos diz quanto perderíamos em determinada situação, sem referência à probabilidade de tal ocorrência, enquanto o VAR informa a probabilidade de ocorrência de determinado resultado negativo, mas não o pior resultado negativo possível.

### **2.3 – Métodos de Previsão de Volatilidade**

Esta seção irá rever alguns métodos comumente utilizados na previsão de volatilidades e correlações, a saber: histórico, com todas as observações ponderadas igualmente; modelos ARCH/GARCH; média móvel ponderada exponencialmente (*exponencial weighted moving average* ou EWMA), utilizada pelo documento *RiskMetrics*<sup>TM</sup>; e volatilidade implícita.

### 2.3.1 – Histórica

Este é o método mais simples para se estimar volatilidades e correlações. Dada uma amostra com N observações, a volatilidade histórica será simplesmente a esperança da somatória do quadrado dos desvios em relação à média.

Podemos utilizar uma janela móvel de M observações para o cálculo, tornando a variância condicional ao tempo. É também muito comum supor o retorno médio igual a zero, a fim de eliminar erros de estimação deste parâmetro, e considerando que o viés incorrido será pequeno quando calculamos retornos sobre períodos curtos (JORION, 1997). Sob estas condições, a variância será dada por:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{(M-1)} \sum_{i=1}^M r_{t-i}^2$$

Esta metodologia é duramente criticada por ponderar igualmente todas as observações, indiferentemente ao tempo em que ocorreram. Além disso, a saída de um retorno muito alto ou muito baixo da amostra, através do processo de janela móvel, provoca uma variação brusca na volatilidade prevista.

O método se aplica igualmente para a estimação das covariâncias entre os títulos:

$$COV_{12,t} = \frac{1}{(M-1)} \sum_{i=1}^M r_{1,t-i} r_{2,t-i}$$

onde  $r_{1,t-i}$  representa o retorno do ativo 1 em  $(t-i)$  e  $r_{2,t-i}$  o retorno do ativo 2 em  $(t-i)$ .

### 2.3.2 – Modelos ARCH / GARCH

O modelo ARCH (“Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”) foi originalmente proposto por ENGLE (1982), e a sua generalização, chamado de GARCH (“Generalized ARCH”) por BOLLERSLEV (1986).

A grande vantagem destes modelos é o reconhecimento, em sua modelagem, do fenômeno amplamente reconhecido de agrupamento (“cluster”) na maioria das variáveis financeiras. Este fenômeno pode ser descrito do seguinte modo: grandes (pequenas) variações nos retornos são seguidas também por grandes (pequenas) variações, positivas ou negativas; ou seja, podemos identificar períodos de alta e de baixa volatilidade nos retornos.

Os modelos ARCH/GARCH conseguem modelar, de forma adequada, esta heterocedasticidade da variância. No modelo ARCH, a variância condicional (ao tempo) é representada do seguinte modo:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

onde  $\omega > 0$  e  $\alpha_i \geq 0$

A equação acima representa uma processo ARCH(q), onde q é a ordem do processo. Vemos que, neste caso, a variância condicional é função de uma constante ( $\omega$ ) e dos erros passados ( $\varepsilon$ ) ao quadrado, ponderados por  $\alpha_i$ .

Em muitos casos o modelo ARCH(q) necessita de um grande intervalo de ordem q. O modelo GARCH(p,q) oferece, então, uma alternativa:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

onde  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ , e  $\alpha_i + \beta_i < 1$

No processo GARCH acima, de ordem (p,q), a variância condicional será função dos fatores previstos no modelo ARCH, acrescida das previsões das variâncias passadas, ponderadas por  $\beta_i$ . Todos os parâmetros desconhecidos

$(\omega, \alpha_i, \beta_i)$  são estimados simultaneamente por máxima verossimilhança. O modelo mais simples e mais usado da família GARCH é o GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

onde  $\omega > 0, \alpha > 0, \beta > 0, e \alpha + \beta < 1$

A covariância entre dois ativos também pode ser facilmente calculada pelo modelo GARCH. Como exemplo, considerando GARCH (1,1), temos (JORION, 1997):

$$COV_{12,t} = \omega + \alpha \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} + \beta COV_{t-1}$$

onde  $\omega > 0, \alpha > 0, \beta > 0, e \alpha + \beta < 1$

Um grande número de variações destes modelos foi desenvolvido posteriormente, dentre as quais destacam-se os modelos ARCH-M, EGARCH e TARCH. Uma revisão completa da teoria pode ser encontrada em BOLLERSLEV, CHOU e KRONER (1992).

### 2.3.3 – Média Móvel Ponderada Exponencialmente (EWMA)

A média móvel ponderada exponencialmente (EWMA) atribui maior peso às observações mais recentes, de acordo com o fator de decaimento  $\lambda$ . A variância, sob esta metodologia, é dada por (também consideramos aqui o retorno médio igual a zero):

$$\sigma_{1,t+1|t}^2 = (1-\lambda) \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} r_t^2$$

onde  $\sigma_{1,t+1|t}^2$  é a previsão da volatilidade do ativo 1 em t+1, utilizando informações até o período t (*RiskMetrics*<sup>TM</sup>, 1997). Ela também pode ser escrita de forma recursiva, quando teríamos que:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,t+1|t}^2 &= (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{1,t-i}^2 \\ &= (1-\lambda) (r_{1,t}^2 + \lambda r_{1,t-1}^2 + \lambda^2 r_{1,t-2}^2 + \dots) \\ &= (1-\lambda) r_{1,t}^2 + \lambda (1-\lambda) (r_{1,t-1}^2 + \lambda r_{1,t-2}^2 + \lambda^2 r_{1,t-3}^2 + \dots) \\ &= \lambda \sigma_{1,t|t-1}^2 + (1-\lambda) r_{1,t}^2 \end{aligned}$$

Quanto maior o parâmetro  $\lambda$ , menor peso é dado às últimas observações e, portanto, menor é a taxa de decaimento. O documento *RiskMetrics*<sup>TM</sup> utiliza

$\lambda=0,94$ , o que faz com que a última observação tenha um peso de 6%, a penúltima 5,6%  $[(1-0,94) \times 0,94^1]$ , e assim por diante.

Esta metodologia possui muitas vantagens sobre a histórica: reage rapidamente a variações bruscas de mercado (por dar maior peso a observações mais recentes), enquanto na volatilidade histórica simples a reação é lenta; o peso dado a estas variações bruscas declina então exponencialmente sob a EWMA, mas sofre uma variação brusca quando utilizamos a volatilidade histórica simples.

Podemos aplicar facilmente este método para a estimação de covariâncias:

$$COV_{12,t+1/t} = (1-\lambda) \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} r_{1i} r_{2i}$$

e

$$COV_{12,t+1/t} = \lambda COV_{12,t/t-1} + (1-\lambda) r_{1,t} r_{2,t}$$

Pode-se demonstrar facilmente que a EWMA é um caso especial do modelo GARCH (1,1), impondo  $\alpha_0 = 0$  e  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ , sendo que esta última

condição torna o processo não estacionário (BOUDOUKH, RICHARDSON e WHITELOW, 1997).

### 2.3.4 – Volatilidade Implícita

Este método irá extrair a previsão de volatilidade implícita no preço de opções negociadas no mercado. Dado o modelo Black-Scholes, largamente difundido para a precificação de opções (HULL, 1997):

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

com

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

onde:

c = preço da opção de compra Européia

S = preço do ativo objeto

T - t = tempo até o vencimento do contrato

X = preço de exercício da opção

$N(x)$  = distribuição de probabilidade cumulativa para uma variável normalmente distribuída com média 0 e desvio-padrão 1

$r$  = taxa de juros livre de risco

$\sigma$  = volatilidade do ativo objeto

Conhecendo as variáveis  $c$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $X$  e  $r$ , podemos descobrir a estimativa da volatilidade (não observável diretamente) que os agentes financeiros estão considerando para a precificação da opção.

Visto ser impossível a inversão da equação acima de forma a exprimir  $\sigma$  como função de  $c$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $X$  e  $r$ , torna-se necessária a utilização de métodos numéricos de resolução de equações. Os dois métodos geralmente utilizados são o método da bissecção e o método de Newton-Raphson, e uma descrição de ambos pode ser encontrada em SANTOS (1997).

Embora com maior dificuldade, este método também pode ser utilizado na estimativa de correlações. De acordo com ALEXANDER, C. (1998), um meio de se obter a correlação implícita é através de um trio de volatilidade implícitas, duas referentes a ativos específicos e a terceira representando o “spread” dos dois primeiros. Por exemplo, poderia-se utilizar as volatilidades implícitas de opções sobre a taxa do Dólar em relação ao Euro, sobre a taxa do Dólar em relação ao Ien, e sobre o Euro em relação ao Ien. A fórmula de cálculo seria:

$$V(x-y) = V(x) + V(y) - 2\rho\sqrt{V(x)V(y)}$$

onde  $V(x)$  representa a volatilidade implícita do ativo  $x$ ,  $V(y)$  a volatilidade implícita do ativo  $y$ ,  $V(x-y)$  a volatilidade implícita do “spread” entre os dois primeiros, e  $\rho$  a correlação implícita entre  $x$  e  $y$ , variável a ser calculada.

Com mercados de opções eficientes, a volatilidade implícita deveria fornecer a melhor estimativa sobre a volatilidade futura. JORION (1997) aconselha seu uso, sempre que possível, para o cálculo do VAR.

Um grande problema desta metodologia é que dificilmente estarão disponíveis no mercado opções suficientes para o cálculo de todas as volatilidades e correlações necessárias para o cálculo do risco da *carteira* avaliada, sendo seu uso portanto restrito.

CAMPBELL, LO e MACKINLAY (1997) levantam, no entanto, problemas mais sérios referentes a esta metodologia. A grande questão que se coloca é: se o modelo de precificação de opções utilizado (geralmente Black-Scholes) for válido, a volatilidade encontrada será totalmente correta; caso contrário, seu valor será inconsistente. Considerando, por exemplo, o argumento de que a volatilidade implícita seria a mais adequada estimativa da volatilidade futura,

dado que a volatilidade varia estocasticamente e a volatilidade calculada com dados históricos não se ajustaria com a mesma rapidez, vemos que ele embute uma contradição básica. De acordo com os autores, o erro básico desta afirmação é que a volatilidade estocástica contradiz as suposições do modelo Black-Scholes e, se a volatilidade for realmente estocástica, então este modelo não representará mais a correta precificação de uma opção.

## **CAPÍTULO 3 – ESTUDOS ANTERIORES**

Este capítulo tem por objetivo resenhar os principais testes empíricos sobre VAR, bem como alguns testes acerca de métodos de previsão de volatilidade, visto a sua importância na eficácia do cálculo do valor em risco. Ao final do capítulo, apresentamos um quadro-resumo desses estudos.

### **3.1. Testes Empíricos sobre Métodos de Previsão de Volatilidade**

ALEXANDER e LEIGH (1997) avaliaram a performance de três métodos de previsão de volatilidade, a saber: volatilidade histórica com igual ponderação dos retornos; média móvel ponderada exponencialmente (EWMA); e GARCH (1,1). O objeto do estudo recaiu sobre cinco índices de ações (S&P500, FTSE100, CAC40, DAX e NIKKEI225) e quatro taxas de câmbio, no período de janeiro de 1993 a outubro de 1996.

Procedendo à avaliação dos métodos de previsão de volatilidade, ALEXANDER e LEIGH (1997) utilizaram primeiramente dois critérios estatísticos: a comparação da distribuição de retornos em relação à distribuição normal e a raiz do erro médio ao quadrado. Estes critérios levaram a resultados imprecisos, geralmente favorecendo a EWMA exceto para períodos de manutenção (“holding periods”) pequenos. Em seguida, os autores utilizaram o

critério sugerido pelo BIS, considerando o número de “outliers” com um grau de confiança de 99% (comparando a previsão do VAR com a perda ou ganho efetivamente ocorrido). Os resultados, neste caso, são totalmente inversos ao anterior: com exceção do índice S&P500, os demais tiveram como melhores métodos de previsão a volatilidade histórica e o GARCH.

BOUDOUKH et al. (1997) estudaram o mercado de taxas de juros de curto prazo (títulos do Tesouro americano de três meses), no período de 1983 a 1992. A esta série, foram aplicados quatro métodos de previsão de volatilidade: histórica com retornos igualmente ponderados, RiskMetrics (EWMA), GARCH (1,1) e a Estimação de Densidade Multivariada (MDE), um método não-paramétrico cujos pesos dados às observações dependem do estado da economia (ou seja, estados similares ao atual terão maior importância). No caso, foram utilizadas como variáveis do MDE o nível das taxas de juros e a inclinação da estrutura a termo. A avaliação destes métodos pelos critérios do erro quadrado médio e da regressão linear da volatilidade prevista *versus* real mostraram o MDE e a EWMA como os mais acurados.

SANTOS (1997) estudou o poder de previsão da volatilidade de cinco modelos, quais sejam: um modelo ingênuo (*martingale*), o utilizado pelo RiskMetrics<sup>TM</sup> (EWMA), GARCH (1,1), volatilidade implícita, e uma combinação da volatilidade implícita com EWMA e GARCH. O objeto de estudo recaiu sobre

contratos futuros do Índice BOVESPA, negociados na BM&F, no período de julho de 1994 a janeiro de 1997.

Testes preliminares realizados por SANTOS (1997) mostram características interessantes da série temporal estudada. Por exemplo, a hipótese de normalidade dos retornos só pode ser rejeitada no período de julho de 1994 a junho de 1995, o mesmo ocorrendo com a hipótese de não autocorrelação.

Os resultados dos testes de previsão de volatilidade efetuados por SANTOS (1997), utilizando critérios estatísticos de avaliação (equações de perdas e regressões da volatilidade realizada contra a volatilidade prevista) indicam a superioridade do modelo GARCH em períodos de alta volatilidade. Este resultados se alteram, no entanto, em situações de menor volatilidade, quando o GARCH não se mostra preferível ao *RiskMetrics*<sup>TM</sup> e ao Modelo Ingênuo. A volatilidade implícita, por sua vez, apresenta-se sempre como a pior opção para a previsão da volatilidade.

### **3.2. Testes Empíricos sobre Comparação de Metodologias de VAR**

BEDER (1995) obteve resultados pouco consistentes na aplicação de metodologias e parâmetros distintos para o cálculo do VAR. Seu teste envolveu três carteiras hipotéticas: (i) a primeira formada exclusivamente por títulos do

Tesouro americano sem pagamento de cupons; (ii) a segunda formada pelas ações componentes do índice S&P 500, e por opções sobre o mesmo índice; (iii) a última composta por 50% da primeira carteira e 50% da segunda carteira. Para cada carteira, foram aplicadas duas metodologias: a simulação histórica (obtida pelos resultados dos últimos 100 e 250 dias úteis), e a simulação de Monte Carlo (utilizando as correlações fornecidas pelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup> e pelo BIS/Basle Committee).

A conclusão a que chega Beder já era esperada: o VAR é extremamente dependente dos parâmetros, base de dados, suposições e metodologias envolvidas, devendo ser complementado por *stress tests* e controles qualitativos, como auditorias.

HENDRICKS (1996) testou três metodologias do *Value-at-Risk*: paramétrica com igual ponderação entre os retornos; paramétrica com ponderação exponencial dos retornos (EWMA); e simulação histórica. A primeira utilizou cinco janelas móveis: 50, 125, 250, 500 e 1.250 dias. A segunda foi realizada com fatores de decaimento ( $\lambda$ ) de 0,94, 0,97 e 0,99, e a terceira com dados históricos coletados por 125, 250, 500 e 1.250 dias. Foram estudados 1.000 portfólios aleatórios simulados através da taxa de câmbio do dólar em relação a outras oito moedas, no período de 1983 a 1994. Estes portfólios foram, então, avaliados através de nove critérios.

Os resultados obtidos por HENDRICKS (1996), que envolveu somente ativos lineares, foi inconclusivo. Ou seja, nenhuma metodologia se mostrou claramente superior. Outrossim, o estudo evidenciou duas características das séries financeiras: a de que as distribuições empíricas possuem caudas mais largas que as da distribuição normal ("fat tails"), e que a volatilidade não é constante no tempo (volatilidade condicional).

VENKATARAMAN (1996) propõe a utilização de uma distribuição de retornos para o cálculo do VAR que permite a ocorrência de "fat tails" (caudas mais largas que as previstas pela distribuição normal), característica comumente observada nas séries financeiras. O método proposto é a mistura de distribuições normais, onde o retorno de cada ativo seria gerado por uma de duas distribuições (uma possuindo maior volatilidade) de acordo com certa probabilidade, e os parâmetros seriam estimados através de um método de máxima verossimilhança, no caso o QB-MLE ("Quasi-Bayesian Maximum Likelihood Estimation").

O método proposto é aplicado por VENKATARAMAN (1996) a taxas de câmbio de oito países (Canadá, França, Alemanha, Itália, Japão, Suíça, Inglaterra e Holanda), de janeiro de 1978 a agosto de 1996. Os resultados evidenciam um melhor desempenho em relação à suposição de distribuições normais, de acordo com o número de violações previsto pelo nível de confiabilidade utilizado.

BOUDOUKH et al. (1998) propõem uma abordagem híbrida para o cálculo do *Value-at-Risk*, mesclando a abordagem proposta pelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup> (paramétrica com volatilidade calculada através do método EWMA) e a simulação histórica. A primeira possui como ponto fraco a suposição de normalidade condicional dos retornos, geralmente não verificada na prática, e como grande vantagem o fato de atribuir maior peso às observações mais recentes, capturando a heterocedasticidade da variância dos retornos. A simulação histórica, por sua vez, não faz qualquer suposição acerca da distribuição dos retornos, mas apresenta dificuldades de estimação do VAR quando utilizamos uma amostra de tamanho insuficiente, e pressupõe que os retornos são IID (idêntica e independentemente distribuídos).

A abordagem proposta por BOUDOUKH et al. (1998) efetuou o cálculo dos retornos no período de observação conforme a simulação histórica, e atribuiu pesos exponencialmente decrescentes a esses retornos. O VAR pôde, então, ser facilmente calculado como o percentil  $x$  dessa distribuição. Os testes empíricos efetuados com quatro séries (taxa de câmbio do marco alemão por dólar norte americano, preço spot de petróleo bruto, índice S&P 500, e um índice genérico de Brady Bonds – J. P. Morgan Brady Bond Index), no período de janeiro de 1991 a dezembro de 1997, mostram uma melhora significativa na precisão do cálculo do VAR. Os autores ainda apontam outra vantagem do método, qual seja, facilidade computacional a um baixo custo.

FARIAS FILHO (1997) comparou a performance de três métodos de estimação de volatilidade (Média Móvel Ponderada Exponencialmente, GARCH e TARCH<sup>1</sup>) na estimação do *Value-at-Risk*. Seu objeto de estudo foi a série do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA), no período de janeiro de 1995 a dezembro de 1996.

Testes preliminares feitos por FARIAS FILHO (1997) rejeitaram a normalidade dos retornos do IBOVESPA, assim como indicaram a existência de autocorrelação e de estacionariedade dos retornos, no período analisado.

Na avaliação dos modelos de VAR feita no estudo acima, nenhum método de estimação da volatilidade se mostrou superior de acordo com a avaliação feita pelo número de vezes em que as perdas efetivas superaram as estimadas<sup>2</sup>. O método EWMA, por sua vez, apresentou um erro quadrático médio pouco menor que as outras duas metodologias.

Um estudo similar foi efetuado por BARCINSKI et al. (1997), no período de janeiro de 1994 a novembro de 1996. Os autores, primeiramente, estudaram as séries de retornos diários de seis ações negociadas na Bolsa de Valores de

---

<sup>1</sup> O modelo TARCH tem a capacidade de captar o chamado “efeito assimetria”, ou seja, o fato de choques negativos apresentarem um impacto maior na volatilidade dos retornos do que choques positivos de mesma magnitude. Ver BOLLERSLEV, CHOU e KRONER (1992).

<sup>2</sup> Ver KUPIEC (1995).

São Paulo (Eletrobrás ON, Eletrobrás PN, Petrobrás PN, Telebrás ON, Telebrás PN, e Vale do Rio Doce PN), procurando identificar a existência do efeito assimetria (ver nota 1), e chegando à conclusão da sua existência com exceção das ações da Petrobrás.

Na segunda parte do trabalho, BARCINSKI et al. (1997) simulam o comportamento ao longo do tempo de uma carteira teórica composta por ações da Telebrás PN, Eletrobrás PN e Petrobrás PN (ações mais negociadas no segundo semestre de 1996) utilizando o conceito de VAR. Cinco métodos de estimação da volatilidade são utilizados: IGARCH sem constante (equivalente ao método EWMA proposto pelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup>), IGARCH com constante, GARCH, TARCH e EGARCH. As conclusões apontam para a não superioridade dos métodos alternativos ao *RiskMetrics*<sup>TM</sup>, portanto argumentando pelo uso deste último, dada a sua facilidade computacional.

### **3.3. Outros Testes Empíricos de VAR**

Considerando que a utilização das medidas de VAR no gerenciamento de risco depende tanto de sua precisão quanto da sua disponibilidade em tempo hábil, PRITSKER (1996) estudou a relação entre a precisão obtida com diversas metodologias de *Value-at-Risk* e o tempo necessário para computá-las. O autor trabalhou com portfólios compostos exclusivamente por instrumentos não lineares (opções de diversas moedas), utilizando seis

metodologias: delta normal; “delta-gama-delta”, onde assume que o segundo termo da expansão de Taylor também possui distribuição normal; “delta-gama Monte Carlo”, utilizando simulações para computar o valor da carteira através das medidas de delta e gama; “delta-gama *minimization*”, onde trata o VAR como um problema de minimização; e duas outras metodologias Monte Carlo.

Os resultados obtidos nos estudos de PRITSKER (1996) indicam que, quanto mais complexa a metodologia, mais precisos são os resultados, porém mais tempo faz-se necessário para o seu cálculo. Por exemplo, os métodos de Monte Carlo mostraram-se mais precisos, mas necessitaram de até 56,6 vezes mais tempo do que a metodologia “delta-gama-delta” e 17,1 vezes mais do que a “delta-gama Monte Carlo” para uma carteira com 10.000 opções. A melhor relação precisão x tempo considerada pelo autor foi a “delta-gama Monte Carlo”, que demonstrou resultados satisfatórios em um tempo de 12,9 minutos no equipamento utilizado.

DIMSON (1997) avaliou a performance de cinco métodos de alocação de capital em instituições financeiras, a partir de 58 carteiras de ações. A análise envolveu 61 períodos de *stress* de mercado entre os anos de 1985 e 1995, durante os quais foi possível verificar quais métodos ofereciam maior segurança no montante de capital alocado. Os dois métodos que se mostraram mais eficientes foram os baseados em metodologias de *Value-at-Risk*, o que levou o autor a apoiar a iniciativa do *Bank of International Settlements* (BIS) de

incentivar o uso de modelos internos para alocação de capital e gerenciamento de risco.

MARSHALL e SIEGEL (1997) adotam um foco diferente dos demais estudos analisados. Ao invés de comparar o resultado obtido por diferentes modelos de VAR, a análise recai sobre o risco de implementação de um mesmo modelo, no caso o *RiskMetrics*<sup>TM</sup>. Após a definição de uma carteira composta por diversos instrumentos (como títulos governamentais, *swaps*, termos e opções, envolvendo cinco moedas), o VAR foi calculado por onze fabricantes de *softwares* voltados para o gerenciamento de risco. Os resultados apontam que as diferenças obtidas nas implementações do *RiskMetrics*<sup>TM</sup> são similares, em magnitude, às diferenças obtidas pela utilização de diferentes modelos (no caso, foram utilizadas as simulações Histórica e de Monte Carlo), e que o grau de variação também depende diretamente da complexidade do instrumento. Tal fato sugere que, apesar de toda a estrutura proposta pelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup>, ainda há decisões importantes a serem tomadas na implementação, por exemplo referentes à avaliação e ao mapeamento.

### 3.4 – Quadro Comparativo

Apresentamos, a seguir, um quadro-resumo dos testes estudados.

Autor	Objetivo	Objeto de Estudo	Metodologia	Conclusão
<b>Previsão de Volatilidade – Exterior</b>				
Alexander e Leigh (1997)	Avaliação da performance de 3 métodos de previsão de volatilidade.	5 índices de ações (S&P500, FTSE100, CAC40, DAX e NIKKEI225) e taxas de câmbio dólar versus 4 moedas. Período: jan/93 a out/96.	Volatilidade histórica, EWMA e GARCH.	Com critérios estatísticos de avaliação, favorece EWMA exceto para <i>holding periods</i> pequenos. De acordo com critério de no. de outliers, favorece volat. histórica e GARCH (com exceção S&P500)
Boudoukh et al. (1997)	Avaliação da performance de 4 métodos de previsão de volatilidade.	Títulos Tesouro americano de 3 meses. Período: 1983 a 1992.	Volatilidade histórica, EWMA, GARCH e MDE.	MDE e EWMA mais acurados, pelos critérios erro quadrado médio e regressão linear volat. prevista x real.
<b>Previsão de Volatilidade – Brasil</b>				
Santos (1997)	Avaliação da performance de 5 métodos de previsão de volatilidade.	Contratos futuros de IBOVESPA. Período: jul/94 a jan/97.	Martingale, EWMA, GARCH (1,1), volatilidade implícita, e combinação volat. implícita com EWMA e GARCH.	Segundo critérios estatísticos, GARCH é superior em períodos de alta volatilidade. Em períodos de menor volat., GARCH não é preferível à EWMA e martingale.
<b>Testes VAR - Exterior</b>				
Beder (1995)	Verificar consistência do VAR em relação a diversas metodologias e suposições.	Três carteiras compostas por títulos do Tesouro americano, índice S&P500 e opções sobre este índice.	Simulações histórica e de Monte Carlo, com volat. do RiskMetrics e BIS.	VAR extremamente dependente dos parâmetros e metodologias envolvidos.
Hendricks (1996)	Comparação de metodologias distintas de VAR.	Mil carteiras simuladas através da taxa de câmbio do dólar em relação a oito moedas. Período: 1983 a 1994.	Paramétrica com volat. histórica e EWMA, e simulação histórica.	Nenhuma metodologia claramente superior.
Venkataraman (1996)	Propor a utilização de distribuição de retornos que permita a ocorrência de fat tails para o cálculo do VAR.	Taxas de câmbio de 8 países. Período: jan/78 a ago/96.	Mistura de distribuições normais, e cálculo dos parâmetros através do QB-MLE.	Evidências de melhor desempenho do método proposto, de acordo com número de ocorrências além do esperado.
Boudoukh et al. (1998)	Propor abordagem híbrida para o cálculo do VAR e testá-la.	Aplica nova abordagem a 4 séries: taxa de câmbio dólar x marco alemão, preço spot petróleo, índice S&P500 e índice de Brady Bonds. Período: jan/91 a dez/97.	Híbrida, mesclando paramétrica com EWMA e simulação histórica.	Testes mostram melhora significativa na precisão do VAR.

Autor	Objetivo	Objeto de Estudo	Metodologia	Conclusão
<b>Testes VAR - Brasil</b>				
Farias Filho (1997)	Comparação de metodologias distintas de VAR.	Índice BOVESPA. Período: 1995 a 1996.	Paramétrica com EWMA, GARCH e TARCH.	Nenhuma metodologia claramente superior, e EWMA com erro quadrático médio pouco menor.
Barcinski et al. (1997)	Comparação de metodologias distintas de VAR.	Carteira composta por ações da Telebrás PN, Eletrobrás PN e Petrobrás PN. Período: 1994 a 1996.	Paramétrica com EWMA, GARCH, IGARCH, TARCH e EGARCH.	Recomenda EWMA ( <i>RiskMetrics</i> ) pela sua facilidade computacional, dada a não superioridade dos outros métodos.
<b>Outros Testes - VAR</b>				
Pritsker (1996)	Estudar a relação precisão <i>versus</i> tempo computacional de seis metodologias de VAR.	Carteiras compostas por 10.000 opções de diversas moedas. Período: 17/ago/1995.	Seis metodologias, incluindo delta normal, delta-gama e simul. Monte Carlo.	Quanto mais complexa a metodologia, mais precisos os resultados, porém maior o tempo computacional. Melhor relação encontrada: "delta-gama Monte Carlo".
Dimson (1997)	Avaliação da performance de 5 métodos de alocação de capital.	58 carteiras de ações. Período: 1985 a 1995.	Análise de 61 períodos de stress de mercado.	Métodos baseados em metodologias de VAR mais eficientes.
Marshall e Siegel (1997)	Avaliação do risco de implementação de um mesmo modelo de VAR ( <i>RiskMetrics</i> ).	Carteira diversificada (incluindo títulos do governo, swaps, opções, termos e câmbio). Período: 27/set/1995.	11 fabricantes de software aplicaram a metodologia do <i>RiskMetrics</i> .	As diferenças nos resultados são similares em magnitude à utilização de diferentes modelos, mostrando que há decisões importantes na implementação do modelo.

## **CAPÍTULO 4 – TESTE EMPÍRICO NO MERCADO BRASILEIRO**

O objetivo desta parte do trabalho será realizar uma avaliação, a partir de carteiras teóricas compostas pelo Índice Bovespa e por títulos de renda fixa, de algumas metodologias de *Value-at-Risk*.

O período de estudo compreenderá julho de 1994 a junho de 1998, sendo o primeiro ano do período em questão utilizado exclusivamente para a determinação de parâmetros de volatilidade necessários ao cálculo do VAR.

Os instrumentos utilizados para a simulação da carteira de títulos de renda fixa foram os contratos futuros de Depósitos Interfinanceiros de 1 Dia (DI1), negociados na Bolsa de Mercadorias & Futuros. A duração desta carteira foi definida em 30 dias, devido à grande liquidez de mercado que esses contratos constantemente apresentaram no período de análise, e portanto à consistência e representatividade de suas taxas.

Cinco carteiras teóricas serão então estudadas, considerando um capital inicial de R\$1.000.000, com a seguinte composição: 100% de Ibovespa; 75% de Ibovespa e 25% de títulos de renda fixa; 50% de Ibovespa e 50% de títulos de renda fixa; 25% de Ibovespa e 75% de títulos de renda fixa; e 100% de títulos de renda fixa. Estas carteiras apresentam níveis decrescentes de risco

(representado pela volatilidade dos ativos), o que permitirá a observação do desempenho das metodologias de VAR em relação ao nível de volatilidade. Por exemplo, ativos menos voláteis (no caso títulos de renda fixa) poderiam responder menos a mudanças de metodologias, ao contrário de ativos mais voláteis (ações).

Às carteiras teóricas serão aplicadas cinco metodologias de cálculo do VAR:

1. Paramétrica, com o uso da volatilidade histórica com média móvel;
2. Paramétrica, com o uso da volatilidade histórica com média móvel ponderada exponencialmente (EWMA – *Exponential Weigthed Moving Average*);
3. Paramétrica, com o uso da volatilidade estimada pelo modelo GARCH (1,1);
4. Simulação Histórica;
5. Abordagem Híbrida, representada pela combinação da Simulação Histórica com o método EWMA de cálculo da volatilidade, conforme proposto por BOUDOUKH et al. (1998).

Os resultados obtidos com estas cinco metodologias serão então comparados, a fim de se verificar qual obteve desempenho mais satisfatório. Este “backtest” terá como parâmetro o número de erros, de acordo com teste proposto por KUPIEC (1995).

As seções seguintes irão detalhar as diversas etapas do teste empírico: a seção 4.1 descreverá o processo de coleta e preparação dos dados necessários; a seção 4.2 apresentará testes preliminares geralmente aplicados a séries econômico-financeiras, a saber testes de heterocedasticidade, de normalidade, de autocorrelação e de estacionariedade dos retornos; a seção 4.3 descreverá a aplicação dos modelos de VAR em suas várias metodologias; a seção 4.4 irá tratar da metodologia utilizada para a avaliação dos resultados; e a seção 4.5 apresentará os resultados empíricos obtidos.

#### **4.1 – Coleta e Preparação dos Dados**

##### **4.1.1 – Ibovespa**

Os procedimentos utilizados para a obtenção de uma série de retornos do Índice Bovespa foram os seguintes:

- 1) Coleta da série de pontos do Índice Bovespa na Bolsa de Valores de São Paulo, para o período de 30.06.94 a 30.06.98, com um total de 996 observações.
- 2) A partir da série de pontos do referido índice, foram calculados os retornos diários através da fórmula:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Onde:

$R_t$  = retorno do dia t

$P_t$  = fechamento do índice BOVESPA do dia t

$P_{t-1}$  = fechamento do índice BOVESPA do dia t-1

- 3) No período analisado, oito observações foram retiradas da amostra (dias 30.12.94, 01.03.95, 29.12.95, 21.02.96, 24.12.96, 31.12.96, 24.12.97 e 31.12.97), devido à Bovespa operar em período parcial sem movimentação financeira, e à não abertura da BM&F. Deste modo, a série resultante possui 988 observações de “pontos” e 987 retornos do IBOVESPA.

#### 4.1.2 – Contratos DI1 Futuros

Os contratos de DI1 Futuros, negociados na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), foram utilizados como base para a obtenção de uma série de retornos de títulos pré-fixados de 30 dias.

Para tanto, os seguintes passos foram seguidos:

- 1) Coleta dos PUs de ajuste diários dos contratos futuros de DI1, envolvendo todos os vencimentos, no prazo de 30.06.94 a 30.06.98.
- 2) Seleção dos contratos com vencimentos imediatamente inferior e superior a 30 dias corridos, e cálculo das taxas de cada período envolvido pela fórmula:

$$Taxa = \frac{100.000}{PU} - 1$$

- 3) Interpolação por dias úteis (considerando os feriados do período), de acordo com a seguinte fórmula:

$$Taxa\ Interpolada = (1 + tx\ a) \times \left\{ \left[ \frac{(1 + tx\ b)}{(1 + tx\ a)} \right]^{\frac{1}{DU1}} \right\}^{DU2} - 1$$

onde,

tx a = taxa do contrato com vencimento inferior a 30 dias

tx b = taxa do contrato com vencimento superior a 30 dias

DU1 = dias úteis entre o vencimento do primeiro contrato e o vencimento do segundo contrato

DU2 = dias úteis entre o vencimento do primeiro contrato e o prazo de 30 dias a contar da data do pregão<sup>1</sup>

- 4) A fim de retirar o efeito do número de dias úteis presente em cada taxa de 30 dias obtida na interpolação, a série foi padronizada para 21 dias úteis (média de dias úteis dentro de um mês).
- 5) Como estamos interessados na obtenção dos retornos dos preços de títulos pré-fixados, calculamos o preço de mercado de um título (PU de mercado), a partir da série de taxas obtida no item anterior.

Este procedimento visa reconhecer o ganho obtido pela posse de um título pré-fixado quando há diminuição das taxas de juros, e a perda quando há aumento das taxas de juros. A fórmula utilizada para a obtenção da série de PUs foi a seguinte:

$$PU_t = PU_{t-1} \times \frac{(1 + i_{t-1})}{(1 + i_t)}$$

onde,

$PU_t$  = preço do título em t

---

<sup>1</sup> Devemos atentar para o fato de que um título pré-fixado não pode ter seu vencimento em dia não útil,

$PU_{t-1}$  = preço do título em t-1

$i_t$  = taxa de juros em t

$i_{t-1}$  = taxa de juros em t-1

A série resultante possui 987 retornos estimados de títulos pré-fixados de 30 dias no período em análise.

#### **4.2 – Testes Preliminares**

Os testes preliminares visam a detectar características importantes das séries temporais trabalhadas, que certamente irão influenciar os resultados obtidos com as diferentes metodologias de VAR.

Quatro testes serão apresentados para as séries temporais de retornos do IBOVESPA e de contratos pré-fixados de 30 dias: teste de heterocedasticidade, de normalidade, de autocorrelação e de estacionariedade dos retornos<sup>2</sup>.

Aspectos importantes a considerar na análise dos testes preliminares e também na avaliação dos modelos de *Value-at-Risk* referem-se aos fundamentos macroeconômicos subjacentes ao período em análise (julho/94 a

---

quando então o prazo de 30 dias corridos estipulado deve ser estendido até o próximo dia útil.

<sup>2</sup> Os testes foram aplicados com o auxílio do software Eviews.

junho/98). Podemos encontrar, ao longo destes quatro anos, situações diversas (ocasionando níveis de volatilidade também diversos) que justificam uma análise isolada. Deste modo, o período global será dividido em cinco *subperíodos*:

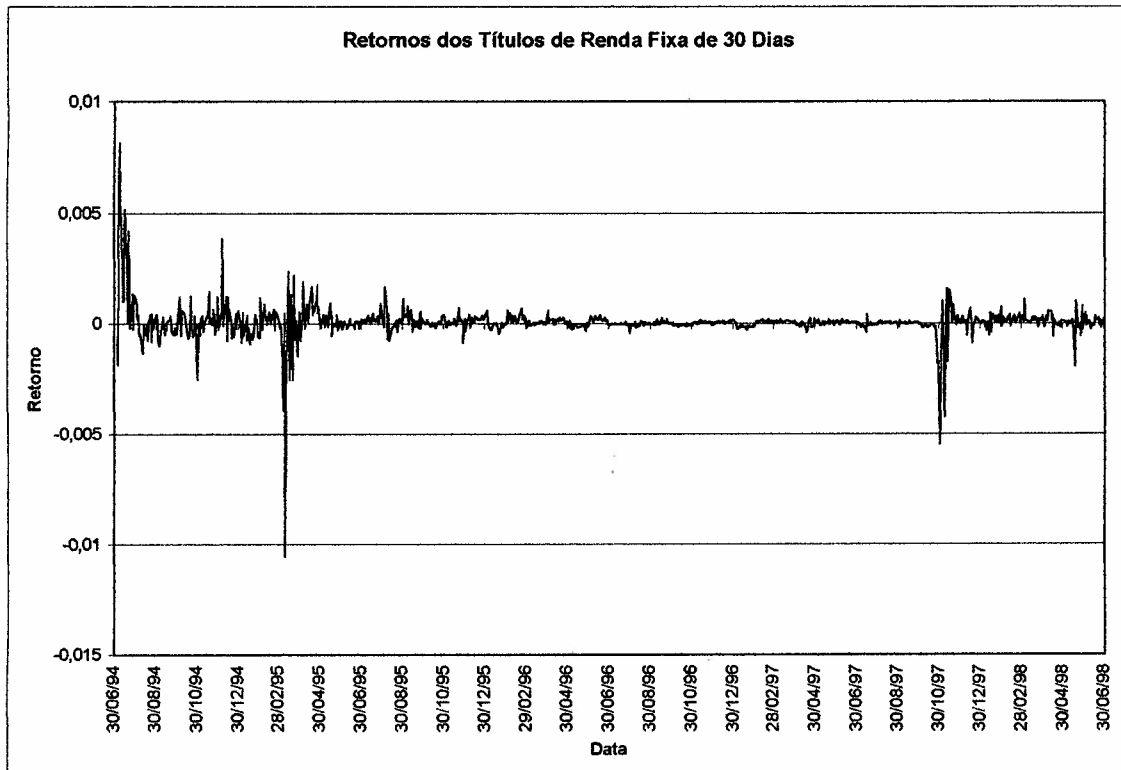
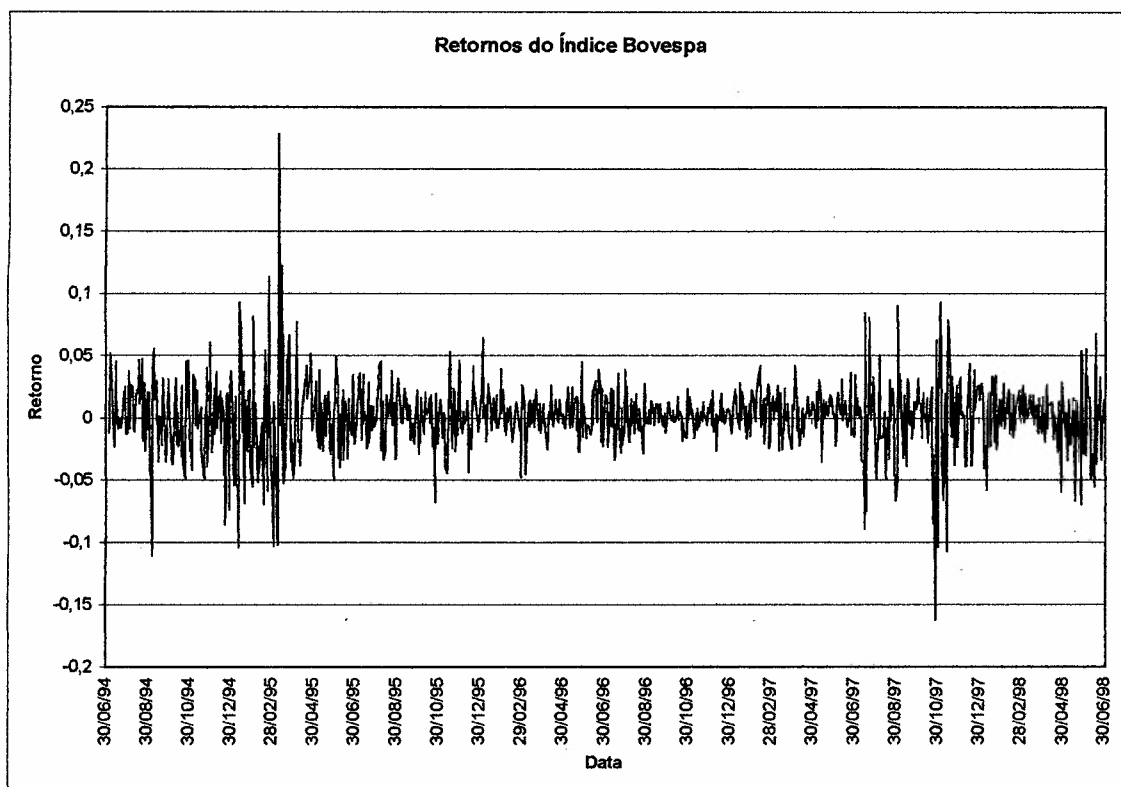
- I. Julho/94 a novembro/94: período inicial de implementação do Plano Real;
- II. Dezembro/94 a abril/95: período marcado pela crise do México e pela mudança do regime cambial;
- III. Maio/95 a junho/97: período de consolidação da estabilização e da desindexação da economia;
- IV. Julho/97 a dezembro/97: período marcado pelos efeitos mais agudos da crise da Ásia;
- V. Janeiro/98 a junho/98: período de recuperação e também de suspeição dos mercados emergentes.

Em resumo, os testes serão feitos para os subperíodos acima, bem como para o período global, de acordo com a tabela abaixo:

Per.	Início	Término	Nº meses	Nº Observações
A	Julho/94	Junho/98	48	987
B	Julho/94	Nov/94	5	103
C	Dez/94	Abril/95	5	99
D	Mai/95	Junho/97	26	536
E	Julho/97	Dez/97	6	128
F	Jan/98	Junho/98	6	121

#### 4.2.1 – Testes de Heterocedasticidade dos Retornos

Um bom procedimento inicial para detectar a heterocedasticidade nos retornos é observar visualmente as séries estudadas. Abaixo, apresentamos as séries de retornos do IBOVESPA e de títulos de renda fixa de 30 dias, no período de 30.06.94 a 30.06.98:



Podemos notar nas séries acima a característica muito comum de agrupamento (“cluster”), onde grandes variações nos retornos são seguidas também por grandes variações, de sinal positivo ou negativo, o mesmo ocorrendo com pequenas variações.

A heterocedasticidade pode ser testada formalmente através do Teste de White<sup>3</sup>. Considerando o modelo de regressão:

$$Y_i = \alpha + \beta x_i$$

E sendo  $a$  e  $b$  estimativas dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  obtidas através do método de mínimos quadrados:

$$\hat{y}_i = a + b x_i$$

O teste de White computa uma regressão auxiliar a partir dos resíduos ao quadrado desta regressão (JOHNSTON E DINARDO, 1997):

$$\varepsilon_i^2 = a + b x_i + c x_i^2$$

---

<sup>3</sup> Halbert White, “A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity”, *Econometrica*, vol. 48, p. 817-838, 1980.

A hipótese de que todos os resíduos possuem a mesma variância depende então da significância dos coeficientes da regressão auxiliar. Rejeita-se a hipótese caso  $nR^2$  (sendo R o coeficiente de determinação) seja maior que  $\chi^2(q)$ , onde q é o número de variáveis na regressão auxiliar menos um.

Os resultados do teste de White aplicado às séries em estudo estão resumidos nos quadros a seguir:

Teste de Heterocedasticidade: Retornos do IBOVESPA						
$\chi^2_{2,5\%} = 5,991$						
Período	A	B	C	D	E	F
	07/94 a 06/98	07/94 a 11/94	12/94 a 04/95	05/95 a 06/97	07/97 a 12/97	01/98 a 06/98
Nº Observações	987	103	99	536	128	121
$nR^2$	19,967	1,021	5,524	26,447	0,561	14,827

Teste de Heterocedasticidade: Retornos dos Títulos de Renda Fixa						
$\chi^2_{2,5\%} = 5,991$						
Período	A	B	C	D	E	F
	07/94 a 06/98	07/94 a 11/94	12/94 a 04/95	05/95 a 06/97	07/97 a 12/97	01/98 a 06/98
Nº Observações	987	103	99	536	128	121
$nR^2$	33,462	24,418	1,228	27,942	4,038	0,888

Podemos observar que a hipótese de homocedasticidade é rejeitada para o período como um todo (período A) nas duas séries. Para os subperíodos B a F, a hipótese é rejeitada em 2 dos 5 casos para os retornos do Ibovespa, e também em 2 dos 5 casos para os retornos dos títulos de renda fixa.

#### 4.2.2 – Testes de Normalidade dos Retornos

A normalidade dos retornos pode ser verificada através do teste de Jarque-Bera. Este teste leva em consideração o comportamento dos dados em relação à assimetria e à curtose de uma distribuição normal.

A assimetria e a curtose podem ser estimadas pelas fórmulas abaixo:

$$Assimetria = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / n}{S^3}$$

$$Curtose = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / n}{S^4}$$

onde,

$x_i$  = elementos da amostra

$n$  = número de elementos da amostra

$S$  = desvio-padrão da amostra

Sendo que, em uma distribuição normal, temos uma assimetria igual a zero e curtose igual a três. O teste de Jarque-Bera é computado do seguinte modo (NEWBOLD, 1995):

$$JB = n \left[ \frac{(Assimetria)^2}{6} + \frac{(Curtose - 3)^2}{24} \right]$$

Sob a hipótese de normalidade, e conforme o número de observações aumenta, esta estatística possui uma distribuição de qui-quadrado com dois graus de liberdade. Apresentamos abaixo os resultados do teste aplicado às duas séries em estudo:

Teste de Normalidade: Retornos do IBOVESPA						
Período	A 07/94 a 06/98	B 07/94 a 11/94	C 12/94 a 04/95	D 05/95 a 06/97	E 07/97 a 12/97	F 01/98 a 06/98
Nº Observações	987	103	99	536	128	121
Média	0,0995%	0,2435%	-0,2016%	0,2225%	-0,1633%	-0,0431%
Mediana	0,2032%	0,0000%	-0,1342%	0,2667%	0,3815%	0,1773%
Máximo	22,8126%	6,0278%	22,8126%	6,4268%	9,2616%	6,7824%
Mínimo	-16,2239%	-11,0895%	-10,3836%	-6,7494%	-16,2239%	-6,9472%
Desvio-Padrão	2,7797%	2,7965%	5,2217%	1,7059%	3,8392%	2,3968%
Assimetria	0,0585	-0,4902	0,8491	-0,1455	-0,7321	-0,3605
Curtose	10,5370	4,2215	5,7656	3,9958	5,3477	3,7530
Jarque-Bera	2.336,75	10,53	43,45	24,04	40,83	5,48
Estat. 5% signif.	5,99	4,29	4,29	4,82	4,34	4,34

Teste de Normalidade: Retornos dos Títulos de Renda Fixa						
Período	A 07/94 a 06/98	B 07/94 a 11/94	C 12/94 a 04/95	D 05/95 a 06/97	E 07/97 a 12/97	F 01/98 a 06/98
Nº Observações	987	103	99	536	128	121
Média	0,0058%	0,0336%	-0,0018%	0,0048%	-0,0095%	0,0091%
Mediana	0,0038%	0,0013%	0,0224%	0,0037%	0,0030%	0,0093%
Máximo	0,8160%	0,8160%	0,3841%	0,1662%	0,1568%	0,1070%
Mínimo	-1,0540%	-0,2524%	-1,0540%	-0,0861%	-0,5453%	-0,1957%
Desvio-Padrão	0,0759%	0,1448%	0,1515%	0,0204%	0,0807%	0,0325%
Assimetria	-1,2643	2,6964	-3,5347	1,4150	-3,9843	-1,6453
Curtose	66,2742	12,7412	25,3024	14,1178	24,4023	15,5811
Jarque-Bera	164.912,50	532,06	2.257,93	2.939,40	2.781,67	852,62
Estat. 5% signif.	5,99	4,29	4,29	4,82	4,34	4,34

Podemos observar que, para todos os períodos estudados, a hipótese de normalidade dos retornos é rejeitada.

#### 4.2.3 – Testes de Autocorrelação dos Retornos

Utilizamos o teste de Ljung-Box para verificar a existência de autocorrelação na série de retornos do Ibovespa e dos títulos de renda fixa. A estatística de teste é calculada do seguinte modo (JOHNSTON E DINARDO, 1997):

$$Q_{LB} = n(n+2) \sum_{j=1}^p r_j^2 / (n-j)$$

onde,

$r_j^2$  = autocorrelação de ordem j

n = número de observações

Caso todas as autocorrelações sejam zero, a série pode ser considerada como “white noise” ou “ruído branco”. Sob a hipótese de autocorrelação zero,  $Q_{LB}$  terá distribuição de qui-quadrado, com graus de liberdade igual ao número de autocorrelações p.

Apresentamos a seguir os resultados encontrados:

Teste de Autocorrelação: Retornos do IBOVESPA						
$\chi^2_{10;5\%} = 18,307$						
Período	A	B	C	D	E	F
	07/94 a 06/98	07/94 a 11/94	12/94 a 04/95	05/95 a 06/97	07/97 a 12/97	01/98 a 06/98
Nº Observações	987	103	99	536	128	121
$Q_{LB, j} = 10$	58,61	9,07	21,52	24,72	16,29	14,36

Teste de Autocorrelação: Retornos dos Títulos de Renda Fixa						
$\chi^2_{10;5\%} = 18,307$						
Período	A	B	C	D	E	F
	07/94 a 06/98	07/94 a 11/94	12/94 a 04/95	05/95 a 06/97	07/97 a 12/97	01/98 a 06/98
Nº Observações	987	103	99	536	128	121
$Q_{LB, j} = 10$	377,74	99,84	16,89	131,50	36,60	11,29

Notamos que a hipótese de autocorrelação zero é rejeitada para o período como um todo (período A) nas duas séries, indicando portanto a presença de autocorrelação entre os retornos. Para os subperíodos B a F, a hipótese é rejeitada em 2 dos 5 casos para os retornos do Ibovespa, e em 3 dos 5 casos para os retornos dos títulos de renda fixa.

#### 4.2.4 – Testes de Estacionariedade dos Retornos

A estacionariedade dos retornos será estudada através do teste de Dickey-Fuller Ampliado (ADF), utilizado para verificar a existência de uma raiz unitária nas séries em estudo. Os testes de Dickey-Fuller (DF) e ADF são descritos brevemente a seguir (JOHNSTON E DINARDO, 1997).

Dadas as seguintes equações (omitindo a possibilidade de inclusão de uma tendência linear, para simplificação da exposição):

$$y_t = \delta_0 + u_t \quad u_t = \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde  $\varepsilon_t$  é uma série ruído branco. Temos a hipótese de teste  $H_0: \alpha=1$ , sendo que um processo estacionário se caracteriza quando  $\alpha < 1$ . Combinando as duas equações e subtraindo  $y_{t-1}$  de ambos os lados, chegamos à expressão:

$$\Delta y_t = \delta_0(1 - \alpha) + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \gamma = \alpha - 1$$

A hipótese agora torna-se  $H_0: \gamma=0$ . Sob esta hipótese, o processo acima se reduziria a  $\Delta y_t = \varepsilon_t$ , ou seja, um “passeio aleatório” (*random walk*) não estacionário.

O teste de DF acima incorpora um processo AR(1), que pode ser inadequado caso a série possua uma autocorrelação de ordem maior. O teste ADF estende a equação descrita, possibilitando a inclusão de um processo AR(n). Por exemplo, no caso AR(2):

$$\Delta y_t = \delta_0(1 - \alpha_1 - \alpha_2) - \gamma y_{t-1} - \alpha_2 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \gamma = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$$

onde  $H_0: \gamma=0$ . Os resultados obtidos nas séries de retornos do Ibovespa e dos títulos de renda fixa estão resumidos nas tabelas a seguir:

Teste de Estacionariedade: Retornos do IBOVESPA						
Período	A 07/94 a 06/98	B 07/94 a 11/94	C 12/94 a 04/95	D 05/95 a 06/97	E 07/97 a 12/97	F 01/98 a 06/98
Nº Observações	987	103	99	536	128	121
Estatística ADF	(16,33)	(5,17)	(5,31)	(11,02)	(5,39)	(5,42)
Valor Crítico 5%	(1,93)	(1,94)	(1,94)	(1,94)	(1,94)	(1,94)

Teste de Estacionariedade: Retornos dos Títulos de Renda Fixa						
Período	A 07/94 a 06/98	B 07/94 a 11/94	C 12/94 a 04/95	D 05/95 a 06/97	E 07/97 a 12/97	F 01/98 a 06/98
Nº Observações	987	103	99	536	128	121
Estatística ADF	(10,57)	(4,19)	(3,05)	(6,93)	(2,95)	(4,19)
Valor Crítico 5%	(1,93)	(1,94)	(1,94)	(1,94)	(1,94)	(1,94)

Constatamos que os testes evidenciam a característica de estacionariedade, presente tanto no período como um todo quanto nos cinco subperíodos.

Abaixo encontra-se um resumo dos resultados obtidos nos testes preliminares:

Testes acerca dos retornos das séries								
Período	Heterocedasticidade		Normalidade		Autocorrelação		Estacionariedade	
	Ibovespa	RF	Ibovespa	RF	Ibovespa	RF	Ibovespa	RF
A	SIM	SIM	NÃO	NÃO	SIM	SIM	SIM	SIM
B	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	SIM	SIM
C	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	NÃO	SIM	SIM
D	SIM	SIM	NÃO	NÃO	SIM	SIM	SIM	SIM
E	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	SIM	SIM
F	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	SIM

A partir desses resultados, poderíamos esperar que metodologias de VAR que não assumem distribuições normais (simulação histórica e metodologia híbrida) fossem privilegiadas. Do mesmo modo, metodologias que atribuem maior importância às observações mais recentes (paramétrica com utilização da volatilidade EWMA ou GARCH e metodologia híbrida) apresentariam melhor desempenho devido às características de heterocedasticidade e autocorrelação. Por outro lado, a característica de estacionariedade pesaria contra a utilização do método EWMA para o cálculo da volatilidade.

#### **4.3 – Aplicação dos Modelos de Value-at-Risk**

As metodologias de *Value-at-Risk* escolhidas para teste foram a paramétrica (com a utilização de três técnicas de estimação da volatilidade), a simulação histórica e uma metodologia híbrida (mesclando partes das duas

anteriores). A simulação de Monte Carlo não foi considerada devido ao fato de, em se tratando da avaliação do risco de ativos lineares, seus resultados convergiriam para os obtidos com a metodologia paramétrica (BEST, 1998).

Com vistas a assegurar maior confiabilidade na análise dos resultados, os testes serão efetuados para o horizonte temporal ("holding period") de um dia. Isto pode ser explicado do seguinte modo: dada a amostra de 742 observações diárias (pois as primeiras 245 serão utilizadas exclusivamente para o cálculo de parâmetros necessários ao VAR do primeiro dia de julho/95), será esperado que as perdas efetivas superem as previstas pelo modelo de VAR, com horizonte temporal de um dia, cerca de 37 vezes a 95% de confiança e 7 vezes a 99%; se, no entanto, fosse adotado o horizonte temporal de dez dias, o número esperado de perdas maiores que as previstas seria de apenas 3 vezes a 95% de confiança e 1 vez a 99%, o que geraria insegurança na análise dos resultados.

Os níveis de confiança estudados serão de 95% e 99% de confiança, representando, em termos de uma distribuição normal, 1,64 e 2,32 desvios-padrão, respectivamente.

### 4.3.1 – Metodologia Paramétrica

A metodologia paramétrica, aplicação direta do instrumental desenvolvido por Harry Markowitz para seleção de carteiras, foi utilizada mediante a aplicação de três métodos de cálculo da volatilidade:

- Volatilidade Histórica com Média Móvel

A volatilidade histórica foi calculada com base em uma janela móvel de 25 dias úteis, conforme também elaborado por SANTOS (1997), sendo a primeira estimativa para o dia 03/07/95. As fórmulas utilizadas para o cálculo das variâncias e covariâncias das séries foram as seguintes:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{(M-1)} \sum_{i=1}^M r_{t-i}^2$$

$$COV_{12,t} = \frac{1}{(M-1)} \sum_{i=1}^M r_{1,t-i} r_{2,t-i}$$

onde M = 25.

- Média Móvel Ponderada Exponencialmente (EWMA)

A volatilidade estimada através do método EWMA utilizou as seguintes fórmulas para o cálculo das variâncias e covariâncias:

$$\sigma_{1,t+1/t}^2 = \lambda \sigma_{1,t/t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{1,t}^2$$

$$COV_{12,t+1/t} = \lambda COV_{12,t/t-1} + (1 - \lambda) r_{1,t} r_{2,t}$$

No entanto, para garantir que a soma dos pesos atribuídos aos retornos seja de 100% utilizando a janela histórica disponível (245 observações), dividimos os pesos atribuídos aos retornos por  $(1 - \lambda^T)$ , onde  $T=245$  BOUDOUKH et al. (1998). Isto torna-se necessário pois, quanto maior o valor de  $\lambda$ , maior seria a quantidade de observações passadas necessárias para que a soma dos pesos alcançasse 100%.

A definição do fator de decaimento, lambda ( $\lambda$ ), torna-se de especial importância para os resultados a serem obtidos com o modelo. Sendo assim, efetuamos análises de sensibilidade do modelo frente a um intervalo de valores de  $\lambda$  (0,80 a 0,99, com variações decimais), cujos resultados encontram-se no item 4.4 (Resultados Empíricos).

- GARCH (1,1)

Para o cálculo da volatilidade através do modelo GARCH (1,1), os parâmetros  $\omega$ ,  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram estimados com base nas observações passadas de um ano<sup>4</sup>.

Devido à não estabilidade dos parâmetros  $\omega$ ,  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , detectada acentuadamente em relação à série do Ibovespa durante estudo inicial dos dados, procedemos à reestimação mensal dos parâmetros em questão.

As fórmulas utilizadas no cálculo das variâncias e covariâncias foram as seguintes:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$COV_{12,t} = \omega + \alpha \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} + \beta COV_{t-1}$$

onde  $\omega > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , e  $\alpha + \beta < 1$

e  $\varepsilon$  = retorno do ativo

---

<sup>4</sup> Foi utilizado o software Eviews para os cálculos em questão.

A partir das séries de variâncias e covariâncias obtidas pelos três métodos acima, os procedimentos seguintes foram:

- Cálculo do desvio-padrão de cada uma das cinco carteiras analisadas, pela fórmula:

$$\sigma_p = \left[ a^2 \sigma_1^2 + (1-a)^2 \sigma_2^2 + 2a(1-a) COV_{12} \right]^{1/2}$$

onde  $a$  = peso atribuído ao ativo 1

- Aplicação do desvio-padrão de cada carteira no dia  $t$  ao seu respectivo valor de mercado e nível de confiança, para a previsão do VAR do dia  $t+1$ , de acordo com a fórmula:

$$Var = \left( \begin{array}{c} \text{Valor Monetário} \\ \text{da Posição} \end{array} \right) \times \sigma \times \alpha$$

#### 4.3.2 – Simulação Histórica

Esta metodologia, descrita no capítulo 2, foi aplicada de acordo com os seguintes procedimentos:

- Os retornos do Ibovespa e dos títulos de renda fixa correspondentes ao primeiro ano do estudo (245 observações) foram utilizados como “janela histórica”, ou seja, como base para a distribuição de retornos, para o cálculo do VAR de 03.07.95;
- A partir dos retornos calculados das cinco carteiras, foram encontradas as taxas correspondentes aos graus de confiança de 95% e 99%, considerando que metade do peso de determinado retorno encontra-se à direita e a outra metade à esquerda da observação. Os retornos correspondentes aos graus de confiança estipulados foram então encontrados por interpolação linear.
- Estes retornos foram aplicados ao valor de mercado de cada ativo (em cada uma das cinco carteiras estudadas) em 30.06.94, para a previsão de perda do dia 03.07.95;
- Este procedimento foi repetido 742 vezes, deslocando-se a “janela histórica” diariamente, até a obtenção do VAR de 30.06.98.

#### **4.3.3 – Metodologia Híbrida**

A metodologia híbrida, proposta por BOUDOUKH et al. (1998), mescla, conforme descrito no capítulo 3, a metodologia paramétrica (com volatilidade

calculada através do método EWMA) e a simulação histórica, aproveitando aspectos de cada uma. Assim, a suposição de normalidade condicional dos retornos presente na metodologia paramétrica é descartada em favor da distribuição histórica, enquanto pesos exponenciais são atribuídos aos retornos, favorecendo as informações mais recentes e superando o problema da dependência do tamanho da “janela histórica” da simulação histórica.

Os procedimentos utilizados na aplicação desta metodologia foram os seguintes:

- Os retornos do Ibovespa e dos títulos de renda fixa correspondentes ao primeiro ano do estudo (245 observações) foram utilizados como “janela histórica”, para o cálculo do VAR de 03.07.95;
- Foram atribuídos aos retornos das cinco carteiras em estudo, a começar pelo mais recente, pesos exponenciais decrescentes, de acordo com a fórmula a seguir (onde o denominador tem como função tornar a soma dos pesos igual a 1):

$$h_t = \frac{(1 - \lambda) \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1}}{(1 - \lambda^T)}$$

onde  $\lambda$  = fator de decaimento e  $T = 245$

Na escolha do fator de decaimento, foi considerada a análise de sensibilidade efetuada para a metodologia paramétrica com uso da volatilidade EWMA, cuja análise pode ser encontrada no item 4.4 (Resultados Empíricos);

- Os retornos foram classificados em ordem crescente, e, através dos pesos acumulados, encontramos os retornos das duas séries correspondentes aos graus de confiança de 95% e 99%, considerando, assim como no modelo de Simulação Histórica, que metade do peso de determinado retorno encontra-se à direita e a outra metade à esquerda da observação, conforme sugerido por BOUDOUKH et al. (1998). Os retornos correspondentes aos graus de confiança estipulados são em seguida encontrados por interpolação linear;
- Estes retornos foram aplicados ao valor de mercado de cada ativo (em cada uma das cinco carteiras estudadas) em 30.06.94, para a previsão de perda do dia 03.07.95;
- Este procedimento foi repetido 742 vezes, deslocando-se a “janela histórica” diariamente, até a obtenção do VAR de 30.06.98.

#### **4.4 – Metodologia de Avaliação dos Resultados**

O número previsto de perdas acima dos valores esperados pelo modelo tem que se verificar na prática. Podemos visualizar melhor esta noção por meio de um exemplo: um VAR com grau de confiança de 95% errará, em média, 5 vezes em cada 100. Se, na prática, ele errar mais do que isso, o modelo não estará controlando o risco adequadamente. Se, por outro lado, o modelo errar menos do que essa proporção, ele estará muito conservador (prevendo uma perda tão alta de modo que o modelo nunca erre), e estará induzindo a Instituição a alocar mais capital do que o necessário, sendo assim igualmente inútil.

Para testar a hipótese de que o número de perdas acima do esperado corresponde ao grau de confiança empregado, utilizaremos um teste estatístico desenvolvido por KUPIEC (1995), que criou intervalos de não-rejeição dessa hipótese.

Considerando as seguintes variáveis:

$x$  = número de vezes em que a perda é excedida

$n$  = tamanho da amostra

$p$  = probabilidade de falha (igual a  $[1 - \text{nível de confiança}]$ ),

a probabilidade de se observar  $x$  erros em uma amostra de tamanho  $n$  é:

$$P(x; n) = \text{binomial}[n, x] (1 - p)^{n-x} p^x$$

O teste proposto por Kupiec, chamado de PF (*Proportion of Failures*) encontra-se abaixo:

$$PF_{\text{test statistic}} = -2 \text{LN} \left[ (1 - p^*)^{n-x} (p^*)^x \right] + 2 \text{LN} \left[ \left( 1 - \left[ \frac{x}{n} \right] \right)^{n-x} \left( \frac{x}{n} \right)^x \right]$$

Onde  $H_0: p = p^*$ . O teste PF possui distribuição de qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Deste modo, quando a estatística de teste PF for maior que o valor crítico, a hipótese nula é rejeitada.

A partir deste teste, o autor desenvolveu, para a variável  $\hat{x}$ , intervalos de não rejeição da hipótese  $H_0$ :

<b>Regiões de Não-Rejeição para o teste PF(0,05**)</b>			
Probabilidade $p^*$	Região de não-rejeição para $x$ , $n=255$ dias	Região de não-rejeição para $x$ , $n=510$ dias	Região de não-rejeição para $x$ , $n=1.000$ dias
0,010	$x < 7$	$1 < x < 11$	$4 < x < 17$
0,025	$2 < x < 12$	$6 < x < 21$	$15 < x < 36$
0,050	$6 < x < 21$	$16 < x < 36$	$37 < x < 65$
0,075	$11 < x < 28$	$27 < x < 51$	$59 < x < 92$
0,100	$16 < x < 36$	$38 < x < 65$	$81 < x < 120$

\*\* Nível de confiança para se rejeitar o modelo; não deve ser confundido com o nível de confiança escolhido para o VAR.

#### **4.5 – Resultados Empíricos**

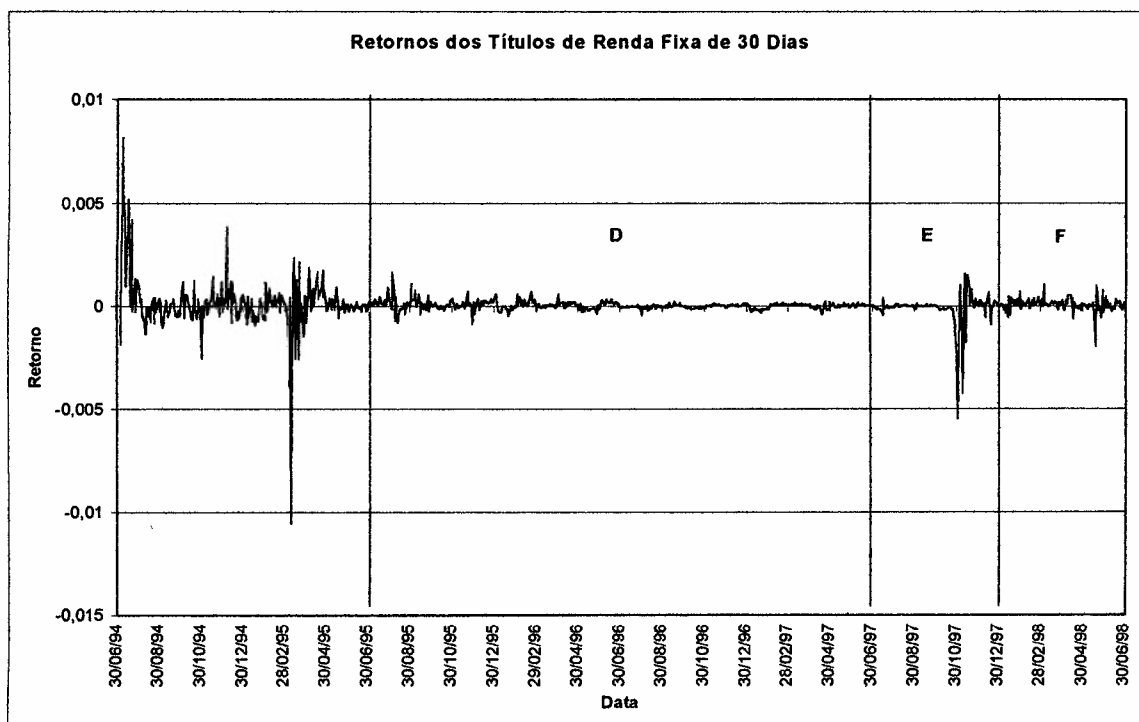
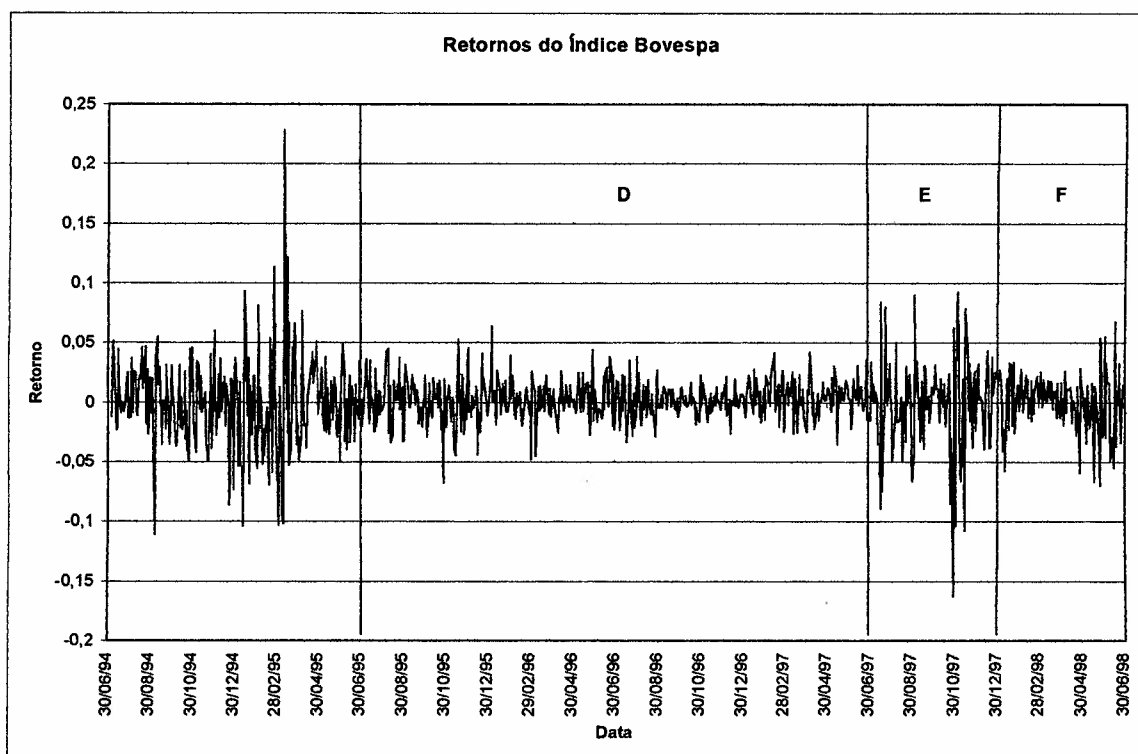
Apresentaremos nesta seção os resultados obtidos nos diversos testes propostos, ressaltando que eles são evidências obtidas no período amostral estudado, e para as variáveis consideradas. Os gráficos demonstrativos dos resultados dos modelos podem ser encontrados no **Anexo II**.

Para a análise dos resultados, consideramos os subperíodos definidos na seção 4.2. Assim, subtraindo o primeiro ano da amostra (utilizados para determinação de parâmetros de volatilidade), os subperíodos restantes para análise dos modelos de VAR são:

Per.	Início	Término	Nº Observações	Intervalos PF (0,05) test	
				95%	99%
<b>A</b>	Julho/95	Junho/98	742	$26 < x < 50$	$2 < x < 14$
<b>D</b>	Julho/95	Junho/97	493	$15 < x < 35$	$1 < x < 10$
<b>E</b>	Julho/97	Dez/97	128	$2 < x < 12$	$x < 5$
<b>F</b>	Jan/98	Junho/98	121	$1 < x < 12$	$x < 4$

As duas últimas colunas mostram os intervalos do teste PF (0,05), calculados de acordo com o modelo de KUPIEC (1995) definido na seção anterior.

A fim de auxiliar a análise dos resultados, reproduzimos abaixo os gráficos de retornos do Índice Bovespa e dos títulos de renda fixa de 30 dias, apresentados na seção 4.2.1, evidenciando os subperíodos considerados:



Primeiramente, apresentamos abaixo os resultados obtidos com a metodologia paramétrica. As áreas sombreadas representam os testes cujos números de perdas estão fora dos intervalos de não-rejeição:

Número de Perdas Maiores que as Previstas									
Metodologia Paramétrica	Período	Nível de Confiança	Carteiras					No. Esperado de Perdas	Intervalo Kupiec
			100% IBOV 0% RF 1	75% IBOV 25% RF 2	50% IBOV 50% RF 3	25% IBOV 75% RF 4	0% IBOV 100% RF 5		
Com uso da volatilidade Histórica	A	95%	42	53	68	85	43	37	26 < x < 50
		99%	18	23	33	53	20	7	2 < x < 14
	D	95%	24	29	33	43	21	37	15 < x < 35
		99%	8	10	15	23	6	7	1 < x < 10
	E	95%	10	12	21	25	19	37	2 < x < 12
		99%	7	8	10	18	12	7	x < 5
	F	95%	8	12	14	17	3	37	1 < x < 12
		99%	3	5	8	12	2	7	x < 4
Com uso da volatilidade EWMA	A	95%	29	38	45	66	10	37	26 < x < 50
		99%	9	18	24	38	8	7	2 < x < 14
	D	95%	7	12	15	23	11	37	15 < x < 35
		99%	0	2	3	11	0	7	1 < x < 10
	E	95%	17	19	21	28	8	37	2 < x < 12
		99%	7	13	16	20	7	7	x < 5
	F	95%	5	7	9	15	1	37	1 < x < 12
		99%	2	3	5	7	1	7	x < 4
Com uso da volatilidade GARCH	A	95%	31	40	55	74	60	37	26 < x < 50
		99%	11	18	29	42	34	7	2 < x < 14
	D	95%	13	16	22	31	40	37	15 < x < 35
		99%	4	5	8	14	19	7	1 < x < 10
	E	95%	10	14	21	28	19	37	2 < x < 12
		99%	4	9	12	18	14	7	x < 5
	F	95%	8	10	12	15	1	37	1 < x < 12
		99%	3	4	9	10	1	7	x < 4

Por exemplo, a primeira linha da tabela mostra que apenas duas carteiras do modelo de VAR paramétrico (com utilização da volatilidade histórica), com nível de confiança de 95%, não tiveram a hipótese nula rejeitada. Considerando 99% de confiança no mesmo modelo, todas as carteiras obtiveram resultados fora do intervalo de Kupiec.

### Metodologia Paramétrica com uso da Volatilidade Histórica

Podemos observar que esta metodologia obteve melhor desempenho no período “D”, nitidamente mais “tranquilo” que os demais: 4 carteiras estão dentro do período de não-rejeição a 95% de confiança, e 2 carteiras a 99% de confiança.

O pior desempenho do modelo se deu no período “E”, que apresentou grande turbulência. No período global “A”, a metodologia apresentou apenas duas não-rejeições, a um VAR de 95% de confiança.

### Metodologia Paramétrica com uso da Volatilidade EWMA

Devido à importância do fator de decaimento nos resultados deste modelo, procedemos inicialmente à uma análise de sensibilidade, englobando o período global de estudo. O desempenho do modelo foi comparado utilizando-se o intervalo de 0,80 a 0,99 para  $\lambda$ , com variações decimais. Devido à necessidade de janelas históricas maiores para valores de  $\lambda$  mais altos, foi utilizada a correção descrita no item 4.3.1, de modo a se obter o somatório de 100% na ponderação dos retornos.

A tabela demonstrativa da análise de sensibilidade é apresentada no **Anexo I**. Observamos nessa tabela que, para lambdas entre 0,80 e 0,91, apenas as carteiras de número 1 e 5, com grau de confiança de 95%, encontram-se no intervalo de não-rejeição. Para lambdas entre 0,92 e 0,97, os resultados variam entre 2 ou 3 carteiras no intervalo de não-rejeição. O desempenho do modelo somente melhora para  $\lambda=0,98$  e  $\lambda=0,99$ , com respectivamente 4 e 5 carteiras contidas nos intervalos de não-rejeição.

Deste modo, optamos pela utilização de  $\lambda=0,99$  para a análise do modelo, em detrimento de  $\lambda=0,94$ , utilizado pelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup>. Assim, a última observação irá receber peso de 1%, quando pelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup> seu peso seria de 6%, diminuindo relativamente a importância das observações mais recentes, e ao mesmo tempo aumentando a janela histórica considerada no cálculo.

Retornando ao quadro comparativo da metodologia paramétrica, observamos que o melhor desempenho do modelo se deu no período “F”, com seis carteiras contidas nos intervalos de não-rejeição (três a 95% e três a 99% de confiança), e o pior no período “E”, com apenas uma carteira não-rejeitada pelo teste.

O período total, “A”, obteve 5 carteiras contidas nas regiões de não-rejeição, sendo 3 ao nível de 95% de confiança, e 2 a 99% de confiança,

mostrando-se, portanto, superior à metodologia paramétrica com utilização da volatilidade histórica.

#### Metodologia Paramétrica com uso da Volatilidade GARCH(1,1)

O desempenho do modelo com utilização da volatilidade GARCH(1,1) mostrou-se um pouco melhor do que com a volatilidade histórica, mas inferior ao método EWMA, com um total, no período “A”, de 3 carteiras nas regiões de não-rejeição.

O melhor desempenho do modelo se deu no período “D”, com 6 carteiras nas regiões de não-rejeição, e o pior no período “E”, com 2 carteiras nos intervalos de não-rejeição.

#### Metodologia Simulação Histórica

A seguir, apresentamos os resultados da metodologia Simulação Histórica:

Número de Perdas Maiores que as Previstas									
Metodologia	Período	Nível de Confiança	Carteiras					No. Esperado de Perdas	Intervalo Kupiec
			100% IBOV 0% RF 1	75% IBOV 25% RF 2	50% IBOV 50% RF 3	25% IBOV 75% RF 4	0% IBOV 100% RF 5		
Simulação Histórica	A	95%	38	42	58	77	33	37	$26 < x < 50$
		99%	11	16	22	31	9	7	$2 < x < 14$
	D	95%	14	16	21	29	13	37	$15 < x < 35$
		99%	1	4	7	10	2	7	$1 < x < 10$
	E	95%	20	21	30	36	15	37	$2 < x < 12$
		99%	10	12	15	19	7	7	$x < 5$
	F	95%	4	5	7	12	5	37	$1 < x < 12$
		99%	0	0	0	2	0	7	$x < 4$

A simulação histórica apresentou resultados similares à metodologia paramétrica com utilização da volatilidade EWMA no período global “A”, com 3 carteiras posicionadas fora dos intervalos de não-rejeição a um VAR com 95% de confiança, e 2 a 99% de confiança.

O pior desempenho do modelo se deu no subperíodo “E”. Tal fato pode ser explicado como se segue: o período “E”, por ter sido precedido por um ambiente menos volátil, apresentou valores em risco relativamente baixos, devido às premissas da metodologia simulação histórica (que irá considerar os piores retornos ocorridos dentro da janela histórica), o que levou o modelo a apresentar um número de perdas maiores que as previstas maior que o definido pelo intervalo de Kupiec.

No entanto, nos subperíodos “D” e “F”, o modelo apresentou resultados superiores à metodologia paramétrica com uso da volatilidade EWMA, com 6 e 9 carteiras posicionadas nos intervalos de não-rejeição, respectivamente.

### Metodologia Híbrida

Em seguida, encontram-se os resultados da metodologia Híbrida. Foi escolhido o mesmo fator de decaimento selecionado para a metodologia paramétrica com uso da volatilidade EWMA. No entanto, apenas para efeito comparativo, apresentamos também os resultados do modelo para  $\lambda=0,94$ , valor utilizado pelo *RiskMetrics*<sup>TM</sup>:

Número de Perdas Maiores que as Previstas									
Metodologia	Período	Nível de Confiança	Carteiras					No. Esperado de Perdas	Intervalo Kupiec
			100% IBOV 0% RF 1	75% IBOV 25% RF 2	50% IBOV 50% RF 3	25% IBOV 75% RF 4	0% IBOV 100% RF 5		
Híbrida $\lambda=0,94$	A	95%	50	61	73	92	40	37	$26 < x < 50$
		99%	20	27	41	56	24	7	$2 < x < 14$
	D	95%	32	39	44	50	23	37	$15 < x < 35$
		99%	12	17	27	34	13	7	$1 < x < 10$
	E	95%	10	10	13	21	13	37	$2 < x < 12$
		99%	5	6	7	13	8	7	$x < 5$
	F	95%	8	12	16	21	4	37	$1 < x < 12$
		99%	3	4	7	9	3	7	$x < 4$
Híbrida $\lambda=0,99$	A	95%	36	48	59	71	31	37	$26 < x < 50$
		99%	6	12	20	34	9	7	$2 < x < 14$
	D	95%	18	23	29	34	17	37	$15 < x < 35$
		99%	1	6	11	17	4	7	$1 < x < 10$
	E	95%	15	19	21	25	11	37	$2 < x < 12$
		99%	5	6	7	12	5	7	$x < 5$
	F	95%	3	6	9	12	3	37	$1 < x < 12$
		99%	0	0	2	5	0	7	$x < 4$

Como esperado, o desempenho da metodologia híbrida com a utilização de  $\lambda=0,94$  foi muito inferior ao obtido com  $\lambda=0,99$ . Este, por sua vez, obteve resultados marginalmente superiores à simulação histórica no período global “A”, com 6 carteiras contidas nos intervalos de não-rejeição.

Considerando os períodos “D” e “E”, a metodologia híbrida também obteve desempenho marginalmente superior à simulação histórica, com uma carteira adicional contida nos intervalos de não-rejeição em cada um dos períodos acima. Apenas no período “F” o desempenho da metodologia híbrida foi marginalmente inferior à simulação histórica, com 8 carteiras posicionadas nos intervalos de não-rejeição.

#### Avaliação do Desempenho dos Modelos de VAR por carteira

O objetivo deste tópico é observar o desempenho das metodologias de VAR em relação ao nível de volatilidade, a fim de verificar se ativos mais/menos voláteis poderiam responder mais/menos a mudanças de metodologias. Os resultados estão no quadro abaixo:

Número de Perdas Maiores que as Previstas							
Metodologia	Período	Nível de Confiança	Carteiras				
			100% IBOV 0% RF 1	75% IBOV 25% RF 2	50% IBOV 50% RF 3	25% IBOV 75% RF 4	0% IBOV 100% RF 5
Paramétrica Volatil. Histórica	A	95%	42	53	68	85	43
		99%	18	23	33	53	20
Paramétrica Volatil. EWMA	A	95%	29	38	45	66	10
		99%	9	18	24	38	8
Paramétrica Volatil. GARCH	A	95%	31	40	55	74	60
		99%	11	18	29	42	34
Simulação Histórica	A	95%	38	42	58	77	33
		99%	11	16	22	31	9
Híbrida lâmbida=0,99	A	95%	36	48	59	71	31
		99%	6	12	20	34	9

Podemos observar que não há evidências da hipótese formulada acima no período global do estudo. Por exemplo, a carteira formada por 100% do Índice Bovespa, e portanto a mais volátil, possui desempenhos similares com as diversas metodologias. A carteira composta por 100% de títulos de renda fixa, que deveria de acordo com a hipótese acima responder menos a mudanças de metodologia, não se coaduna com esse comportamento. Assim, podemos dizer que, sob as restrições do presente estudo, há evidências de que a variação no desempenho se dá pela variação de metodologias e não pelo nível de volatilidade das carteiras.

#### **4.6 – Conclusão Geral**

O presente estudo analisou o desempenho de cinco metodologias de cálculo do *Value-at-Risk*, a saber a Metodologia Paramétrica com utilização da Volatilidade Histórica, Metodologia Paramétrica com utilização da volatilidade calculada através de Média Móvel Ponderada Exponencialmente (EWMA), Metodologia Paramétrica com utilização da volatilidade calculada pelo modelo GARCH(1,1), Simulação Histórica e uma Metodologia Híbrida proposta por BOUDOUKH et al. (1998). Os modelos acima foram aplicados a séries de retornos do Ibovespa e de títulos de renda fixa de 30 dias, compondo cinco carteiras teóricas com porcentagens diferentes dos dois ativos.

Os resultados obtidos devem ser considerados dentro das restrições do trabalho. Assim, eles são válidos para as séries em estudo (retornos do Ibovespa e de Títulos de Renda Fixa de 30 dias), no período sob análise (julho de 1994 a junho de 1998), para as carteiras e metodologias consideradas. Maiores generalizações dos resultados obtidos seriam possíveis através de novos estudos, com mudança e/ou extensão do período analisado e dos ativos considerados.

As evidências empíricas encontradas no período em estudo apontam para a superioridade da Metodologia Híbrida com fator de decaimento de 0,99 e da Simulação Histórica, sendo esta apenas marginalmente inferior. Estes

resultados se coadunam perfeitamente com as características principais das séries estudadas, ou seja, com indícios de não-normalidade, autocorrelação e heterocedasticidade dos retornos.

Dentre as Metodologias Paramétricas restantes, a utilização da volatilidade EWMA com fator de decaimento de 0,99 obteve melhores resultados que o modelo GARCH(1,1) e que a volatilidade histórica, sendo esta última a que apresentou desempenho inferior.

No início do trabalho, foi levantada a hipótese de uma relação entre o desempenho de diferentes metodologias de VAR e o nível de volatilidade das carteiras, ou seja, ativos mais/menos voláteis poderiam responder mais/menos a mudanças de metodologia.

Esta hipótese não encontrou suporte nas evidências empíricas. Como exemplo, a carteira mais volátil estudada, formada por 100% do Índice Bovespa, apresentou desempenhos similares em todas as metodologias, e a carteira menos volátil, formada por 100% de títulos de renda fixa, apresentou variações de desempenho nas diversas metodologias, ao contrário do esperado. Assim, as evidências deste estudo apontam que a variação no desempenho ocorre em função da metodologia utilizada e não do nível de volatilidade das carteiras.

Possíveis continuações deste trabalho poderiam ser feitas através da inclusão de novos ativos às carteiras, como títulos de renda fixa de prazos mais longos e ativos cambiais. Um passo seguinte seria a inclusão de ativos mais complexos como futuros e opções. Neste caso, poderia ser considerada também uma metodologia adicional, como a Simulação de Monte Carlo.

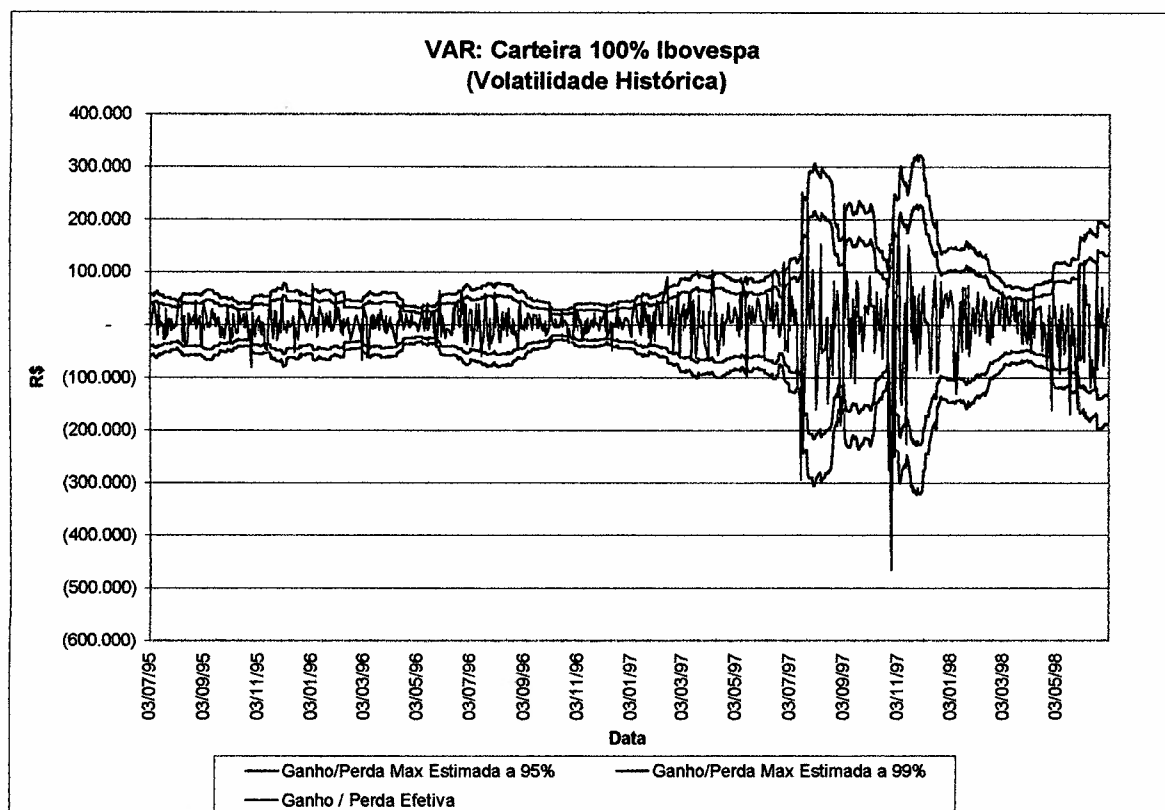
# **ANEXO I – COMPARAÇÃO DE FATORES DE DECAIMENTO NA EFICIÊNCIA DO MÉTODO EWMA**

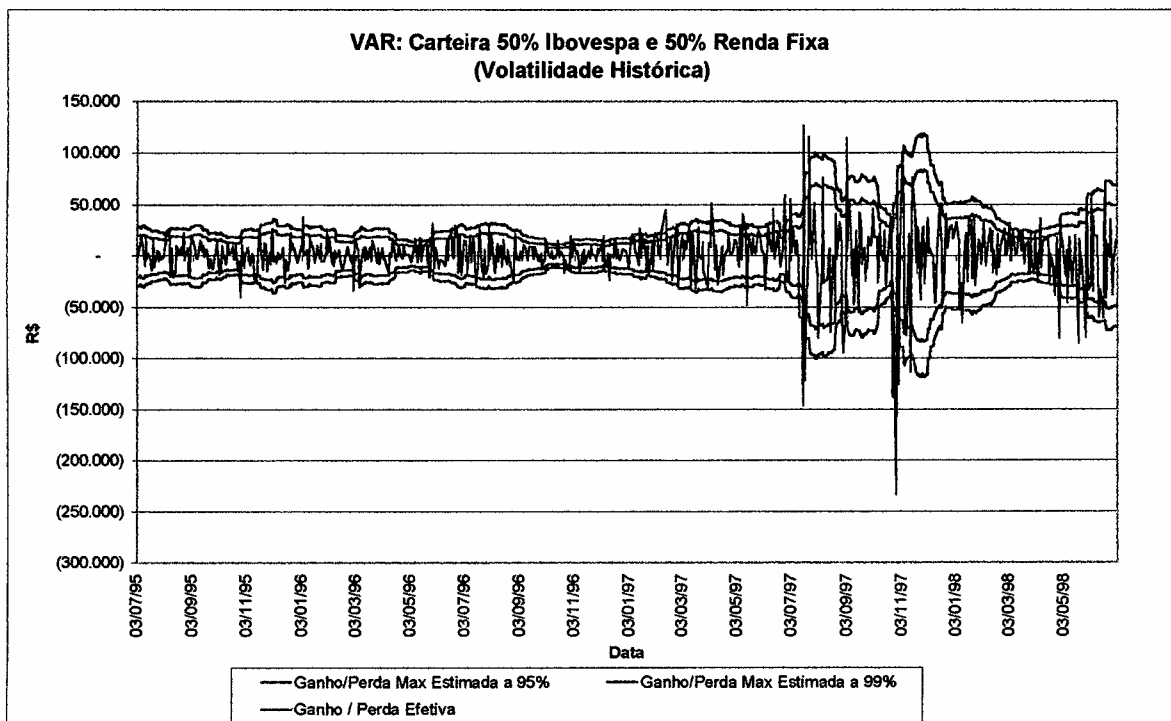
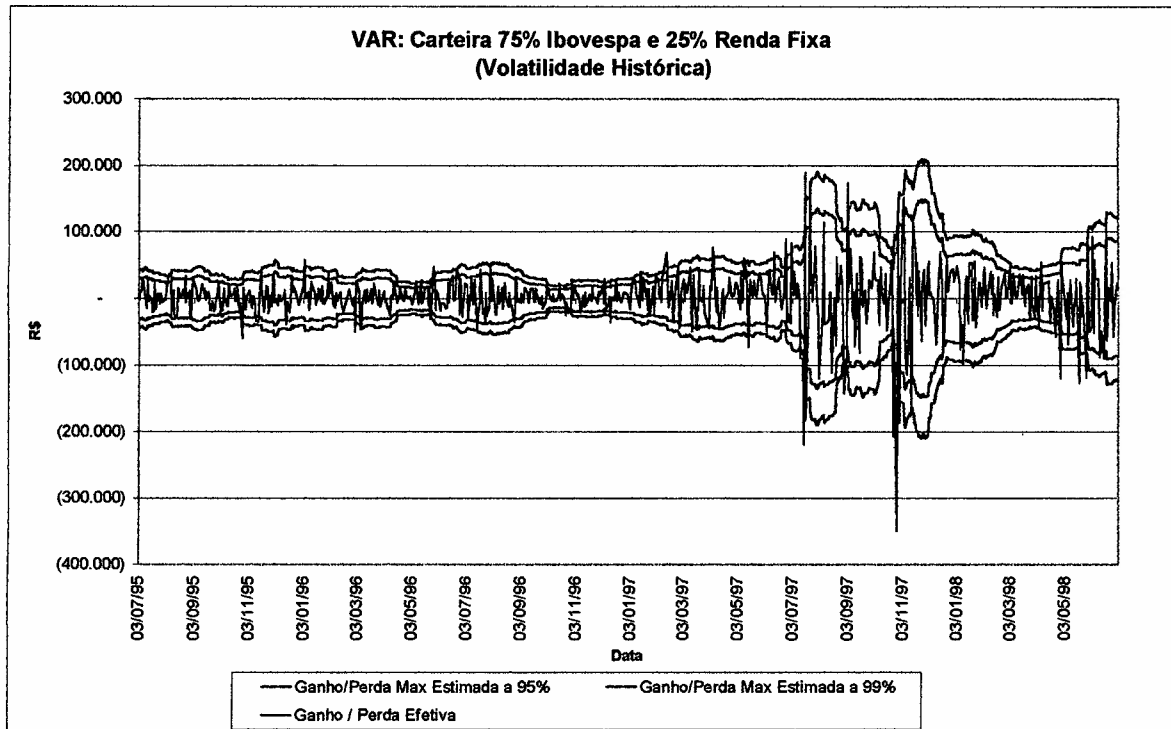
Metodologia EWMA: Resultados com Alteração do Parâmetro Lambda								
Lambda	Nível de Confiança	Carteiras					No. Esperado de Perdas	Intervalo Kupiec
		100% IBOV RF	0% RF	75% IBOV 25% RF	50% IBOV 50% RF	25% IBOV 75% RF	0% IBOV 100% RF	
		1	2	3	4	5		
0,80	95%	45	55	69	82	34	37	26 < x < 50
	99%	19	23	38	52	18	7	2 < x < 14
0,81	95%	43	56	69	82	33	37	26 < x < 50
	99%	20	23	38	52	18	7	2 < x < 14
0,82	95%	44	56	69	81	32	37	26 < x < 50
	99%	19	22	38	51	18	7	2 < x < 14
0,83	95%	44	54	69	83	32	37	26 < x < 50
	99%	17	21	35	53	18	7	2 < x < 14
0,84	95%	42	54	70	85	32	37	26 < x < 50
	99%	17	21	31	52	16	7	2 < x < 14
0,85	95%	42	54	67	85	32	37	26 < x < 50
	99%	16	21	31	51	16	7	2 < x < 14
0,86	95%	42	53	66	85	32	37	26 < x < 50
	99%	16	21	32	50	16	7	2 < x < 14
0,87	95%	41	51	66	85	32	37	26 < x < 50
	99%	15	20	32	52	17	7	2 < x < 14
0,88	95%	42	50	66	83	32	37	26 < x < 50
	99%	16	20	31	50	17	7	2 < x < 14
0,89	95%	43	50	64	83	30	37	26 < x < 50
	99%	15	20	32	49	17	7	2 < x < 14
0,90	95%	42	50	62	82	29	37	26 < x < 50
	99%	15	20	33	47	17	7	2 < x < 14
0,91	95%	40	50	62	84	27	37	26 < x < 50
	99%	15	19	32	46	15	7	2 < x < 14
0,92	95%	40	49	60	85	27	37	26 < x < 50
	99%	14	20	31	46	15	7	2 < x < 14
0,93	95%	40	49	62	85	26	37	26 < x < 50
	99%	13	20	31	46	15	7	2 < x < 14
0,94	95%	39	47	61	83	25	37	26 < x < 50
	99%	13	21	32	47	14	7	2 < x < 14
0,95	95%	35	46	59	80	27	37	26 < x < 50
	99%	14	20	30	47	15	7	2 < x < 14
0,96	95%	35	47	58	81	25	37	26 < x < 50
	99%	15	19	29	46	15	7	2 < x < 14
0,97	95%	35	48	56	78	25	37	26 < x < 50
	99%	15	19	32	46	15	7	2 < x < 14
0,98	95%	37	46	54	73	21	37	26 < x < 50
	99%	13	17	30	42	13	7	2 < x < 14
0,99	95%	29	38	45	66	10	37	26 < x < 50
	99%	9	18	24	38	8	7	2 < x < 14

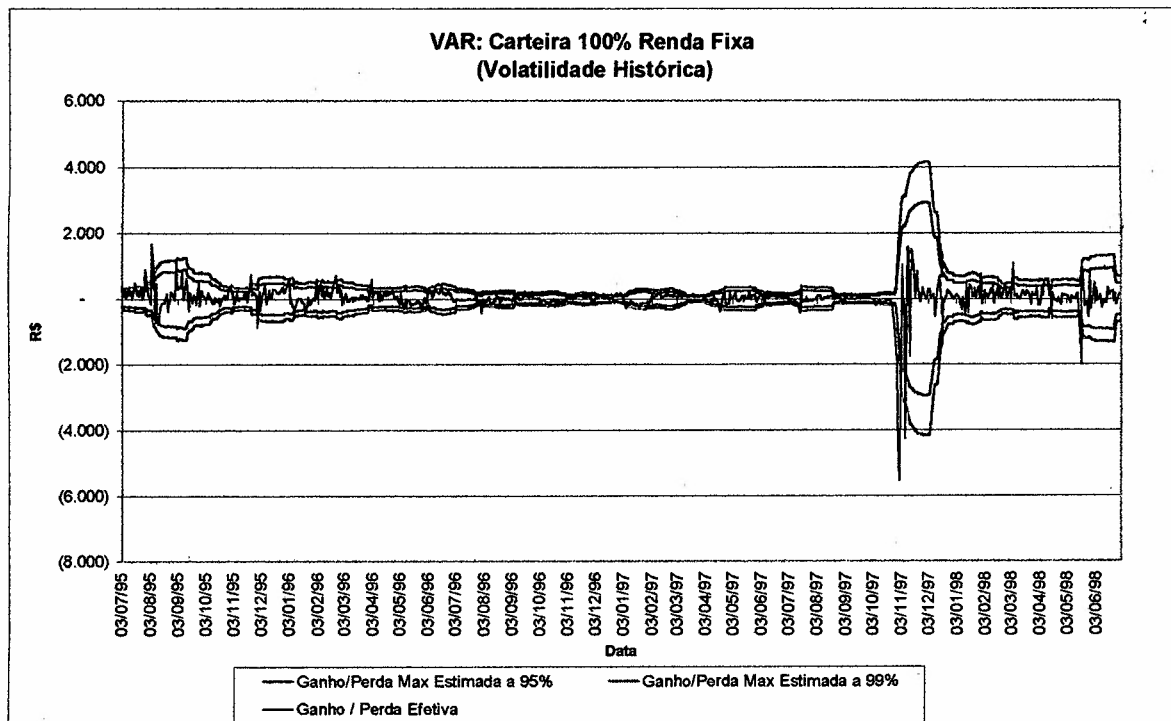
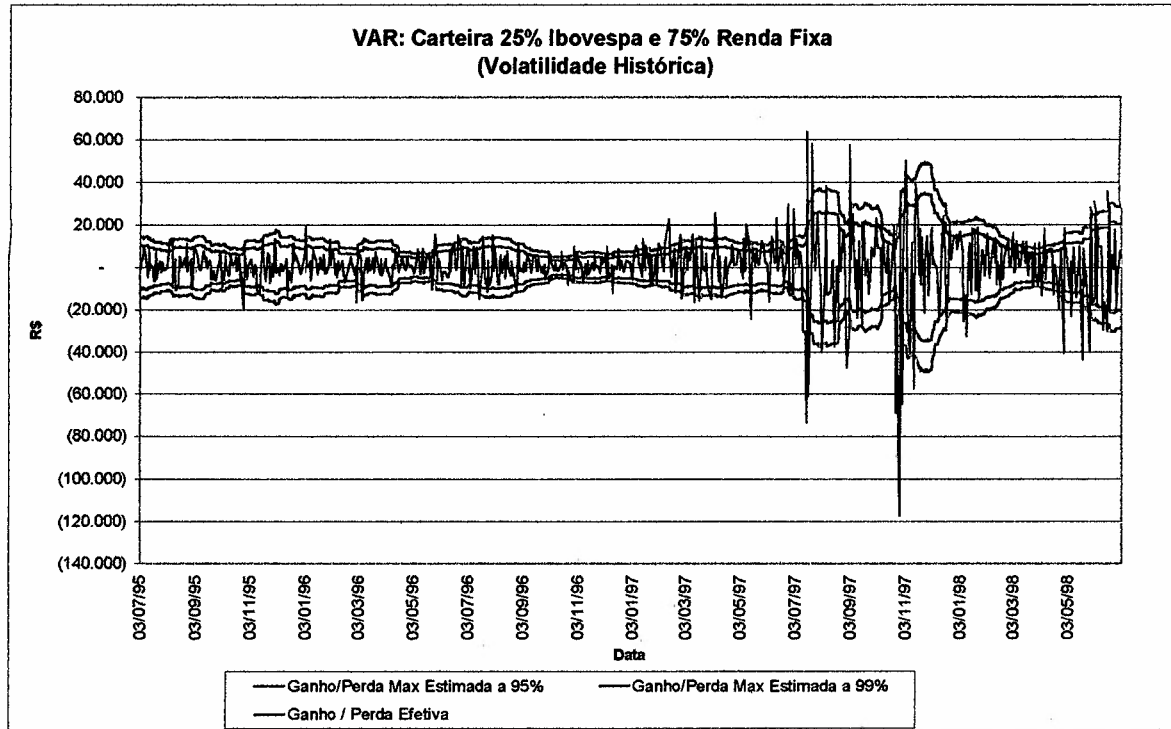
## **ANEXO II – RESULTADOS OBTIDOS NOS TESTES EMPÍRICOS**

### **METODOLOGIA PARAMÉTRICA**

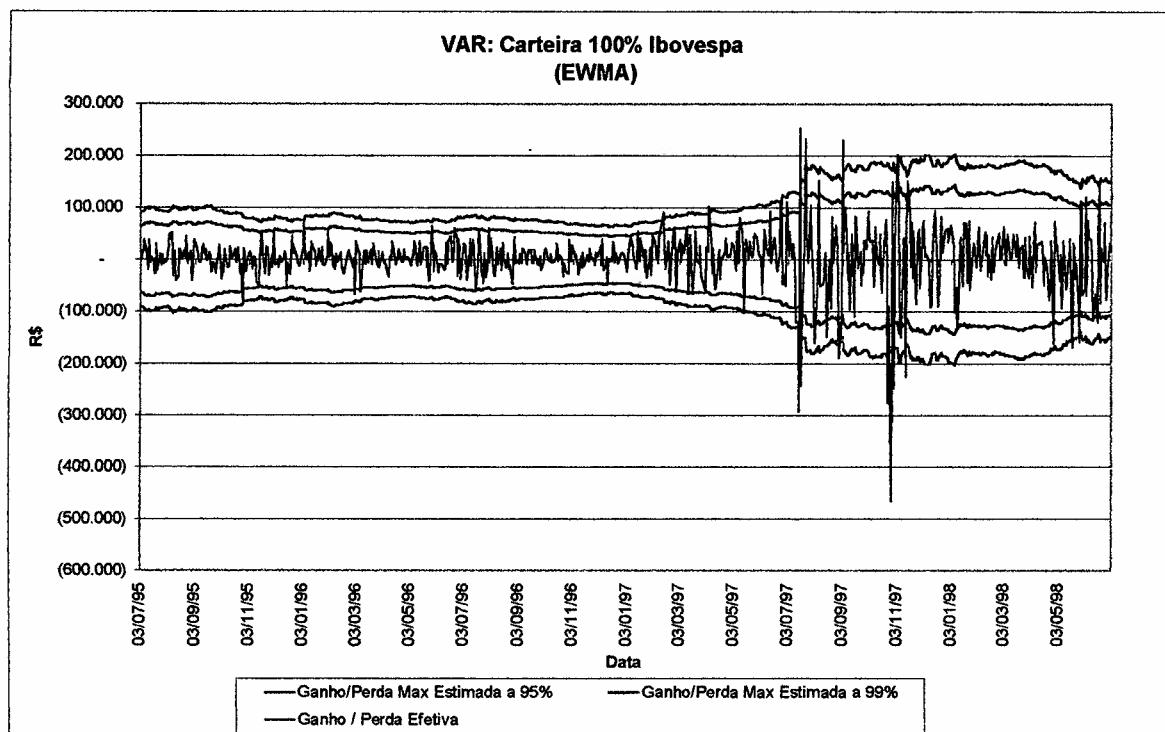
- **COM UTILIZAÇÃO DA VOLATILIDADE HISTÓRICA**

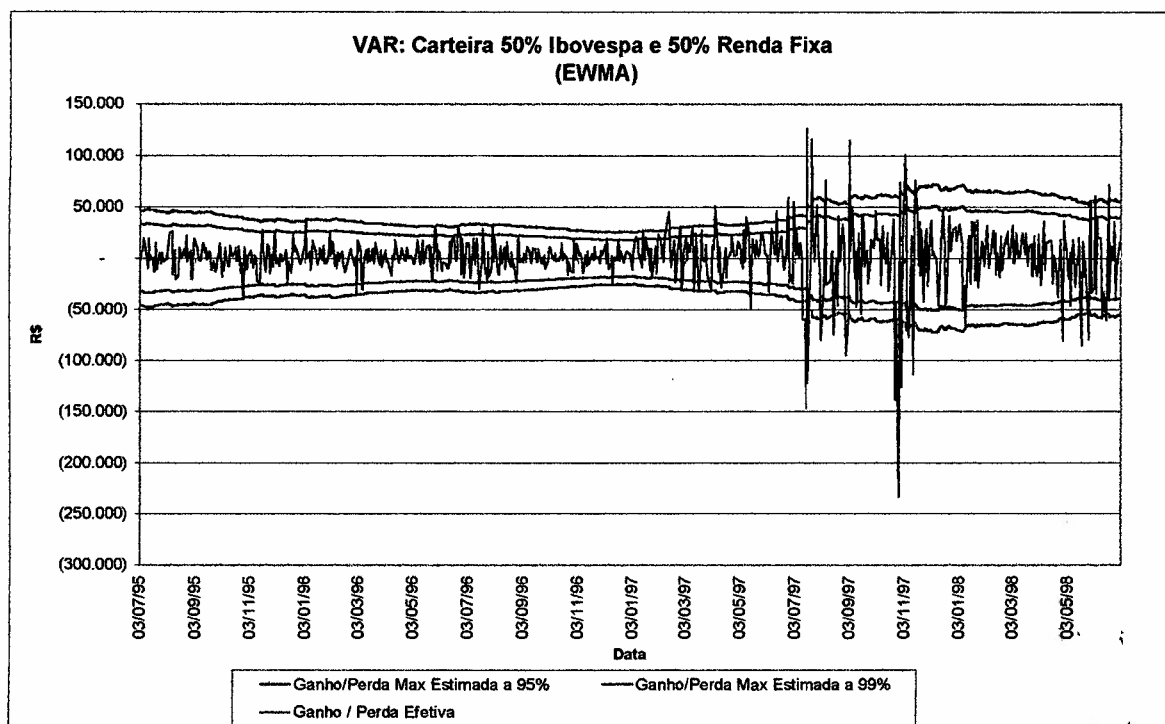
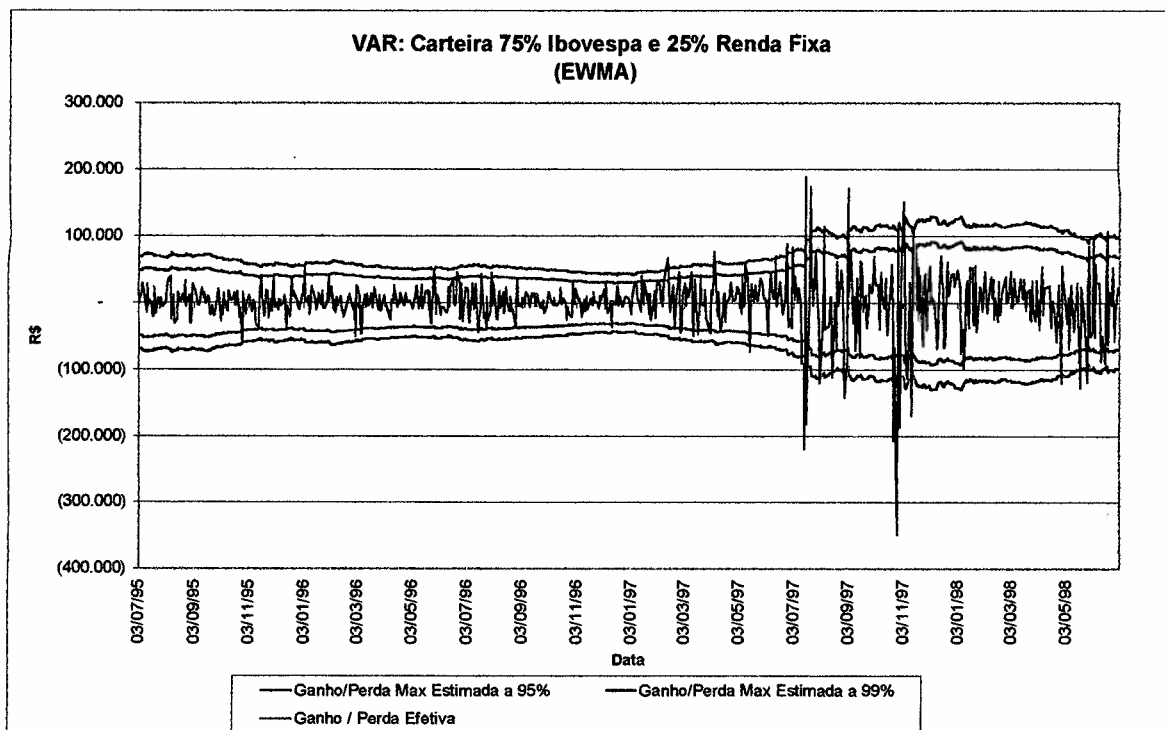


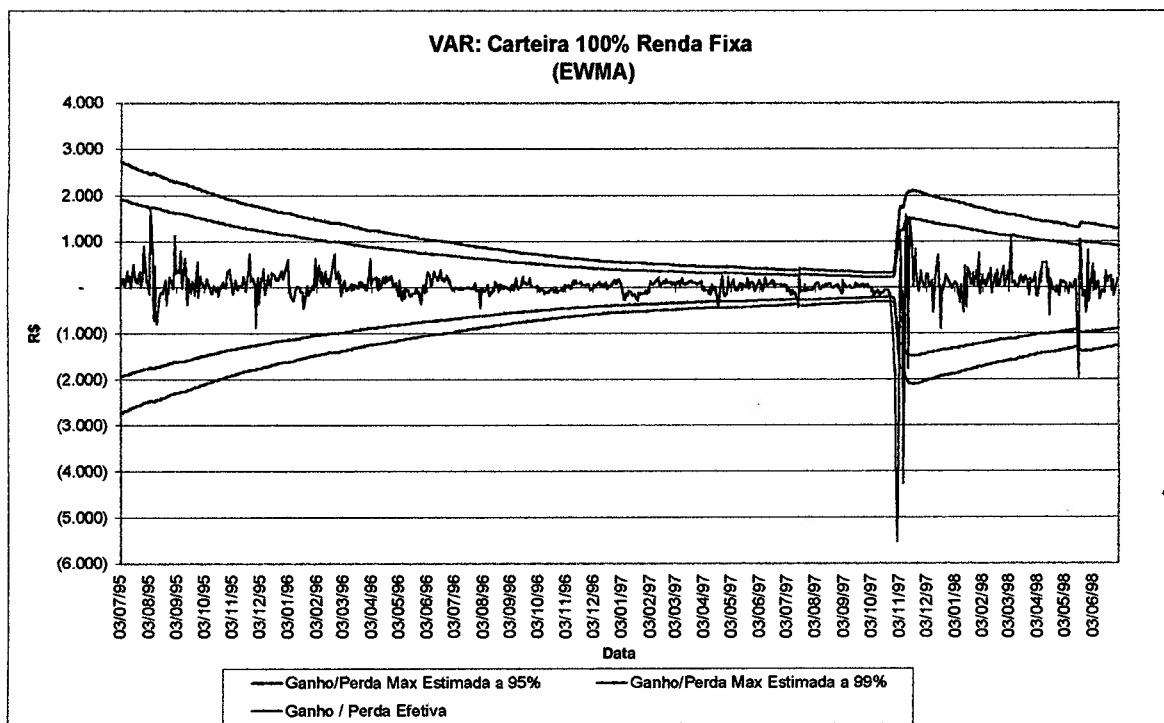
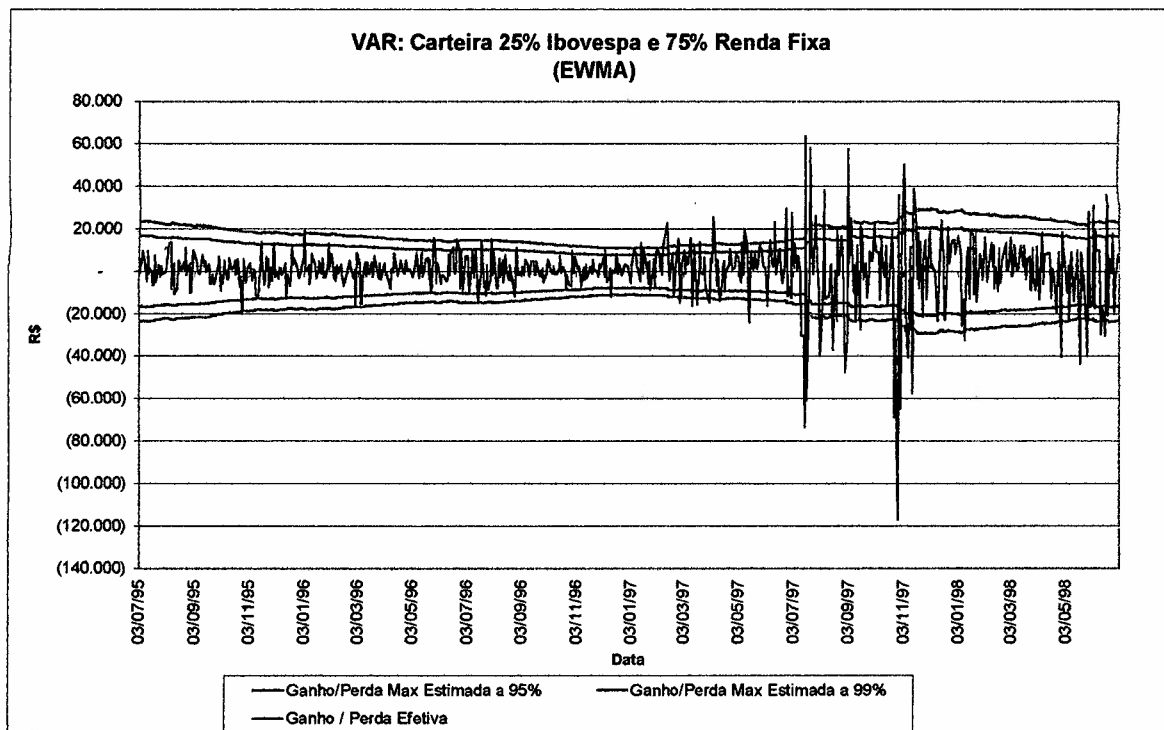




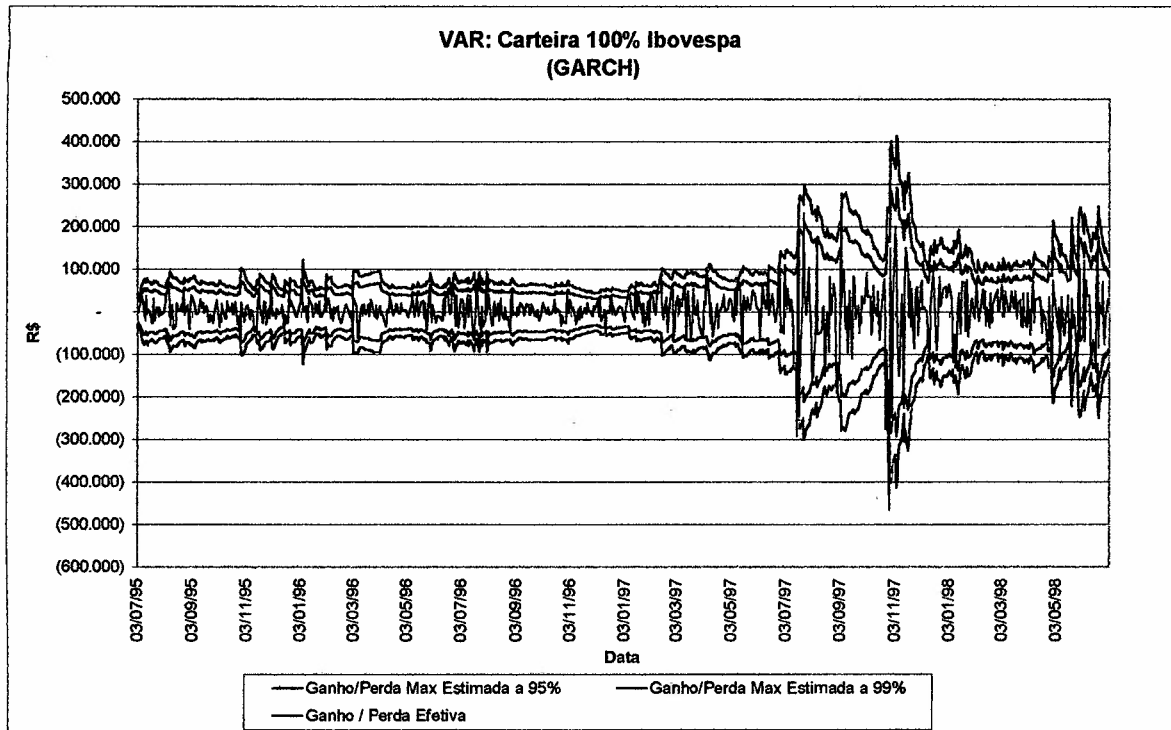
- COM UTILIZAÇÃO DA VOLATILIDADE EWMA

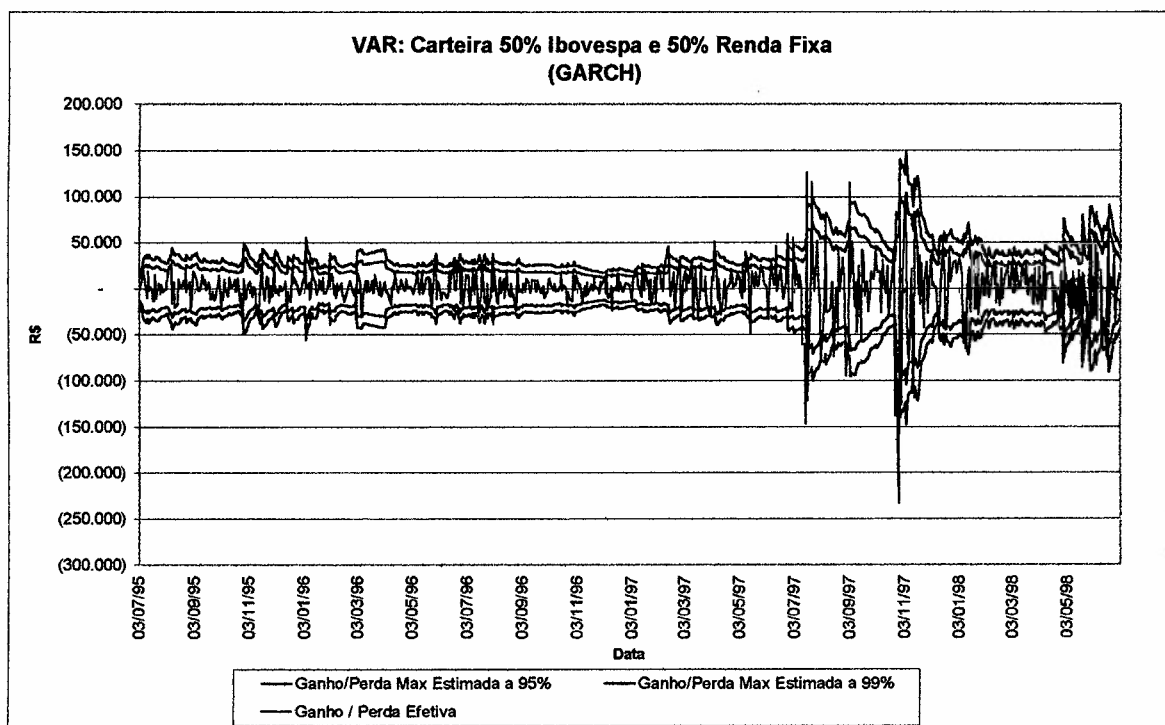
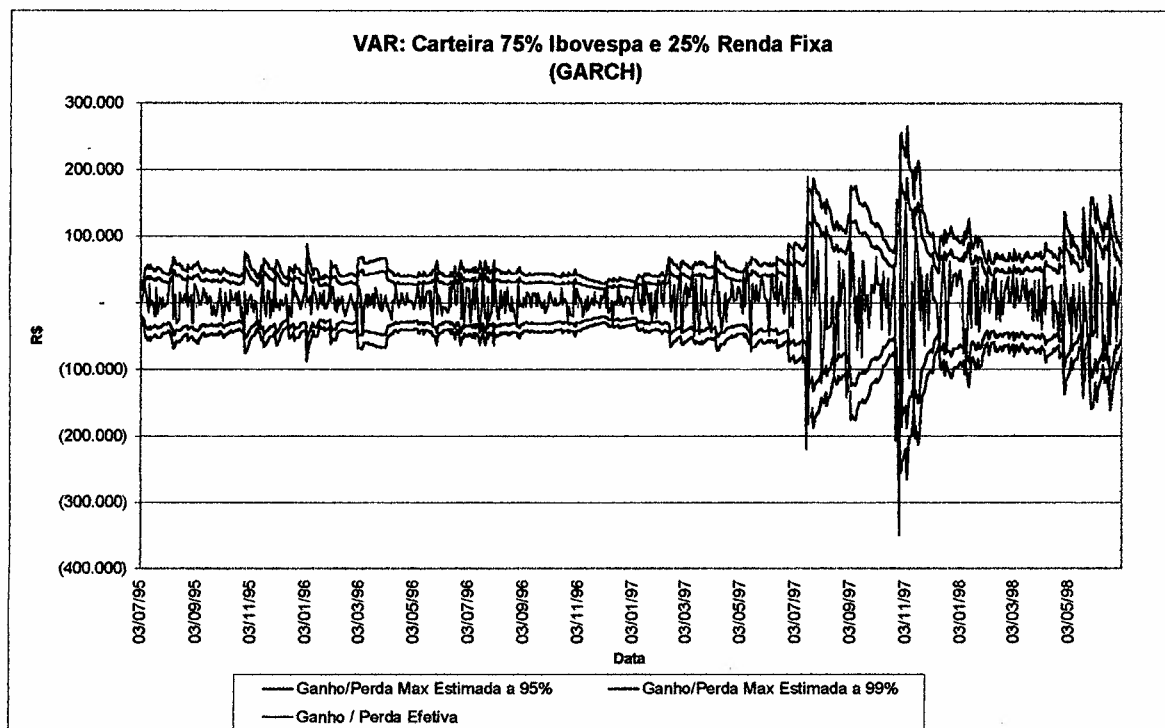


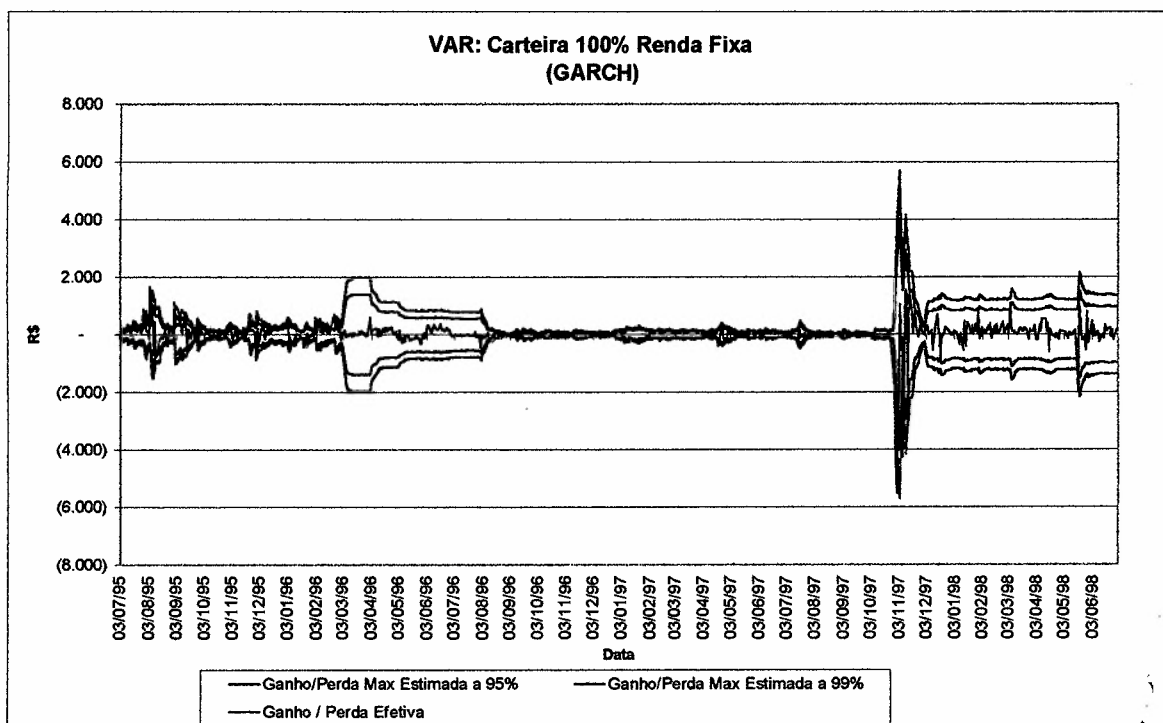
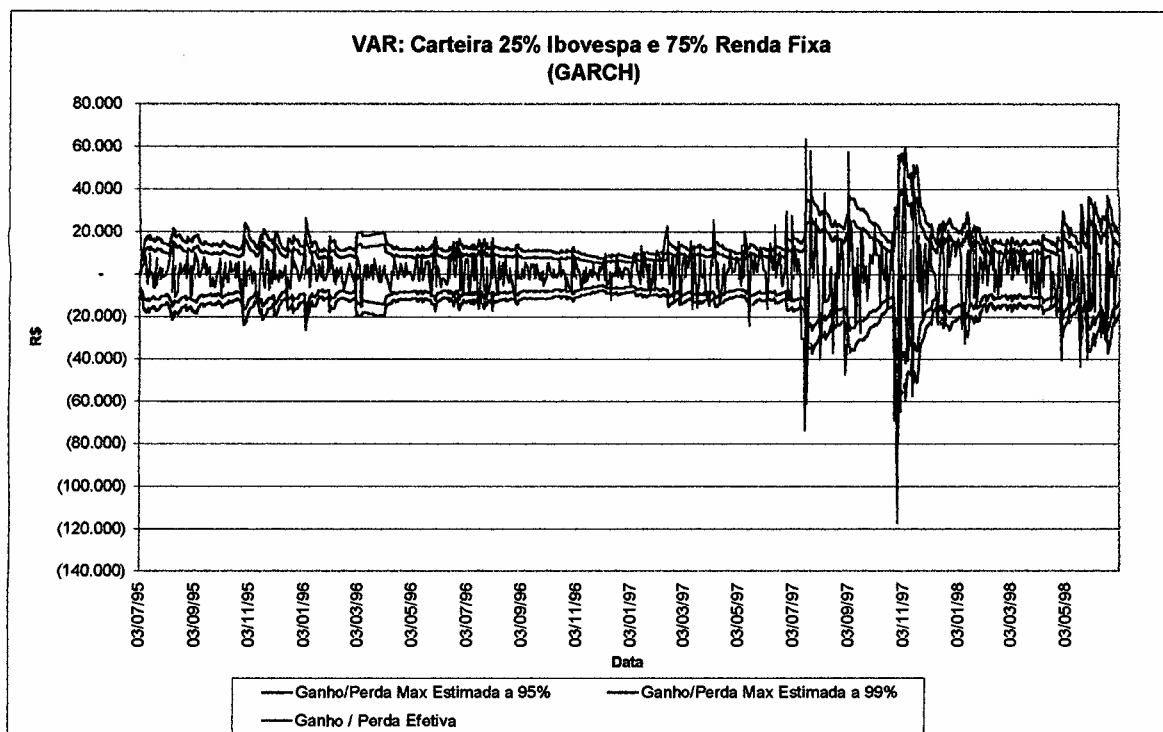




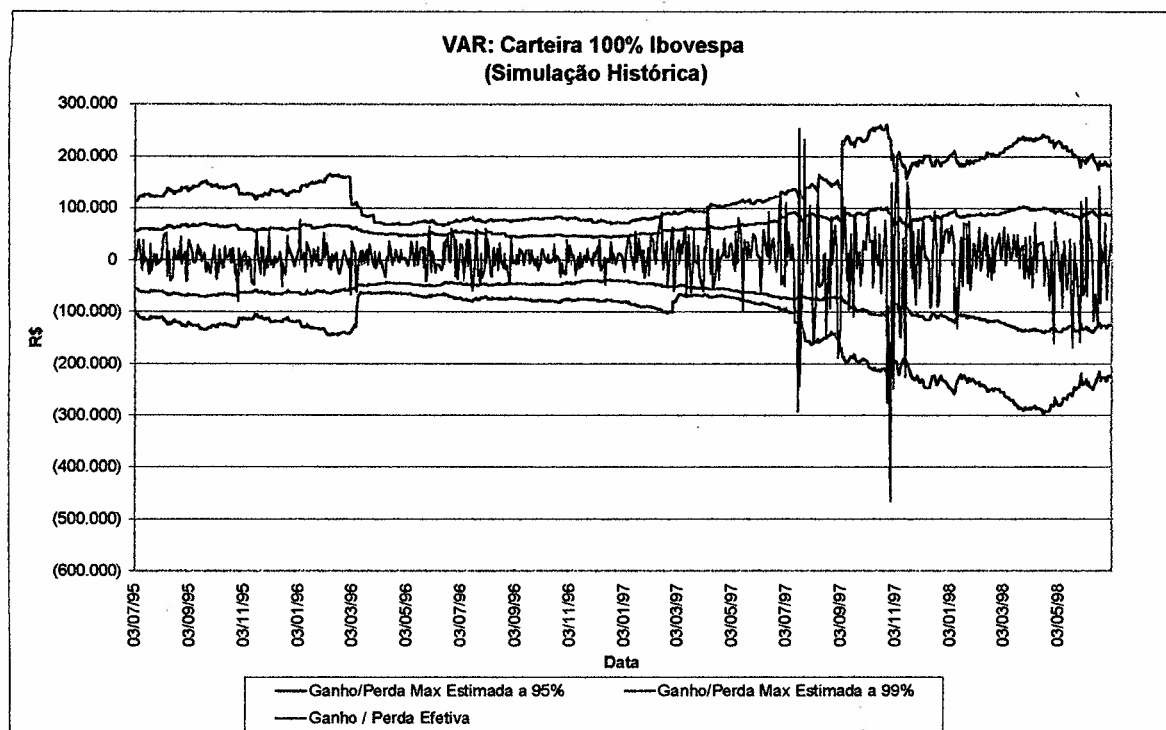
- COM UTILIZAÇÃO DE GARCH (1,1)

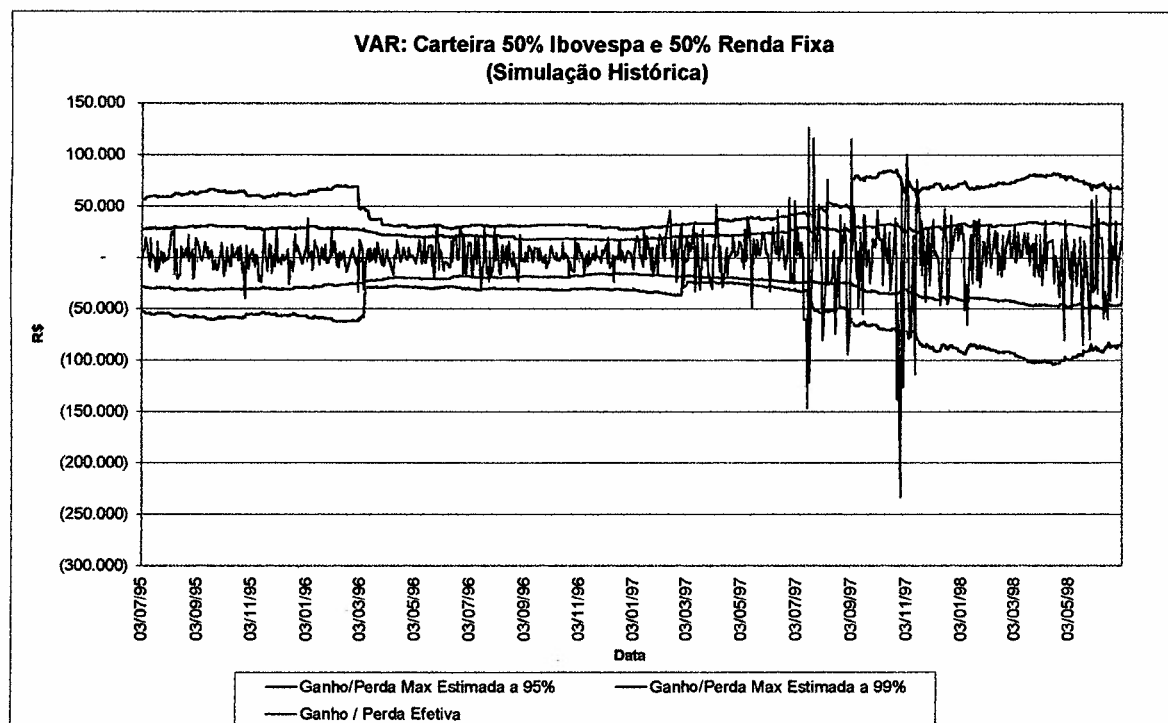
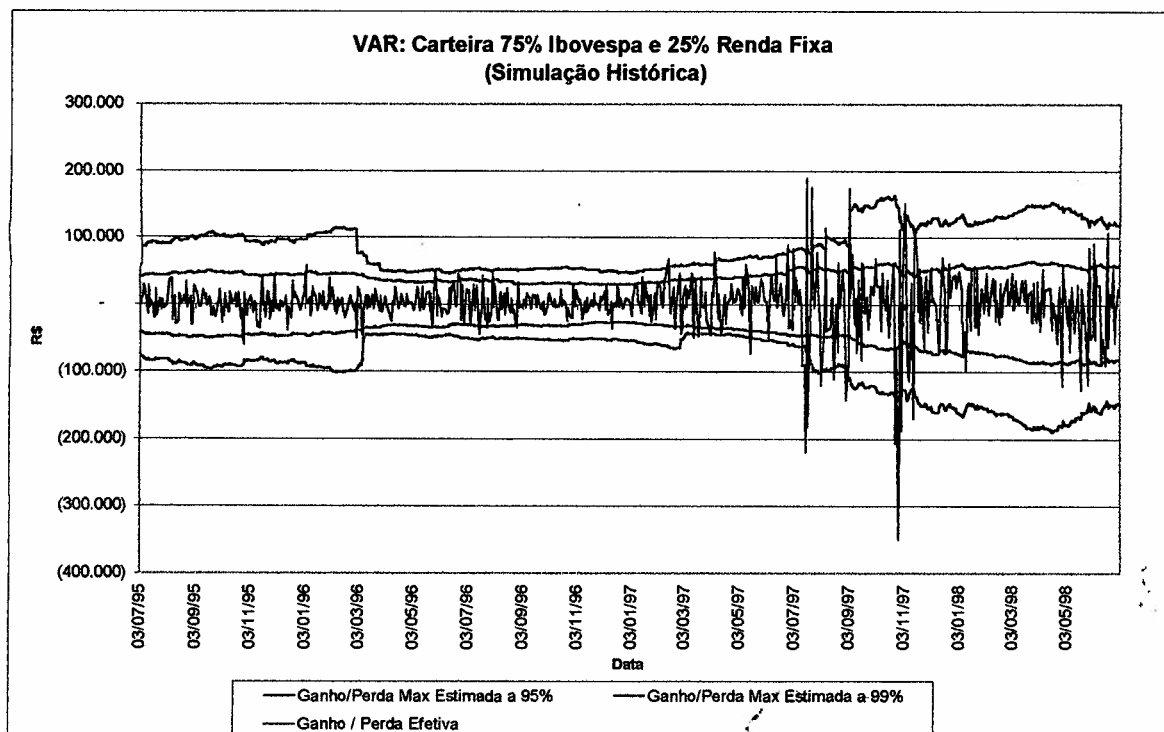


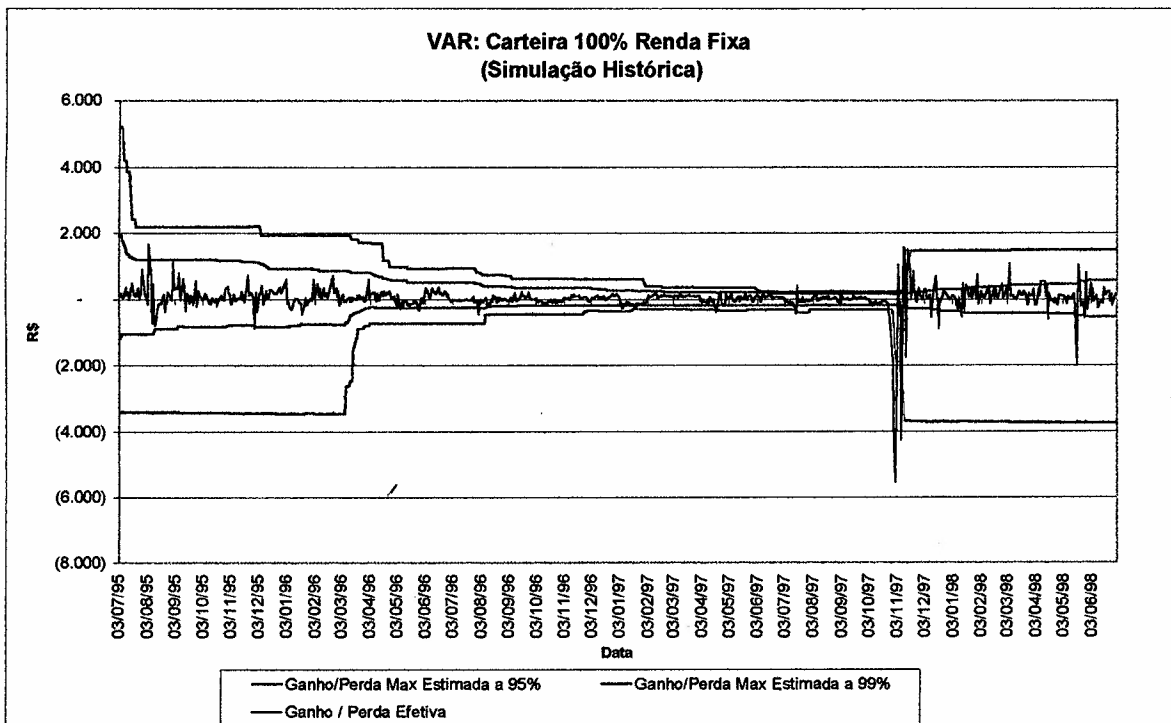
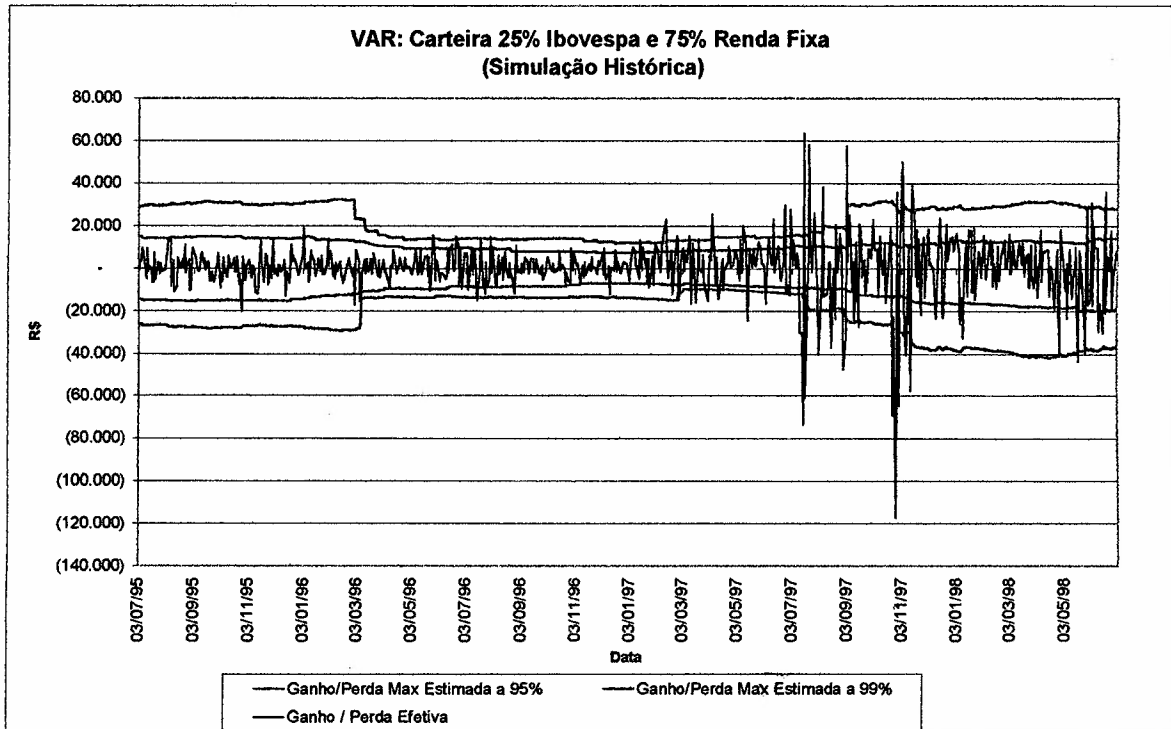




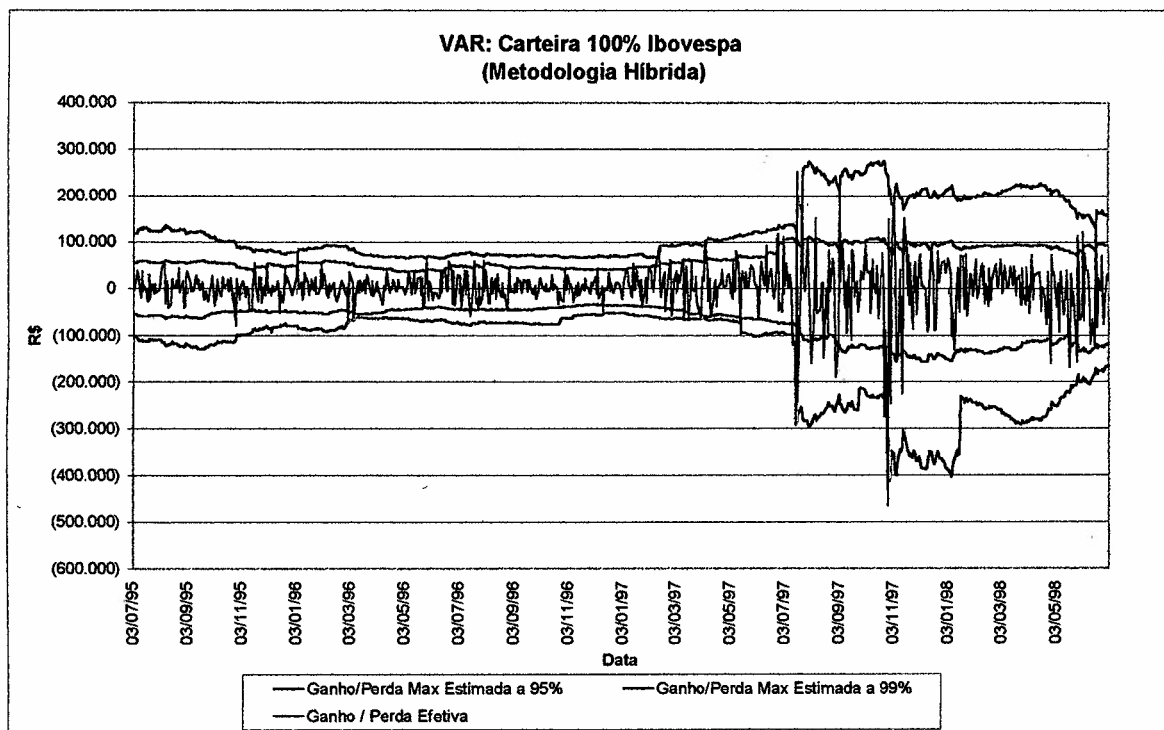
## SIMULAÇÃO HISTÓRICA

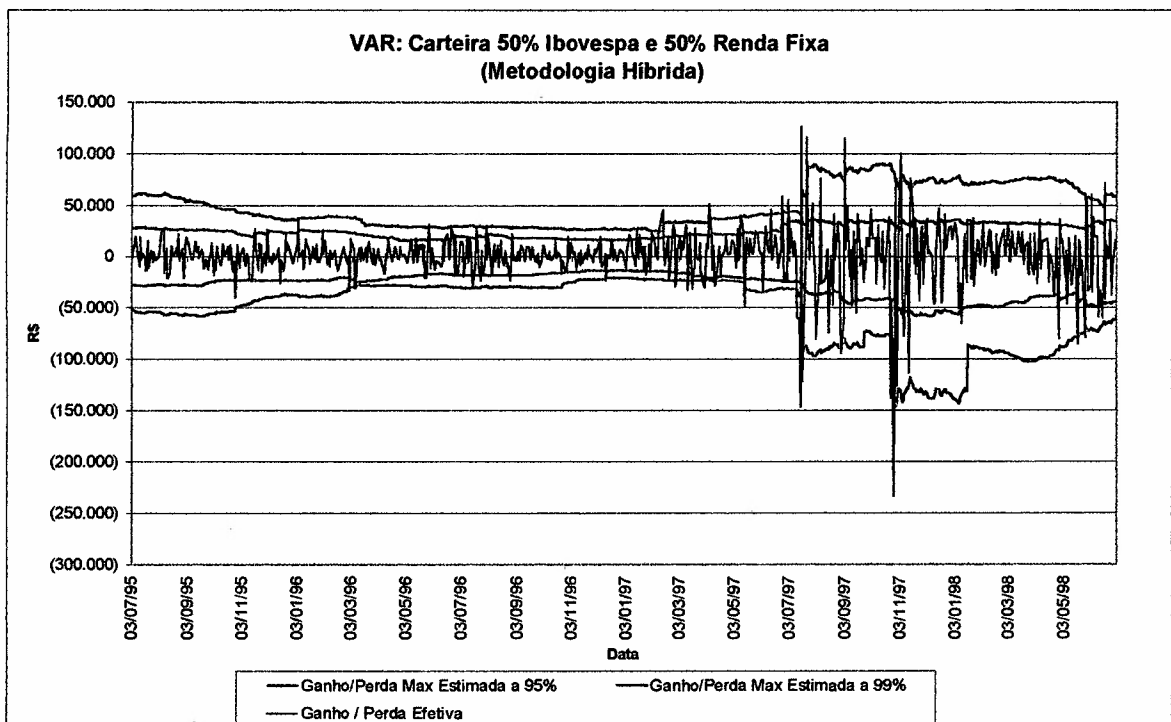
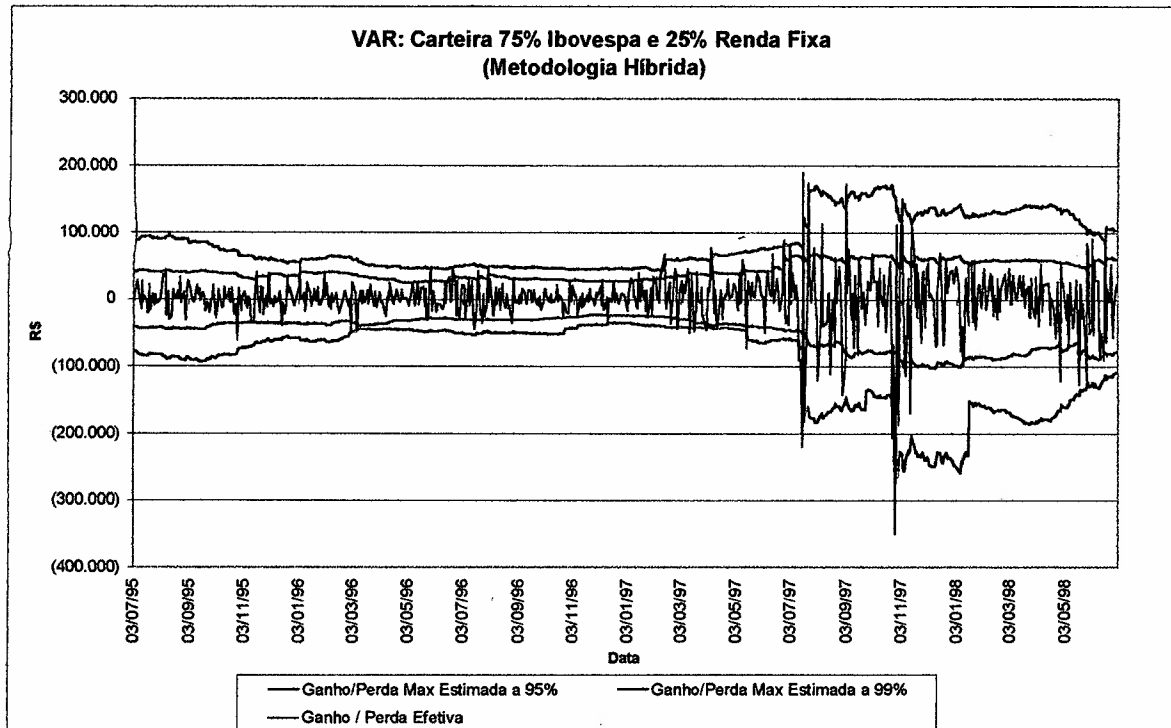


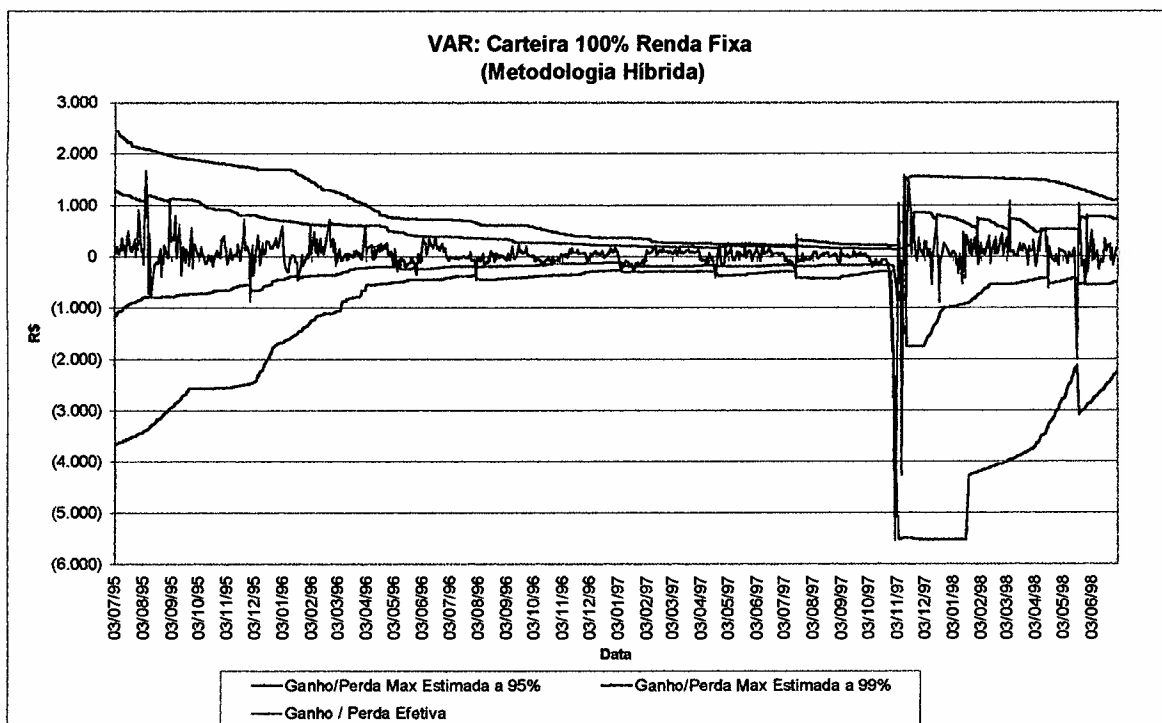
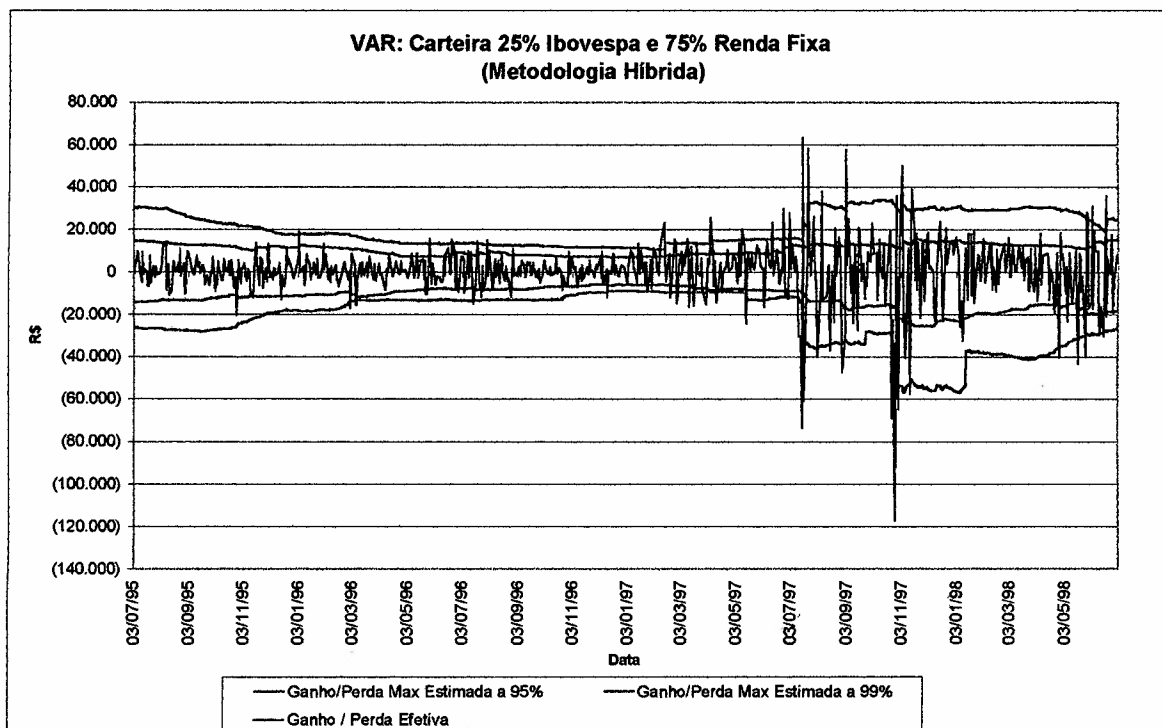




## METODOLOGIA HÍBRIDA







## **BIBLIOGRAFIA**

1. ALEXANDER, C. O., LEIGH, C. T. On The Covariance Matrices Used in Value at Risk Models. *The Journal of Derivatives*, New York, p. 50-62, Spring 1997.
2. ALEXANDER, Carol. Seminário Internacional: Aspectos Quantitativos e Qualitativos do Gerenciamento de Risco. São Paulo: Crowne Plaza Hotel, 13 a 15 de abril/1998.
3. BARCINSKI, Alexandre, ALMEIDA, Bernardo C. D. P., GARCIA, Márcio Gomes Pinto, SILVEIRA, Marcos A. Coutinho. Estimação da Volatilidade do Retorno das Ações Brasileiras - Um Método Alternativo à Família GARCH. *Resenha BM&F*, São Paulo, n. 116, p. 21-39, 1997.
4. BEDER, Tanya Styblo. VAR: Seductive but Dangerous. *Financial Analysts Journal*, Charlottesville, p. 12-24, Sept./Oct. 1995.
5. BESSIS, Joel, BESSIE, Joel. *Risk Management in Banking*. 1.ed. Chichester: John Wiley & Sons, 1998. 574p.
6. BEST, Philip. *Implementing Value at Risk*. 1.ed. New York: John Wiley & Sons, 1998. 250p.
7. BOLLERSLEV, Tim, CHOU, Ray Y., KRONER, Kenneth F. ARCH Modeling in Finance: A Review of Theory and Empirical Evidence. *Journal of Econometrics*, Glasgow, v. 52, p. 5-59, 1992.

8. BOLLERSLEV, Tim. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, Glasgow, v. 31, p. 307-327, 1986.
  
9. BOUDOUKH, Jacob, RICHARDSON, Matthew, WHITELOW, Robert F. Investigation of a Class of Volatility Estimators. *The Journal of Derivatives*, New York, p. 63-71, Spring 1997.
  
10. BOUDOUKH, Jacob, RICHARDSON, Matthew, WHITELOW, Robert F. O Melhor dos Dois Mundos: Uma Abordagem Híbrida para Calcular Value at Risk. *Resenha da BM&F*, São Paulo, n. 122, p. 21-37, 1998.
  
11. CAMPBELL, John Y., LO, Andrew W., MACKINLAY, A. Craig. *The Econometrics of Financial Markets*. 1.ed. New Jersey: Princeton University Press, 1997, 611p. Cap. 9: Derivative Pricing Models, p. 377-379.
  
12. DIMSON, Elroy, MARSH, Paul. Stress Tests of Capital Requirements. *Journal of Banking & Finance*, Glasgow, n. 21, p. 1515-1546, 1997.
  
13. DOWD, Kevin. *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*. 1.ed. Chichester: John Wiley & Sons, 1998. 256p.
  
14. ENGLE, Robert F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, Bristol, v. 50, n. 4, p. 987-1007, July 1982.
  
15. FARIAS FILHO, Antonio Coelho Bezerra. *Avaliação do Value at Risk do Índice Bovespa Usando os Modelos GARCH, TARARCH e RiskMetrics<sup>TM</sup> para se Estimar a Volatilidade*. São Paulo: FGV/Escola de Administração de

- Empresas de São Paulo, 1997. 60p. (Dissertação, Mestrado, Administração Contábil Financeira).
16. FEDERAL RESERVE, Division of Banking Supervision and Regulation. *Trading Activities Manual*. 1994.
17. HENDRICKS, Darryl. Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data. *Economic Policy Review*, New York, p. 39-69, April 1996.
18. HO, Thomas S.Y., CHEN, Michael Z.H., ENG, Fred H. VAR Analytics: Portfolio Structure, Key Rate Convexities, and VAR Betas. *The Journal of Portfolio Management*, New York, p. 89-98, Fall 1996.
19. HULL, John C. *Options, Futures and Other Derivatives*. 3.ed. New Jersey: Prentice Hall, 1997. 572p.
20. JOHNSTON, Jack, DiNARDO, John. *Econometric Methods*. 4. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1997. 531p.
21. JORION, Philippe. *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. 1.ed. Chicago: Irwin, 1997. 333p.
22. KOCK, Timothy W. *Bank Management*. 3.ed. Orlando: Dryden, 1995. 947p.
23. KUPIEC, P. Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *Journal of Derivatives*, New York, v. 2, p. 73-84, December 1995.
24. MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, Columbus, v. 7, p. 77-91, 1952.

25. MARSHALL, Christopher, SIEGEL, Michael. Value at Risk: Implementing a Risk Measurement Standard. *The Journal of Derivatives*, New York, p. 91-111, Spring 1997.
  
26. MORGAN GUARANTY TRUST COMPANY. RiskMetrics™. Technical Document, 4.ed, 1998. Endereço eletrônico: <http://www.riskmetrics.com>.
  
27. NEWBOLD, Paul. *Statistics for Business & Economics*. 4.ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1995. 867p. Cap. 11: Goodness-of-Fit Tests and Contingency Tables, p. 405-426.
  
28. PAIVA, Cláudio, PAIVA, Sâmia. Simulações de Monte Carlo em Finanças. *Resenha BM&F*, São Paulo, n. 119, p. 37-53, 1997.
  
29. PRITSKER, Matthew. Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy versus Computacional Time. *Working Paper*. Wharton School, University of Pennsylvania, 1996.
  
30. SANTOS, José Evaristo. *Previsão de Volatilidade no Brasil: RiskMetrics™, GARCH, Volatilidade Implícita ou uma Combinação desses Modelos? Um Estudo Empírico*. São Paulo: FGV/Escola de Administração de Empresas de São Paulo, 1997. 125p. (Tese, Doutorado, Administração Contábil Financeira).
  
31. SAUNDERS, Anthony. *Financial Institutions Management: A Modern Perspective*. 2.ed. Irwin, 1997. 667p.
  
32. VENKATARAMAN, Subu. Value at Risk for a Mixture of Normal Distributions: The Use of Quasi-Bayesian Estimation Techniques. *Economic Perspectives*, Federal Reserve Bank of Chicago, p. 2-13, 1996.

33. ZANGARI, Peter. A VAR Methodology for Portfolios that Include Options. RiskMetrics™ Monitor, First Quarter, p. 4-12. Endereço eletrônico: <http://www.riskmetrics.com>, 1996a.
34. ZANGARI, Peter. How Accurate is the Delta-Gamma Methodology? RiskMetrics™ Monitor, Third Quarter, p. 12-29. Endereço eletrônico: <http://www.riskmetrics.com>, 1996b.
35. WHITE, Halbert. A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica*, Bristol, v. 48, p. 817-838, 1980.