

1200102994



ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO  
FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

49

Teoria de Valores Extremos Aplicada a Finanças:  
Dois Ensaaios

Adonírio Panzieri Filho



Fundação Getúlio Vargas  
Escola de Administração  
de Empresas de São Paulo  
Biblioteca



2994/2001



1200102994

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação da Escola de Administração de Empresas da Fundação Getúlio Vargas, área de concentração de Administração Contábil e Financeira, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Administração de Empresas.

Orientador: Prof. Dr. Vladimir Belitsky (IME/USP).

São Paulo  
2001

S Escola de Administração de Empresas de São Paulo	
Data	19.12 319-2 P199t
Tomos	2994/2001 Tese e.1

SP-00024492-2

Teoria de Valores Extremos Aplicada a Finanças:  
Dois Ensaios

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vladimir Belitsky  
Profa. Dra. Chang C. Y. Dorca  
Prof. Dr. João Carlos Douat  
Prof. Dr. José Evaristo dos Santos  
Prof. Dr. Ronaldo Dias

IME/USP  
IME/UnB  
EAESP/FGV  
EAESP/FGV  
IME/UNICAMP

Para  
Kênia e Giovanna



# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xi</b>
<b>I O efeito do dia da semana em mercados acionários visto pela TVE</b>	<b>1</b>
1 Introdução	2
2 Teoria de Valores Extremos	4
2.1 O resultado da TVE clássica usado neste trabalho . . . . .	4
2.2 Método de estimação da distribuição dos máximos de blocos . . . . .	6
2.3 Método de estimação das caudas . . . . .	7
3 Estudos anteriores	8
3.1 Efeitos do dia da semana . . . . .	8
3.2 Índice caudal . . . . .	9
4 Metodologia de pesquisa	12
4.1 Séries de retornos financeiros analisadas . . . . .	12
4.2 Características dos índices e de seus mercados . . . . .	12
4.3 Frequência e quantidade das observações . . . . .	13
4.4 Hipótese testada . . . . .	14
4.5 Métodos estatísticos empregados . . . . .	14
4.5.1 Análise exploratória . . . . .	15
4.5.2 Estimação dos parâmetros . . . . .	16
4.5.3 Determinação do número $k$ -ótimo de estatísticas de ordem . . . . .	16
4.5.4 Verificação da adequação do modelo . . . . .	18
4.5.5 Testes do sinal de $\gamma$ . . . . .	18

4.6	Procedimento experimental . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Resultados da análise</b>	<b>21</b>
5.1	IBOVESPA . . . . .	21
5.1.1	Gráficos da proporção acumulada de retornos ordenados distribuídos por dias da semana . . . . .	21
5.1.2	Análise exploratória . . . . .	21
5.1.3	Parâmetros estimados . . . . .	22
5.1.4	Gráficos de Hill do parâmetro $\gamma$ . . . . .	22
5.2	NASDAQ composto . . . . .	30
5.2.1	Gráficos da proporção acumulada de retornos ordenados distribuídos por dias da semana . . . . .	30
5.2.2	Análise exploratória . . . . .	30
5.2.3	Parâmetros estimados . . . . .	30
5.2.4	Gráficos de Hill do parâmetro $\gamma$ . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>37</b>
6.1	IBOVESPA . . . . .	37
6.2	NASDAQ Composto . . . . .	38
 <b>II Teste de stress e mensuração de dependência pela TVE: reformulação do método de Longin e proposição de uma medida de dependência extremal</b>		<b>41</b>
<b>7</b>	<b>Introdução</b>	<b>42</b>
<b>8</b>	<b>O trabalho de Longin</b>	<b>45</b>
8.1	Resultados da TVE utilizados . . . . .	45
8.1.1	Definição de extremos . . . . .	45
8.1.2	Resultados univariados . . . . .	45
8.1.3	Resultados multivariados . . . . .	46
8.2	Aplicação ao teste de stress . . . . .	47
8.2.1	<i>Método 1</i> : valor de stress para uma posição de mercado completamente agregada . . . . .	48
8.2.2	<i>Método 2</i> : valor de stress para uma posição de mercado decomposta em um conjunto de fatores de risco . . . . .	48
8.3	Conclusões apresentadas . . . . .	50
<b>9</b>	<b>Crítica ao trabalho de Longin</b>	<b>52</b>
9.1	Questões relacionadas à estrutura conceitual do VaR . . . . .	52
9.1.1	Estrutura conceitual do VaR . . . . .	52

9.1.2	O efeito da pressuposição de normalidade multivariada nas estimativas de teste de stress . . . . .	53
9.1.3	O uso de correlações históricas pelo modelo de VaR tradicional e a solução adotada por Longin . . . . .	54
9.1.4	O uso do conceito de fatores de risco . . . . .	54
9.2	Questão do quantil incondicional estimado pela TVE . . . . .	54
9.3	Questão do uso da técnica de máximos de blocos . . . . .	55
9.4	Questões relacionadas à função de dependência . . . . .	55
9.4.1	Inferência da função de dependência . . . . .	55
9.4.2	Escolha da função de dependência . . . . .	56
<b>10</b>	<b>Proposta de um novo método</b>	<b>58</b>
10.1	Os resultados da TVE utilizados neste trabalho . . . . .	58
10.1.1	Método de estimação das caudas . . . . .	60
10.2	Formulação do novo método . . . . .	61
10.2.1	Motivação . . . . .	61
10.2.2	Método 1* . . . . .	62
10.2.3	Método 2* . . . . .	63
<b>11</b>	<b>Avaliação das estimativas de VaR pelo Método 2*</b>	<b>65</b>
11.1	Procedimento experimental . . . . .	66
11.1.1	Primeira etapa: estimativas dos coeficientes implícitos de dependência extremal . . . . .	66
11.1.2	Segunda etapa: estimativas de VaR pelos métodos 1* e 2* para uma mesma situação . . . . .	67
11.1.3	Terceira etapa: comparação da proximidade das estimativas obtidas pelos métodos 1* e 2* . . . . .	67
11.2	Resultados . . . . .	68
11.2.1	Análise exploratória . . . . .	68
11.2.2	Carteira de 2 ativos . . . . .	68
11.2.3	O efeito do acréscimo de ativos . . . . .	68
11.3	Conclusões . . . . .	69
<b>12</b>	<b>Análise de dependência entre mercados financeiros usando o coeficiente implícito de dependência extremal</b>	<b>77</b>
12.1	O trabalho de Longin e Solnik . . . . .	78
12.2	Procedimento experimental . . . . .	78
12.3	Resultados . . . . .	79
12.4	Conclusões . . . . .	80
	<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>

# Lista de Figuras

5.1	IBOVESPA - Distribuição das ocorrências dos retornos acumulados ordenados do maior para o menor . . . . .	23
5.2	IBOVESPA - Distribuição das ocorrências dos retornos acumulados ordenados do menor para o maior . . . . .	23
5.3	Box-plot dos retornos do IBOVESPA por dias da semana . . . . .	24
5.4	Box-plot dos retornos do IBOVESPA pré e pós Plano Real . . . . .	25
5.5	Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	27
5.6	Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às segundas-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	27
5.7	Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às terças-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	28
5.8	Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às quartas-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	28
5.9	Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às quintas-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	29
5.10	Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às sextas-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	29
5.11	NASDAQ composto - Distribuição das ocorrências dos retornos acumulados ordenados do maior para o menor . . . . .	31
5.12	NASDAQ composto - Distribuição das ocorrências dos retornos acumulados ordenados do menor para o maior . . . . .	31
5.13	Box-plot dos retornos do NASDAQ por dias da semana . . . . .	32
5.14	Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	34
5.15	Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às segundas-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	34
5.16	Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às terças-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	35
5.17	Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às quartas-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	35
5.18	Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às quintas-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	36

5.19 Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às sextas-feiras (cauda direita). Estimativas de $\gamma$ x número de excedentes utilizados em seu cálculo. . . . .	36
8.1 Fluxograma sugerido por Longin [30] para cálculo de VaR baseado em TVE pelo método da posição de mercado completamente agregada. . . . .	49
9.1 Exemplo de leitura de VaR a partir da função de densidade de probabilidade de uma distribuição Normal. . . . .	54
11.1 Scatterplot dos retornos diários de pares de ativos. . . . .	71
11.2 Regressão das estimativas de VaR pelo método 1* contra as estimativas do método 2*. Média das estimativas da constante $a$ para carteiras de 2, 3, 4 ou 5 ativos. . . . .	74
11.3 Regressão das estimativas de VaR pelo método 1* contra as estimativas do método 2*. Média das estimativas do coeficiente $b$ para carteiras de 2, 3, 4 ou 5 ativos. . . . .	74
11.4 Regressão das estimativas de VaR pelo método 1* contra as estimativas do método 2*. Média das estimativas de $R^2$ para carteiras de 2, 3, 4 ou 5 ativos. . . . .	75
12.1 EI-FRB - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	83
12.2 EI-FRB - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	83
12.3 Merval-FRB - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	84
12.4 Merval-FRB - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	84
12.5 Merval-EI - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	85
12.6 Merval-EI - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	85
12.7 IBOVESPA-FRB - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	86
12.8 IBOVESPA-FRB - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	86
12.9 IBOVESPA-Merval - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	87
12.10 IBOVESPA-Merval - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	87
12.11 IBOVESPA-NASDAQ - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	88
12.12 IBOVESPA-NASDAQ - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	88
12.13 IBOVESPA-EI - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	89
12.14 IBOVESPA-EI - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	89
12.15 NASDAQ-Merval - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	90
12.16 NASDAQ-Merval - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	90
12.17 NASDAQ-FRB - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	91
12.18 NASDAQ-FRB - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	91
12.19 NASDAQ-EI - Evolução de $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores. . . . .	92
12.20 NASDAQ-EI - Evolução de $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores. . . . .	92

# Lista de Tabelas

4.1	Amostras analisadas . . . . .	14
5.1	IBOVESPA - Estatísticas descritivas das amostras de retornos diários. . . . .	24
5.2	IBOVESPA - Estatísticas descritivas das amostras de retornos por dias da semana. . . . .	25
5.3	IBOVESPA - parametrização das caudas dos retornos diários por Pareto Generalizada. . . . .	26
5.4	NASDAQ composto - estatísticas descritivas dos retornos diários. . . . .	32
5.5	NASDAQ composto - parametrização das caudas dos retornos diários por Pareto Generalizada. . . . .	33
6.1	IBOVESPA - Formas das caudas de cada amostra segundo as estimativas de $\gamma$ julgadas consistentes. . . . .	38
6.2	NASDAQ - Formas das caudas de cada amostra segundo as estimativas de $\gamma$ julgadas consistentes. . . . .	39
11.1	Estatísticas descritivas das amostras de retornos diários . . . . .	70
11.2	Coefficiente implícito de dependência extremal. Estimados pela aproximação dos resultados do método 2* aos resultados obtidos pelo método 1*. Uso de método de máxima verossimilhança para aproximação por GPD e $k = 0.1 \cdot N$ . . . . .	72
11.3	Regressão das estimativas de VaR pelo método 2* contra as estimativas do método 1*. Resultado de estimativas para carteiras com 2 ativos. Os valores apresentados na tabela são médias das 4 posições. . . . .	73
11.4	Regressão das estimativas de VaR pelo método 2* contra as estimativas do método 1*. Resultado de estimativas para carteiras com 2 ativos. Os valores apresentados na tabela são médias das 10 combinações de pares. "L" indica posição longa ou comprada (quando se corre risco de queda nos preços) e "S" indica posição curta ou vendida (quando se corre risco de alta nos preços). . . . .	75
11.5	Regressão das estimativas de VaR pelo método 1* contra as estimativas do método 2*. Resultado das estimativas de grupos de ativos. Os valores apresentados na tabela são médias das 4 posições e de todos os conjuntos de 2, 3, 4 ou 5 ativos. . . . .	76



# Resumo

Esta tese é composta de dois ensaios que aplicam a Teoria de Valores Extremos a finanças, elaborados e relatados de forma independente, resumidos a seguir.

**Primeiro ensaio: O efeito do dia da semana em mercados acionários visto pela Teoria de Valores Extremos** <sup>1</sup> Apresentamos uma nova abordagem sobre duas questões já bastante discutidas na literatura financeira: a dos efeitos do dia da semana sobre os retornos de mercados acionários e a da estimativa do índice caudal de distribuições de retornos financeiros. A novidade da abordagem consiste exatamente no cruzamento das duas questões. Desta maneira, formulamos um novo problema: as caudas das distribuições dos retornos de um determinado mercado acionário são as mesmas em todos os dias da semana?

Analisamos este problema para duas amostras de retornos diários de índices de mercados acionários, o IBOVESPA e NASDAQ composto. Usando a Teoria de Valores Extremos, parametrizamos as caudas das distribuições dos retornos segundo os dias da semana e testamos se essas caudas possuem a mesma forma (um índice caudal que leva à mesma família de distribuições).

Durante a análise do problema principal, surgiram outras questões que também foram estudadas nesta pesquisa:

- Existe assimetria entre as caudas (caudas das distribuições de retornos esquerda e direita de tipos diferentes)?
- Os índices caudais das distribuições de retornos diários do IBOVESPA são os mesmos nos períodos pré e pós Plano Real?
- Os nossos resultados poderiam ter sido alcançados pela simples análise da curtose?
- Se os retornos diários do índice NASDAQ composto são, à primeira vista, mais bem comportados do que os do IBOVESPA, então sua parametrização é mais “fácil” e suas caudas são mais “finas” do que as do IBOVESPA?

Essas questões foram respondidas ao final deste relatório, quando também comparamos nossos resultados com os de outras pesquisas que analisaram as duas questões originais separadamente.

Os principais resultados obtidos levaram-nos a conclusões distintas sobre os comportamentos das caudas das distribuições dos retornos do NASDAQ composto e do IBOVESPA. Para o NASDAQ composto, concluímos que ambas as caudas são “grossas” quando considerados todos os dias da semana em conjunto. Olhando cada dia da semana separadamente, encontramos a presença de caudas “grossas” e “finas” indicando um efeito de dia da semana. Por outro lado, a amostra do IBOVESPA para todos os dias da semana apresentou resultados consistentes de caudas finas tanto à direita quanto à esquerda. Tomados separadamente os dias da semana, não identificamos efeito de dia da semana para o IBOVESPA.

---

<sup>1</sup> Uma versão preliminar deste ensaio foi apresentada no Primeiro Encontro Brasileiro de Finanças, na EAESP-FGV, em julho de 2001.

**Segundo ensaio: A TVE aplicada a testes de stress: reformulação do método de Longin e proposição de uma medida de dependência extremal** Este ensaio foi elaborado em três etapas. Partimos da reformulação do método de teste de stress para posições de mercado decompostas em fatores de risco proposto por Longin [30, 29, 31]. Este método, que utiliza uma técnica da Teoria de Valores Extremos (TVE) bivariada para o cálculo de Valor em Risco (VaR), foi modificado quanto à:

- técnica da TVE utilizada na parametrização das distribuições marginais e;
- modelagem da estrutura de dependência das distribuições bivariadas.

Como resultado dessas alterações, obtivemos um novo método de cálculo de VaR de carteiras para situações de retornos extremamente altos ou extremamente baixos (teste de stress) e uma nova medida de dependência para eventos extremos, a qual denominamos de coeficiente implícito de dependência extremal.

A segunda etapa do estudo consistiu na avaliação da qualidade do método de cálculo de VaR aqui proposto. Como este método é uma aproximação de um método “tradicional” construída para uma carteira bivariada, analisamos se as estimativas obtidas pelos dois métodos tendem a divergir quando se agrega mais ativos na carteira. Nossos resultados foram de que o método proposto não produz bons resultados quando se agrega mais do que quatro ativos básicos na carteira. Por outro lado, concluímos que o coeficiente implícito de dependência extremal é uma boa medida da dependência entre variações de preços de pares de ativos em situações de crise ou euforia de mercados.

Como última etapa do estudo, usamos o coeficiente implícito de dependência extremal para avaliar a evolução da dependência (em situações extremas de crise ou euforia) de um conjunto de amostras de retornos diários de mercados acionários e de renda fixa internacionais. Identificamos relação de dependência crescente em situações de crises mais extremas quando estudamos amostras de retornos de títulos representativos dos mercados de dívida externa do Brasil e da Argentina ou quando estudamos amostras de retornos de mercados de dívida externa em relação a índices de mercados acionários desses dois países. Porém, não obtivemos evidência de que para pares de mercados acionários a dependência aumente, seja em situações de booms ou crises extremas. Esta última conclusão é especialmente relevante por dois motivos. Em primeiro lugar, por nossa análise incluir mercados muito vinculados como os do Brasil e da Argentina. Em segundo, por nossos resultados contrariarem a conclusão de estudo de Longin e Solnik [32, 33], pioneiro no uso da TVE na análise da evolução de dependência entre mercados financeiros, de que a dependência dos mercados acionários aumenta quando há tendência de quedas, mas cai quando há tendência de altas.



# Abstract

This thesis is composed of two essays which apply the Extreme Value Theory to finance, elaborated and presented in an independent manner, as summarized below.

**First essay: The effect of the day of the week on equity markets as seen by the Extreme Value Theory**<sup>2</sup> We present a new approach to two already well-discussed issues in financial literature: that of the effect of the day of the week on equity market returns and that of estimating the tail index of financial returns distributions. The novelty of this approach is that it consists of overlapping both the aforementioned issues. Thus we formulate a new problem: are the tails of the returns distributions of a given equity market the same on all days of the week?

We analyzed this problem in two samples of daily returns of equity market indices, the IBOVESPA and the NASDAQ composite. Using the Extreme Value Theory, we parameterize the tails of the returns distributions according to days of the week and check to see if they have the same shape (a tail index leading to the same family of distributions).

During the analysis of the main problem, other issues arose that were also covered in this study:

- Is there any skewness between the tails?
- Are the tail indices of the daily returns distributions of IBOVESPA the same in the pre- and post- Plano Real periods?
- Could our results have been reached by a simple kurtosis analysis?
- If the daily returns of the NASDAQ composite index are, at first sight, much more well-behaved than those of the IBOVESPA, then is its parameterization “easier” and are its tails “thinner” than those of the IBOVESPA?

These questions have been answered at the end of this report, at which point we also compared our results with those of other studies that analyzed each of the original issues separately.

The main results obtained took us to distinct conclusions about the behavior of the NASDAQ composite and IBOVESPA returns distributions. For the NASDAQ composite, we concluded that both tails are “fat” when all days of the week are considered together. When each day was examined separately, we located “fat” and “thin” tails, indicating the effect of the day of the week. On the other hand, the IBOVESPA sample for all days of the week together showed consistent results of “thin” tails on both right and left. Each day taken separately, we identified no day-of-the-week effect for the IBOVESPA.

**Second essay: The EVT applied to stress tests: reformulation of the Longin’s method and the proposition of a measure of extremal dependence** This essay was elaborated in three stages.

---

<sup>2</sup>A preliminary version of this essay was presented at the First Brazilian Finance Meeting, at EAESP-FGV, in July 2001.

We started with the reformulation of stress test method for a position decomposed on a set of given risk factors proposed by Longin [30, 29, 31]. This method, which uses a bivariate Extreme Value Theory (EVT) for the calculation of the Value at Risk (VaR), was modified with respect to:

- EVT technique used in the parameterization of marginal distributions and;
- modelling of the dependence structure of bivariate distributions.

As a result of these alterations, we obtained a new VaR calculation method of portfolios for situations of extremely high or extremely low returns (stress test) and a new measure of dependence for extreme events, which we denominate the implicit coefficient of extremal dependence.

The second stage of the study consisted of the evaluation of the quality of the calculation method of the VaR proposed here. Since this method is an approximation of a "traditional" method constructed for a bivariate portfolio, we checked if the estimates obtained by both methods tend to diverge as more assets are included in the portfolio. Our results showed that the proposed method does not produce good results when more than four basic assets are included in the portfolio. On the other hand, we concluded that the implicit coefficient of extremal dependence is a good measure of the dependence between variations in price of asset pairs in situations of market booms or crashes.

At the last stage in the study, we used the implicit coefficient of extremal dependence to evaluate the evolution of the dependence (in extreme situations of booms or crashes) of a group of sample daily returns from international bond and equity markets. We identified the relationship of growing dependence in crash situations when we studied samples of returns from foreign debt markets in Brazil and Argentina or when we studied samples of returns from foreign debt markets with respect to equity market indices from both countries. However, we found no evidence to show increased dependence in pairs of equity markets, either in market boom or crash situations. This last conclusion is especially relevant for two reasons. First, because our analysis includes tightly bound markets such as Brazil and Argentina. Second, because our results contradict the conclusion of Longin and Solnik's study [32, 33] that correlation between extreme returns tends to increase with the size of returns in down-markets and to decrease with the size of returns in up-markets.

# Agradecimentos

Durante os dois anos em que estive desenvolvendo esta pesquisa foi duro acreditar que o dia de escrever estes últimos parágrafos fosse chegar. Mas, felizmente, este dia chegou e tenho muito o que agradecer.

Sinto-me orgulhoso por ter sido orientado pelo prof. Dr. Vladimir Belitsky, uma das pessoas mais brilhantes que já conheci, tanto em aspectos profissionais quanto pessoais. Sem a sua orientação, paciência e apoio, dificilmente este trabalho teria chegado ao fim. A este grande amigo dedico os maiores agradecimentos.

Devo também agradecimentos a uma instituição e a pessoas ligadas ao prof. Vladimir. Ao Instituto de Matemática da USP, pelo ambiente estimulante à pesquisa científica. Aos doutorandos do IME-USP, Adriano Siqueira, Fernando Almeida Prado e Silvana Meira, pelas importantes discussões e estudo conjunto. Ao Paulo Rocha, aluno de iniciação científica do IME-USP, pelas alterações e melhoras que fez em programas que elaborei para esta pesquisa. A participantes de seminários promovidos no IME-USP por diversas sugestões recebidas.

Agradeço muito fortemente ao Banco do Brasil pelo patrocínio que foi fundamental ao desenvolvimento deste trabalho. Dentro do BB foram diversos os colegas e dirigentes que apoiaram o meu projeto. Infelizmente, por serem muitos, corro o risco de ser injusto ao omitir algum nome. Prefiro, por isto, nominar apenas o meu orientador técnico, José Luiz Bronzatto, que acompanhou todo o desenvolvimento do trabalho.

Foi muito gratificante ter sido aluno e colaborador do prof. Dr. José Evaristo dos Santos, da EAESP-FGV. Por sua influência, este trabalho é muito diferente do que eu poderia imaginar quando iniciei o doutorado. É também certamente melhor.

O Dr. Michael Thomas, autor do Xtremes, também merece menção especial por sua presteza em responder todas as dúvidas que tive sobre seu software.

Aos professores Ronaldo Dias, da Unicamp, Chang Dorea, da UnB, e João Carlos Douat, da EAESP-FGV, agradeço por gentilmente aceitarem o convite de participação na banca de examinação.

Por fim, agradeço ao apoio e carinho de meus amigos e de minha família. Em especial, à Kênia, minha mulher, por todo seu carinho e compreensão.

## **Parte I**

# **O efeito do dia da semana em mercados acionários visto pela TVE**

# Capítulo 1

## Introdução

Apresentamos neste relatório de pesquisa um novo enfoque sobre duas questões já bastante discutidas na literatura financeira: a dos efeitos do dia da semana sobre os retornos de mercados acionários e a da estimativa do índice caudal da distribuição de retornos financeiros. A novidade da abordagem consiste exatamente no cruzamento das duas questões. Dessa maneira, formulamos um novo problema: as caudas dos retornos de um determinado mercado acionário são as mesmas em todos os dias da semana?

Analizamos este problema de maneira empírica. Elaboramos um experimento para duas séries de retornos de mercados acionários, o IBOVESPA e o NASDAQ composto (daqui em diante referidas apenas como IBOVESPA ou NASDAQ). Cada uma destas séries, gerou 5 amostras de observações segundo o dia da semana de ocorrência dos retornos. Aplicamos o método de excedentes além de um limiar <sup>1</sup> da Teoria de Valores Extremos (TVE) a fim de estimar as formas das caudas das distribuições de cada uma das amostras <sup>2</sup>. Assim, parametrizamos as caudas dos retornos segundo os dias da semana e depois testamos se a forma dessas distribuições é invariante segundo o dia da semana.

A análise do problema da maneira proposta permite distinguir os dias da semana que apresentam caudas grossas daqueles que com caudas finas, isto é, aqueles mais sujeitos a “riscos extremos” (eventos menos previsíveis) dos menos sujeitos. Além disso, como as análises são feitas para as caudas direita e esquerda separadamente, pode-se verificar se estas caudas são diferentes e assim inferir se há dias que possuem, por exemplo, maior propensão a quedas extremas do que a altas extremas.

No decorrer deste relatório outras questões derivadas do problema inicial são formuladas. Todas essas questões são recapituladas e respondidas ao final do relatório, quando também comparamos nossos resultados com os de outras pesquisas que analisaram as duas questões originais separadamente.

Vale destacar um aspecto que dificulta a aplicação da TVE. Embora ela seja elegante e bem elaborada, os métodos estatísticos que embasam sua aplicação não são tão bem desenvolvidos. Assim, apenas para exemplificar, embora exista teoricamente um ponto em que começa a cauda <sup>3</sup> da distribuição dos retornos de um ativo financeiro, a determinação desse ponto através de métodos estatísticos não é canônica, pois existem vários métodos para determiná-lo e não há consenso de que um deles seja o melhor para todos os casos. Por esta razão, a aplicação da TVE requer um procedimento cuidadoso de análise exploratória dos dados e de leitura de métodos gráficos. Nesse sentido, este relatório de pesquisa tem um objetivo

<sup>1</sup> Esse método é também conhecido por POT (Peaks over a threshold). Trata-se de um método desenhado para escolher os parâmetros da função de distribuição de Pareto generalizada para que ela aproxime a cauda de uma distribuição.

<sup>2</sup> As amostras analisadas estão descritas na Tabela 4.1.

<sup>3</sup> A cauda é, neste caso, entendida como a região da função distribuição acumulada correspondente aos valores extremos.

secundário que é o de exemplificar um procedimento de aplicação da TVE através do uso de um software especializado, o Xtremes.

O restante deste ensaio está organizado em 5 capítulos:

- Capítulo 2: expõe, resumidamente, a Teoria de Valores Extremos em sua abordagem clássica, por máximos de blocos, e seu método estatístico de excedentes além de um limiar;
- Capítulo 3: revisa estudos anteriores referentes às duas questões originais;
- Capítulo 4: apresenta as séries de retornos analisadas, formaliza a hipótese testada, levanta questões derivadas da análise do problema pesquisado, expõe os métodos estatísticos empregados e o procedimento experimental;
- Capítulo 5: mostra os resultados obtidos e;
- Capítulo 6: responde, de acordo com os resultados obtidos, às questões levantadas ao longo da pesquisa.



## Capítulo 2

# Teoria de Valores Extremos

Este capítulo apresenta os conceitos e resultados da Teoria de Valores Extremos (TVE) necessários ao nosso trabalho. A notação aqui utilizada é a mesma de Reiss e Thomas [36] e do software Xtremes e um pouco diferente da notação adotada por Embrechts et al. [13], que serviu de base para esta revisão da teoria e é atualmente uma referência padrão sobre TVE. Recomendamos este texto ao leitor interessado em uma abordagem mais didática e detalhada. Ressaltamos que a Seção 2.1 vincula a cauda direita da função distribuição de uma variável aleatória ao comportamento dos máximos de uma sequência de variáveis aleatórias independentes e com a mesma distribuição<sup>1</sup>. A Seção 2.2 apresenta o método de aproximação da distribuição dos máximos por blocos e a Seção 2.3 expõe o método de estimação de cauda dos retornos, conhecido como método de excedentes além de um limiar (POT - Peaks over a threshold).

### 2.1 O resultado da TVE clássica usado neste trabalho

Seja  $X$  uma variável aleatória cuja função de distribuição é designada por  $F$ . Pressupomos, para facilitar os argumentos, que  $F$  é uma função contínua. Definimos por  $x_F$  o limite superior<sup>2</sup> dos valores de  $X$ . Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e distribuídas igualmente à variável aleatória  $X$ . Definimos

$$M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad (2.1)$$

e designamos por  $F_{M_n}$  a função de distribuição da variável aleatória  $M_n$ . Assim, a título de exemplo, se  $X_1, X_2, \dots$  forem retornos diários de um ativo financeiro, então  $M_n$  será o retorno máximo entre  $n$  retornos diários consecutivos.

A Teoria de Valores Extremos clássica estuda a existência e as propriedades da distribuição limite das variáveis aleatórias  $a_n + b_n \cdot M_n, n \in \mathbb{N}$ , para escolha apropriada de seqüências numéricas  $a_n, n \in \mathbb{N}$ . e  $b_n, n \in \mathbb{N}^3$ . Para que possamos formular o resultado sobre a convergência dos máximos precisamos da definição dada a seguir.

<sup>1</sup>Resultados análogos valem para cauda esquerda e mínimo.

<sup>2</sup> $x_F$  é o menor valor onde  $F$  alcança 1, caso  $x_F$  seja finito, e que  $F(x) < 1$  para todo  $x$  caso  $x_F = \infty$ .

<sup>3</sup>Pode-se demonstrar facilmente que, dependendo das propriedades de  $F$  e da escolha de  $x$ , a seqüência  $F_{M_n}(x)$  converge, quando  $n \rightarrow \infty$ , ou para 1 ou para 0, ou seja: ela converge para uma função de distribuição degenerada. Esta convergência não dá informações para concluir sobre a forma aproximada de  $F_{M_n}$  para um  $n$  grande. Daí o interesse no limite de  $a_n + b_n \cdot M_n$ .

Para cada  $\gamma \in \mathbb{R}$ , definimos uma função de distribuição  $H_\gamma$  da seguinte forma:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\}, & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\}, & \text{se } \gamma = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

para  $x$  de região  $\{x : 1+\gamma x > 0\}$ , enquanto para  $x$  fora desta região  $H_\gamma$  deve ser completada por 0 ou por 1 para que satisfaça as condições de uma função de distribuição. A família  $\{H_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}$  é denominada família de *distribuições generalizadas de valores extremos* (Generalized Extreme Values distributions - GEV). Este nome justifica-se pelo seguinte teorema:

**Teorema 1.** (coletânea dos resultados dos Teoremas 3.2.3 e 3.4.5 de [13]). *As duas propriedades (i) e (ii) apresentadas abaixo são equivalentes: se uma delas é válida então a outra também é.*

- (i) *Existem duas seqüências  $a_n$  e  $b_n$ , e três números reais  $\gamma$ ,  $\nu$  e  $\delta$  tais que  $F_{a_n+b_nM_n}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , a função de distribuição da variável aleatória  $a_n + b_nM_n$ , converge, conforme  $n \rightarrow \infty$ , à função  $H_\gamma(\nu + \delta x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .*
- (ii) *Existem um número real  $\gamma$  e uma função  $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tais que*

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{u \leq y < x_F} \left| \mathbb{P} \left[ \frac{X-u}{\sigma(u)} \leq y \mid X > u \right] - G_\gamma(y) \right| = 0 \quad (2.3)$$

onde

$$G_\gamma(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & \text{se } \gamma = 0 \\ 1 - (1 + \gamma y)^{-1/\gamma}, & \text{se } \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

para  $y$  da região  $\{y : y \geq 0 \text{ e } y \leq -1/\gamma\}$ , caso  $\gamma < 0$ , e da região  $\{y : y \geq 0\}$ , caso  $\gamma \geq 0$ ; fora destas regiões  $G_\gamma$  deve ser completada por 0 ou por 1 para que satisfaça as condições de uma função de distribuição.

A função de distribuição  $G_\gamma$  em (2.3) é chamada de *Distribuição de Pareto Generalizada* (Generalized Pareto Distribution - GPD).

Vale a pena destacar que a TVE afirma que há a seguinte dicotomia: ou para qualquer escolha de seqüências  $a_n$  e  $b_n$ , a seqüência de funções  $F_{a_n+b_nM_n}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , não converge para nenhuma função de distribuição, a não ser a degenerada, ou existem seqüências  $a_n$  e  $b_n$  tais que ocorre a convergência para uma função de distribuição não degenerada e neste caso a função limite é do tipo  $H_\gamma$ . Note que dizer que uma função é do tipo de  $H_\gamma$  significa dizer que esta função pode ser obtida de  $H_\gamma$  por transformação linear do seu argumento:  $x \rightarrow \nu + \delta x$ , para números apropriados  $\nu$  e  $\delta$ . Note também que a TVE estuda o tipo da distribuição limite da seqüência  $F_{a_n+b_nM_n}$ . Isso tem suas razões que não serão discutidas neste trabalho.

Existem diversas formas de condições que garantem a convergência dos máximos. Uma delas é (ii), a qual é não só uma condição suficiente, mas também necessária.

O parâmetro  $\gamma$  é chamado de *índice de cauda* para GPD e, caso haja a convergência (2.3), também para a distribuição de  $X$ . Vamos nos referir a ele como índice de cauda também no âmbito da GEV, quer dizer, para  $H_\gamma$ . Embora neste âmbito ele determine não somente a cauda mas toda a distribuição limite dos máximos, a escolha é justificada pela equivalência entre (i) e (ii) como afirmado pelo teorema: o parâmetro  $\gamma$  em (i) e em (ii) do Teorema 1 é o mesmo. Este teorema é importante, pois é ele que nos permite comparar  $\gamma$  estimados por métodos diferentes. Vamos agora enfatizar a equivalência afirmada pelo teorema dando maiores detalhes sobre 3 casos do valor de  $\gamma$ :

- uma GPD com  $\gamma > 0$  é chamada função de distribuição de Pareto. Se a convergência (2.3) ocorre para  $\gamma > 0$ , então a variável aleatória  $X$  é dita possuir cauda com decaimento por uma potência, ou,



em linguagem mais coloquial, “cauda grossa”. Este caráter de decaimento faz com que os momentos absolutos de  $X$  não existam a partir de uma certa ordem, que pode ser diretamente calculada em função de  $\gamma$ . O teorema diz que (ii) ocorre para um  $\gamma > 0$  se e somente se existem seqüências  $a_n$  e  $b_n$  tais que  $F_{a_n+b_nM_n}$  converge para uma GEV com o mesmo  $\gamma$ . A distribuição GEV de parâmetro  $\gamma > 0$  é uma distribuição do tipo de Fréchet com o parâmetro  $\alpha = 1/\gamma$ . Lembramos, que a distribuição de Fréchet de parâmetro  $\alpha$  é a função  $\Phi_\alpha(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que assume valor  $\exp\{-x^{-\alpha}\}$ , caso  $x > 0$ , e valor 0, caso  $x \leq 0$ ; o parâmetro  $\alpha$  da distribuição de Fréchet pode assumir somente valores positivos.

- uma GPD com  $\gamma = 0$  é a função de distribuição exponencial de parâmetro 1. Se a convergência (2.3) ocorre para  $\gamma = 0$ , então a variável aleatória  $X$  possui cauda com decaimento exponencial, ou “cauda fina”. Se não levarmos em conta a cauda esquerda, que *a priori* pode se comportar diferentemente da cauda direita, podemos dizer que o decaimento exponencial faz com que existam os momentos absolutos de  $X$  de qualquer ordem. O teorema diz que (ii) ocorre para  $\gamma = 0$  se e somente se existem seqüências  $a_n$  e  $b_n$  tais que  $F_{a_n+b_nM_n}$  converge para uma GEV de parâmetro  $\gamma = 0$ . Uma GEV de parâmetro  $\gamma = 0$  tem o tipo da distribuição Gumbel. Lembramos que a função  $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é denominada distribuição Gumbel.
- uma GPD com  $\gamma < 0$  é uma função de distribuição Beta. Caso a condição (ii) ocorra para  $\gamma < 0$  então  $x_F$  é finito, ou em linguagem coloquial, a distribuição é sem cauda. Claro que para uma distribuição sem cauda existem todos os momentos. O teorema diz que (ii) ocorre para  $\gamma < 0$  se e somente se existem seqüências  $a_n$  e  $b_n$  tais que  $F_{a_n+b_nM_n}$  converge para uma GEV de parâmetro  $\gamma < 0$ . Uma GEV de parâmetro  $\gamma < 0$  é a distribuição Weibull de parâmetro  $\alpha = -1/\gamma$ . Lembramos que a função  $\Psi_\alpha(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que assume valor  $\exp\{-(-x)^\alpha\}$ , caso  $x \leq 0$ , e valor 1 caso  $x \geq 0$ , é denominada distribuição Weibull; seu parâmetro  $\alpha$  pode assumir valores somente positivos. Cada distribuição de Weibull não tem cauda (direita). Portanto, a distribuição limite dos máximos também não tem, o que é coerente com o fato de que  $X$  não tem cauda (direita).

## 2.2 Método de estimação da distribuição dos máximos de blocos

Sejam  $x_1, \dots, x_N$  as observações independentes de uma variável aleatória  $X$ . Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e distribuídas igualmente à variável aleatória  $X$ . Suponha que queremos estimar a distribuição  $F_{M_n}$  do máximo entre as variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ . A solução mais natural é dividir as  $N$  observações em blocos de tamanho  $n$ , achar o máximo

$$m_i := \max\{x_{(i-1)n+1}, \dots, x_{in}\}$$

em cada  $i$ -ésimo bloco, e construir a função de distribuição amostral de  $m_1, \dots, m_{N/n}$ . Esta função, designada por  $\hat{F}_{M_n}$ , é tomada como a estimativa desejada da  $F_{M_n}$ .

A TVE permite enriquecer a estimativa  $\hat{F}_{M_n}$  de  $F_{M_n}$  por levar o problema de estimação do campo da estatística não-paramétrica para o campo da estatística paramétrica. De fato, o Teorema 1 diz que, sob certas condições do comportamento de  $X$  e quando  $n$  é suficientemente grande, a função de distribuição  $F_{a_n+b_nM_n}$  está próxima à função  $H_\gamma$  com um valor apropriado do parâmetro  $\gamma$ . Isso implica que  $F_{M_n}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , está próxima à função  $H_\gamma(\delta' + \nu'x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , para valores apropriados de  $\delta'$ ,  $\nu'$  e  $\gamma$ . Destacamos que  $\nu$  e  $\delta$  de (i) no Teorema 1 devem ser ajustados devido à presença de  $a_n$  e  $b_n$ , o que nos fez escrever  $\nu'$  e  $\delta'$ . O método de máximos por blocos da TVE consiste em usar métodos de estatística paramétrica para obter estimativas de  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\nu}'$  e  $\hat{\delta}'$  com base da amostra  $m_1, \dots, m_{N/n}$ . O método de máximos por blocos

resulta em na aproximação da função de distribuição desconhecida  $F_{M_n}$  por  $H_{\hat{\gamma}}(\hat{\delta}' + \hat{\nu}'x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que é uma função do tipo GEV.

## 2.3 Método de estimação das caudas

Seja  $F$  a função de distribuição da variável aleatória  $X$ . Colocamos agora o problema de descobrir o comportamento assintótico de  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , conforme  $x \rightarrow \infty$ , a partir das observações  $x_1, \dots, x_N$  independentes da variável aleatória  $X$ <sup>4</sup>. Em linguagem coloquial pode-se dizer que este é o problema de estimação, ou reconstituição, da cauda direita de  $F$ <sup>5</sup>. A solução que propomos baseia-se na suposição de que a propriedade (ii) do Teorema 1 vale.

Para  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma > 0$  definimos a função  $G_{\gamma, \mu, \sigma}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  por

$$G_{\gamma, \mu, \sigma}(x) = G_{\gamma}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

É fácil ver que a propriedade (ii) implica que para  $u$  suficientemente grande,  $F(x)$ ,  $x \geq u$ , está próxima à função

$$\mathbb{P}[X > u] G_{\gamma, u, \sigma(u)}(x) + \mathbb{P}[X \leq u], \quad x \geq u. \quad (2.6)$$

Esta aproximação é a base para reconstituir a cauda de  $F$  a partir das observações  $x_1, \dots, x_n$ . Ela sugere naturalmente o seguinte algoritmo de aproximação da cauda direita, denominado *método POT*:

- (a) Ordenar a amostra  $x_1, \dots, x_n$  em ordem decrescente e escolher os  $k$  maiores valores:  $x_{n,k}, x_{n,k-1}, \dots, x_{n,1}$ .
- (b) Fazer  $u = x_{n,k}$  e usar estes  $k$  valores para obter as estimativas  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\sigma}(u)$  de  $\gamma$  e  $\sigma(u)$ ; estimar  $\mathbb{P}[X > u]$  por  $1 - \hat{F}(u)$  e  $\mathbb{P}[X \leq u]$  por  $\hat{F}(u)$ .

O método POT fornece a expressão (2.6) com as estimativas  $\hat{\gamma}$ ,  $u$  e  $\hat{\sigma}(u)$  para os parâmetros  $\gamma$ ,  $u$  e  $\sigma$ , como uma estimativa da cauda de  $F$  à direita de  $u$ . As propriedades assintóticas desta cauda são deduzidas a partir das propriedades assintóticas da expressão usada para a aproximação.

Apresentamos agora a terminologia pertencente ao método POT que será utilizada no nosso trabalho:

- $u$  é o *limiar* acima do qual os valores que  $x$  assume são considerados como pertencentes à cauda;
- $\mu$  se chama o *parâmetro de localização*. Note que no procedimento descrito acima ele coincide com  $u$ ;
- $\gamma$  é o *índice caudal* relacionado ao *parâmetro de forma*  $\alpha$  ( $\alpha = 1/\gamma$ );
- $\sigma$  é o *parâmetro de escala*;
- $k$  é o número de estatísticas de ordem utilizado na estimativa dos parâmetros.

<sup>4</sup>Lembramos que é possível relaxar a suposição de independência, o que, porém, não será discutido neste trabalho.

<sup>5</sup>Para a cauda esquerda basta inverter os sinais da amostra.

## Capítulo 3

# Estudos anteriores

Neste capítulo revisamos estudos anteriores sobre os dois problemas que estamos cruzando: dos efeitos do dia da semana sobre os retornos diários dos mercados acionários e das estimativas dos índices caudais de distribuições de retornos financeiros. Para tornar a revisão comparável aos índices de bolsas de valores analisados (IBOVESPA e NASDAQ composto), procuramos destacar em cada um dos problemas as conclusões da literatura sobre os comportamentos dos mercados norte-americano (normalmente representado pelos índices Dow-Jones ou S&P500) e brasileiro (quase sempre representado pelo IBOVESPA). A literatura revisada foi consensual quanto a existir efeito do dia da semana sobre a esperança dos retornos diários do mercado de ações norte-americano, e também quanto às caudas das distribuições desses retornos serem “grossas” ( $\gamma > 0$ )<sup>1</sup>. Já os estudos realizados sobre o mercado brasileiro não revelam consenso em quaisquer dos problemas. Os resultados empíricos não são unânimes quanto a presença ou não de efeito do dia da semana nos retornos e nem quanto às caudas desses retornos serem “finas” ou “grossas”.

### 3.1 Efeitos do dia da semana

**Mercado norte-americano** O efeito do dia da semana sobre os retornos dos mercados de ações tem sido objeto de muitas pesquisas empíricas em finanças. Siegel [40] condensa as principais conclusões que essas pesquisas chegaram sobre o comportamento do mercado norte-americano. Relata que, de forma geral, os investidores norte-americanos não gostam das segundas-feiras e que isso se reflete no desempenho dos índices bursáteis. De 1885 a 1997 os retornos médios apresentados pelo Dow-Jones às segundas-feiras foi negativo. Por outro lado, os investidores americanos parecem gostar das sextas-feiras, que apresentam, no Dow-Jones, retornos médios 4 vezes superiores aos dos demais dias. Relata também que o efeito das segundas-feiras não é restrito ao mercado norte-americano. Este mesmo efeito foi verificado no Canadá, Inglaterra, Alemanha, França, Japão, Coreia e Cingapura <sup>2</sup>.

**Mercado brasileiro** No Brasil, o efeito do dia da semana foi estudado por Lemgruber et al. [27], Costa Jr. [2] e Ceretta e Costa Jr. [1].

Lemgruber et al. [27] analisaram o comportamento dos índices das bolsas de valores de São Paulo e

<sup>1</sup>O consenso encontrado é, no entanto, discutível. Durante a apresentação de versão preliminar deste trabalho no I Encontro Brasileiro de Finanças, o prof. Pedro Luiz Valls Pereira, do IBMEC, chamou a atenção quanto a existirem trabalhos mais recentes que contestam a presença de efeito do dia da semana nos retornos de mercados acionários norte-americanos.

<sup>2</sup> [27] revisa algumas das pesquisas que chegaram a esses resultados.

do Rio de Janeiro no período de agosto/1983 a agosto/1987. Usaram técnicas estatísticas tradicionais de regressão linear e concluíram quanto à existência de um efeito fim-de-semana. As médias dos retornos das segundas e terças-feiras mostraram-se estatisticamente iguais a zero enquanto os retornos médios dos outros dias foram significativamente positivos.

Costa Jr. [2] também estudou as variações diárias do IBOVESPA, mas no período de janeiro/1986 a março/1989, e concluiu que as variações no preço do índice no início da semana eram inferiores às variações dos dias mais próximos ao final de semana.

Em parceria com Ceretta, Costa Jr. retoma o tema em artigo recente [1], no qual são relatados os resultados de uma pesquisa que, entre outros objetivos, estudou a presença de sazonalidade de retornos por dia da semana em mercados acionários latino-americanos. Analisaram os mercados do Brasil, Argentina, México, Peru e Venezuela no período de janeiro/1994 a julho/1999. Usaram uma versão modelo GARCH(1,1) e concluíram que o efeito da sazonalidade diária dos retornos não está presente nos mercados brasileiro e argentino, embora apareça em outros mercados latino-americanos.

### 3.2 Índice caudal

Uma das primeiras aplicações da TVE em finanças consistiu na estimativa do índice caudal de retornos financeiros. Durante a década de 1990 foram realizados diversos estudos buscando encontrar regularidades empíricas no valor do índice caudal. Segundo McNeil [34] esses estudos concluíram quanto os retornos financeiros possuem caudas mais grossas do que as da distribuição Normal ( $\gamma > 0$ ). Afirma ainda que as estimativas de  $\gamma$  de retornos de ações são na maior parte menores de que 1/2, implicando em variância finita, e frequentemente menores do que 1/4, implicando em quarto momento finito.

**Mercado norte-americano** Longin [28] estudou os movimentos extremos do mercado acionário norte-americano através das variações diárias de um índice das ações mais negociadas na bolsa de Nova Iorque no período de 1885 a 1990 (total de 29.641 observações). Usou a teoria de valores extremos em sua forma clássica. Assim, aplicou o método de máximo de blocos para parametrizar a distribuição dos máximos (e mínimos) retornos diários de períodos de 1, 3, 6, 12 e 24 meses. Usou duas técnicas paramétricas (métodos de máxima verossimilhança e de regressão) e duas não-paramétricas (estimadores de Hill e de Pickands para o índice caudal) para estimativas dos parâmetros. Suas principais conclusões foram:

- a distribuição assintótica dos retornos extremos é uma Fréchet ( $\gamma > 0$ ). Além disso, verificou que ao aumentar o tamanho dos blocos para a seleção de extremos, a distribuição movia-se para a direita no caso dos máximos e esquerda no caso dos mínimos. Mas a forma da distribuição, dada pelo parâmetro de forma ( $\alpha = 1/\gamma$ ) permanecia constante;
- os dois primeiros momentos (média e variância) são finitos, mas os demais não;
- houve estabilidade na distribuição dos extremos mesmo sob agregação temporal: extremos selecionados de retornos diários, semanais e mensais seguiram uma distribuição Fréchet;
- houve estabilidade dos resultados ao longo dos 105 anos analisados. embora a Grande Depressão da década de 1930 exibisse extremos maiores e mais dispersos. A forma da cauda, no entanto, permaneceu constante mesmo neste período.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Como nossa de análise do IBOVESPA irá contemplar um período de 33 anos (aproximadamente 26 anos prévios ao plano Real e 7 anos posteriores a esse plano que controlou a inflação no Brasil), por sugestão do prof. José Evaristo dos

Jondeau e Rockinger [20] analisaram amostras de retornos diários de índices de ações de 27 países, separados em economias desenvolvidas e emergentes, entre os quais o S&P500 (representando o mercado norte-americano) e o IBOVESPA (representando o mercado brasileiro). O objetivo era avaliar o comportamento dos retornos extremos de cada mercado. Para isso, estimaram os índices caudais ( $\gamma$ ) por dois métodos distintos. No primeiro, o índice caudal de cada amostra de retornos foi estimado através da parametrização da distribuição dos máximos entre retornos diários em blocos de 20 dias, ajustados pela distribuição de valores extremos generalizada (GEV). No segundo, o índice caudal foi estimado pela parametrização das caudas das distribuições dos retornos diários por distribuição de Pareto generalizada (GPD).<sup>4</sup>

As estimativas dos índices caudais foram feitas usando-se os estimadores de Pickands (que pode ser usado para todo  $\gamma \in \mathbb{R}$ ) e Hill (válido apenas para distribuição Fréchet  $\gamma > 0$ ) para máximos de blocos e o método de máxima verossimilhança tanto para máximos de blocos quanto para POT. Combinando os resultados obtidos pelo método de máximo de blocos com o POT, os autores obtiveram evidência de  $\gamma > 0$  em todos os mercados analisados.

Especificamente sobre o mercado americano, eles analisaram o período de janeiro/1969 a dezembro/1998 (7.826 observações). Estimaram o índice caudal do S&P500 como próximo a  $1/3$ , tanto para a cauda direita quanto esquerda e concluíram que os 3 primeiros momentos são finitos.

**Mercado brasileiro** Jondeau e Rockinger analisaram uma amostra de retornos diários do IBOVESPA no período de janeiro/1992 a dezembro/1998 (1.826 observações). Suas estimativas para o índice caudal foram de  $\gamma \geq 1/4$  e concluíram que o índice BOVESPA apresenta até o quarto momento finito em sua cauda direita e até o terceiro momento finito na esquerda.

Ao comparar os resultados de países emergentes com os de economia madura, os autores verificaram que no caso dos países emergentes (e que apresentavam amostras menores) houve certa instabilidade na estimação de índice caudal por POT em relação à obtida pelo estimador de Hill. O ajuste por POT para os mercados maduros foi considerado bom. Mesmo assim, os autores admitem que a queda observada no *crash* de outubro de 1987 não poderia ser prevista pelo modelo estimado.

Ferreira [14] analisou o IBOVESPA usando métodos estatísticos de TVE distintos dos utilizados por Jondeau e Rockinger [20] e obteve conclusões diferentes. Sua dissertação de mestrado em Estatística<sup>5</sup> consistiu em estimar as formas das distribuições de máximos de blocos de 4 índices de mercados acionários latino-americanos (Argentina, Brasil, Chile e México). Interessa-nos aqui apenas seus resultados quanto ao mercado brasileiro. Ferreira analisou uma amostra de retornos diários do índice BOVESPA no período de janeiro/1990 a junho/1998 (cerca de 2.100 observações) e parametrizou a distribuição dos máximos em blocos de 1, 2, 3 e 6 meses.

O índice de cauda e os parâmetros de escala e localização foram estimados por dois métodos: máxima verossimilhança e L-Momentos. Essas estimativas foram checadas por testes de aderência. As obtidas por L-momentos foram testadas e confirmadas pelo teste de Sherman, enquanto as obtidas pelo método de máxima verossimilhança foram testadas e aprovadas pelos testes de Komogorov-Smirnov e de Kuiper.

Dentre as estimativas dos três parâmetros, a mais importante é a do índice de cauda. Ferreira testou a hipótese  $H_0 : \gamma = 0$  contra a hipótese alternativa  $H_1 : \gamma \neq 0$  para as estimativas de  $\gamma$  obtidas de blocos

Santos, iremos testar se o índice caudal é o mesmo em ambos os períodos para verificar se esta conclusão de Longin também se aplica no caso brasileiro.

<sup>4</sup>Apresentam resultados para séries filtradas por processo AR(5), mas destacam que esses resultados não se diferem do que chegaram sem aplicar o filtro.

<sup>5</sup>Os resultados desta pesquisa foram publicados em [15].

de 1, 2, 3 e 6 meses e para as caudas direita e esquerda. Seus resultados foram os mesmos em todos os casos. O teste de hipótese aplicado ao resultado obtido por L-momentos foi o de Hosking, que confirmou a hipótese  $H_0$ . Para o resultado obtido por máxima verossimilhança o teste de hipótese foi o de razão de verossimilhança, que também confirmou a hipótese  $H_0$ , novamente contrariando o consenso na literatura e os resultados de Jondeau e Rockinger.



## Capítulo 4

# Metodologia de pesquisa

### 4.1 Séries de retornos financeiros analisadas

As séries de retornos analisadas foram o índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA) e o índice composto da Nacional Association of Securities Dealers Quotation System (NASDAQ Composite Index)<sup>1</sup>.

Foram colhidos preços de fechamento diários de ambos os índices. A partir desses dados, calculou-se os retornos diários medidos como diferença logaritmica de preços de dias seguidos<sup>2</sup>. Assim, sendo  $S_t$  o preço de fechamento do índice no dia  $t$  e  $S_{t-1}$  o preço de fechamento do índice no dia anterior, o retorno do dia  $t$ , denotado por  $r_t$  foi obtido como:

$$r_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) \quad (4.1)$$

Dado o objetivo da análise, não houve qualquer tratamento dos retornos observados às segundas-feiras. Eles foram calculados como diferença entre o logaritmo do preço de fechamento na segunda e o logaritmo do preço de fechamento na sexta-feira anterior. No entanto, os retornos dos dias da semana posteriores a outros feriados foram desconsiderados a fim de garantir que os retornos por dia da semana fossem calculados sempre com o mesmo intervalo de tempo (72 h para as segundas-feiras e 24 h para os demais dias da semana).

### 4.2 Características dos índices e de seus mercados

O NASDAQ composto e o IBOVESPA poderiam ser diferenciados por representarem mercados de economias em estágios diferentes de desenvolvimento. Esta é a grande diferença em um enfoque amplo. Além disso, eles se diferenciam em relação à micro-estrutura de mercado. A Bovespa é um mercado de viva voz, em que os corretores operam por conta dos comitentes, enquanto na NASDAQ os negócios são realizados no mercado de balcão por *dealers*, que compram, vendem e estocam títulos e os distribuem para investidores [26].

Quanto à formação dos índices, duas diferenças são fundamentais entre o IBOVESPA e o NASDAQ composto. Uma refere-se ao número de ações que compõem os índices. O NASDAQ composto inclui,

<sup>1</sup>Os dados do IBOVESPA, coletados da própria BOVESPA, foram cedidos pelo prof. Mauro Halfeld, da Universidade Federal do Paraná, por intermédio do prof. José Evaristo dos Santos. Agradecemos a ambos. As cotações do NASDAQ composto foram colhidas no sistema Bloomberg.

<sup>2</sup>Isso permite que os retornos variem de  $-\infty$  a  $+\infty$ , assim, qualquer tipo de GPD é admissível, a priori, tanto para a cauda direita quanto para a esquerda.

atualmente, mais de 5.000 companhias e enquanto o IBOVESPA cerca de 50. Outra refere-se aos esquemas de ponderação. O IBOVESPA pondera as ações pela sua representatividade no mercado à vista em termos do número de negócios e volume em moeda corrente - ajustado ao tamanho da amostra. Dá maior peso, portanto, a ações de maior liquidez. Já no NASDAQ composto a ponderação é feita pelo valor de mercado de cada ação. Os títulos de cada companhia afetam o índice na proporção de seu valor de mercado. É o último preço de venda do título multiplicado pelo seu total em mercado que vai se relacionar ao índice.

Essas diferenças quanto a economias que representam e forma de cálculo dos índices induzem-nos a pensar que o comportamento do índice NASDAQ composto deve ser menos sujeito a variações extremas nos retornos diários do que o IBOVESPA, pois reflete uma economia mais estável e um número muito maior de empresas. Segundo esta interpretação inicial, esperamos duas conseqüências em nossa análise dos dados:

- a modelagem do índice NASDAQ deve ser mais “fácil” (para um mesmo tamanho de amostra, esperamos que as parametrizações das caudas do NASDAQ se ajustem melhor às observações do que as parametrizações do IBOVESPA às suas observações.);
- o índice caudal do NASDAQ composto deve ser menor (cauda mais “fina”) do que o do IBOVESPA.

No Capítulo 6 discutiremos se essas expectativas foram verificadas na análise empírica.

### 4.3 Frequência e quantidade das observações

A escolha da frequência dos dados influencia no tamanho da amostra (frequências mais baixas implicam em amostras menores) e, por conseqüência, na qualidade da análise. Como a TVE dedica-se aos eventos extremos (e raros), uma amostra pequena pode não conter informações suficientes para alcançar uma boa qualidade de análise. Esta afirmação pode levar à pergunta: qual o número mínimo de observações necessário para uma análise pela TVE? Danielsson e Morimoto [7] tentam responder a esta questão usando sua experiência na escolha do limiar onde começa a cauda. Argumentam que, na prática, 1.000 observações é um número mínimo e que ter mais do que 6.000 observações não parece fazer muita diferença. Já os artigos com aplicações de TVE em finanças variam enormemente na quantidade de observações utilizadas. Enquanto, por exemplo, Longin e Solnik [33] fazem inferência usando 456 observações (retornos mensais de índices acionários), Dacorogna et al. [5] usam mais de 8 milhões de observações (todas as precificações do dólar contra o marco alemão publicadas na Reuters durante 7 anos). Embora dependente do objetivo da análise, a prática aparentemente mais comum é a de se usar todos os dados disponíveis. Os argumentos favoráveis a essa prática são em relação ao não desperdício de informações ou quanto à raridade dos movimentos extremos de mercado. Há também argumentos contrários, como os de que os mercados hoje são diferentes aos de um passado distante [17].

Nesta pesquisa, escolhemos trabalhar com frequência diária, a maior disponível nas fontes de dados utilizadas. Também seria possível fazer a análise do efeito dos dias da semana usando retornos de frequência maior, como retornos horários. As distribuições de valores extremos são estáveis sob agregação temporal, ou seja, retêm o mesmo índice de cauda para períodos mais longos (ou mais curtos). Na prática, no entanto, não se verifica estabilidade completamente. Discussões sobre a transformação de parametrização de alta frequência para baixa frequência são encontradas em Dacorogna et al. [5, 4] e em Danielsson e de Vries [6].

Utilizamos os dados disponíveis das séries desde suas criações até a data da coleta dos dados. De 03/janeiro/1968 a 16/fevereiro/2001 para o IBOVESPA (7.790 retornos diários) e de 08/fevereiro/1971 a



16/fevereiro/2001 para o NASDAQ composto (7.339 retornos diários). Assim, após segregar os retornos por dias da semana, as amostras de retornos diários ficaram com tamanhos entre 1,4 mil e 1,6 mil observações. Assim, as amostras de retornos por dias da semana analisadas apresentaram tamanhos superiores ao mínimo recomendado por Danielsson e Morimoto [7].

Tabela 4.1: Amostras analisadas

Índice	Identificação	Período	Exclusão de observações
IBOVESPA	IBOVESPA*	03/01/1968 a 16/02/2001	Não
	IBOVESPA	03/01/1968 a 16/02/2002	Sim
	IBOV. PRÉ-REAL	03/01/1968 a 30/06/1994	Sim
	IBOV. PÓS-REAL	01/07/1994 a 16/02/2001	Sim
	Segundas	03/01/1968 a 16/02/2001	Sim
	Terças	03/01/1968 a 16/02/2001	Sim
	Quartas	03/01/1968 a 16/02/2001	Sim
	Quintas	03/01/1968 a 16/02/2001	Sim
	Sextas	03/01/1968 a 16/02/2001	Sim
NASDAQ	NASDAQ	02/01/1985 a 16/02/2001	Não
	Segundas	08/02/1971 a 16/02/2001	Não
	Terças	08/02/1971 a 16/02/2001	Não
	Quartas	08/02/1971 a 16/02/2001	Não
	Quintas	08/02/1971 a 16/02/2001	Não
	Sextas	08/02/1971 a 16/02/2001	Não

Observação: as datas cujos retornos foram excluídos da amostra estão identificadas na Subseção 5.1.2 e têm sua exclusão justificada na Subseção 4.5.1.

#### 4.4 Hipótese testada

Para cada amostra da Tabela 4.1, construímos a função de distribuição amostral  $\hat{F}(x), x \in \mathbb{R}$ , e aproximamos suas caudas pela função de distribuição Pareto Generalizada usando o método POT. O método de estimação fornece as estimativas  $\hat{\gamma}, \hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}$  (índice de cauda, parâmetro de localização e parâmetro de escala, respectivamente). Nosso interesse concentra-se sobre o sinal de  $\gamma$ . Queremos saber se há evidências de que a cauda estudada seja fina, grossa ou limitada. Para isso, testamos a hipótese  $H_0 : \gamma = 0$  contra  $H_1 : \gamma \neq 0$ . Se  $H_0$  for confirmada, teremos que a cauda é fina, do tipo exponencial, caso ela seja rejeitada e  $\hat{\gamma} > 0$ , teremos que a cauda é grossa, do tipo Pareto, enquanto caso  $H_0$  seja rejeitada e  $\hat{\gamma} < 0$ , teremos que a cauda é limitada, do tipo Beta.

#### 4.5 Métodos estatísticos empregados

A análise de valores extremos pode ser feita com o uso da maior parte dos softwares de estatística, reque-rendo, porém, algum grau de programação. Existem alguns poucos softwares que possuem ferramentas de análise de extremos pela TVE [23, 35]. Nossa análise foi conduzida através de um destes softwares dedicados a valores extremos disponível comercialmente, o Xtremes 3.0 <sup>3</sup>. Os métodos estatísticos em-plegados, são, portanto, parte dos recursos disponíveis no Xtremes e, por essa razão, faremos referências freqüentes ao software.

<sup>3</sup>Uma versão acadêmica desse software é encontrada em Reiss e Thomas [36].

#### 4.5.1 Análise exploratória

**Gráficos da proporção acumulada de retornos ordenados distribuídos por dias da semana**

Nossa primeira análise consistiu em analisar uma questão simples. Partimos da premissa de que em uma amostra suficientemente grande de retornos diários 1/5 das observações deveriam se encontrar em cada dia da semana (salvo por, eventualmente, feriados caírem mais em determinado dia da semana, é natural que a proporção dos retornos seja a mesma em todos os dias da semana). Daí, questionamos se ao ordenarmos uma amostra e tomarmos apenas as  $n$  primeiras observações essa proporção seria a mesma. Assim, por exemplo, tomando a amostra de retornos do diários do IBOVESPA e analisando os maiores retornos, ordenamos todas as observações, da maior para a menor. Identificamos e indexamos os retornos por dia da semana: segunda-feira  $i = 1$ , terça-feira  $i = 2$ , até sexta-feira  $i = 5$ . Em seguida tomamos um número  $M$ , variando de 1 até o número total da amostra ( $N$ ), de observações e contamos o número  $m_{M_i}$  destas  $M$  observações que pertencem ao dia  $i$ . Este procedimento foi repetido também para as amostras de retornos ordenados do menor para o maior.

Formalmente, o procedimento acima descrito consistiu no cálculo de:

$$p_{i_m} := \frac{m_{M_i}}{M} \quad (4.2)$$

Este procedimento permitiu-nos elaborar gráficos de  $(M, p_{i_m})$  (para  $i = 1, 2, \dots, 5$  e  $M = 1, \dots, N$ ). Estes gráficos mostram o comportamento da distribuição dos maiores (e menores) retornos ao longo dos dados ordenados.

**Estatísticas descritivas** As estatísticas descritivas têm uma importância menor quando se quer entender o comportamento das caudas, pois elas são mais indicadas para a compreensão do comportamento da maioria das observações da amostra e não das mais raras, presentes nas caudas. Há, no entanto, um certo consenso na literatura de que o quarto momento amostral, a curtose, seja um indicador do peso das caudas. É comum a afirmação de que se a curtose for maior do que a curtose da distribuição Normal, as caudas da distribuição serão pesadas (ou grossas). Se isso fosse verdade, todo o trabalho proposto nesta pesquisa ficaria reduzido a verificar se as curtoses das amostras de retornos por dia da semana são significativamente diferentes entre si. Mas, como Danielsson e Morimoto [7] explicam, o uso da curtose para inferir o peso das caudas é incorreto. Argumentam que a curtose mede a forma global da distribuição e demonstram sua incorreção para medir o peso das caudas de distribuição através de um experimento tipo Monte Carlo. Para evitar controvérsias, retomaremos este assunto no Capítulo 6 e discutiremos se os nossos resultados poderiam ter sido alcançados pela simples análise da curtose.

Sobre a análise exploratória, outro aspecto importante é quanto ao tratamento que demos a extremos muito destacados e ligados a eventos extraordinários externos ao mercado acionário. No caso do IBOVESPA, identificamos que alguns extremos eram vinculados a eventos como mudança abrupta no câmbio ou decretação de plano econômico. Uma análise usual pela TVE dificilmente se preocuparia em excluir as observações vinculadas a esses eventos, já que o propósito da teoria é possibilitar a previsão em casos raros. Porém, no caso deste trabalho, entendemos que a quantidade de observações disponível por dia da semana não permite incluir esses extremos muito destacados e referentes a acontecimentos extraordinários ainda assim conseguir comparar adequadamente as formas das caudas de distribuições por dias da semana. Vamos analisar, então, se as caudas das distribuições de retornos diários, excluídos aqueles retornos extremos gerados por eventos extraordinários externos ao mercado acionário, possuem a mesma forma.

A seguir, descrevemos o procedimento utilizado para identificação e exclusão de extremos destacados<sup>4</sup>.

Os Gráficos box-plot (Figuras 5.3 e 5.13) identificam os outliers e extremos. Os outliers estão plotados como círculos e correspondem a observações com valores entre 1.5 e 3 vezes o comprimento da faixa interquartil<sup>5</sup>. Os extremos são as observações de valor maior do que 3 vezes o comprimento da faixa interquartil. Extremos relacionados a eventos extraordinários externos ao mercado acionário foram excluídos.

#### 4.5.2 Estimação dos parâmetros

Retomamos aqui a discussão da estimação das caudas apresentada na Seção 2.3. Quanto à execução da etapa (b), verificamos que existem diversos métodos estatísticos para a obtenção das estimativas desejadas. O método escolhido foi o de Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimation - MLE). Este método é descrito por Embrechts et al. [13] (pág. 356). Ele fornece os estimadores resolvendo um conjunto de equações não-lineares dadas pelas condições de primeira ordem do problema de maximização. Nossa análise preliminar indicou que as estimativas de  $\gamma$  devam ser maiores do que -0,5. Neste caso, conforme explicado em [13], o MLE funciona bem e suas propriedades usuais, como consistência e eficiência assintótica, são válidas. Este foi um dos fatores que determinaram a nossa escolha. Outro fator foi o resultado de nossa análise preliminar que comparou o MLE aos demais estimadores disponíveis no Xtremes. Esta análise mostrou que o MLE possui maior estabilidade em suas estimativas do parâmetro  $\gamma$  para variações do número  $k$  de estatísticas de ordem gerador de cada estimativa, que é uma propriedade extremamente importante, conforme explicado em 4.5.3.

**Observação de ordem prática sobre as estimativas dos parâmetros pelo Xtremes** Note que a função  $G_{\gamma, u, \sigma(u)}(x)$ ,  $x \geq u$ , usada na Expressão (2.6) para a aproximação da cauda  $F(x)$ ,  $x \geq u$ , pode ser escrita de outra forma. Nesta forma o índice de cauda  $\gamma$  fica intacto, mas os outros dois parâmetros mudam. O novo parâmetro de escala  $\sigma'$  assume o valor  $\sigma' = \sigma(k/n)^\gamma$ , enquanto o novo parâmetro de localização  $\mu'$  assume o valor  $\mu' = u - (\sigma - \sigma')/\gamma$ . O software Xtremes fornece as estimativas de  $\gamma$ ,  $\sigma'$  e  $\mu'$ . Outros estudos normalmente reportam as estimativas de  $\gamma$ ,  $\sigma$  e  $u$ . Nós não fizemos a transformação “inversa” para obter  $\sigma$  de  $\sigma'$  pois a comparação dos nossos resultados com os de outros estudos foi feita somente em relação a  $\gamma$ .

#### 4.5.3 Determinação do número $k$ -ótimo de estatísticas de ordem

Ainda sobre a Seção 2.3, notamos que o principal problema de todo algoritmo de aproximação da cauda encontra-se na execução da etapa (a), pois:

- se  $k$  é pequeno demais, o MLE usa pouco valores da amostra e o resultado fica estatisticamente não estável: as propriedades assintóticas do MLE não valem, e, além disso, uma pequena mudança no valor de qualquer observação pode mudar significativamente o resultado;
- se  $k$  for grande demais, o correspondente valor de  $u$  pode não pertencer à região onde a distribuição de Pareto generalizada, com os parâmetros apropriados, aproxima bem a cauda de  $F$ . Isso porque

<sup>4</sup>Uma alternativa à exclusão de observações, sugerida pela professora Beatriz Vaz de Melo Mendes, da UFRJ, é o uso de estimadores robustos, como o de L-Momentos, para a aproximação da cauda por GPD.

<sup>5</sup>O comprimento da faixa interquartil é definido como a diferença entre a menor observação superior a 75% das demais na amostra e a menor observação superior a 25% das demais na amostra.

forneçemos para o MLE alguns valores de amostra que não informam sobre o comportamento da cauda, o que afeta a estimativa.

**Gráfico de Hill** A determinação do número  $k$ -ótimo de estatísticas de ordem geralmente, e em particular no nosso trabalho, é feita visualmente da seguinte maneira. Constrói-se o *Gráfico de Hill* que nada mais é do que o gráfico da estimativa de um parâmetro como função de  $k$  (ele se denomina o Gráfico de Hill de forma, de escala ou de localização conforme se plota  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\sigma}$  ou  $\hat{\mu}$ ). A seguir, continuamos os nossos argumentos para o gráfico de forma, embora todos os outros apresentem as mesmas características.

Em decorrência dos problemas relatados anteriormente, o gráfico de Hill apresenta as seguintes propriedades [36]:

- se  $k$  é pequeno demais, o MLE usa pouco valores da amostra e o resultado fica extremamente sensível e há flutuações fortes de  $\hat{\gamma}$  para variações de  $k$ ;
- para valores intermediários de  $k$ , os valores das estimativas de  $\hat{\gamma}_{k,n}$  tendem a se estabilizar em torno do valor verdadeiro de  $\gamma$ ;
- se  $k$  é grande, então a pressuposição do modelo pode ser violada e ocorrer desvios de  $\hat{\gamma}_{k,n}$  em relação ao valor verdadeiro de  $\gamma$ .

Apesar dos problemas apontados, o Gráfico de Hill é a melhor ferramenta visual disponível para determinação do  $k$ -ótimo, ou em outras palavras, do ponto onde começa a cauda. Sua utilização pressupõe, no entanto, a existência de estabilidade na estimativa, que nem sempre ocorre. A existência de estabilidade na estimativa e a velocidade pela qual essa estabilidade é alcançada foram os aspectos do gráfico de Hill do parâmetro  $\gamma$  usados para analisar se as parametrizações dos índices BOVESPA e NASDAQ são de mesma dificuldade. A análise dos gráficos procurou identificar o que Embrechts et al. [13] (pág. 194) denominam de “Hill horror plot”: gráficos de Hill para o índice caudal que não apresentam estabilidade de estimativa ou são maus estimadores do valor do parâmetro verdadeiro (quando este é conhecido).

**Método automático** A leitura do gráfico de Hill pode ser “automatizada”. O Xtremes fornece um dos métodos de automação da leitura. Ele consiste na escolha do número de observações que minimiza o erro entre as estimativas do parâmetro de forma obtidas dentro de uma faixa de observações e a mediana das estimativas naquela faixa. Matematicamente, de acordo com [36], temos que para  $\gamma_{k,n}$  sendo estimativas do parâmetro de forma  $\gamma$  baseadas nos  $k$  excedentes e chamando a mediana de  $\gamma_{1,n}, \dots, \gamma_{k,n}$  de  $med(\gamma_{1,n}, \dots, \gamma_{k,n})$ , o que se procura é  $k^*$  que minimize:

$$\frac{1}{k} \sum_{i \leq k} i^\beta |\gamma_{i,n} - med(\gamma_{1,n}, \dots, \gamma_{k,n})| \quad (4.3)$$

onde  $0 \leq \beta \leq 1/2$  é um fator de suavização das séries de estimativas.

Reiss e Thomas [36] afirmam que esse método funciona “razoavelmente bem”, mas a prática indica que ele deve ser usado de forma complementar à análise visual. Não se trata de método suficientemente robusto para produzir, em qualquer amostra, estimativas melhores do que aquelas que se pode obter pela leitura do gráfico de Hill.

#### 4.5.4 Verificação da adequação do modelo

O Xtremes dispõe de um conjunto de ferramentas visuais para verificação do ajuste do modelo POT. Essas ferramentas são os gráficos da função da média e da mediana dos excessos, função distribuição acumulada e QQ-plot. Embora exijam julgamento do analista, essas técnicas estão entre as melhores disponíveis atualmente, como pode ser constatado em Embrechts et al. [13]. Vamos discutir aqui somente os gráficos das funções de média e mediana dos excessos que permitem verificar uma particularidade da função de distribuição Pareto Generalizada.

**Função da média dos excessos** A função de distribuição de Pareto generalizada possui uma característica particular, a saber: se a variável aleatória  $Y$  tem distribuição  $H_\gamma$ , então

$$e(u) := \mathbb{E}[Y - u | Y > u] = \frac{\sigma + \gamma u}{1 - \gamma}, \quad \sigma + \gamma u > 0. \quad (4.4)$$

Segue-se então que, caso  $F$  seja bem aproximada por  $H_\gamma$ , tem-se que:

$$e_F(u) := \mathbb{E}[Y - u | Y > u] \quad (4.5)$$

comporta-se aproximadamente, conforme  $u \rightarrow \infty$ , como a função  $(\sigma + \gamma u)/(1 - \gamma)$ . Esta propriedade sugere calcular a *média amostral dos excessos sobre o limiar  $u$*  como<sup>6</sup>:

$$e_{\hat{F}}(u) := \frac{\sum_{i \leq n} (x_i - u) I(u < x_i)}{\sum_{i \leq n} I(u < x_i)}, \quad \text{para } u \text{ entre } x_{1,n} \text{ e } x_{n,n}. \quad (4.6)$$

O gráfico da média dos excessos é construído plotando-se  $e_{\hat{F}}(u)$  como função de  $u$ . A função  $e_{\hat{F}}(u)$  pode ser usada tanto para confirmar a proximidade da cauda de  $F$  à distribuição de Pareto generalizada, quanto para inferir valores de parâmetros desta distribuição:  $e_{\hat{F}}(u)$  deve se comportar como uma função linear em  $u$ , caso haja a referida proximidade, e a tangente desta função linear é  $\gamma$ , enquanto o seu intercepto com o eixo das ordenadas é  $\sigma$ .

O gráfico da média dos excessos não é uma ferramenta precisa. Por isso, a inclinação da reta imaginária traçada a partir da função da média dos excessos amostrais não é utilizada para inferir o valor de  $\gamma$ , mas sim o seu sinal. Isso é equivalente a distinguir se a cauda de  $F$  é leve ou pesada, pois a sua inclinação zero corresponde à distribuição Exponencial, inclinação positiva à de Pareto, e inclinação negativa à de uma Beta. Esta ferramenta ocupou um lugar secundário em nossa pesquisa pois não encontramos estudos teóricos sobre suas qualidades. Em [13] os autores chamam a atenção quanto aos cuidados que se deve ter ao interpretar gráficos desse tipo. Explicam que, devido aos dados para cálculo de valores de  $u$  serem esparsos, os gráficos resultantes são muito sensíveis a mudanças nos dados em direção ao extremo da amostra. Sugerem o uso de versões mais robustas, como o gráfico da mediana dos excessos. Essa sugestão foi seguida nesta análise, em que privilegiamos as conclusões obtidas pelo gráfico da mediana dos excessos em razão dela ter se mostrado menos sensível à presença de extremos muito destacados.

#### 4.5.5 Testes do sinal de $\gamma$

A hipótese  $H_0 : \gamma = 0$  foi testada por 3 métodos, todos descritos em Reiss e Thomas [36]:

- técnica de bootstrap para construção de intervalo de confiança;

<sup>6</sup> $I(\cdot)$  uma função indicadora tal que  $I = 1$  se a condição é verdadeira e  $I = 0$  caso contrário.



- índice de verossimilhança com correção de Bartlett;
- teste de Hashofer-Wang.

Cada um desses testes forneceu um p-valor para a hipótese  $H_0 : \gamma = 0$  de cada uma das caudas de cada amostra. Os resultados obtidos foram consolidados nas Tabelas 5.3 e 5.5.

Cientes de que estamos trabalhando com um tamanho de amostra relativamente pequeno para fazer inferência usando a TVE e por não termos localizado pesquisas que comparassem a qualidade desses testes para análise de retornos financeiros, decidimos adotar um critério rigoroso para avaliação dos resultados dos testes de  $H_0 : \gamma = 0$ . Tomamos a decisão quanto a forma da cauda analisada apenas em situações em que os p-valores dos testes concordaram entre si para níveis de significância  $\leq 1\%$  ou  $\geq 10\%$ . Assim:

- **aceitamos**  $H_0 : \gamma = 0$  quando o menor entre os 3 p-valores estimados (aquele que indica maior chance de rejeição de  $H_0$ ) foi maior do que 0,1 (exigimos assim 90% de confiança, um nível que facilita a rejeição de  $H_0$ ) ou;
- **rejeitamos**  $H_0 : \gamma = 0$  quando o maior entre os 3 p-valores estimados (aquele que indica maior chance de aceitação de  $H_0$ ) foi menor do que 0,01 (exigimos assim 99% de confiança, um nível que facilita a aceitação de  $H_0$ ).

Desconsideramos todas as estimativas de  $\gamma$  cujos testes não obedeceram ao critério acima.

## 4.6 Procedimento experimental

Resumimos, a seguir, o procedimento de análise adotado. Ressaltamos que, por serem muitos, nem todos os gráficos citados não constam deste relatório. Os resultados obtidos pela aplicação deste procedimento encontram-se no Capítulo 5 e as conclusões de nossa análise no Capítulo 6.

### 1. Análise exploratória

- Para todas as amostras:
  - Gerar estatísticas descritivas para análise principalmente da curtose;
  - Gerar box-plot para análise da presença de extremos e outliers em cada amostra;
  - Verificar se algum dos extremos deve ser excluído de acordo com a Seção 4.5.1.
- Para cada uma das caudas (a análise da cauda esquerda é feita invertendo os sinais dos dados analisando os extremos superiores da amostra transformada):
  - Gerar os seguintes gráficos contendo todas as amostras:
    - Função empírica da média dos excessos;
    - Função empírica da mediana dos excessos;
    - Hill plot para  $\alpha$  e  $\gamma$  usando o método MLE para modelos GP<sup>7</sup>;
  - Comparar as amostras para identificar existência de padrões de comportamento.

### 2. Seleção de $k$ - Para cada uma das caudas de cada amostra :

<sup>7</sup>A representação por  $\gamma$  ( $= 1/\alpha$ ) pode ser interessante quando  $\alpha$  for muito elevado e fizer  $\gamma$  tender a zero. Para valores menos elevados, a representação por  $\alpha$  proporciona melhor leitura do gráfico.



- (a) Gerar estimativa automática de  $k$  pelo Xtremes usando o método MLE para modelo GP;
- (b) Se a geração de estimativa automática de  $k$  for não bem-sucedida (o algoritmo pode não convergir a uma solução) ou tiver sido julgada não adequada (por ser incompatível com a análise dos gráficos), estimar  $k$  usando o Hill plot gerado em 1(b)iC e escolhendo como  $k$ -ótimo o menor número de estatísticas de ordem em que a estimativa de  $\alpha$  (ou  $\gamma$ ) já apareça como estável.

**3. Verificação da adequação do modelo** - Para cada  $k$  selecionado:

- (a) Gerar estimativa de modelo GP por MLE para o  $k$  selecionado e, a partir dessa estimativa:
  - i. Gerar as funções da média e da mediana dos excessos estimadas pelo  $k$  selecionado e plotá-las sobre seus correspondentes empíricos. Verificar discrepâncias das funções estimadas em relação às observadas empiricamente;
  - ii. Gerar a função distribuição acumulada estimada pelo  $k$  selecionado e plotá-la sobre a distribuição empírica. Verificar discrepâncias na cauda superior;
  - iii. Gerar QQ-Plot para verificar adequação das estimativas de  $\sigma$  e  $\mu$ ;
- (b) Aceitar o  $k$  selecionado automaticamente se 3(a)i, 3(a)ii e 3(a)iii forem julgados adequados e prosseguir para 4. Se não, rejeitar a seleção e retornar a 2b.

**4. Testes de  $H_0 : \gamma = 0$**  - Usando o  $k$  selecionado na etapa anterior:

- (a) Gerar intervalo de confiança para  $\gamma$  por bootstrap (1.000 réplicas). Encontrar o maior nível de confiança para o qual o intervalo de  $\gamma$  ainda é diferente zero. Anotar o p-valor (nível de significância) de  $H_0 : \gamma = 0$ ;
- (b) Executar os testes de índice de verossimilhança com correção de Bartlett e de Hashofer-Wang. Anotar os p-valores de  $H_0 : \gamma = 0$ .

**5. Critério para utilização dos resultados dos testes de  $H_0 : \gamma = 0$**  - Para cada um dos  $\gamma$  estimados em cada amostra:

- (a) Testar se o maior p-valor entre os testes bootstrap, índice de verossimilhança e Hashofer-Wang é menor do que 0.01. Caso isso ocorra, então a estimativa é considerada do tipo Pareto ou Beta dependendo de seu sinal;
- (b) Se 5a não produzir conclusão, testar se o menor p-valor entre os testes bootstrap, índice de verossimilhança e Hashofer-Wang é maior do que 0.1. Caso isso ocorra, então a estimativa é considerada do tipo Exponencial;
- (c) Se 5a e 5b não produzirem uma conclusão, desconsiderar a estimativa de  $\gamma$  na análise dos resultados.

## Capítulo 5

# Resultados da análise

### 5.1 IBOVESPA

#### 5.1.1 Gráficos da proporção acumulada de retornos ordenados distribuídos por dias da semana

As Figuras 5.1 e 5.2 apresentam os gráficos descritos na Seção 4.5.1. Estes gráficos permitem verificar que a distribuição dos maiores (e menores) retornos não é a mesma em toda a extensão dos dados ordenados. Se não houvesse qualquer efeito de dia da semana na distribuição dos retornos, seria de se esperar que todos os  $p_{i,m}$  estivessem próximos a 0,2. Mas verificamos uma tendência de afastamento dessa proporção quando se caminha em direção aos eventos mais raros (tanto maiores quanto menores).

A Figura 5.2 permite verificar que as segundas e quintas-feiras contribuem com uma proporção maior entre os menores retornos da amostra (cauda esquerda). De forma não tão clara, a Figura 5.1 indica uma menor participação das segundas entre os maiores retornos.

Note-se que há, portanto, uma evidência preliminar de anomalia na distribuição dos retornos extremos por dia da semana. Estes gráficos não nos permitem, porém, concluir que as caudas das distribuições tenham parâmetro de forma diferentes. Eles só indicariam que as distribuições possuem parâmetro de forma (ou índice caudal) diferentes se soubéssemos que estas distribuições possuem mesmos parâmetros de localização e escala. Na ausência desta informação, nenhuma afirmação pode ser feita quanto ao parâmetro de forma.

#### 5.1.2 Análise exploratória

A Figura 5.3 ilustra o box-plot da amostra de retornos diários do IBOVESPA no período de janeiro/1986 a fevereiro/2001 e também esses retornos agrupados por dias da semana. As duas observações mais extremas na cauda esquerda correspondem aos dias 20/3/1990 (terça-feira) e 21/3/1990 (quarta-feira) e são efeitos da decretação do Plano Collor. Das quatro maiores observações da amostra, 2 são relativas a recuperação das perdas do Plano Collor, ocorridas um mês após a decretação daquele plano, nos dias 3/4/1990 (terça-feira) e 17/4/1990 (terça-feira). As outras duas são efeitos de mudança abrupta no câmbio nos dias 10/3/1995 (sexta-feira) e 15/1/1999 (sexta-feira). Estas observações foram excluídas de acordo com o exposto na Seção 4.5.1.

Outro box-plot está na Figura 5.4, o qual permite a comparação das distribuições nos períodos pré e pós Plano Real. Neste caso, analisamos não separamos as distribuições por dias da semana nos dois períodos. A quantidade de observações é insuficiente para uma análise deste tipo.

A Tabela 5.1 apresenta as estatísticas descritivas das amostras dos retornos diários do IBOVESPA. A Tabela 5.2 mostra as estatísticas descritivas dos retornos diários do IBOVESPA, período janeiro/1968 a fevereiro/2001 e sem 6 extremos destacados. As conclusões extraídas destes resultados estão no Capítulo 6.

### 5.1.3 Parâmetros estimados

A obtenção das estimativas dos parâmetros obedeceu ao descrito na seção 4.6. Os resultados da análise pela TVE estão consolidados na Tabela 5.3. Esta tabela também apresenta os resultados dos 3 testes (Hashofer-Wang, Índice de Verossimilhança e intervalo de confiança por bootstrap) da hipótese  $H_0 : \gamma = 0$ .

### 5.1.4 Gráficos de Hill do parâmetro $\gamma$

Apresentamos, nas Figuras 5.5 a 5.10 os gráficos de Hill do parâmetro  $\gamma$  para a cauda direita dos retornos diários IBOVESPA (com e sem separação por dia da semana). Embora tenhamos utilizado os gráficos de Hill na determinação de  $k$ -ótimo, a ilustração destes gráficos não tem a função de justificar sua leitura para a determinação do valor de  $k$ . Isto porque o procedimento experimental adotado já foi descrito e a demonstração da leitura exigiria a apresentação de todos os gráficos suplementares utilizados (versões do gráfico de Hill com “zoom” em determinada área ou com o inverso do índice  $\gamma$ , o parâmetro de forma, nas situações convenientes). A utilidade desses gráficos, limitados aqui às caudas direitas das distribuições, é apenas a de subsidiar a análise de se o IBOVESPA é mais propenso a apresentar “horror plots” do que o NASDAQ composto.

Figura 5.1: IBOVESPA - Distribuição das ocorrências dos retornos acumulados ordenados do maior para o menor

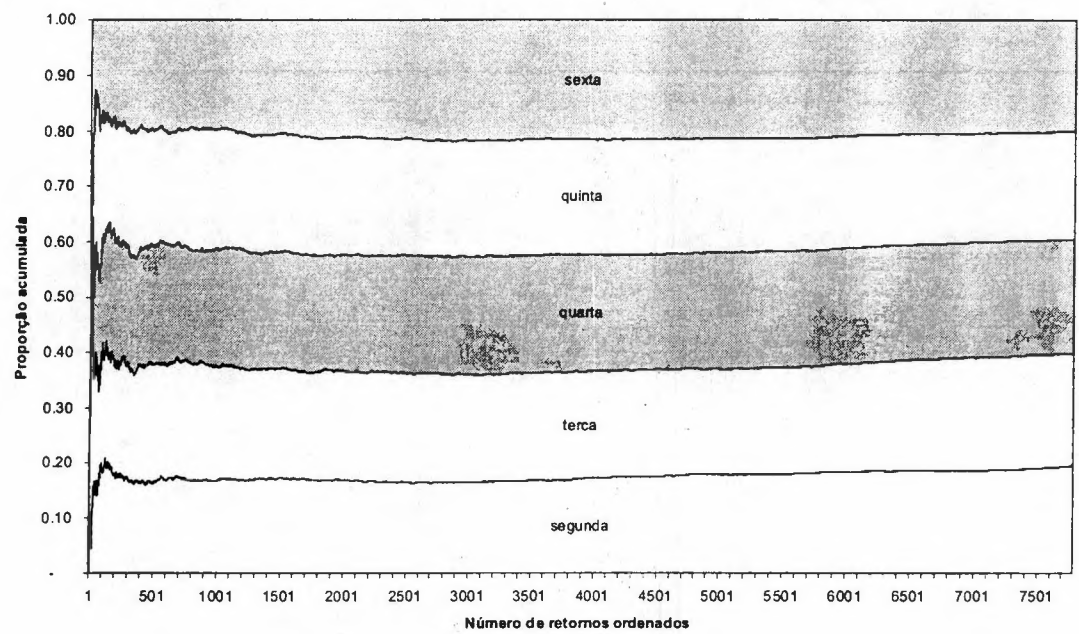


Figura 5.2: IBOVESPA - Distribuição das ocorrências dos retornos acumulados ordenados do menor para o maior

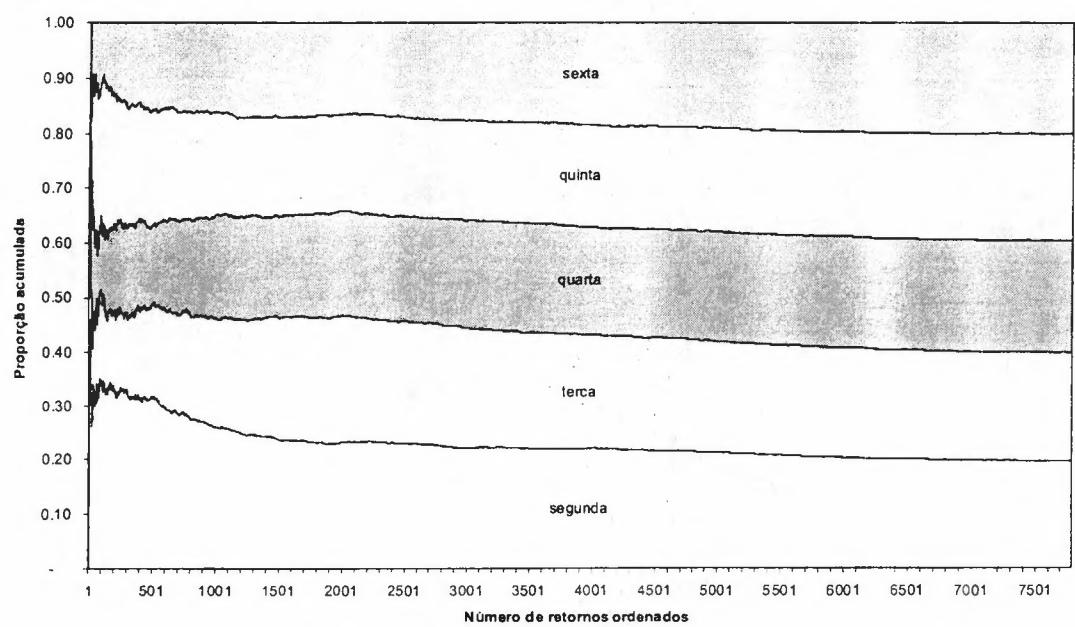


Figura 5.3: Box-plot dos retornos do IBOVESPA por dias da semana

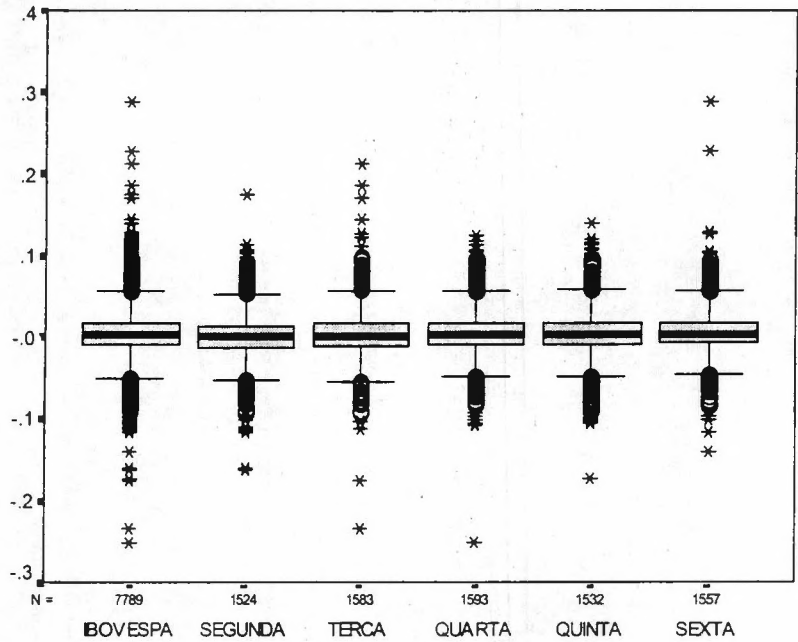


Tabela 5.1: IBOVESPA - Estatísticas descritivas das amostras de retornos diários.

	IBOVESPA*	PRÉ-REAL	PÓS-REAL	IBOVESPA
N	7789	6217	1566	7783
Mínimo	-0.25193	-0.17595	-0.17229	-0.17595
Máximo	0.28818	0.17535	0.17129	0.17535
Média	0.00376	0.00453	0.00048	0.00371
Desvio-padrão	0.02846	0.02776	0.02728	0.02771
Assimetria	0.20389	0.20693	-0.28932	0.11288
Erro-padrão	0.02775	0.03106	0.06184	0.02776
Assimetria/Erro padrão	7.3474	6.6623	-4.6785	4.0663
Curtose	6.46746	2.9052	4.74567	3.27557
Erro-padrão	0.05549	0.06211	0.1236	0.05551
Curtose/Erro-padrão	116.5518	46.7751	38.3954	59.0086

Observações sobre a Tabela 5.1:

1. a proporção Assimetria/Erro-padrão  $> 2$  ou  $< -2$  indica que a amostra é significativamente assimétrica;
2. a curtose está expressa como o excesso de curtose em relação à Normal. Assim, o valor zero é a curtose da distribuição Normal. A proporção Curtose/Erro-padrão  $> 2$  indica curtose amostral maior do que a curtose Normal.

Figura 5.4: Box-plot dos retornos do IBOVESPA pré e pós Plano Real

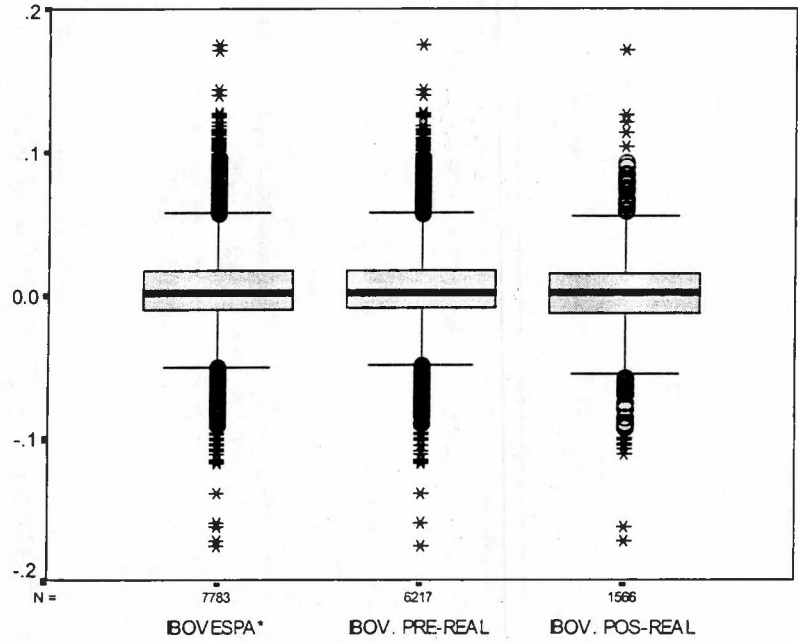


Tabela 5.2: IBOVESPA - Estatísticas descritivas das amostras de retornos por dias da semana.

	SEGUNDA	TERÇA	QUARTA	QUINTA	SEXTA
N	1524	1580	1592	1532	1555
Mínimo	-0.16224	-0.17595	-0.10753	-0.17229	-0.13931
Máximo	0.17535	0.17129	0.12544	0.1403	0.12788
Média	-0.00026	0.00336	0.00507	0.00481	0.0055
Desvio-padrão	0.02965	0.02733	0.02652	0.02893	0.02567
Assimetria	-0.10356	0.44702	0.32018	-0.03091	0.11838
Erro-padrão	0.06268	0.06157	0.06133	0.06252	0.06206
Assimetria/Erro padrão	-1.6522	7.2604	5.2206	-0.4944	1.9075
Curtose	3.31265	4.12651	2.40745	3.24259	2.82457
Erro-padrão	0.12529	0.12305	0.12259	0.12496	0.12403
Curtose/Erro-padrão	26.4399	33.5352	19.6382	25.9490	22.7733

Observações sobre a Tabela 5.2:

1. a proporção Assimetria/Erro-padrão  $> 2$  ou  $< -2$  indica que a amostra é significativamente assimétrica;
2. a curtose está expressa como o excesso de curtose em relação à Normal. Assim, o valor zero é a curtose da distribuição Normal. A proporção Curtose/Erro-padrão  $> 2$  indica curtose amostral maior do que a curtose Normal.



Tabela 5.3: IBOVESPA - parametrização das caudas dos retornos diários por Pareto Generalizada.

Cauda	Amostra	k	Parâmetros da GPD			limite à direita	P-valor de $H_0 : \gamma = 0$		
			$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		bootstrap	LR-BC	H-W
Direita	IBOVESPA	1700	0.0370	-0.0106	0.019	0.514	0.15	0.08	0.04
	PRÉ-REAL	366	-0.0435	-0.0111	0.023		0.25	0.45	0.42
	PÓS-REAL	280	0.1626	0.0003	0.010		0.04	0.00	0.01
	IBOVESPA*	1840	-0.0202	-0.0131	0.022	1.066	0.45	0.42	0.42
	Segundas	520	-0.0006	-0.0153	0.021	37.632	0.90	1.00	0.99
	Terças	98	0.0742	-0.0012	0.015	0.174	0.77	0.41	0.43
	Quartas	106	-0.1890	-0.0403	0.040		0.02	0.13	0.15
	Quintas	480	0.0000	-0.0104	0.021		0.90	1.00	0.98
	Sextas	248	-0.0839	-0.0160	0.025	0.280	0.15	0.25	0.25
Esquerda	IBOVESPA	700	0.0826	-0.0133	0.015		0.04	0.01	0.00
	PRÉ-REAL	788	0.0057	-0.0199	0.019		0.90	0.86	0.89
	PÓS-REAL	190	0.1381	-0.0049	0.013		0.15	0.05	0.08
	IBOVESPA*	1050	0.0400	-0.0158	0.017	2.922	0.20	0.19	0.20
	Segundas	167	0.0294	-0.0101	0.019		0.83	0.66	0.68
	Terças	396	0.1163	-0.0050	0.011		0.05	0.01	0.01
	Quartas	290	0.0305	-0.0135	0.015		0.65	0.59	0.62
	Quintas	224	-0.0078	-0.0264	0.023		0.85	1.00	0.94
	Sextas	729	0.0339	-0.0146	0.016		0.45	0.33	0.32

Observações sobre a Tabela 5.3:

1. IBOVESPA refere-se à amostra com todas as observações. Das demais amostras foram extraídos extremos relativos a efeitos mudanças estruturais da economia, como explicado na Seção 4.5.1:
2. LR - BC indica índice de verossimilhança com correção Bartlett e H-W o teste de Hashofer-Wang.

Figura 5.5: Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

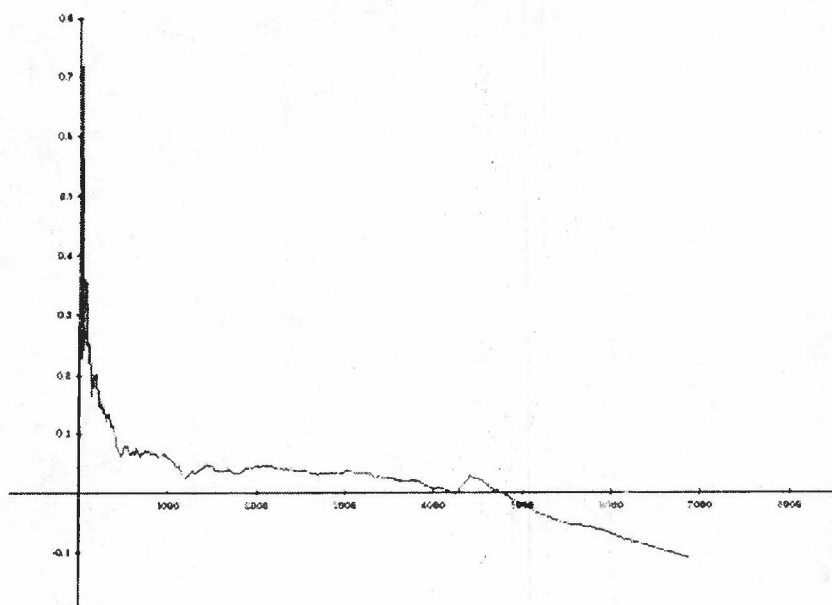


Figura 5.6: Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às segundas-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

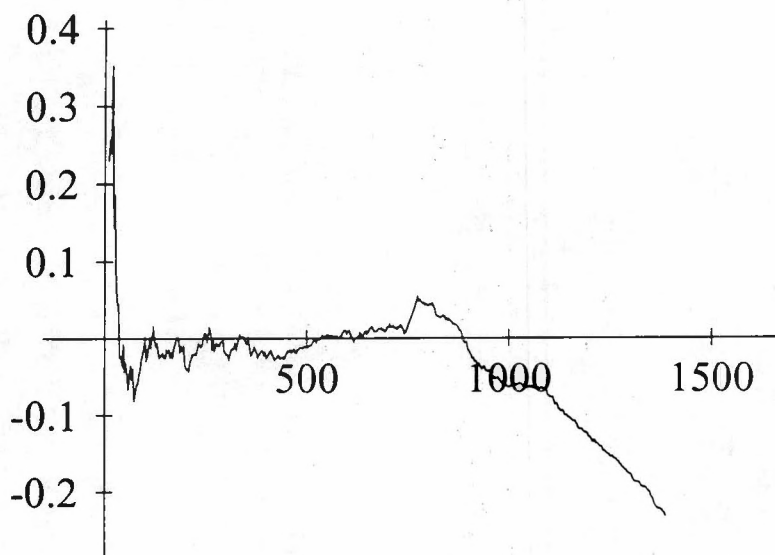


Figura 5.7: Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às terças-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

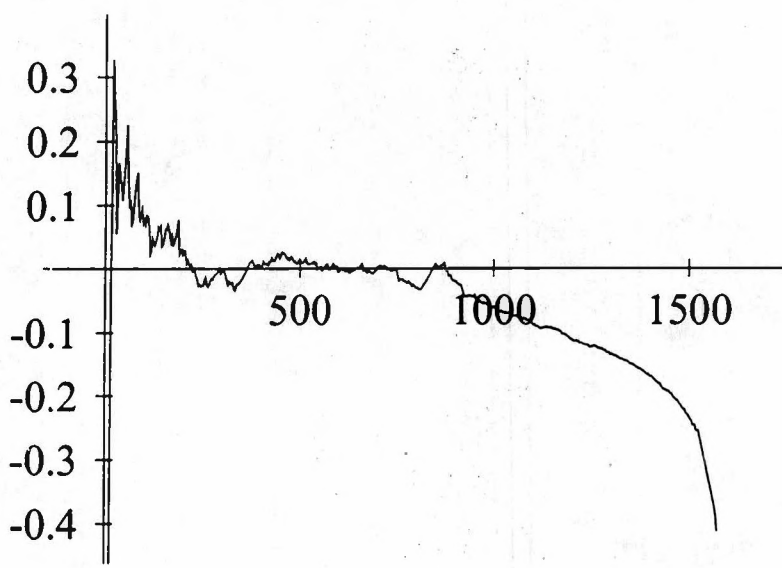


Figura 5.8: Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às quartas-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

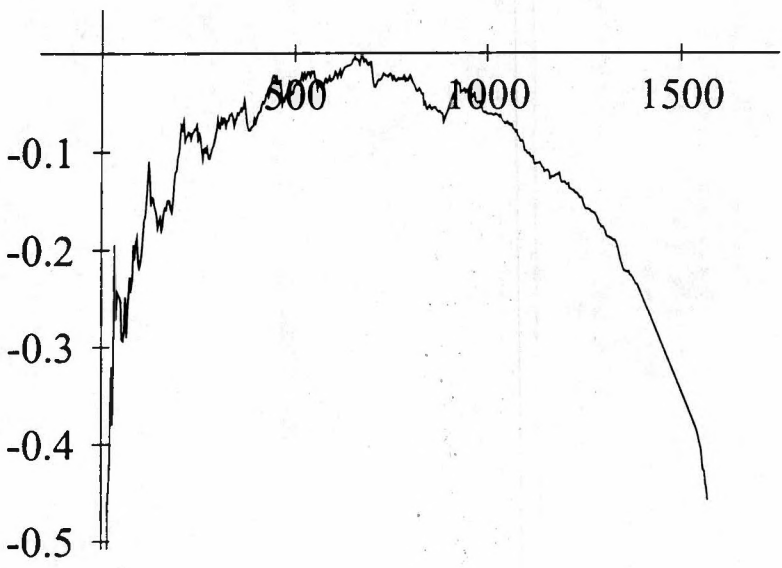


Figura 5.9: Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às quintas-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

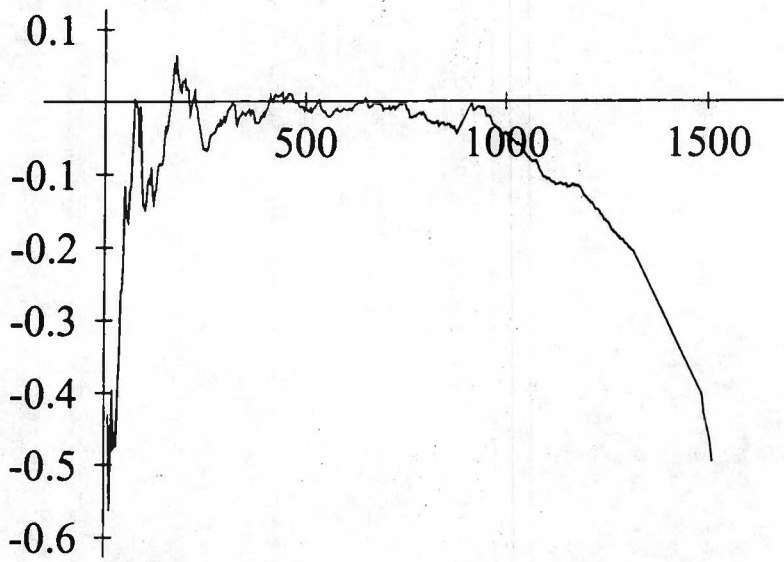
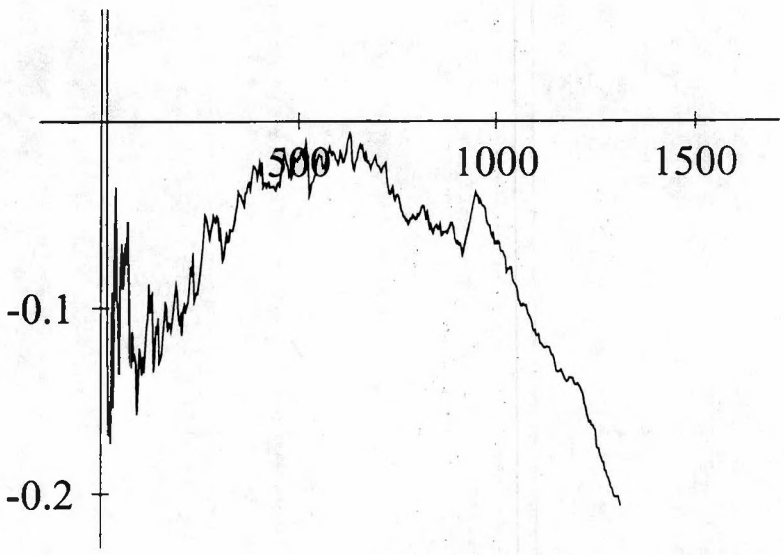


Figura 5.10: Gráfico de Hill para os retornos do Ibovespa às sextas-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.



## 5.2 NASDAQ composto

### 5.2.1 Gráficos da proporção acumulada de retornos ordenados distribuídos por dias da semana

A análise da Figura 5.11 indica que as segundas-feiras contribuem com uma proporção menor entre os maiores retornos (cauda direita), contrariamente às sextas, que contribuem com uma proporção maior. Já a Figura 5.12 indica uma maior proporção das segundas entre os menores retornos.

A ressalva feita na Seção 5.1.1 sobre a deficiência destes gráficos para fazer inferência sobre o parâmetro de forma das caudas permanece válida para as Figuras 5.11 e 5.12. O que se tem aqui é apenas uma evidência preliminar de anomalia dos retornos por dia da semana, a qual pode, ou não, ser devida a diferentes parâmetros de forma nas distribuições dos retornos por dias da semana.

### 5.2.2 Análise exploratória

A Figura 5.13 mostra o box-plot das distribuições dos retornos do NASDAQ composto por dias da semana. A leitura do gráfico permite identificar comportamento diferente da cauda esquerda das segundas-feiras em relação às caudas esquerdas das terças, quartas e quintas, principalmente. Já pelo lado direito, as terças e sextas apresentam maior concentração de observações extremas que as diferenciam dos demais dias da semana.

A Tabela 5.4 apresenta as estatísticas descritivas dos retornos diários do índice NASDAQ composto e de seus retornos por dia da semana. Da análise conjunta da Figura 5.13 e da Tabela 5.4 podemos inferir que os altos valores de curtose e assimetria observados na quarta-feira são devidos a duas observações extremas na cauda direita e que devem dificultar a modelagem desta cauda por GPD (sensibilidade da cauda a extremos muito destacados).

### 5.2.3 Parâmetros estimados

A obtenção das estimativas dos parâmetros obedeceu ao descrito na seção 4.6. Os resultados da análise pela TVE estão consolidados na Tabela 5.5. Esta tabela também apresenta os resultados dos 3 testes (Hashofer-Wang, Índice de Verossimilhança e intervalo de confiança por bootstrap) da hipótese  $H_0 : \gamma = 0$ .

### 5.2.4 Gráficos de Hill do parâmetro $\gamma$

Apresentamos, nas Figuras 5.14 a 5.19 os gráficos de Hill do parâmetro  $\gamma$  para a cauda direita dos retornos diários NASDAQ composto (com e sem separação por dia da semana). Assim como no caso do IBOVESPA, estes gráficos são usados apenas para subsidiar a comparação de presença de “horror plots” entre IBOVESPA e NASDAQ composto.

Figura 5.11: NASDAQ composto - Distribuição das ocorrências dos retornos acumulados ordenados do maior para o menor

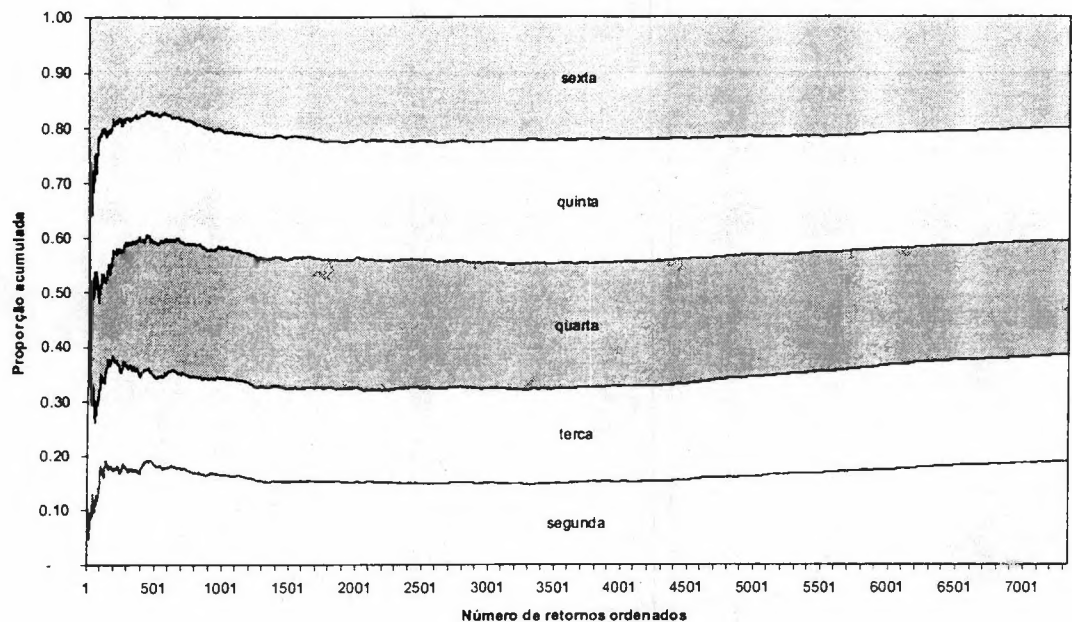


Figura 5.12: NASDAQ composto - Distribuição das ocorrências dos retornos acumulados ordenados do menor para o maior

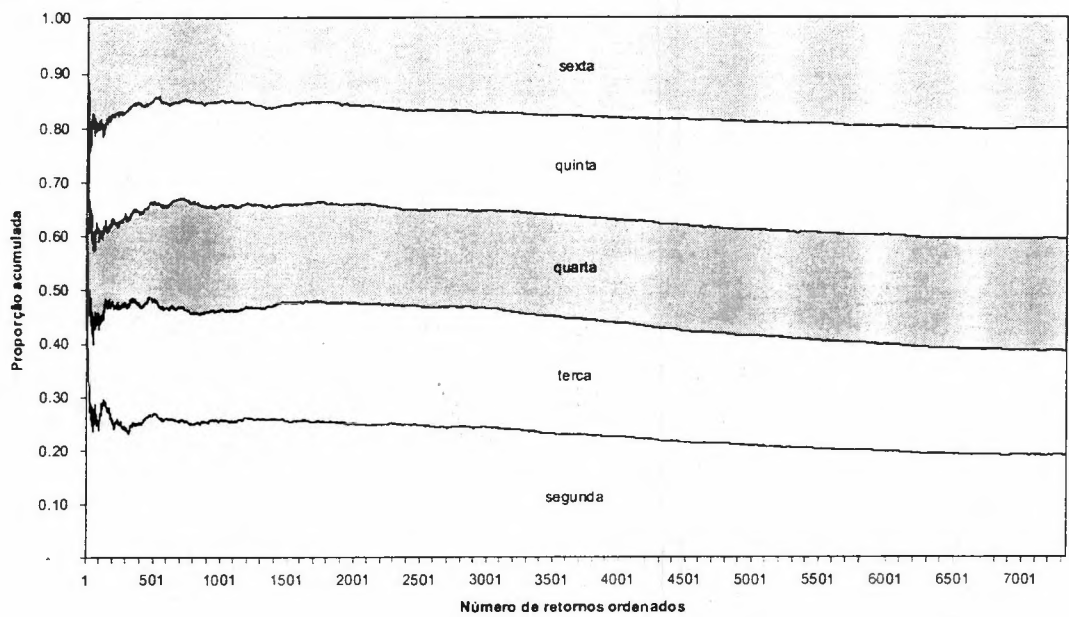




Figura 5.13: Box-plot dos retornos do NASDAQ por dias da semana

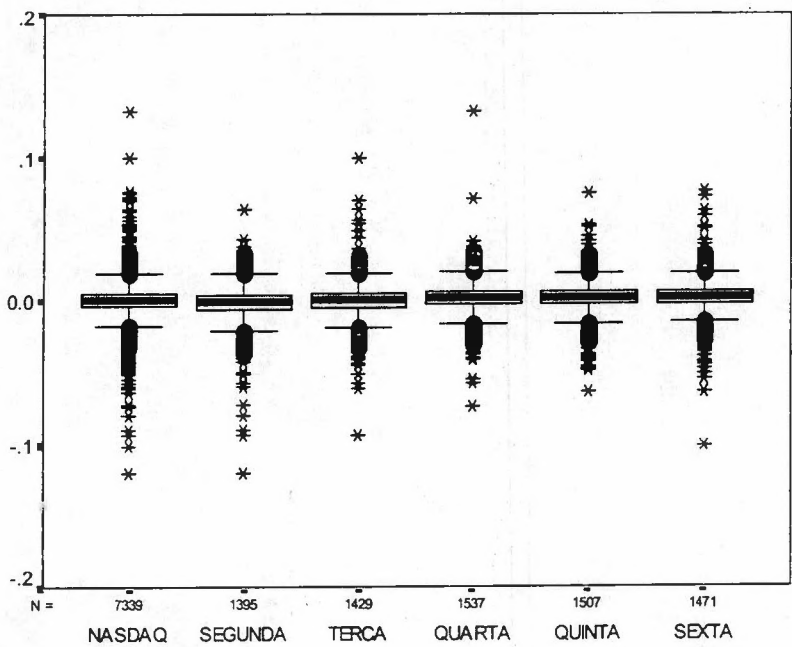


Tabela 5.4: NASDAQ composto - estatísticas descritivas dos retornos diários.

	NASDAQ	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
N	7339	1395	1429	1537	1507	1471
Mínimo	-0.1205	-0.1205	-0.0943	-0.0739	-0.0635	-0.1017
Máximo	0.1326	0.0635	0.0996	0.1326	0.0750	0.0758
Média	0.0004	-0.0014	-0.0002	0.0013	0.0011	0.0014
Desvio-padrão	0.0108	0.0117	0.0109	0.0105	0.0103	0.0105
Assimetria	-0.5840	-2.0590	0.0420	0.4500	-0.2930	-0.6080
Erro-padrão	0.0290	0.0660	0.0650	0.0620	0.0630	0.0640
Assimetria/Erro padrão	-20.1379	-31.1970	0.6462	7.2581	-4.6508	-9.5000
Curtose	15.4670	17.0410	13.9760	22.4610	6.5580	15.1130
Erro-padrão	0.0570	0.1310	0.1290	0.1250	0.1260	0.1280
Curtose/Erro-padrão	271.3509	130.0840	108.3411	179.6880	52.0476	118.0703

Tabela 5.5: NASDAQ composto - parametrização das caudas dos retornos diários por Pareto Generalizada.

Cauda	Amostra	k	Parâmetros da GPD			limite à direita	P-valor de $H_0 : \gamma = 0$		
			$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		bootstrap	LR-BC	H-W
Direita	NASDAQ	480	0.2356	-0.0010	0.0035		0.00	-	-
	Segundas	441	0.0661	-0.0039	0.0055		0.20	0.13	0.12
	Terças	258	0.3156	0.0002	0.0027		0.00	-	-
	Quartas	411	0.2044	0.0003	0.0036		0.00	-	-
	Quintas	105	0.1204	-0.0047	0.0056		0.38	0.21	0.25
	Sextas	330	0.3798	0.0022	0.0021		0.00	-	-
Esquerda	NASDAQ	2374	0.1932	-0.0043	0.0050		0.00	-	-
	Segundas	423	0.2470	-0.0023	0.0048		0.00	-	-
	Terças	90	0.1089	-0.0064	0.0066		0.60	0.21	0.17
	Quartas	230	0.2256	0.0005	0.0034		0.02	-	-
	Quintas	64	-0.0821	-0.0220	0.0141	0.1503	0.35	0.71	0.68
	Sextas	21	0.1081	-0.0156	0.0081		0.98	0.53	0.54

Observação sobre a Tabela 5.5: LR - BC indica índice de verossimilhança com correção Bartlett e H-W o teste de Hashofer-Wang.

Figura 5.14: Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

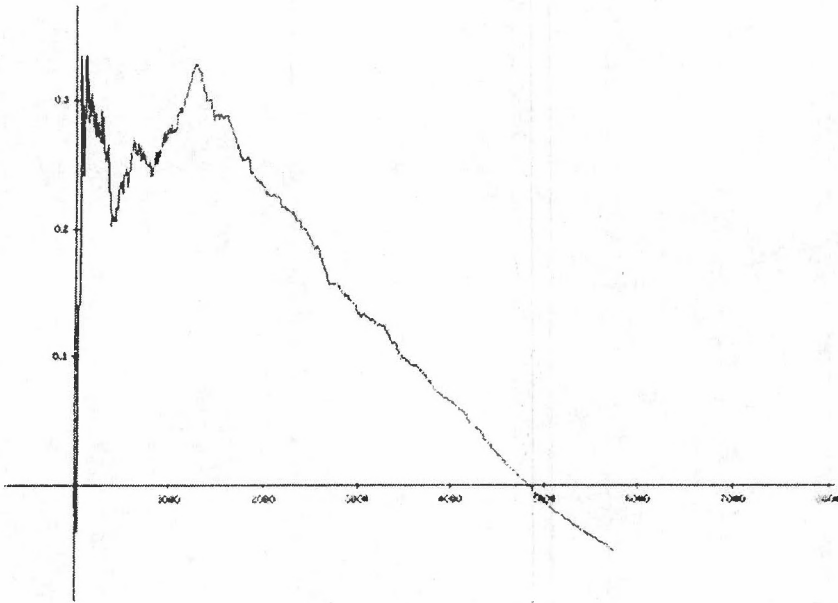


Figura 5.15: Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às segundas-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

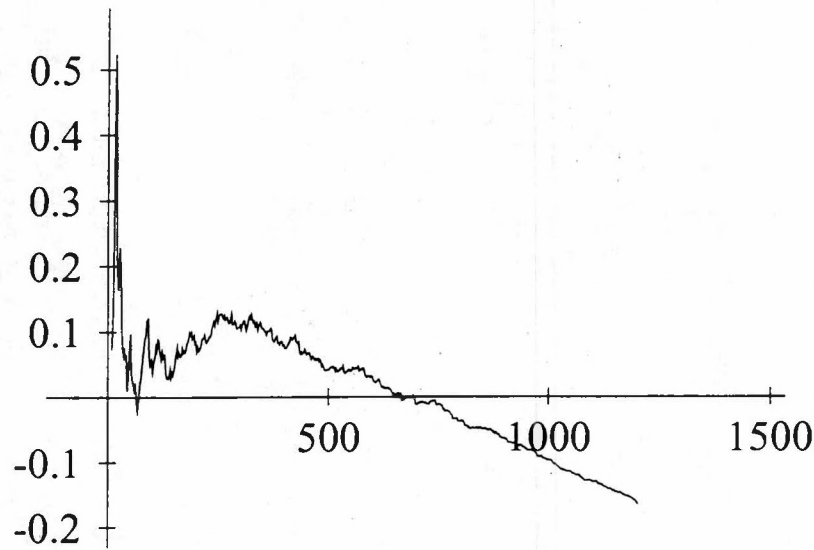


Figura 5.16: Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às terças-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

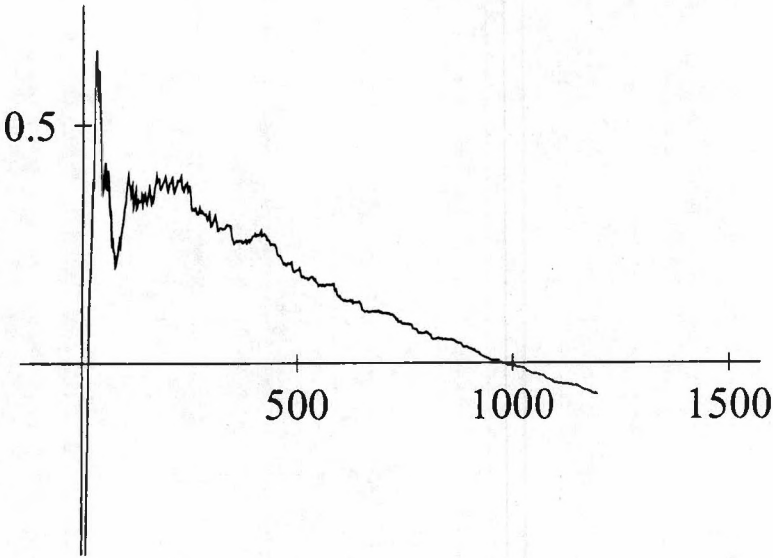


Figura 5.17: Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às quartas-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

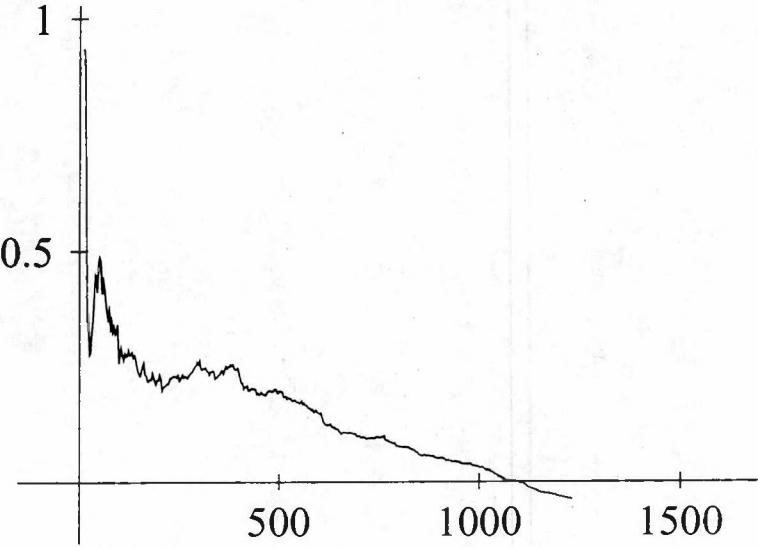


Figura 5.18: Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às quintas-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.

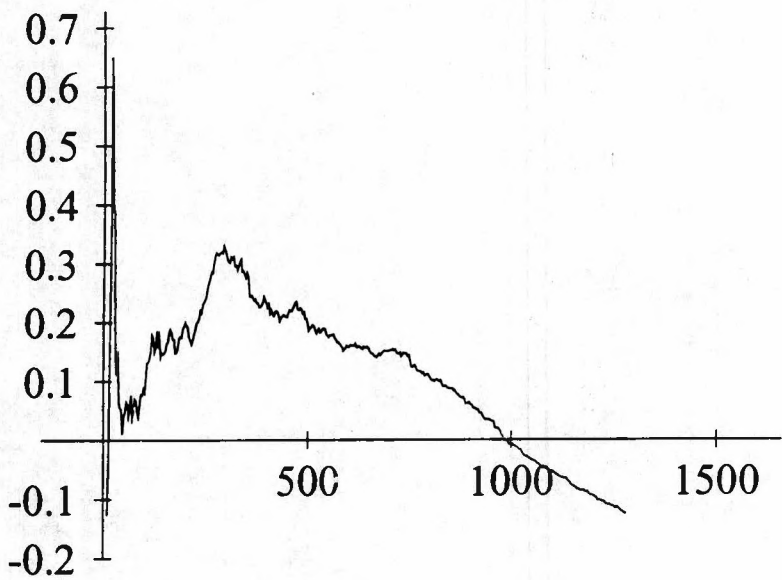
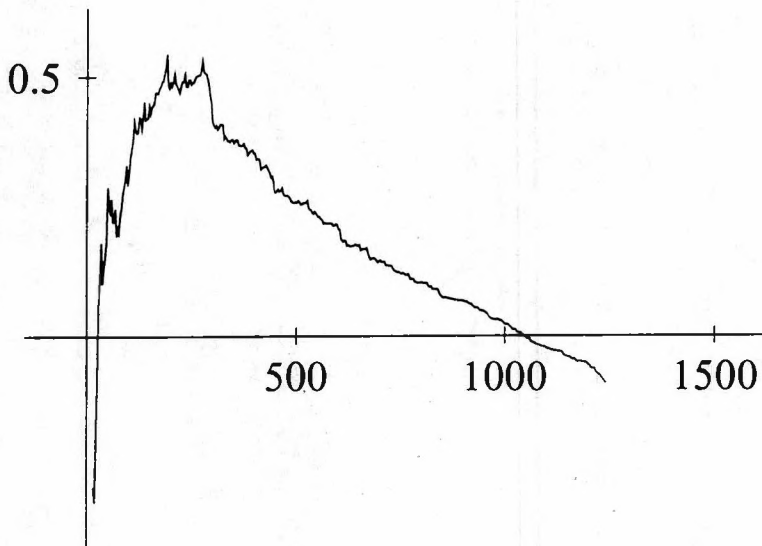


Figura 5.19: Gráfico de Hill para os retornos do Nasdaq às sextas-feiras (cauda direita). Estimativas de  $\gamma$  x número de excedentes utilizados em seu cálculo.



## Capítulo 6

# Conclusões

Este ensaio propôs-se a responder uma questão central: as caudas (definidas por seus índices caudais) da função de distribuição dos retornos de um determinado mercado acionário são as mesmas em todos os dias da semana? Além desta questão central, que procuramos responder sobre os casos do IBOVESPA e do NASDAQ composto, outras foram formuladas ao longo da pesquisa:

1. Existe assimetria entre as caudas (caudas de retornos esquerda e direita de tipos diferentes)?
2. Os índices caudais dos retornos diários do IBOVESPA são os mesmos nos períodos pré e pós Plano Real?
3. Os nossos resultados poderiam ter sido alcançados pela simples análise da curtose?
4. Se os retornos diários do índice NASDAQ composto são, à primeira vista, mais bem comportados do que os do IBOVESPA, então sua parametrização é mais “fácil” e suas caudas são mais “finas” do que as do IBOVESPA?

Expomos, a seguir, as nossas conclusões sobre essas questões. Elas foram extraídas dos resultados apresentados no Capítulo 5. gerados e analisados conforme descrito na Seção 4.6.

Os resultados julgados consistentes de acordo com o critério estabelecido na Seção 4.5.5 estão ilustrados nas Tabelas 6.1 e 6.2.

### 6.1 IBOVESPA

**Tipos de caudas do IBOVESPA** A amostra de retornos do IBOVESPA no período janeiro/1968 a fevereiro/2001, com exclusão de extremos destacados, apresentou caudas do tipo Exponencial. Este resultado é compatível ao obtido por Ferreira [14], que trabalhou com amostra sem exclusão de extremos, e contradiz o de Jondeau e Rockinger [20].

**Efeito de dia da semana** Os retornos do IBOVESPA não mostram claramente efeito de dia da semana sobre as caudas. Não houve estimativas consistentes de  $\gamma \neq 0$ . Todas as caudas cujas estimativas foram julgadas consistentes foram do tipo Exponencial. Este resultado é similar ao da pesquisa elaborada mais recentemente por Ceretta e Costa Jr. [1], que não identificaram efeito da sazonalidade diária dos retornos no mercado brasileiro.



Tabela 6.1: IBOVESPA - Formas das caudas de cada amostra segundo as estimativas de  $\gamma$  julgadas consistentes.

Cauda	Amostra	$\gamma < 0$	$\gamma = 0$	$\gamma > 0$
Direita	IBOVESPA			
	PRÉ-REAL		X	
	PÓS-REAL			
	IBOVESPA*		X	
	Segundas		X	
	Terças		X	
	Quartas			
	Quintas		X	
	Sextas		X	
Esquerda	IBOVESPA			
	PRÉ-REAL		X	
	PÓS-REAL			
	IBOVESPA*		X	
	Segundas		X	
	Terças			
	Quartas		X	
	Quintas		X	
	Sextas		X	

**Períodos pré e pós Plano Real** Os box-plot pré e pós Plano Real são muito semelhantes, conforme se verifica na Figura 5.4, o que indica que não ter havido mudança de comportamento. Uma análise mais rigorosa, baseada nos resultados das estimativas dos índices caudais para a distribuição do IBOVESPA nesses dois períodos não é, no entanto, tão conclusiva. Obtivemos estimativas consistentes apenas para o período pré Plano Real, o qual se mostrou consistentemente do tipo Exponencial, tanto para a cauda direita quanto para a esquerda. No período pós Plano Real não conseguimos estimativas consistentes para  $\gamma$ .

**Os nossos resultados poderiam ter sido alcançados pela simples análise da curtose?** Certamente, não. A curtose não permite interpretar o peso das caudas distinguindo entre as caudas direita e esquerda de uma distribuição. A assimetria de comportamento das caudas não poderia, portanto, ser verificada. Além disso, as medidas de curtose estimadas indicaram caudas mais grossas do que a Normal em todas as amostras de retornos do IBOVESPA analisadas.

## 6.2 NASDAQ Composto

**Tipos de caudas do NASDAQ** As estimativas de  $\gamma$  da amostra de retornos diários do NASDAQ composto no período de janeiro/1985 a fevereiro/2001 mostraram-se consistentemente positivas para as caudas direita e esquerda. Este resultado, de caudas do tipo Pareto, é consistente com a literatura sobre caudas de distribuições de retornos no mercado acionário norte-americano. Também é compatível com as conclusões obtidas por Longin [28] e por Jondeau e Rockinger [20] sobre outros índices do mercado acionário norte-americano.

Tabela 6.2: NASDAQ - Formas das caudas de cada amostra segundo as estimativas de  $\gamma$  julgadas consistentes.

Cauda	Amostra	Beta $\gamma < 0$	Exponencial $\gamma = 0$	Pareto $\gamma > 0$
Direita	NASDAQ			X
	Segundas		X	
	Terças			X
	Quartas			X
	Quintas		X	
	Sextas			X
Esquerda	NASDAQ			X
	Segundas			X
	Terças		X	
	Quartas			
	Quintas		X	
	Sextas		X	

**Efeito de dia da semana** Nossa análise revelou também que as distribuições dos retornos por dia da semana nem sempre são do tipo Pareto. Existe, portanto, o efeito dia semana. A segunda-feira apresenta-se com cauda fina à direita e é o único dia da semana com cauda grossa à esquerda. Assim, pode-se interpretar que a segunda-feira é mais sujeita a baixas extremas do que altas extremas. Pode-se inferir também que a cauda grossa à esquerda dos retornos diários do NASDAQ composto é devida principalmente ao efeito das segundas-feiras sobre o índice. A quinta-feira pode ser considerada como o dia tipicamente mais tranquilo do NASDAQ, pois é a única que possui cauda fina tanto à direita quanto à esquerda. Terça-feira, quarta-feira e sexta-feira foram os dias responsáveis pela cauda do tipo Pareto do NASDAQ à direita. São esses os dias que mostram maior probabilidade de altas extremas.

Comparando nossos resultados com os da literatura sobre efeitos do dia da semana nos retornos de mercados acionários, vemos que as caudas do NASDAQ comportam-se de forma semelhante à literatura revisada sobre o comportamento da média dos retornos por dias da semana no mercado acionário norte-americano. Os extremos, assim como as médias, parecem refletir o mau-humor dos mercados nas segundas-feiras. É este o dia da semana que apresenta cauda grossa à esquerda. Também o efeito de bom-humor na sexta-feira é sentido em razão da cauda grossa à direita neste dia.

**Os nossos resultados poderiam ter sido alcançados pela simples análise da curtose?** Assim como no caso do IBOVESPA, a curtose não nos permite obter os mesmos resultados. No caso do NASDAQ composto, as medidas de curtose estimadas também indicaram caudas mais grossas do que a Normal em todas as amostras analisadas, impedindo concluir sobre a presença de caudas finas nas distribuições dos retornos do NASDAQ por dias da semana.

**Se os retornos diários do índice NASDAQ composto são, à primeira vista, mais bem comportados do que os do IBOVESPA, então sua parametrização é mais “fácil” e suas caudas são mais “finas” do que as do IBOVESPA?** Nossa resposta a esta questão é baseada na leitura dos gráficos Hill plot do parâmetro  $\gamma$  (Figuras 5.5 a 5.10 e 5.14 a 5.19). Por serem muitos gráficos, limitamos a sua apresentação à cauda direita. Por esses gráficos pode-se verificar que estimar  $\gamma$  através da busca do trecho de estabilidade das estimativas de  $\gamma$  nos gráficos de Hill é igualmente difícil para o IBOVESPA

e para o NASDAQ, o que contraria nossa suposição inicial. Também ao contrário do que nossa intuição indicava, constatamos que a distribuição dos retornos diários do NASDAQ composto possui caudas mais grossas do que as do IBOVESPA.

## Parte II

**Teste de stress e mensuração de dependência pela TVE: reformulação do método de Longin e proposição de uma medida de dependência extremal**

## Capítulo 7

# Introdução

Enquanto as aplicações das técnicas univariadas da Teoria de Valores Extremos (TVE) à administração de riscos financeiros parecem bem estudadas, as técnicas multivariadas ainda se mostram pouco exploradas. Uma das razões para a baixa aplicação dessas técnicas é o fato da teoria multivariada não estar tão bem estudada e documentada quanto a univariada. Um aspecto que dificulta o desenvolvimento da TVE multivariada é não existir uma noção padrão de ordem em espaços euclidianos de dimensão mais elevada. Embrechts, De Haan e Huang [12] explicam que, por este motivo, não há uma noção padrão de extremos multivariados. Segundo esses autores, no atual estágio de desenvolvimento da TVE multivariada, e de um ponto de vista de aplicação, é possível apenas o tratamento de dimensões muito baixas (duas ou três dimensões apenas). Concluem que, por esta razão, problemas financeiros envolvendo carteiras com muitos ativos não são possíveis de serem analisados com a TVE multivariada existente atualmente. Vale notar que até mesmo o principal livro de referência teórica para aplicações em finanças, de Embrechts, Kluppelberg e Mikosch [13], não aborda o caso multivariado.

As primeiras aplicações de TVE multivariada a problemas financeiros surgiram na segunda metade da década de 1990. A maior parte dos estudos empíricos que utilizam a TVE multivariada dedica-se a analisar a dependência entre retornos de mercados financeiros internacionais em situações extremas. Nessa linha encontram-se os trabalhos de Longin e Solnik [33, 32], Straetmans [43, 44], Stărica [42] e Hartmann, Straetmans e de Vries [19]. Há também o trabalho de Costinot, Roncalli e Teïletche [3], ainda em desenvolvimento, que faz uma revisão da literatura sobre dependência em mercados financeiros e usa a TVE multivariada, com ênfase no conceito de copulas, para estudar a dependência entre mercados acionários internacionais.

Uma aplicação diferenciada da TVE multivariada que chamou-nos a atenção foi a apresentada em três versões de uma mesma pesquisa de Longin [30, 29, 31]. Estes trabalhos, que sugerem um novo método para cálculo de teste de stress<sup>1</sup>, motivaram a pesquisa cujos resultados estão relatados neste trabalho.

Elaboramos este ensaio em três etapas, segundo as quais organizamos a apresentação deste relatório.

---

<sup>1</sup> Chama-se de teste de stress aos procedimentos utilizados usados para quantificar a magnitude de perdas que podem ocorrer sob circunstâncias especiais. Kupiec [25] relata que, embora o termo “teste de stress” seja comumente usado por administradores de risco e agentes reguladores, não há definição aceita do que constitua um teste de stress. Jorion [21] explica que o teste de stress é exigido pelo Comitê da Basileia como uma das sete condições para que as instituições financeiras possam usar modelos internos de controle de risco. Considera que, infelizmente, as normas do teste de stress são geralmente vagas e que há muita confusão na indústria financeira sobre sua aplicação.

**Primeira etapa: Revisão do trabalho de Longin** Através da revisão de [30, 29, 31], verificamos que as duas alternativas para cálculo de teste de stress sugeridas por Longin são métodos de cálculo de VaR (que considera posições de mercado em fatores de risco e faz estimativas para níveis de confiança elevados) que usam a TVE por máximos de blocos. O primeiro desses métodos utiliza a TVE puramente univariada e o segundo uma técnica que pode ser vista como híbrida de resultados da TVE univariada e bivariada.

O primeiro método sugerido por Longin<sup>2</sup> é por ele denominado “método de posições de mercado completamente agregadas” (aqui referido como *método 1*). Ele sugere que o VaR de uma carteira de ativos básicos<sup>3</sup> seja estimado através da parametrização da distribuição dos retornos mínimos (ou máximos, dependendo da posição assumida) dessa carteira. Para isso é necessária a construção de uma série de retornos dessa carteira ao longo de um período suficientemente grande. O valor de stress definido nada mais é do que a função quantil<sup>4</sup> da distribuição de Valores Extremos Generalizada (GEV) para um determinado nível de confiança.

Longin pondera que o *método 1* requer a construção da série histórica de retornos da posição inteira. Lembra que, para posições complexas contendo muitos ativos ou com uma composição variável, isso pode representar um grande dispêndio de tempo na reconstrução da série de retornos e na reestimação da distribuição assintótica dos mínimos (ou máximos) toda vez que o valor de stress da posição tiver que ser calculado. Argumenta que, por esta razão, pode ser mais eficiente decompor a posição em um número limitado de fatores de risco e calcular o valor de stress da posição de uma maneira mais simples com uma fórmula de agregação de risco inspirada no método de variância/covariância para cálculo de VaR de uma carteira de ativos.

A análise acima conduz ao segundo método sugerido e a real inovação proposta por Longin. Este método, denominado “posições de mercado decompostas em fatores de risco” (*método 2*), é inspirado no método de “variância-covariância” popularizado pelo RiskMetrics [39]. O *método 2* traz vantagens que Longin julga computacionalmente interessantes. Ele observa que, para um determinado nível de confiança exigido, é necessário que se calcule apenas uma vez os valores de stress de cada ativo e as correlações de pares de ativos. Nesse ponto, Longin inova ao sugerir o uso de correlações relacionadas às posições detidas em cada ativo. Assim, para posições compradas nos ativos, o que interessa é a correlação para o risco de queda simultânea nos retornos dos ativos do par. Dessa forma, ele sugere o uso de 4 coeficientes de correlações: longa-longa, longa-curta, curta-longa e curta-curta<sup>5</sup>. Também sugere que esses coeficientes sejam estimados através de uma função de dependência para marginais GEV devida a Tiago de Oliveira [46].

Nossa análise do método de “posições de mercado decompostas em fatores de risco” levou-nos a modificá-lo em dois aspectos essenciais:

- as distribuições marginais consideradas em nosso método foram as distribuições dos retornos excedentes a um limiar (caudas das distribuições aproximadas por distribuições de Pareto Generalizada - GPD) e não as distribuições dos máximos de blocos;

<sup>2</sup>Neste método Longin não apresenta inovações. É um método bastante conhecido e discutido na literatura financeira. Ver, por exemplo, os trabalhos de McNeil [34, 35], Kellezi e Gilli [24] ou Dowd [8].

<sup>3</sup>Ativos básicos são os fatores de risco de mercado em relação aos quais os ativos verdadeiros podem ser mapeados. Esses fatores são, por exemplo, índices de mercados acionários, índices de taxas de juros, câmbio ou commodities.

<sup>4</sup>Inversa da função de distribuição acumulada.

<sup>5</sup>O coeficiente de correlação da posição longa-longa é o que reflete a correlação para o risco de queda simultânea nos preços dos dois ativos, que é de interesse para o investidor que tem posições compradas (ou “longas”) em ambos. Similarmente, o coeficiente de correlação curta-curta reflete a correlação para o risco de alta simultânea dos preços dos dois ativos. Este é o risco que importa para o investidor que tenha posições vendidas (ou “curtas”) nos dois ativos. As demais posições são combinações desses casos.



- eliminamos a escolha arbitrária de uma função de dependência bivariada ao estimarmos os “coeficientes de correlações” de forma que eles aproximassem a solução obtida pelo método proposto à solução que seria obtida pelo *Método 1* modificado para caudas aproximadas por GPD (daqui em diante também referido como *Método 1\**) para uma carteira de dois ativos.

A execução dessas modificações, justificadas no Capítulo 10, proporcionou uma nova medida de correlação para eventos extremos e um novo método de cálculo de VaR de carteiras para situações de stress, o qual denominamos de *Método 2\**.

**Segunda etapa: Avaliação das estimativas de VaR pelo *Método 2\**** O método de cálculo de VaR proposto (*método 2\** derivado do *método 2* de Longin) é uma aproximação de um método tradicional (*método 1\**) de cálculo de VaR pela TVE construída para uma carteira de dois ativos básicos. Este método tem, em relação ao *Método 1\** a mesma vantagem computacional do *Método 2* de Longin em relação ao seu *Método 1*. Para avaliar se o *método 2\** é uma boa aproximação do *método 1\** para carteiras contendo mais de dois ativos, comparamos as estimativas de ambos os métodos para carteiras de 2, 3, 4 e 5 ativos básicos. Nesta análise, utilizamos amostras de retornos diários de 5 ativos representando mercados acionários do Brasil, Argentina e EUA e mercados de títulos da dívida externa do Brasil e da Argentina.

**Terceira etapa: O coeficiente implícito de dependência extremal** Na primeira etapa da pesquisa, estimamos os “coeficientes de correlações” de forma que eles aproximassem a estimativa do VaR de carteira obtida pelo *método 2\** à do *método 1\**. Desta forma, criamos uma nova medida de dependência, a qual denominamos de “coeficiente implícito de dependência extremal”. Nesta etapa da pesquisa, avaliamos a sensibilidade deste coeficiente em relação à imprecisão da estimativa do número de estatísticas de ordem usadas na aproximação da cauda e aplicamos este coeficiente para analisar o comportamento de dependência de retornos extremos do mesmo conjunto de mercados estudados na etapa anterior.

**Organização do relatório** O restante do relatório está organizado da forma a seguir:

- Capítulo 8: apresenta a construção dos métodos de teste de stress propostos por Longin [30, 29, 31];
- Capítulo 9: discute os méritos e problemas identificados nos métodos propostos por Longin;
- Capítulo 10: propõe e justifica modificações ao método 2 de Longin, apresenta a técnica de excessos além de um limiar a ser utilizada e formaliza a medida de dependência entre caudas de distribuições proposta;
- Capítulo 11: descreve o procedimento experimental a ser aplicado na avaliação da qualidade do novo método, as amostras utilizadas na análise, os resultados e as conclusões obtidas;
- Capítulo 12: avalia a sensibilidade do coeficiente de dependência extremal criado no Capítulo anterior em relação ao número de estatísticas de ordem usadas na aproximação da cauda; analisa empiricamente o comportamento da dependência de retornos extremos das mesmas amostras utilizadas no Capítulo 11; e compara os resultados aos de trabalho semelhante elaborado por Longin e Solnik [32].

## Capítulo 8

# O trabalho de Longin

Este capítulo revisa três versões do mesmo trabalho de Longin [29, 30, 31] nas quais ele apresenta dois métodos baseados na teoria de valores extremos para construir cenários para testes de stress. Restringimo-nos aqui a condensar as principais idéias apresentadas nesses trabalhos. Nossa exposição segue a forma adotada em [29] e está dividida em duas partes:

- Seção 8.1: introduz a TVE nos casos univariado e multivariado e apresenta os principais resultados da teoria necessários à construção dos métodos sugeridos por Longin e;
- Seção 8.2: apresenta os dois métodos que aplicam técnicas da TVE para construção de teste de stress a partir de uma estrutura conceitual de VaR.

### 8.1 Resultados da TVE utilizados

#### 8.1.1 Definição de extremos

Longin define extremos em termos de máximos e mínimos e denomina de  $R_1, R_2, \dots, R_n$  os retornos observados sobre  $n$  intervalos de tempo básicos

$$[0, 1], [1, 2], [2, 3], \dots, [T-2, T-1], [T-1, T]$$

Explica que para uma dada frequência de retornos  $f$ , os dois parâmetros  $T$  e  $n$  são vinculados pela relação  $T = n \cdot f$  e que o máximo corresponde à máxima observação sobre o período  $[0, T]$  definida por  $\max(R_1, R_2, \dots, R_n)$ .

#### 8.1.2 Resultados univariados

**Resultados exatos** Chama de  $F_R$  a função distribuição acumulada de  $R$  e  $(l, u)$  os pontos finais à esquerda e à direita da função densidade associada. Assume  $Y_n$  como o mais alto retorno (máximo) observado sobre  $n$  intervalos de negociação. Afirma que, pressupondo que os retornos  $R_t$  observados no período  $t$  são sacados de qualquer processo iid (independente e identicamente distribuídos) com distribuição  $F_R$ , pode-se mostrar que a distribuição exata dos retornos máximos  $Y_n$  denotada por  $F_{Y_n}$  é dada por:

$$F_{Y_n}(y) = (F_R(y))^n \quad (8.1)$$

Desta forma, a distribuição dos máximos  $F_{Y_n}$  é exatamente conhecida se a distribuição básica  $F_R$  também for. Pondera, entretanto, que na maioria das aplicações financeiras, as distribuições dos retornos não é conhecida precisamente e, portanto, nem a distribuição dos retornos extremos. Nota que, a partir da Equação 8.1, pode-se concluir que a distribuição limite de  $Y_n$  obtida ao deixar  $n$  tender ao infinito é degenerada: ela é nula para  $y < u$  e igual a um para  $y > u$ . Por esta razão, para propósitos práticos e teóricos, a distribuição assintótica dos extremos precisa ser estudada.

**Resultados assintóticos** Segundo a descrição da teoria por Longin, para encontrar a distribuição limite de interesse, a variável máximo  $Y_n$  (utiliza  $Z_n$  para se referir à variável mínimo) deve ser reduzida com o parâmetro de escala  $\alpha_n$  (pressuposto ser positivo) e um parâmetro de localização  $\beta_n$  tais que a distribuição limite (conforme  $n \rightarrow \infty$ ) dos extremos padronizados  $\frac{(Y_n - \beta_n)}{\alpha_n}$  seja não degenerada. Afirma que Gnedenko [18] prova o teorema de valores extremos que especifica a forma da distribuição limite denotada por  $H_\gamma$  para  $n$  tendendo ao infinito <sup>1</sup>:

$$H_\gamma(y) = \begin{cases} \exp(-e^{-y}), & \text{se } \gamma = 0 \text{ e } y \in \mathbb{R} \\ \exp\left\{-(1 + \gamma \cdot y)^{-1/\gamma}\right\}, & \text{se } \gamma \neq 0 \text{ e } 1 + \gamma y > 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

onde  $\gamma$  é denominado de índice caudal e, conforme seus valores:

- $H_\gamma$  é uma Gumbel, se  $\gamma = 0$ ;
- $H_\gamma$  é uma Fréchet, se  $\gamma > 0$ ;
- $H_\gamma$  é uma Weibull, se  $\gamma < 0$ .

A família de distribuições  $H$  é conhecida por distribuição de Valores Extremos Generalizada (GEV).

**Resultados para processos não-iid** O autor relata que o teorema de valores extremos tem sido estendido a séries temporais que não são iid e apresenta, nas versões [29, 30] de seu trabalho, o uso do índice extremal como forma de ajustar as estimativas do índice caudal à presença de *clusters* de extremos.

### 8.1.3 Resultados multivariados

Para expor a TVE multivariada, Longin usa como referências os trabalhos de Tiago de Oliveira [46], Galambos [16] e Resnick [38] e de Tawn [45].

Inicia apresentando os conceitos e notação a serem utilizados. Assim, para um vetor de variáveis aleatórias de  $q$  dimensões denotado por  $R = (R^1, R^2, \dots, R^q)$ , a realização do  $i$ -ésimo componente observado no tempo  $t$  é denotada por  $R_t^i$ . O subscrito é usado para indexar o tempo e o sobrescrito para indexar o componente. O máximo multivariado  $Y_n$  observado em um período contendo  $n$  observações é definido como

$$Y_n = (\max(R_1^1, R_2^1, \dots, R_n^1), \max(R_1^2, R_2^2, \dots, R_n^2), \dots, \max(R_1^q, R_2^q, \dots, R_n^q))$$

c. assim,  $Y_n = (Y_n^1, Y_n^2, \dots, Y_n^q)$ . Afirma que, como no caso univariado, a distribuição exata de  $Y_n$  no caso multivariado é dada por uma fórmula similar à Equação 8.1:

$$F_{Y_n}(y) = (F_R(y))^n \quad (8.3)$$

<sup>1</sup> A notação utilizada foi modificada em relação ao texto original de Longin para seguir a padronização adotada neste estudo.

Analogamente ao caso univariado, quando a distribuição dos retornos não é exatamente conhecida, é necessário considerar os resultados assintóticos. Pressupõe novamente existir uma série de coeficientes de padronização de  $q$  dimensões  $(\alpha_n, \beta_n)$ , tais que a variável padronizada  $(Y_n - \beta_n)/(\alpha_n)$  converge em direção a uma distribuição não-degenerada. Isto lhe conduz a apresentar o principal teorema para o caso multivariado que caracteriza as possíveis distribuições  $H_Y$ :

**Teorema 1.** *Uma função distribuição de  $q$ -dimensões é uma distribuição limite de valores extremos se e somente se:*

- suas distribuições marginais  $H_Y^1, H_Y^2, \dots, H_Y^q$  são distribuições GEV;
- existe uma função chamada de função de dependência denotada por  $d_{H_Y}$  a qual satisfaz a seguinte condição:

$$H_Y(y^1, y^2, \dots, y^q) = (H_Y^1(y^1) \cdot H_Y^2(y^2) \cdot \dots \cdot H_Y^q(y^q))^{d_H(y^1 - y^1, y^2 - y^2, \dots, y^q - y^{q-1})} \quad (8.4)$$

Como no caso univariado, as distribuições GEV (Fréchet, Gumbel ou Weibull) desempenham um papel central. Entretanto, diferentemente do caso univariado, a distribuição multivariada assintótica não é completamente especificada pois a forma da função de dependência  $d_{H_Y}$  não é conhecida. Citando Galambos [16], Longin ressalta que alguns resultados fracos podem ser mostrados no caso geral como, por exemplo, a continuidade da função de dependência ou a convexidade do conjunto de funções de dependência.

Longin chama a atenção quanto aos componentes da distribuição multivariada de extremos serem assintoticamente independentes quando a função  $d_{H_Y}$  é igual a 1. Pondera que a independência assintótica dos extremos pode ser alcançada em muitos casos. Por exemplo, a exata independência dos extremos é obtida da Equação 8.3 quando os componentes das distribuições marginais são independentes. Destaca também que a independência assintótica pode ser alcançada quando os componentes das distribuições marginais não são independentes. Isto ocorre, por exemplo, quando a distribuição multivariada é normal. Neste caso, se todos os coeficientes de correlação entre quaisquer dois componentes de um processo normal multivariado são estritamente menores do que 1 (em valor absoluto), então os componentes do máximo tendem à independência se forem selecionados de períodos maiores. Em particular, a correlação assintótica dos extremos é nula.

Para o caso geral com componentes assintoticamente dependentes para a distribuição multivariada de extremos, Longin relata que a forma da função de dependência não é conhecida, e, por isso, ela deve ser modelada. Sugere, para a modelagem da dependência entre dois extremos  $Y^i$  e  $Y^j$ , o uso de um modelo resultante da combinação linear das funções de dependência dos casos especiais de total dependência e de independência assintótica proposto por Tiago de Oliveira [46]:

$$d_{F_{Y^i, Y^j}}(y^j - y^i) = \rho_{ij}^{ext} \cdot \frac{\max(1, e^{y^j - y^i})}{1 + e^{y^j - y^i}} + (1 - \rho_{ij}^{ext}) \quad (8.5)$$

onde o coeficiente  $\rho_{ij}^{ext}$  representa a correlação entre os extremos  $Y^i$  e  $Y^j$ .

## 8.2 Aplicação ao teste de stress

Longin sugere dois métodos de teste de stress baseados na estrutura conceitual de VaR e na TVE. Inicialmente apresenta um método para tratar do caso de uma "posição de mercado completamente agregada" (método 1). Neste método o valor de stress é baseado nos resultados dados pela TVE univariada. O



segundo método trata do caso de uma “posição de mercado decomposta em um conjunto de fatores de risco” (*método 2*). Neste método, os valores de stress previamente obtidos no através do *método 1* são combinados através de uma fórmula de agregação de riscos para calcular o valor de stress da posição.

### 8.2.1 *Método 1*: valor de stress para uma posição de mercado completamente agregada

O valor de stress para uma posição de mercado completamente agregada é calculado através da distribuição assintótica dos retornos mínimos. O modelo completo contém os seguintes parâmetros: os 3 parâmetros  $\alpha_n, \beta_n$  e  $\gamma$  da distribuição assintótica dos retornos mínimos  $H_{Z_n}$  e a probabilidade  $p^{ext}$  de observar um retorno mínimo não excedendo o valor de stress. Longin lembra que também a frequência  $f$  usada para calcular os retornos básicos e o número de retornos básicos  $n$  a partir dos quais os retornos mínimos são selecionados também podem ser incluídos como parâmetros do modelo.

O valor de stress, denotado por  $SV$ , expresso como porcentagem do valor da posição, é obtido a partir da distribuição assintótica dos mínimos retornos estimada:

$$p^{ext} = 1 - H_{Z_n}(-SV) = \exp \left[ - \left( 1 + \gamma \cdot \left( \frac{-SV - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{1/\gamma} \right] \quad (8.6)$$

levando a:

$$SV = -\beta_n + \frac{\alpha_n}{\gamma} \cdot [1 - (-\ln(p^{ext}))^\gamma] \quad (8.7)$$

Considerando um dado fator, dois valores de stress podem ser calculados: um para uma posição longa no fator e outra para uma posição curta. O primeiro cálculo envolve a distribuição dos mínimos retornos  $H_{Z_n}$ , enquanto o segundo envolve o cálculo da distribuição assintótica dos máximos retornos  $H_{Y_n}$ .

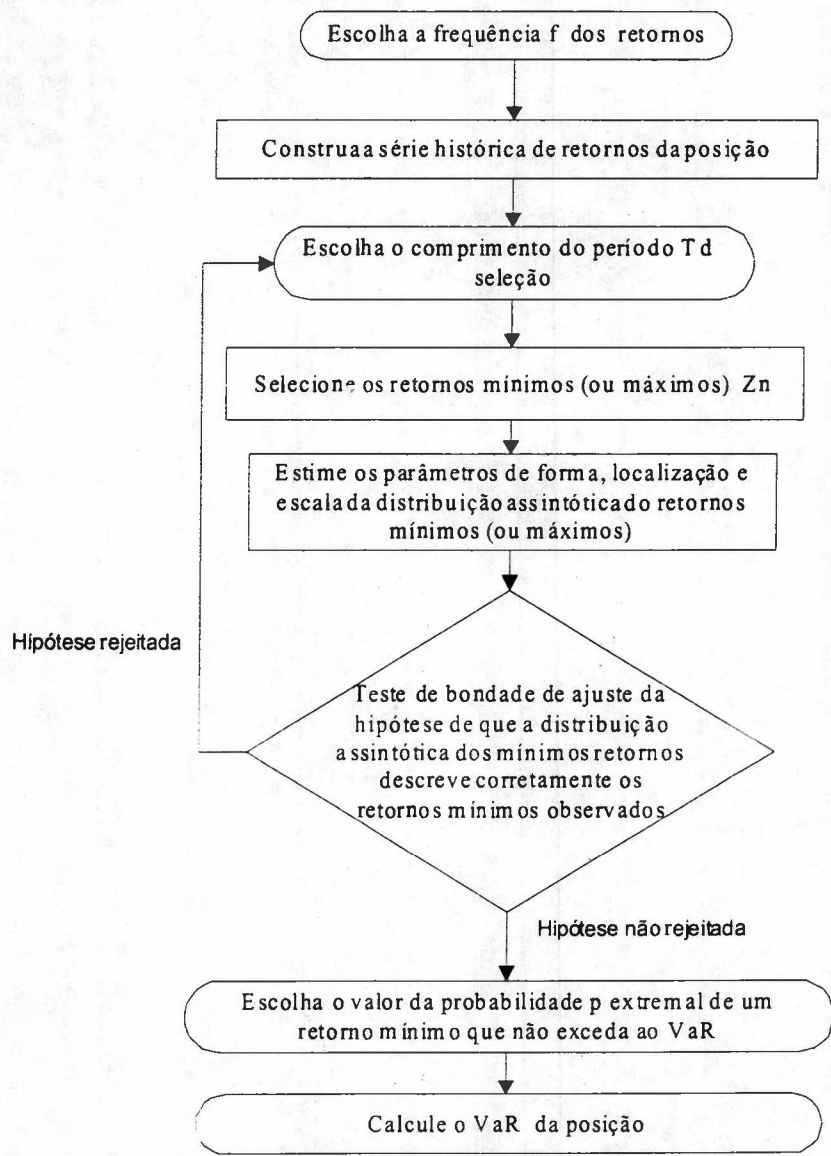
Este método de avaliação usado para calcular o valor de stress de uma posição de mercado completamente agregada requer a construção da história de retornos da posição inteira. Para posições complexas contendo muitos ativos ou com uma composição variável, a reconstrução da história dos retornos da posição inteira e a reestimativa da distribuição assintótica dos mínimos retornos cada vez que o valor de stress da posição tiver que ser calculado pode consumir muito tempo. Por esta razão, Longin considera que pode ser mais eficiente decompor a posição em um número limitado de fatores de risco (tais como taxas de juros, câmbio, índices de ações e preços de commodities) e calcular o valor de stress da posição de uma maneira simples com uma fórmula de agregação de riscos.

A Figura 8.1 ilustra o fluxograma sugerido por Longin [30] para cálculo de VaR baseado na TVE pelo método da posição de mercado completamente agregada.

### 8.2.2 *Método 2*: valor de stress para uma posição de mercado decomposta em um conjunto de fatores de risco

O segundo método proposto por Longin usa uma fórmula inspirada no método de variância/covariância de cálculo de VaR de uma posição de mercado. Esta fórmula permite a agregação de riscos a fim de calcular o valor de stress de uma posição. Considerando  $q$  fatores de risco, o valor de stress de uma

Figura 8.1: Fluxograma sugerido por Longin [30] para cálculo de VaR baseado em TVE pelo método da posição de mercado completamente agregada.





posição decomposta em fatores de risco de pesos  $(w_i)_{i=1,q}$ , é dada por:

$$SV = \sqrt{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \rho_{ij} \cdot w_i \cdot w_j \cdot SV_i \cdot SV_j} \quad (8.8)$$

onde  $SV_i$  representa o valor de stress de uma posição longa ou curta no fator de risco  $i$ ,  $w_i$  o coeficiente de sensibilidade da posição sobre o fator de risco  $i$  e  $\rho_{ij}$  a correlação de retornos extremos sobre posições longas ou curtas nos fatores de risco  $i$  e  $j$ .

A fórmula de agregação de risco relaciona, portanto, o valor de stress da posição aos coeficientes sensibilidade da posição aos fatores de risco, o valor de stress das posições longa ou curta nos fatores de risco e a correlação entre os fatores de risco. Desta forma, Longin conclui que o trabalho computacional é reduzido à estimação das distribuições multivariadas dos retornos máximos e mínimos dos fatores de risco <sup>2</sup> (que é feito uma única vez) e o cálculo dos coeficientes de sensibilidade da posição aos fatores de risco (que é repetido toda vez que a composição muda).

Para cada fator de risco, o valor de stress de uma posição longa, denotado por  $SV_i^l(H_{Z_n}, p^{ext})$  é calculado com a Equação 8.7 usando os parâmetros da distribuição marginal dos mínimos retornos. Similarmente, o valor de stress de uma posição curta, denotado por  $SV_i^s(H_{Y_n}, p^{ext})$  é calculado com a mesma equação usando parâmetros da distribuição marginal dos retornos máximos  $H_{Z_n}$ .

Considerando dois fatores de risco  $i$  e  $j$ , Longin destaca que 4 tipos de correlação de retornos extremos  $\rho_{ij}$  podem ser distinguidos de acordo com o tipo de posição (longa ou curta) nos dois fatores. Para uma posição longa (curta) em ambos os fatores de risco  $i$  e  $j$ , a correlação  $\rho_{ij}$  corresponde à correlação entre os mínimos (máximos) retornos dos fatores  $i$  e  $j$ . Para uma posição longa (curta) no fator  $i$  e curta (longa) no fator  $j$ , a correlação  $\rho_{ij}$  corresponde à correlação entre os mínimos (máximos) retornos do fator de risco  $i$  e os máximos (mínimos) retornos no fator  $j$ . Para enfatizar a dependência sobre o tipo de posição (longa ou curta), os 4 coeficientes de correlação são denotados por  $\rho_{ij}^{ll}, \rho_{ij}^{sl}, \rho_{ij}^{ls}, \rho_{ij}^{ss}$ .

Este método proposto por Longin necessita da estimação de  $6q$  parâmetros das distribuições marginais de ambos mínimos e máximos retornos usados para calcular os  $2q$  valores de stress para posições curtas ou longas nos fatores de risco e a estimação de  $4q$  coeficientes de correlação da distribuição multivariada de extremos usada para agregar os valores de stress dos fatores de risco.

## 8.3 Conclusões apresentadas

Longin conclui ter proposto uma abordagem rigorosa para cálculo de valor de stress de uma posição de mercado. Esta abordagem considera valores extremos e é implementada usando um método paramétrico baseado na TVE. Destaca que, como mostrado pelos resultados teóricos, a forma geral da distribuição assintótica dos retornos extremos é consistente com muitos modelos estatísticos para o processo dos retornos (distribuição normal, mistura de distribuições normal, distribuição Student, a família de distribuições Paretianas estáveis, a classe dos processos ARCH,...). Enumera três vantagens do método de valores extremos em relação a outros métodos mais tradicionais:

1. por ser paramétrico, a estimativa de valores de stress é possível para eventos com probabilidade de ocorrência muito pequena e mesmo que não haja observações destes eventos na amostra utilizada;

<sup>2</sup>Note-se que isto é o mesmo que estimar as distribuições univariadas de cada fator de risco mais a função de dependência para cada par de fatores.

2. como o método de valores extremos não pressupõe um modelo particular para retornos, mas deixa os dados falarem por si próprios para ajustar as caudas da distribuição <sup>3</sup>, o risco de modelo é consistentemente reduzido;
3. como o método de valores extremos dedica-se a eventos extremos, o risco de evento é explicitamente levado em conta, enquanto que com distribuições condicionais considerando todos os retornos tais como os processos GARCH ou EWMA (média móvel exponencial utilizado pelo RiskMetrics), grandes choques de mercado inesperados são ignorados.

Por fim, Longin enfatiza que a TVE deve ser usada com cuidado. Como os parâmetros da distribuição dos retornos extremos são usualmente estimados a partir de poucas observações, há alto risco de estimação. Ressalta que esta observação é especialmente verdadeira para a estimação do coeficiente de correlação extrema.

---

<sup>3</sup>É estranho Longin concluir que seu método ajusta a cauda da distribuição pois, na verdade, ele aproximou a distribuição dos máximos de blocos.

## Capítulo 9

# Crítica ao trabalho de Longin

A contribuição científica dos trabalhos de Longin [29, 30, 31] está no método de “posições de mercado decompostas em um conjunto de fatores de risco” (*método 2*). Neste método ele inova ao criar um teste de stress usando a estrutura conceitual de VaR, resultados da TVE bivariada e uma fórmula de agregação de riscos inspirada no método de variância-covariância para cálculo de VaR.

Como destacado no início deste relatório, a TVE multivariada ainda não está tão bem desenvolvida quanto a univariada. Através do ferramental teórico atualmente disponível considera-se possível o tratamento de problemas até apenas 2 ou 3 dimensões. Esta limitação teórica por si só já confere mérito à tentativa de extrapolar os resultados disponíveis da TVE bivariada para solucionar problemas de dimensões mais elevadas. No entanto, sem o respaldo de uma teoria suficientemente desenvolvida, esse esforço não fica imune a críticas. Discutimos, a seguir, quatro grupos de questões julgados de maior relevância durante a análise do trabalho de Longin.

### 9.1 Questões relacionadas à estrutura conceitual do VaR

Longin construiu sua metodologia de teste de stress usando uma estrutura conceitual de VaR, que contém uma série de pressuposições. Tais pressuposições, nem sempre explicitadas, foram utilizadas ou rejeitadas por Longin sem muitas explicações. Vamos revisar a estrutura conceitual de VaR, seguindo Kupiec [25], para podermos discutir três questões relacionadas à estrutura conceitual de VaR utilizada por Longin:

- pressuposição de normalidade multivariada;
- uso de correlação histórica e;
- uso de fatores de risco.

#### 9.1.1 Estrutura conceitual do VaR

Kupiec relata que a estrutura conceitual básica do VaR começa com a suposição de que as variações de valor de uma posição podem ser modeladas como se elas fossem conduzidas por variações em algum conjunto de fatores fundamentais subjacentes (como, por exemplo, taxa de câmbio, estimativas de preços de títulos “zero-cupom” domésticos e estrangeiros ou valores de índices de mercados acionários). Nota

que, na abordagem do RiskMetrics, os fatores individuais de precificação são conhecidos como vértices que são usados nos procedimentos de mapeamento do fluxo de caixa.

Para formalizar a apresentação do método de VaR, Kupiec faz:

- $F_t = [f_{1t}, f_{2t}, \dots, f_{Nt}]$  representar um vetor de  $N$  dimensões dos valores para os fatores subjacentes de precificação no dia  $t$ ;
- $x_{it}$  representar o fluxo de caixa total de todas as posições de mercado que são mapeadas sobre um fator de precificação  $f_{it}$ ;
- $X_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{Nt}]$  representar o vetor desses fluxos de caixa mapeados.

Relata que, sob as pressuposições padrão de VaR, as variações dos valores dos fatores individuais de precificação evoluem de acordo com a relação:

$$\log(f_{it+1}) - \log(f_{it}) = \tilde{r}_{it} \quad (9.1)$$

onde  $\tilde{r}_{it}$  é uma variável aleatória com distribuição normal.

Faz  $\tilde{R}_t = [\tilde{r}_{1t}, \tilde{r}_{2t}, \dots, \tilde{r}_{Nt}]$  representar o vetor aleatório ( $N \times 1$ ) de retornos diários dos fatores de precificação. Admite, por pressuposição:

$$\tilde{R}_t \approx N(0_N, \Sigma_t) \quad (9.2)$$

onde  $N(\cdot)$  indica a função densidade Normal multivariada,  $0_N$  representa um vetor de zeros ( $N \times 1$ ) relativo ao retorno médio e  $\Sigma_t$  representa uma matriz de covariâncias ( $N \times N$ ).

Nota que a estimativa de VaR assume que a mudança no valor da carteira no momento  $t$  pode ser escrita em termos dos retornos dos vértices como:

$$\Delta \tilde{V}_t = X_t \tilde{R}_t \quad (9.3)$$

Conclui que, sob essas pressuposições, a variação de um dia no valor de mercado da carteira é aproximadamente equivalente a uma variável aleatória distribuída normalmente com média zero e variância  $X_t \Sigma_t X_t'$ . Dessa forma, a estimativa de VaR para, por exemplo, 95% de confiança é dada por

$$VaR_{95\%} = -1.65 \sqrt{X_t \Sigma_t X_t'} \quad (9.4)$$

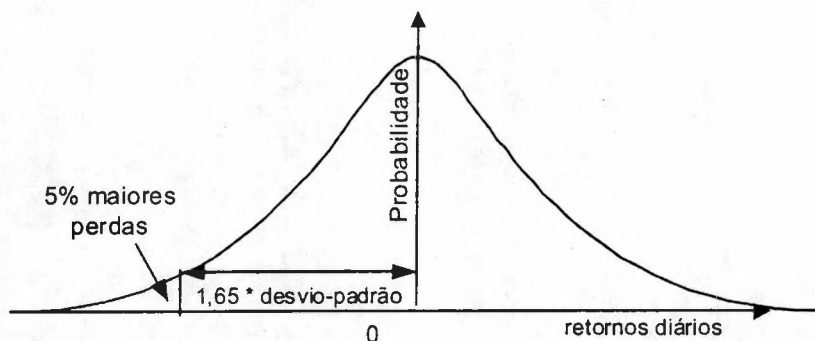
A Figura 9.1 ilustra o graficamente o exemplo acima.

Podemos demonstrar que a fórmula de agregação de riscos (Equação 8.8) utilizada por Longin, que expressa o VaR de uma carteira através dos VaR dos ativos que a compõem, é obtida da Equação 9.4 sob suposição de distribuição normal multivariada. Esta demonstração é feita no ANEXO 1.

### 9.1.2 O efeito da pressuposição de normalidade multivarida nas estimativas de teste de stress

Entendemos que, dada a falta de estrutura conceitual teórica que permita tratar problemas de número de dimensões mais elevado, a solução de usar a fórmula de agregação de riscos é interessante se proporcionar

Figura 9.1: Exemplo de leitura de VaR a partir da função de densidade de probabilidade de uma distribuição Normal.



aproximações adequadas. Pena que Longin não mostre que o método 2 é uma boa aproximação dos resultados obtidos pelo método 1 em nenhuma das versões de sua pesquisa. Ele destaca que o método 2 é mais eficiente computacionalmente, mas não indica a que preço essa maior eficiência foi alcançada. Por esta razão, persiste a dúvida se o uso de uma fórmula que pressupõe normalidade multivariada fornece boas estimativas numa situação em que esta pressuposição é violada.

### 9.1.3 O uso de correlações históricas pelo modelo de VaR tradicional e a solução adotada por Longin

Ao descrever seu método de teste de stress que também utiliza a estrutura conceitual do VaR do Risk-Metrics, Kupiec [25] admite que uma crítica que se pode fazer a sua metodologia é quanto ao uso de correlações históricas quando se sabe que em situações de stress essas correlações podem se modificar. A metodologia proposta por Longin supera o problema do uso de correlações históricas considerando as correlações das distribuições de máximos (ou mínimos) de pares de ativos. Este recurso utilizado no método 2 mostra que Longin reconhece que as correlações em situações extremas podem ser diferentes da correlação histórica. Além disso reconhece as diferenças nas correlações em relação à posição detida em cada ativo.

### 9.1.4 O uso do conceito de fatores de risco

O recurso de fatores de risco (ou ativos básicos) na formação de carteiras permite diminuir o número de ativos (e de correlações). Esta diminuição é conveniente, uma vez que Longin considera apenas correlações por pares de ativos e aplica uma metodologia de um mundo normal multivariado fora desse mundo. Nestas condições, quanto maior for o número de ativos na carteira, pior deve ser a qualidade da estimativa de VaR (ou teste de stress) gerada.

## 9.2 Questão do quantil incondicional estimado pela TVE

É importante notar que o VaR calculado pela TVE é um quantil incondicional. Para esclarecer o que é um quantil incondicional e qual o seu uso na administração de riscos, vamos apresentar uma breve discussão com base em McNeil [34].



McNeil considera que, se os retornos estudados seguem um modelo de série temporal estacionária com estrutura de heterocedasticidade condicional, há dois tipos de quantis a serem considerados: condicional e incondicional. Define por condicional um quantil da distribuição condicional do processo onde o condicionamento se dá sobre a volatilidade corrente. Por incondicional, entende um quantil da distribuição marginal ou estacionária do processo. Afirmar que ambos são relevantes para administradores de riscos.

McNeil explica que o quantil condicional é essencialmente objeto de interesse no cálculo de VaR quando se está interessado em conhecer a extensão de uma possível perda causada por um movimento adverso de mercado sobre o um prazo curto contra um pano de fundo da volatilidade corrente. Uma abordagem para essa estimativa requer a estimativa da volatilidade corrente. Sugere, para isso, a modelagem GARCH e a assunção de algumas pressuposições sobre a forma da distribuição condicional. Conclui que a essência desse método é uma visão de curto prazo para fornecer uma medida de risco dependente do tempo.

O autor destaca que os quantis incondicionais fornecem informações diferentes, mas complementares sobre o risco. No caso incondicional, toma-se uma visão de longo prazo e tenta-se determinar a magnitude de um evento adverso raro. Ele conclui que este tipo de informação pode ser de interesse do administrador de riscos que deseja desenhar cenários e ter noção sobre a escala do pior caso ou perdas extremas.

McNeil relata que a estimação de quantis incondicionais é um problema difícil pelo fato da distribuição marginal de um processo condicionalmente heterocedástico ser de cauda mais pesada do que a distribuição condicional. Por esta razão, aproximações por Normal geralmente falham e subestimam a extensão de um evento raro. Afirmar que problemas de natureza de cauda grossa são melhor tratados com o uso dos métodos da TVE, que são adequados ao tratamento de problemas de caudas grossas.

Da argumentação extraída de McNeil [34] sobre quantis incondicionais, concluímos que o uso de métodos da TVE para cálculo de teste de stress conforme proposto por Longin é bastante adequado.

### 9.3 Questão do uso da técnica de máximos de blocos

Longin preferiu utilizar a técnica de TVE por máximos de blocos. Não há qualquer erro conceitual nesta escolha. Porém, como a medida que ele estava buscando é extraída da cauda da distribuição, ele poderia ter optado por estimar diretamente o formato das caudas através do método de excedentes além de um limiar (mais conhecido na literatura por POT - Peaks over a threshold). Diversos autores citam vantagens de caráter prático no uso do POT em comparação à técnica de máximos de blocos (Smith [41] e McNeil [35] entre outros). A principal dessas vantagens é o uso mais eficiente da informação disponível, que é muito importante quando se trabalha com amostras de tamanho não muito grande. O maior problema do método POT provém da dificuldade em determinar o número ótimo de observações que devem compor a cauda. Nossa avaliação segue a linha dos autores que consideram o método POT melhor do que o método de máximos de blocos para tratamento de problemas empíricos quando se tem restrições nos tamanhos de amostras.

### 9.4 Questões relacionadas à função de dependência

#### 9.4.1 Inferência da função de dependência

Para podermos expor os detalhes do problema da inferência da função de dependência, vamos revisar a estrutura das observações dos retornos dos ativos usados na inferência. Assim, seja  $m$  o número dos



ativos da carteira. Então cada observação é um dos dias passados e é um ponto no espaço  $\mathbb{R}^m$  sendo que a  $i$ -ésima coordenada deste ponto é o retorno do  $i$ -ésimo ativo neste dia. Estas observações formam uma “nuvem” de pontos no espaço  $\mathbb{R}^m$ . Geralmente, estes pontos são concentrados em torno da origem deste espaço e são muito espalhados nas regiões afastadas da origem <sup>1</sup>. Esta dispersão faz com que a inferência da forma da função da dependência entre os retornos de  $m$  ativos nas regiões afastadas da origem fique complicada, pois os métodos de inferência exigem muitas observações para gerarem resultados precisos. Infelizmente, é exatamente nestas regiões que precisamos saber a função de dependência se desejamos estimar  $VaR$  de uma carteira pelo *método 2*.

Longin contornou a dificuldade na inferência da forma da função de dependência do seguinte modo. Ele considerou um período de  $T$  dias e para  $i$ -ésimo ativo calculou  $\min_T(X_i)$  – o mínimo entre  $T$  retornos diários deste ativo. Depois procurou pela função de dependência entre os  $m$  mínimos correspondentes aos  $m$  ativos. Na procura da função de dependência, Longin aproveitou dos resultados de Tiago de Oliveira [46] que fornecem a forma genérica da função de dependência entre mínimos. Conhecer a forma genérica permitiu a Longin aplicar os métodos de estatística paramétrica para inferir a forma específica do caso por ele estudado. Os métodos de estatística paramétrica são geralmente mais precisos do que os da estatística não paramétrica. Esta é a vantagem que Longin obteve ao passar a considerar os mínimos dos retornos nos subperíodos do período em interesse  $T$ . É importante notar que Longin não trata de achar a função de dependência entre todos os mínimos ao mesmo tempo, mas, ao invés disso, procura a função de dependência em pares. O mais decepcionante em seu método é que Longin aproveita da função de dependência entre os mínimos do  $i$ -ésimo e os mínimos do  $j$ -ésimo ativos somente um número que representa um certo coeficiente de correlação entre os mínimos (designado por  $\rho_{ij}$ ). O conjunto destes coeficientes  $\{\rho_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, m\}$  é usado para calcular  $VaR$  da carteira seguindo a fórmula

$$VaR_\alpha \left[ \min_T(Z) \right] = \left( \sum_{i,j=1}^m w_i w_j \rho_{ij} VaR_\alpha \left[ \min_T(X_j) \right] VaR_\alpha \left[ \min_T(X_i) \right] \right)^{1/2} \quad (9.5)$$

Na fórmula (9.5)  $X_i$  refere-se ao retorno do  $i$ -ésimo ativo,  $Z$  expressa o retorno da carteira composta de  $m$  ativos  $X_1, \dots, X_m$ , sendo que o  $i$ -ésimo deles tem peso  $w_i$  na carteira. O símbolo “ $\min_T$ ” lembra que o  $VaR$  foi calculado não pela função da distribuição dos retornos durante o período de  $T$  dias, mas pela função da distribuição dos mínimos entre  $T$  retornos diários. Note que a fórmula (9.5) foi inspirada pela fórmula de agregação de riscos válida quando os retornos de ativos que compõem a carteira têm distribuição normal multivariada.

#### 9.4.2 Escolha da função de dependência

Esta é uma questão delicada em todos os trabalhos que usam a TVE multivariada. As soluções usuais são pelo uso de funções de dependência simples e que tenham alguma propriedade conveniente. É esta a solução dada por Login [29, 30, 31] ao escolher uma função de dependência de formulação simples (combinação linear dos casos de total dependência e total independência) que contém como parâmetro o coeficiente de correlação necessário à sua fórmula de agregação de riscos. Outras funções de dependência, como a Gumbel do tipo 1, utilizada em [33, 32], também proporcionam simplicidade e conveniência semelhantes.

Por outro lado, alguns autores tentam ser mais rigorosos e optam por soluções não paramétricas para não serem obrigados a escolher arbitrariamente uma função de dependência paramétrica ([43, 44, 19]).

<sup>1</sup> Ver, por exemplo, a Figura 11.1, que ilustra distribuições bivariadas de um conjunto de ativos.

Entre os trabalhos que estudam a utilização da TVE multivariada em finanças, identificamos apenas o de Durrleman, Nikeghbali e Roncalli [10] preocupado em discutir o problema da escolha de qual função de dependência (ou função copula, se as distribuições marginais forem uniformes) é mais adequada. Parece-nos que, no estágio atual das pesquisas que aplicam TVE multivariada a finanças, a questão de qual função dependência é a mais adequada ainda não está suficientemente estudada. Como Longin não usa qualquer técnica para justificar a escolha da função de dependência bivariada utilizada e também não compara os resultados obtidos pelo seu método 2 aos que seriam obtidos pelo método 1, não é possível avaliar apenas pela leitura de seu trabalho se a estrutura de dependência escolhida proporciona uma boa aproximação. Além disso, como o próprio autor ressalta na conclusão de seu trabalho, há grande risco de estimação na função de dependência.

## Capítulo 10

# Proposta de um novo método

Como já adiantado no Capítulo 7, o método proposto neste ensaio reformula o método 2 de Longin modificando-o em dois aspectos:

- as distribuições marginais consideradas foram as distribuições dos retornos excedentes a um limiar (caudas das distribuições aproximadas por distribuições de Pareto Generalizada - GPD) e não as distribuições de máximos de blocos;
- eliminamos a escolha arbitrária de uma função de dependência bivariada ao estimarmos os coeficientes de correlações de forma que eles aproximassem a solução obtida pelo método proposto à solução que seria obtida pelo método 1 (modificado para caudas aproximadas por GPD) para uma carteira de dois ativos.

Este Capítulo dedica-se a apresentar e formalizar os elementos utilizados na reformulação do método 2 de Longin. A primeira parte do Capítulo apresenta o resultado da TVE utilizado neste trabalho e o método de aproximação das caudas por excedentes além de um limiar (POT) <sup>1</sup>. A segunda formaliza a maneira pela qual estimamos os “coeficientes de dependência” através da aproximação dos resultados do método de posições de mercado decompostas em um conjunto de fatores de risco (derivado do *método 2* de Longin e referido por *método 2\**) ao método de posições de mercado completamente agregadas (derivado do *método 1* de Longin e referido por *método 1\**). A avaliação do método proposto e a discussão de suas vantagens e limitações serão feitas no Capítulo 11.

### 10.1 Os resultados da TVE utilizados neste trabalho

Seja  $X$  uma variável aleatória cuja função de distribuição é designada por  $F$ . Pressupomos, para facilitar os argumentos, que  $F$  é uma função contínua. Definimos por  $x_F$  o limite superior<sup>2</sup> dos valores de  $X$ . Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e distribuídas igualmente à variável aleatória  $X$ . Definimos

$$M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad (10.1)$$

<sup>1</sup>O conteúdo desta seção já foi apresentado no Capítulo 2. No entanto, para que os dois ensaios desta tese possam ser lidos independentemente, preferimos repetir o conteúdo daquele capítulo.

<sup>2</sup> $x_F$  é o menor valor onde  $F$  alcança 1, caso  $x_F$  seja finito, e que  $F(x) < 1$  para todo  $x$  caso  $x_F = \infty$ .

e designamos por  $F_{M_n}$  a função de distribuição da variável aleatória  $M_n$ . Assim, a título de exemplo, se  $X_1, X_2, \dots$  forem retornos diários de um ativo financeiro, então  $M_n$  será o retorno máximo entre  $n$  retornos diários consecutivos.

A Teoria de Valores Extremos clássica estuda a existência e as propriedades da distribuição limite das variáveis aleatórias  $a_n + b_n \cdot M_n, n \in \mathbb{N}$ , para escolha apropriada de seqüências numéricas  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , e  $b_n, n \in \mathbb{N}$ . Para que possamos formular o resultado sobre a convergência dos máximos precisamos da definição dada a seguir.

Para cada  $\gamma \in \mathbb{R}$ , definimos uma função de distribuição  $H_\gamma$  da seguinte forma:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp \{-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\}, & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \exp \{-x\}, & \text{se } \gamma = 0 \end{cases} \quad (10.2)$$

para  $x$  na região  $\{x : 1+\gamma x > 0\}$ , enquanto para  $x$  fora desta região  $H_\gamma$  deve ser completada por 0 ou por 1 para que satisfaça as condições de uma função de distribuição. A família  $\{H_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}$  é denominada família de *distribuições generalizadas de valores extremos* (Generalized Extreme Values distributions - GEV). Este nome justifica-se pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.** (coletânea dos resultados dos Teoremas 3.2.3 e 3.4.5 de [13]). *As duas propriedades (i) e (ii) apresentadas abaixo são equivalentes: se uma delas é válida então a outra também é.*

(i) *Existem duas seqüências  $a_n$  e  $b_n$ , e três números reais  $\gamma, \nu$  e  $\delta$  tais que  $F_{a_n+b_n M_n}(x), x \in \mathbb{R}$ , a função de distribuição da variável aleatória  $a_n + b_n M_n$ , converge, conforme  $n \rightarrow \infty$ , à função  $H_\gamma(\nu + \delta x), x \in \mathbb{R}$ .*

(ii) *Existem um número real  $\gamma$  e uma função  $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tais que*

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{u \leq y < x_F} \left| \mathbb{P} \left[ \frac{X-u}{\sigma(u)} \leq y \mid X > u \right] - G_\gamma(y) \right| = 0 \quad (10.3)$$

onde

$$G_\gamma(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & \text{se } \gamma = 0 \\ 1 - (1 + \gamma y)^{-1/\gamma}, & \text{se } \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (10.4)$$

para  $y$  da região  $\{y : y \geq 0 \text{ e } y \leq -1/\gamma\}$ , caso  $\gamma < 0$ , e da região  $\{y : y \geq 0\}$ , caso  $\gamma \geq 0$ ; fora destas regiões  $G_\gamma$  deve ser completada por 0 ou por 1 para que satisfaça as condições de uma função de distribuição.

A função de distribuição  $G_\gamma$  em (10.3) é chamada de *Distribuição de Pareto Generalizada* (Generalized Pareto Distribution - GPD).

Vale a pena destacar que a TVE afirma que há a seguinte dicotomia: ou para qualquer escolha de seqüências  $a_n$  e  $b_n$ , a seqüência de funções  $F_{a_n+b_n M_n}(x), x \in \mathbb{R}$ , não converge para nenhuma função de distribuição, a não ser a degenerada, ou existem seqüências  $a_n$  e  $b_n$  tais que ocorre a convergência para uma função de distribuição não degenerada e neste caso a função limite é do tipo  $H_\gamma$ . Note que dizer que uma função é do tipo de  $H_\gamma$  significa dizer que esta função pode ser obtida de  $H_\gamma$  por transformação linear do seu argumento:  $x \rightarrow \nu + \delta x$ , para números apropriados  $\nu$  e  $\delta$ . Note também que a TVE estuda o tipo da distribuição limite da seqüência  $F_{a_n+b_n M_n}$ . Isso tem suas razões que não serão discutidas neste trabalho.

Existem diversas formas de condições que garantem a convergência dos máximos. Uma delas é (ii), a qual é não só uma condição suficiente, mas também necessária.

O parâmetro  $\gamma$  é chamado de *índice de cauda* para GPD e, caso haja a convergência (10.3), também para a distribuição de  $X$ . Vamos nos referir a ele como índice de cauda também no âmbito da GEV,

quer dizer, para  $H_\gamma$ . Embora neste âmbito ele determine não somente a cauda, mas toda a distribuição limite dos máximos, a escolha é justificada pela equivalência entre (i) e (ii) como afirmado pelo teorema: o parâmetro  $\gamma$  em (i) e em (ii) do Teorema 2 é o mesmo.

### 10.1.1 Método de estimação das caudas

Seja  $F$  a função de distribuição da variável aleatória  $X$ . Colocamos agora o problema de descobrir o comportamento assintótico de  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , conforme  $x \rightarrow \infty$ , a partir das observações  $x_1, \dots, x_N$  independentes da variável aleatória  $X$ . Em linguagem coloquial pode-se dizer que este é o problema de estimação, ou reconstituição, da cauda direita de  $F^3$ . A solução que propomos baseia-se na suposição de que a propriedade (ii) do Teorema 2 vale.

Para  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma > 0$  definimos a função  $G_{\gamma, \mu, \sigma}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  por

$$G_{\gamma, \mu, \sigma}(x) = G_\gamma\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10.5)$$

É fácil ver que a propriedade (ii) implica que para  $u$  suficientemente grande,  $F(x)$ ,  $x \geq u$ , está próxima à função

$$\mathbb{P}[X > u] G_{\gamma, u, \sigma(u)}(x) + \mathbb{P}[X \leq u], \quad x \geq u. \quad (10.6)$$

Esta aproximação é a base para reconstituir a cauda de  $F$  a partir das observações  $x_1, \dots, x_n$ . Ela sugere naturalmente o seguinte algoritmo de aproximação da cauda direita, denominado *método POT*:

- (a) Ordenar a amostra  $x_1, \dots, x_n$  em ordem decrescente e escolher os  $k$  maiores valores:  $x_{n,k}, x_{n,k-1}, \dots, x_{n,1}$ .
- (b) Fazer  $u = x_{n,k}$  e usar os  $k$  maiores valores da amostra para obter as estimativas  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\sigma}(u)$  de  $\gamma$  e  $\sigma(u)$ ; estimar  $\mathbb{P}[X > u]$  por  $1 - \hat{F}(u)$  e  $\mathbb{P}[X \leq u]$  por  $\hat{F}(u)$ .

O método POT fornece a expressão (10.6) com as estimativas  $\hat{\gamma}$ ,  $u$  e  $\hat{\sigma}(u)$  para os parâmetros  $\gamma$ ,  $u$  e  $\sigma$ , como uma estimativa da cauda de  $F$  à direita de  $u$ . As propriedades assintóticas desta cauda são deduzidas a partir das propriedades assintóticas da expressão usada para a aproximação.

Apresentamos agora a terminologia pertencente ao método POT que será utilizada no nosso trabalho:

- $\hat{F}$  é a distribuição amostral de  $X$  construída na base de  $x_1, \dots, x_n$ ;
- $G_{\gamma, \mu, \sigma}(x)$  é uma GPD;
- $u$  é o *limiar* acima do qual os valores que  $x$  assume são considerados como pertencentes à cauda;
- $\mu$  se chama o *parâmetro de localização*. Note que no procedimento descrito acima ele coincide com  $u$ ;
- $\gamma$  é o *índice caudal*;
- $\sigma$  é o *parâmetro de escala*;
- $k$  é o número de estatísticas de ordem utilizado na estimativa dos parâmetros e;
- $\alpha$  é o nível de confiança da estimativa desejada.

<sup>3</sup>Para a cauda esquerda basta inverter os sinais da amostra.



## 10.2 Formulação do novo método

Neste capítulo propomos um novo método para o cálculo de  $VaR$  de uma carteira de ativos. Este método foi construído por analogia ao *método 2* de Longin, relatado no Capítulo 8 e criticado no Capítulo 9. Frisamos nesta crítica uma deficiência do *método 2* quanto à inferência da forma da função de dependência (como a forma da função de dependência não é conhecida, ela deve ser inferida com base nas observações dos retornos dos ativos). É justamente esta deficiência a principal motivação de nosso método, conforme discutimos a seguir.

### 10.2.1 Motivação

Como já dito, o método proposto neste capítulo segue as idéias do método 2 de Longin. Mas, enquanto Longin toma retornos de frequência  $f$  qualquer (diária, mensal...) e deles usa apenas os máximos (ou mínimos) por blocos de observações de igual tamanho, nós preferimos utilizar os próprios retornos de frequência  $f$ . Lembramos que o referido método de Longin tem como objetivo expressar o  $VaR$  de uma carteira pelos  $VaR$  dos ativos que compõem esta carteira. O objetivo do nosso método é o mesmo. Mais explicitamente, o nosso método sugere que

$$VaR_\alpha(Z) = \left( \sum_{i,j=1}^m w_i w_j \varrho_{ij} VaR_\alpha(X_j) VaR_\alpha(X_i) \right)^{1/2}. \quad (10.7)$$

onde:

- $VaR_\alpha$  se refere ao  $VaR$  de retornos de frequência  $f$  e nível  $\alpha$  e;
- a variável aleatória  $X_i$  designa o retorno do  $i$ -ésimo ativo;
- $Z$  é uma variável aleatória que representa o retorno de frequência  $f$  de uma carteira, que é composta de  $m$  ativos, sendo que  $i$ -ésimo ativo tem peso  $w_i$ .

A inovação essencial do método que propomos está na construção e no uso dos coeficientes  $\varrho$ . Para expor a motivação da nossa construção destes coeficientes, lembramos que, seguindo as idéias do Longin,  $\varrho_{ij}$  deve refletir no nosso caso a dependência dos extremos entre os retornos de  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo ativos. Se fôssemos seguir a implementação das idéias do Longin, deveríamos achar a função de dependência entre estes retornos e dela extrair o coeficiente apropriado. Porém, como já indicado na Seção 9.4, a determinação da função de dependência de extremos é um problema complicado. Precisaríamos escolher uma função que fosse apropriada para marginais GPD e tivesse uma propriedade conveniente que nos permitisse dela extrair um coeficiente de correlação para aplicarmos na fórmula de agregação de riscos. A outra razão está em que mesmo se encontrássemos esta função de dependência, não a aproveitaríamos integralmente, mas tão somente o coeficiente de correlação. Esta segunda razão levou-nos a procurar diretamente por este coeficiente e usá-lo na fórmula (10.7). Note que embora existam na literatura diversos coeficientes de dependência extremal, nenhum deles está sendo usado na nossa fórmula (10.7). A nosso ver, a grande inovação do método proposto está em que não impusemos nenhum coeficiente, mas, ao contrário, permitimos que a função de dependência falasse por si e determinasse o coeficiente mais apropriado a ser usado em (10.7). Denominamos este coeficiente de *coeficiente implícito de dependência extremal*.

Podemos agora identificar, a grosso modo, o conteúdo do nosso método. Ele força o cálculo do  $VaR$  de uma carteira por uma função específica que depende dos:



- pesos dos ativos incluídos nesta carteira;
- $VaR$  dos ativos e;
- coeficientes da dependência extremal entre cada par destes ativos (porém, o método calcula estes coeficientes levando em conta o caráter desta dependência sem precisar procurar pela função de dependência).

Descrevemos agora a forma de determinação dos coeficientes  $\varrho$  do nosso método<sup>4</sup>. Como eles dependem do nível  $\alpha$  para o qual o  $VaR$  é procurado, consideramos  $\alpha$  fixo e admitiremos uma dada frequência  $f$  de retornos. Mostramos o cálculo do  $\varrho_{ij}$  para um par  $(i, j)$ . Seja  $p \in [0, 1]$  um valor arbitrário. Construimos uma carteira composta de  $p$  ativos  $i$  e  $(1 - p)$  ativos  $j$ . Designamos por  $Z(p)$  o retorno desta carteira. Lembramos que os retornos dos ativos  $i$  e  $j$  foram denotados por  $X_i$  e  $X_j$ . Conseqüentemente temos que  $Z(p) = pX_i + (1 - p)X_j$ . Designamos por  $x_i^1, \dots, x_i^n$  e por  $x_j^1, \dots, x_j^n$  as observações dos retornos dos ativos  $i$  e  $j$  durante  $n$  períodos passados. Definindo  $z := px_i + (1 - p)x_j$  temos que  $z^1, \dots, z^n$  é uma amostra da variável aleatória  $Z(p)$ . Usamos agora estas três amostras para estimar  $VaR_\alpha(Z(p))$ ,  $VaR_\alpha(X_i)$  e  $VaR_\alpha(X_j)$ . Estas estimativas poderiam ser feitas seguindo um método qualquer, mas neste trabalho usamos o método POT da TVE. Agora  $\varrho_{ij}$  declara ser o valor que minimiza a expressão

$$\int_0^1 [p^2 (VaR_\alpha(X_i))^2 + 2\varrho_{12}p(1 - p) VaR_\alpha(X_i) VaR_\alpha(X_j) + (1 - p)^2 (VaR_\alpha(X_j))^2 - (VaR_\alpha(Z(p)))^2]^2 dp \quad (10.8)$$

no intervalo  $\varrho_{ij} \in [0, 1]$ . Observamos que a função de dependência manifestou-se em valores da amostra  $z$  e, portanto,  $VaR_\alpha(Z(p))$  calculado com base nesta amostra é o correto  $VaR$  da carteira. O que estamos tentando fazer é achar o valor  $\varrho_{ij}$  que aproxima da melhor maneira possível e para todos valores de  $p$ , este  $VaR$  correto pela combinação dos  $VaR$  dos dois ativos que a compõem. Destacamos que  $\varrho_{ij}$  foi determinado para o par  $i, j$ . Claro que isso não garante a igualdade (10.7). Porém, a mesma é a razão de (9.5) não ser válida. Ou, melhor dizendo, ambos (9.5) e (10.7) são as tentativas de aproximar  $VaR_\alpha(Z)$ . Ou, ainda em outras palavras, tanto Longin quanto nós calculamos  $VaR$  de uma carteira por uma fórmula que não tem demonstração analítica, mas está inspirada por uma fórmula que só é válida quando os retornos dos ativos desta carteira seguem a distribuição normal multivariada (neste caso, existe a demonstração analítica, como já discutido). Independentemente de ter demonstração analítica, para fins práticos interessa-nos saber se o método de cálculo de  $VaR$  proposto neste trabalho é uma boa aproximação do método tradicional de cálculo de  $VaR$ . Esta é a questão que tratamos no próximo capítulo deste trabalho.

### 10.2.2 Método 1\*

O que chamamos de *método 1\** é um método para a estimativa do  $VaR$  de uma carteira composta de diversos ativos, construído aproveitando de idéias e técnicas bastante conhecidas da TVE. Atribuímos o nome *método 1\** com o único intuito de indicar o paralelismo entre este método e o método 1 de Longin revisado no Capítulo 8.

Apresentamos os passos do método 1\* para o caso no qual a carteira, cujo  $VaR$  está em questão, é composta de dois ativos. A generalização para mais do que dois ativos é direta.

Sejam  $X_1, \dots, X_m$  as variáveis aleatórias que representam os retornos de  $m$  ativos arbitrários. Para fixar as idéias, podemos pensar em retornos diários, embora o período “dia” possa ser substituído por

<sup>4</sup>Vale notar que, para simplificar a notação, não indexamos  $\varrho$  às posições dos ativos.

qualquer outro. Note que não pressupomos a independência entre as variáveis aleatórias  $X$ , nem que elas têm a distribuição normal multivariada. Um dos méritos do *método 1\** é que ele funciona sem estas pressuposições.

Suponhamos que a verdadeira distribuição conjunta do vetor de variáveis aleatórias  $(X_1, \dots, X_m)$  é desconhecida e que possuímos as observações dos seus valores anotados durante  $n$  dias passados

$$(x_1^1, \dots, x_m^1), (x_1^2, \dots, x_m^2), \dots, (x_1^n, \dots, x_m^n), \quad (10.9)$$

onde sobrescrito refere-se ao dia e subscrito refere-se ao ativo. Dado  $m$  números não negativos  $w_1, \dots, w_m$  tais que  $w_1 + \dots + w_m = 1$ , o problema é estimar  $VaR$  da variável aleatória

$$Z := w_1 X_1 + w_2 X_2 + \dots + w_m X_m \quad (10.10)$$

com base nas observações (10.9). Claro que  $Z$  pode ser interpretada como o retorno diário da carteira composta de  $m$  ativos sendo que o  $i$ -ésimo deles entra na carteira com peso  $w_i$  e o seu retorno diário segue a distribuição da variável aleatória  $X_i$ .

O *método 1\** foi construído para responder ao problema colocado acima. Segundo este método, deve-se construir uma seqüência de valores

$$z^1, z^2, \dots, z^n, \text{ definidas por } z^i := w_1 x_1^i + \dots + w_m x_m^i \quad (10.11)$$

construir a função de distribuição amostral  $F_z$  com base nestes valores, e aproximar a cauda desta por uma GPD seguindo o método apresentado na seção anterior. Sejam  $k, \sigma, \mu, \gamma$  os parâmetros desta aproximação (também definidos e explicados na seção anterior) e designamos por  $G$  a correspondente GPD. Pela própria construção, a função  $G$  aproxima suficientemente bem a cauda da  $F_z$  à esquerda do  $k$ -ésimo valor da estatística de ordem de (10.11). Portanto para qualquer  $\alpha$  próximo a 1, vale a primeira “ $\approx$ ” em (10.12) abaixo<sup>5</sup>

$$G^{-1}(1 - \alpha) \approx F_z^{-1}(1 - \alpha) \approx F_z^{-1}(1 - \alpha) \quad (10.12)$$

A segunda “ $\approx$ ” em (10.12) justifica-se pelo fato de que a função da distribuição amostral aproxima-se à função da distribuição da qual foi retirada a amostra (claro que  $F_z$  se refere a função da distribuição da variável aleatória  $Z$ ).

A relação (10.12) é base da seguinte resposta dada pelo *método 1\** ao problema de cálculo do  $VaR$  de nível  $\alpha$  para a variável aleatória  $Z$ :

$$VaR_\alpha(Z) = \frac{\sigma}{\gamma} \left( (1 - \alpha)^{-\gamma} - 1 \right) + \mu. \quad (10.13)$$

Note que o lado direito da fórmula (10.13) é exatamente  $G^{-1}(1 - \alpha)$ . Ele foi obtido pela inversão da fórmula explícita da GPD.

### 10.2.3 Método 2\*

O *método 2\**, construído nesta seção, responde ao mesmo problema que o *método 1\**. Em outras palavras, dado um nível  $\alpha$  o método apresenta  $VaR_\alpha(Z)$  da variável aleatória  $Z$  construída em (10.10). A diferença para a resposta do *método 1\** é que neste caso a resposta é

$$VaR_\alpha(Z) = \left( \sum_{i,j=1}^m w_i w_j \rho_{ij} VaR_\alpha(X_i) VaR_\alpha(X_j) \right)^{1/2} \quad (10.14)$$

<sup>5</sup> Ressaltamos que  $\alpha$  deve estar próximo a 1 para garantir que o problema está em aproximação da cauda esquerda da variável aleatória  $Z$ . Caso contrário, a aproximação pela GPD deve ser feita para cauda direita ao invés da esquerda.

onde os valores  $\varrho_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$  são fornecidos pelo próprio *método 2\**. O uso da fórmula (10.14) foi inspirado pela fórmula de agregação de riscos. Note a semelhança entre o uso desta fórmula no nosso *método 2\** e no *método 2* do Longin. Tanto os pontos em comum quanto as diferenças destes dois métodos foram destacados acima. Destacamos que a fórmula não possui uma demonstração tanto no nosso *método 2\** quanto no *método 2* do Longin.

Apresentamos agora o cálculo dos coeficientes  $\varrho$  usados em (10.14). Seja  $\alpha$  um nível fixo. Mostraremos os passos deste cálculo para  $\varrho_{12}$  pois  $\varrho_{ij}$  se calcula da mesma maneira com  $i$  e  $j$  no lugar de 1 e 2 respectivamente. Sejam

$$x_1^1, \dots, x_1^n \text{ e } x_2^1, \dots, x_2^n \quad (10.15)$$

as observações dos retornos diários do 1º e do 2º ativos durante  $n$  dias. Lembramos que suas distribuições são denotadas por  $F_{X^1}$  e  $F_{X^2}$  e que são desconhecidas no âmbito do problema. Para  $i = 1, 2$ , designamos por  $F_{x_i}$  a função de distribuição da amostra dos retornos do ativo  $i$ . Em seguida, para cada  $i = 1, 2$ , aproximamos a cauda de  $F_{x_i}$  por uma GPD  $G_i$  seguindo o método apresentado na seção anterior (assumindo que  $\alpha$  é um valor próximo a 1, a cauda que estamos aproximando é a cauda esquerda). Sejam  $k_i, \sigma_i, \mu_i, \gamma_i$  os parâmetros da aproximação da  $F_{x_i}$ . Raciocinando de maneira análoga à aplicada na construção do *método 1\**, determinamos

$$VaR_\alpha(X_i) = \frac{\sigma_i}{\gamma_i} \left( (1 - \alpha)^{-\gamma_i} - 1 \right) + \mu_i, \quad i = 1, 2. \quad (10.16)$$

Agora tomamos um  $p \in [0, 1]$  e aplicamos o *método 1\** para calcular  $VaR_\alpha(Z, p)$ . Note que acrescentamos  $p$  para lembrar que este  $VaR$  foi calculado para este  $p$ .

Finalmente, definimos  $\varrho_{12}$  como o valor que minimiza

$$\int_0^1 \left[ p^2 (VaR_\alpha(X_1))^2 + 2\varrho_{12}p(1-p) VaR_\alpha(X_1) VaR_\alpha(X_2) + (1-p)^2 (VaR_\alpha(X_2))^2 - (VaR_\alpha(Z, p))^2 \right]^2 dp \quad (10.17)$$

no intervalo  $\varrho_{12} \in [-1, 1]$ .

## Capítulo 11

# Avaliação das estimativas de VaR pelo Método 2\*

Mostramos, no Capítulo 10, que o *método 2\** foi construído para ser a melhor aproximação (pelo critério dos mínimos quadrados) do *método 1\** para uma carteira de 2 ativos. Similarmente ao método 2 de Longin, o *método 2\** é uma aproximação que se justifica por ser computacionalmente mais eficiente do que o *método 1\**.

Embora admita que o método 2 é uma aproximação do método 1, Longin elaborou-o de forma independente do método 1. Usou uma função de dependência escolhida arbitrariamente para obter o coeficiente de correlação necessário à fórmula de agregação de riscos. Através deste procedimento, Longin não garante que os resultados de seu método 2 sejam boas aproximações dos resultados do método 1 para uma mesma situação. Embora esta seja, em nossa opinião, uma questão central para avaliação do método proposto, nenhuma das versões do trabalho de Longin compara os resultados gerados pelos dois métodos.

Como já discutido, se admitirmos que o método 2 é uma aproximação do método 1, podemos eliminar o uso da função de dependência bivariada. Podemos calcular o “coeficiente implícito de dependência de extremal” que minimiza a soma dos erros ao quadrado entre as estimativas dos dois métodos para todas as combinações de dois ativos em uma mesma carteira. Desta maneira, para uma carteira de dois ativos, garantimos que os resultados do *método 2\** são a melhor aproximação que se pode obter em relação ao *método 1\**, considerando a limitação da fórmula de agregação de riscos <sup>1</sup>.

Da análise acima, concluímos que o *método 2\** aqui proposto é necessariamente melhor do que o análogo de Longin para carteiras de 2 ativos. Mesmo assim, dado que a fórmula de agregação de riscos pressupõe uma determinada forma de combinação dos *VaR* de cada componente de um par de ativos para determinar o *VaR* da carteira destes dois ativos, não necessariamente o *VaR* obtido pelo *método 2\** conseguirá ser uma aproximação verdadeiramente boa do *método 1\** em qualquer caso.

O objetivo deste capítulo é avaliar se o método 2\* consegue de fato ser uma boa aproximação do método 1\*. Mais especificamente, nossa avaliação consiste em responder a duas questões:

1. Para uma carteira formada por dois ativos reais, que não obedecem a pressuposição de distribuição normal dos retornos, o *VaR* calculado pelo *método 2\** é uma boa aproximação do *VaR* calculado pelo *método 1\**? e

---

<sup>1</sup>Chamamos de “limitação da fórmula de agregação de riscos” ao fato desta fórmula pressupor uma determinada forma de combinação dos quantis marginais para estimar o quantil bivariado.

2. A adição de ativos à carteira piora a qualidade da aproximação?

Nas seções a seguir, descrevemos o procedimento experimental utilizado para responder as questões acima, os resultados obtidos e as nossas conclusões.

11.1 Procedimento experimental

Elaboramos um experimento com amostras de séries de retornos diários de cinco ativos, identificados abaixo, para avaliar a qualidade da aproximação das estimativas do método 2\* em relação ao método 1\*.

Mercado	Tipo	País	Nome do Ativo
Acionário	Índice de bolsa	Brasil	IBOVESPA
		Argentina	MERVAL
		EUA	NASDAQ Composto
Renda fixa	Títulos de dívida externa	Brasil	EI
		Argentina	FRB

Este experimento foi executado em três etapas que detalhamos a seguir.

11.1.1 Primeira etapa: estimativas dos coeficientes implícitos de dependência extremal

Os coeficientes implícitos de dependência extremal  $\varrho^{ll}, \varrho^{ls}, \varrho^{sl}$  e  $\varrho^{ss}$  foram estimados minimizando-se a integral (10.8) no intervalo  $p \in [0, 1]$  (conforme descrito na Seção 10.2). Calculamos os Valores em Risco usando o método de máxima verossimilhança para aproximação das caudas das distribuições empíricas por distribuições Pareto Generalizada. A aproximação da cauda por GPD exige a determinação do número de estatísticas de ordem  $k$  a ser utilizado na estimativa. Embora cientes de que a qualidade da aproximação da cauda é fortemente dependente de  $k$ , optamos por arbitrar  $k = 0, 1 \cdot N$  ( $N$  = tamanho da amostra) pelos seguintes motivos:

- pretendemos apenas comparar os resultados do método 2\* aos do método 1\* e não determinar a melhor estimativa de VaR. Por isso, entendemos justificável arbitrar um mesmo  $k$  para as estimativas dos dois métodos;
- não há método automático de escolha de  $k$ -ótimo que produza resultados confiáveis em qualquer situação e a determinação de  $k$ -ótimo por métodos visuais exigiria a análise de uma quantidade muito grande de gráficos e inviabilizaria a solução do problema;
- $k = 0, 1 \cdot N$  é compatível com sugestões de ordem prática encontradas na literatura<sup>2</sup> e;
- o efeito da variação de  $k$  sobre a medida de dependência extremal estimada é avaliado no Capítulo 12.

O procedimento de minimização foi feito usando-se o programa “determina\_rho.sp” elaborado em StatPascal<sup>3</sup>. Através desse programa, foram estimados 280 coeficientes  $\varrho$  referentes a:

<sup>2</sup>DuMouchel [9], citado por Kearns e Pagan [22], sugere que  $k \leq 0, 1 \cdot N$  é uma boa regra para determinação do número ótimo de estatísticas de ordem.

<sup>3</sup>O StatPascal é uma versão do Pascal com recursos para tratamento de problemas usando TVE criado por Reiss e Thomas [37, 36]. Os algoritmos do programa “determina\_rho.sp” e dos demais programas referidos neste relatório constam do ANEXO 2.



- 7 níveis de confiança pré-determinados;
- 10 combinações de pares possíveis;
- 4 combinações de posições entre os pares.

Tais coeficientes, indexados por seus níveis de confiança, combinações de pares e de posições, foram armazenados na unidade “correlacoes.sp” para uso pelos programas de avaliação da qualidade das estimativas e também constam da Tabela 11.2.

### 11.1.2 Segunda etapa: estimativas de VaR pelos métodos 1\* e 2\* para uma mesma situação

Para uma melhor comparação das estimativas, classificamos as situações sob as quais os VaR estimados pelos métodos 1\* e 2\* foram gerados de acordo com:

- o nível de confiança (entre 7 pré-estabelecidos);
- o número de ativos na carteira (2, 3, 4 ou 5);
- a combinação de ativos (número variável em função da quantidade de ativos na carteira) e;
- a combinação de posições dos ativos (número variável em função da quantidade de ativos na carteira);

Novamente, usamos o método de máxima verossimilhança para aproximações de cauda por distribuição de Pareto Generalizada para gerar as estimativas de VaR e arbitramos o número de estatísticas de ordem  $k$  como 10% do tamanho da amostra.

Para cada uma das situações classificadas, geramos 1000 combinações aleatórias de pesos dos ativos na carteira. De cada uma dessas combinações, calculamos os VaR pelos métodos 1\* e 2\*. Desta forma, construímos os vetores  $(VaR_1^{1*}, VaR_2^{1*}, \dots, VaR_{1000}^{1*})$  e  $(VaR_1^{2*}, VaR_2^{2*}, \dots, VaR_{1000}^{2*})$ , onde o sobrescrito indica método 1\* ou 2\*.

### 11.1.3 Terceira etapa: comparação da proximidade das estimativas obtidas pelos métodos 1\* e 2\*

Utilizamos uma regressão linear simples do tipo:

$$VaR^{2*} = a + b \cdot VaR^{1*} + \epsilon$$

para avaliar se o método 2\* é uma boa aproximação do método 1\*. Se o método 2\* for uma aproximação perfeita do método 1\*, então  $VaR^{2*} = VaR^{1*}$ , ou seja,  $a = 0$ ,  $b = 1$  e o resíduo definido por  $\epsilon$  é nulo (consequentemente, o poder explicativo da regressão, dado por  $R^2$ , é igual a um).

Para cada um dos pares de vetores  $VaR^{1*}$  e  $VaR^{2*}$  foi feita uma regressão linear para comparar a proximidade das estimativas dos métodos 1\* e 2\*. O total de regressões lineares realizadas, segundo o número de ativos na carteira, está determinado abaixo.



	Ativos na carteira			
	2	3	4	5
Combinações de ativos	10	10	5	1
Combinações de posições	4	8	16	32
Níveis de confiança analisados	7	7	7	7
Total de pares de $VaR^{1*}$ e $VaR^{2*}$	280	560	560	224

As gerações dos pares e a análise das regressões foram executadas através dos programas testa2.sp, testa3.sp, testa4.sp e testa5.sp, todos elaborados em StatPascal e constantes do ANEXO 2. Os resultados obtidos são apresentados a seguir.

## 11.2 Resultados

### 11.2.1 Análise exploratória

Realizamos uma análise exploratória das amostras de retornos diários utilizadas no experimento de comparação das estimativas de VaR dos métodos 1\* e 2\*. Esta análise consistiu dos *scatterplots* dos pares de retornos diários e das estatísticas descritivas. Seu objetivo foi analisar se as amostras escolhidas violam o pressuposto de distribuição normal. Pode-se verificar que as distribuições marginais não seguem a distribuição normal observando-se que a estatística Jarque-Bera rejeita a hipótese de normalidade para todas as amostras <sup>4</sup>. Os scatterplots têm uma função complementar nessa verificação de que a pressuposição de normalidade é violada. Eles permitem observar que as distribuições bivariadas dos retornos raramente se aproximam do formato elíptico esperado para distribuições normais bivariadas.

### 11.2.2 Carteira de 2 ativos

Consolidamos os resultados das regressões de  $VaR^{2*}$  contra  $VaR^{1*}$  em duas tabelas. A primeira é a Tabela 11.3 que apresenta os resultados médios das 4 posições segundo as combinações de pares de ativos na carteira e níveis de confiança pré-estabelecidos. Por esta tabela, verificamos que até o nível de confiança de 0,995, o coeficiente de inclinação  $b$  não é significativamente diferente de 1, a constante  $a$  é próxima de zero e o  $R^2$  é próximo de 1 para qualquer dos pares de ativos. Para o nível de confiança de 0,999, no entanto, isso deixa de ser verdade em alguns casos. Nestes casos, ocorre uma queda no valor do coeficiente de inclinação  $b$ , que se torna significativamente menor do que um, e aumento na constante  $a$ , que se torna maior do que zero. Além disso, há queda no  $R^2$ , que chega cair até a 0,84.

A segunda é a Tabela 11.4 que apresenta os resultados médios das 10 combinações de pares segundo as combinações de posições dos ativos na carteira e níveis de confiança pré-estabelecidos. Os resultados observados são semelhantes aos da tabela anterior em que se nota perda da qualidade da aproximação para o nível de confiança mais elevado.

### 11.2.3 O efeito do acréscimo de ativos

A mesma análise de regressão executada para carteiras com 2 ativos foi repetida para carteiras contendo 3, 4 e 5 ativos. A Tabela 11.5 apresenta os resultados médios das 4 posições e de todos os conjuntos

<sup>4</sup>Além disso, vale notar que, conforme discutido no Capítulo 4, os tamanhos de amostras utilizados são suficientes para uma análise pela TVE univariada.

de 2, 3, 4 ou 5 ativos, por nível de confiança. Para auxiliar a leitura desta tabela, elaboramos gráficos dos resultados médios de  $a$  (Figura 11.2),  $b$  (Figura 11.3) e  $R^2$  (Figura 11.4) contra níveis de confiança crescentes para carteiras de 2, 3, 4 e 5. Por estes gráficos, pode-se notar que as estimativas do método 2\* distanciam-se das estimativas do método 1\* conforme mais ativos são agregados à carteira. Este distanciamento, dado por  $a$ ,  $b$  e  $R^2$  se afastarem dos valores esperados para uma aproximação perfeita, é mais forte quanto mais alto o nível de confiança estabelecido para a estimativa de  $VaR$ .

### 11.3 Conclusões

Uma conclusão já adiantada no início deste capítulo é que a reformulação proposta fez o *método 2\** ser melhor do que o método 2 de Longin para carteiras de 2 ativos. Mesmo assim, o *método 2\** não é adequado para carteiras com muitos ativos básicos. Com 5 ativos básicos na carteira, os resultados obtidos foram de aproximação de baixa qualidade. Portanto, a tentativa de contornar o problema da restrição teórica da TVE em problemas multivariados através do uso de uma fórmula de agregação de riscos não se mostrou eficiente.

Apesar dos resultados negativos quanto ao método de cálculo de  $VaR$  para carteiras com mais de 2 ativos, verificamos que o “coeficiente implícito de dependência extremal” estimado permitiu uma boa aproximação dos métodos 2\* e 1\* para carteiras de 2 ativos. Este resultado revela uma contribuição do nosso método que é maior do que um simples ajuste do método de Longin. O nosso coeficiente implícito de dependência extremal provou a ser uma boa medida de dependência extremal.

O coeficiente implícito de dependência extremal produz uma informação interessante sobre a evolução da dependência entre mercados financeiros para situações cada vez mais extremas. É este o resultado mais importante desta pesquisa até aqui e que será explorado no próximo capítulo, no qual iremos:

- avaliar a sensibilidade das estimativas do “coeficiente implícito de dependência extremal” a variações de  $k$ ;
- analisar a evolução dos coeficientes implícitos de dependência extremal para um conjunto de amostras de retornos diários de pares de mercados financeiros;
- comparar nossos resultados com o de uma pesquisa pioneira que usou a TVE para analisar dependências de mercados em situações extremas.

Tabela 11.1: Estatísticas descritivas das amostras de retornos diários

	EI	FRB	IBOVESPA	MERVAL	NASDAQ
Média	0.000162	0.0000321	0.003755	0.000867	0.000442
Mediana	0.000429	0.00011	0.002238	0.000524	0.00113
Máximo	0.157301	0.100022	0.288176	0.249109	0.132546
Mínimo	-0.237645	-0.098937	-0.251929	-0.16653	-0.120478
Desvio-padrão	0.015287	0.01069	0.028468	0.03024	0.010815
Assimetria	-2.352532	-1.304658	0.202088	0.546165	-0.58436
Curtose	58.09867	29.91084	9.453142	9.574681	18.45543
Jarque-Bera	203484.5	42093.53	13569.66	4928.726	73462.26
Probabilidade	0	0	0	0	0
Observações	1597	1382	7790	2663	7339
Data início	08-Nov-1994	27-Jan-1995	03-Jan-1968	09-Jan-1990	08-Fev-1971
Data fim	16-Fev-2001	16-Fev-2001	16-Fev-2001	16-Fev-2001	16-Fev-2001

Figura 11.1: Scatterplot dos retornos diários de pares de ativos.

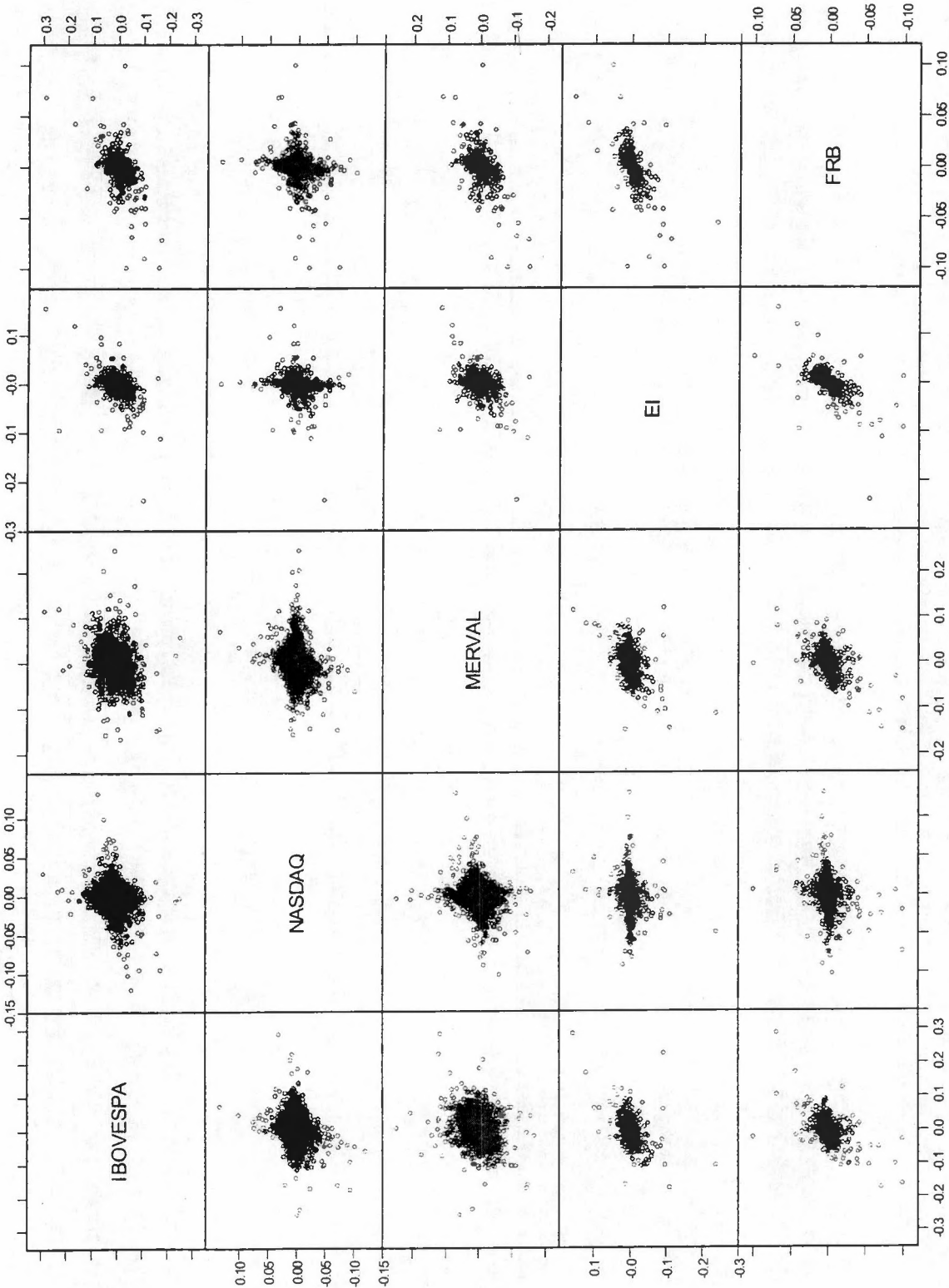


Tabela 11.2: Coeficiente implícito de dependência extremal. Estimados pela aproximação dos resultados do método 2\* aos resultados obtidos pelo método 1\*. Uso de método de máxima verossimilhança para aproximação por GPD e  $k = 0, 1 \cdot N$ .

Par	Coeficiente	Quantil						
		0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.995	0.999
ei - frb	$\varrho^{ss}$	0.77	0.73	0.68	0.62	0.52	0.43	0.25
	$\varrho^{sl}$	-0.68	-0.68	-0.68	-0.68	-0.66	-0.62	-0.51
	$\varrho^{ls}$	-0.69	-0.69	-0.69	-0.68	-0.67	-0.66	-0.62
	$\varrho^{ll}$	0.77	0.74	0.71	0.68	0.65	0.64	0.62
merval - ei	$\varrho^{ss}$	0.29	0.27	0.26	0.27	0.31	0.38	0.57
	$\varrho^{sl}$	-0.38	-0.39	-0.41	-0.43	-0.44	-0.45	-0.49
	$\varrho^{ls}$	-0.4	-0.42	-0.45	-0.48	-0.51	-0.55	-0.64
	$\varrho^{ll}$	0.3	0.32	0.34	0.38	0.44	0.51	0.62
merval - frb	$\varrho^{ss}$	0.5	0.49	0.48	0.46	0.41	0.35	0.17
	$\varrho^{sl}$	-0.43	-0.44	-0.45	-0.48	-0.51	-0.54	-0.61
	$\varrho^{ls}$	-0.51	-0.53	-0.55	-0.57	-0.62	-0.66	-0.77
	$\varrho^{ll}$	0.46	0.46	0.47	0.5	0.56	0.63	0.79
ibovespa - frb	$\varrho^{ss}$	0.44	0.42	0.41	0.4	0.37	0.35	0.30
	$\varrho^{sl}$	-0.42	-0.44	-0.47	-0.49	-0.51	-0.51	-0.48
	$\varrho^{ls}$	-0.41	-0.44	-0.46	-0.5	-0.56	-0.62	-0.75
	$\varrho^{ll}$	0.34	0.34	0.35	0.39	0.48	0.61	1
ibovespa-merval	$\varrho^{ss}$	0.3	0.29	0.27	0.26	0.23	0.21	0.17
	$\varrho^{sl}$	-0.2	-0.18	-0.17	-0.16	-0.17	-0.2	-0.28
	$\varrho^{ls}$	-0.34	-0.32	-0.3	-0.28	-0.26	-0.24	-0.21
	$\varrho^{ll}$	0.28	0.28	0.28	0.28	0.27	0.26	0.23
ibovespa-nasdaq	$\varrho^{ss}$	0.22	0.2	0.18	0.15	0.12	0.08	0.00
	$\varrho^{sl}$	-0.12	-0.14	-0.17	-0.2	-0.25	-0.29	-0.37
	$\varrho^{ls}$	-0.1	-0.12	-0.15	-0.19	-0.24	-0.29	-0.39
	$\varrho^{ll}$	0.18	0.16	0.14	0.12	0.1	0.09	0.09
ibovespa - ci	$\varrho^{ss}$	0.31	0.3	0.29	0.3	0.34	0.4	0.66
	$\varrho^{sl}$	-0.43	-0.45	-0.47	-0.48	-0.48	-0.47	-0.4
	$\varrho^{ls}$	-0.45	-0.47	-0.5	-0.53	-0.56	-0.59	-0.63
	$\varrho^{ll}$	0.45	0.47	0.49	0.52	0.57	0.61	0.65
nasdaq - merval	$\varrho^{ss}$	0.23	0.19	0.15	0.11	0.07	0.05	0.04
	$\varrho^{sl}$	-0.19	-0.21	-0.23	-0.25	-0.28	-0.3	-0.35
	$\varrho^{ls}$	-0.22	-0.23	-0.25	-0.26	-0.27	-0.28	-0.3
	$\varrho^{ll}$	0.24	0.2	0.17	0.14	0.11	0.09	0.08
nasdaq - frb	$\varrho^{ss}$	0.36	0.32	0.28	0.22	0.16	0.10	0.01
	$\varrho^{sl}$	-0.12	-0.15	-0.19	-0.23	-0.29	-0.34	-0.42
	$\varrho^{ls}$	-0.22	-0.24	-0.25	-0.27	-0.29	-0.33	-0.47
	$\varrho^{ll}$	0.3	0.24	0.19	0.15	0.12	0.11	0.11
nasdaq - ei	$\varrho^{ss}$	0.31	0.26	0.21	0.16	0.12	0.12	0.19
	$\varrho^{sl}$	-0.13	-0.16	-0.18	-0.21	-0.24	-0.24	-0.21
	$\varrho^{ls}$	-0.17	-0.19	-0.2	-0.21	-0.21	-0.2	-0.22
	$\varrho^{ll}$	0.23	0.18	0.13	0.09	0.05	0.02	-0.07



Tabela 11.3: Regressão das estimativas de VaR pelo método 2\* contra as estimativas do método 1\*. Resultado de estimativas para carteiras com 2 ativos. Os valores apresentados na tabela são médias das 4 posições.

Combinação de par	Parâmetro (média)	Nível de confiança						
		0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.995	0.999
ei-frb	$a$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.010
	$b$	1.038	1.033	1.027	1.017	0.998	0.971	0.886
	$R^2$	0.988	0.986	0.986	0.987	0.988	0.985	0.950
ibovespa-ei	$a$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.021
	$b$	0.998	0.997	0.997	0.995	0.993	0.999	0.841
	$R^2$	0.999	0.998	0.997	0.997	0.997	0.997	0.924
ibovespa-frb	$a$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000
	$b$	0.998	0.998	0.997	0.995	0.992	0.989	0.990
	$R^2$	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.942
ibovespa-merval	$a$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004
	$b$	1.004	1.005	1.008	1.006	1.005	0.997	0.970
	$R^2$	0.997	0.997	0.998	0.998	0.998	0.997	0.988
ibovespa-nasdaq	$a$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002
	$b$	1.003	1.001	0.999	0.996	0.991	0.987	0.968
	$R^2$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.995
merval-ei	$a$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.011
	$b$	1.006	1.001	0.996	0.990	0.980	0.979	0.900
	$R^2$	0.999	0.998	0.997	0.995	0.993	0.990	0.916
merval-frb	$a$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.014
	$b$	1.004	1.002	0.999	0.995	0.989	0.979	0.824
	$R^2$	0.998	0.998	0.997	0.996	0.996	0.996	0.841
nasdaq-ei	$a$	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.009
	$b$	0.995	0.986	0.973	0.964	0.975	0.976	0.881
	$R^2$	0.996	0.994	0.992	0.990	0.991	0.993	0.933
nasdaq-frb	$a$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.018
	$b$	1.009	1.010	1.008	1.004	0.990	0.966	0.751
	$R^2$	0.998	0.998	0.997	0.997	0.998	0.995	0.846
nasdaq-merval	$a$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002
	$b$	1.008	1.004	0.999	0.993	0.986	0.980	0.971
	$R^2$	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.996



Figura 11.2: Regressão das estimativas de VaR pelo método 1\* contra as estimativas do método 2\*. Média das estimativas da constante  $a$  para carteiras de 2, 3, 4 ou 5 ativos.

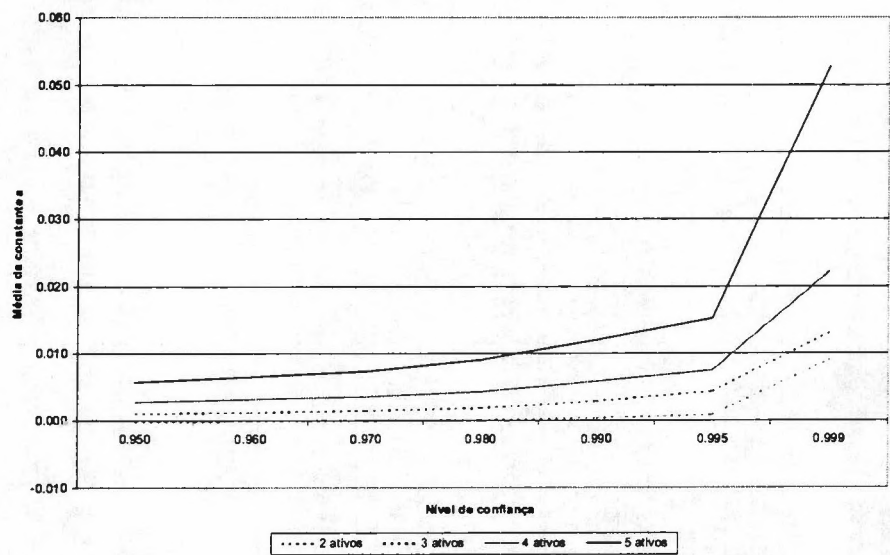


Figura 11.3: Regressão das estimativas de VaR pelo método 1\* contra as estimativas do método 2\*. Média das estimativas do coeficiente  $b$  para carteiras de 2, 3, 4 ou 5 ativos.

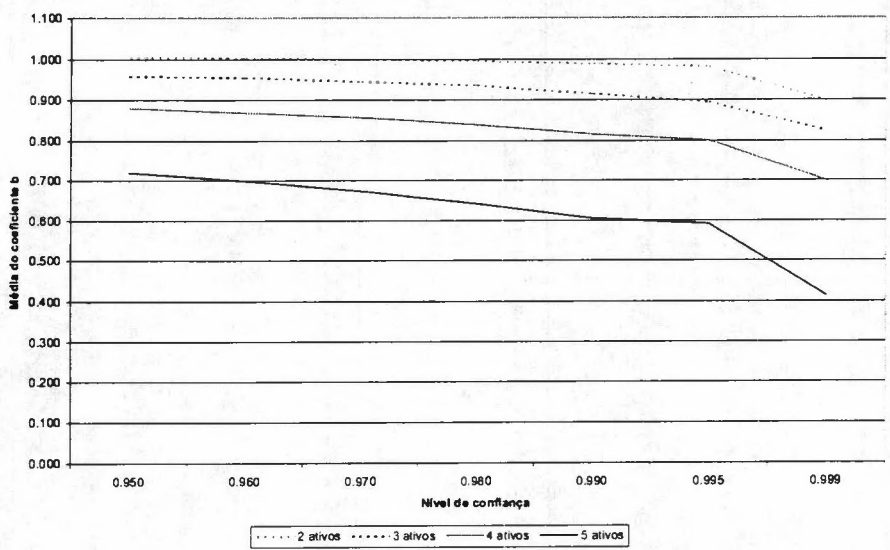


Tabela 11.4: Regressão das estimativas de VaR pelo método 2\* contra as estimativas do método 1\*. Resultado de estimativas para carteiras com 2 ativos. Os valores apresentados na tabela são médias das 10 combinações de pares. “L” indica posição longa ou comprada (quando se corre risco de queda nos preços) e “S” indica posição curta ou vendida (quando se corre risco de alta nos preços).

Posição	Parâmetro (média)	Nível de confiança						
		0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.995	0.999
S-S	a	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.011
	b	1.010	1.009	1.007	1.003	0.995	0.983	0.881
	R²	0.999	0.999	0.998	0.998	0.999	0.998	0.915
S-L	a	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.007
	b	1.002	0.997	0.991	0.985	0.977	0.966	0.901
	R²	0.997	0.996	0.995	0.994	0.994	0.991	0.951
L-S	a	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.001	0.000	0.004
	b	1.021	1.023	1.024	1.024	1.017	1.004	0.947
	R²	0.997	0.997	0.996	0.995	0.995	0.995	0.972
L-L	a	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.014
	b	0.994	0.987	0.979	0.971	0.971	0.976	0.865
	R²	0.996	0.996	0.995	0.995	0.996	0.996	0.895

Figura 11.4: Regressão das estimativas de VaR pelo método 1\* contra as estimativas do método 2\*. Média das estimativas de R² para carteiras de 2, 3, 4 ou 5 ativos.

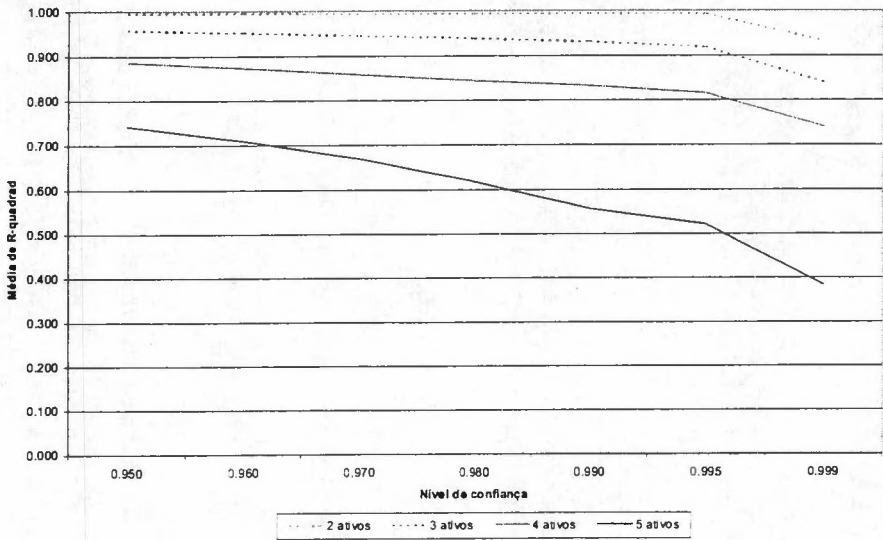


Tabela 11.5: Regressão das estimativas de VaR pelo método 1\* contra as estimativas do método 2\*. Resultado das estimativas de grupos de ativos. Os valores apresentados na tabela são médias das 4 posições e de todos os conjuntos de 2, 3, 4 ou 5 ativos.

2 ATIVOS

Parâmetro		Nível de confiança						
		0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.995	0.999
<i>b</i>	média	1.006	1.004	1.000	0.996	0.990	0.982	0.898
	desvio-padrão	0.028	0.031	0.033	0.034	0.028	0.029	0.124
<i>a</i>	média	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.009
	desvio-padrão	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.013
<i>R</i> <sup>2</sup>	média	0.997	0.997	0.996	0.996	0.996	0.995	0.933
	desvio-padrão	0.004	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.092

3 ATIVOS

Parâmetro		Nível de confiança						
		0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.995	0.999
<i>b</i>	média	0.971	0.968	0.958	0.951	0.932	0.907	0.820
	desvio-padrão	0.079	0.085	0.093	0.099	0.110	0.121	0.170
<i>a</i>	média	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.014
	desvio-padrão	0.002	0.002	0.003	0.003	0.005	0.007	0.017
<i>R</i> <sup>2</sup>	média	0.955	0.948	0.940	0.932	0.922	0.912	0.850
	desvio-padrão	0.060	0.071	0.080	0.092	0.105	0.111	0.125

4 ATIVOS

Parâmetro		Nível de confiança						
		0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.995	0.999
<i>b</i>	média	0.880	0.869	0.857	0.839	0.814	0.800	0.697
	desvio-padrão	0.100	0.105	0.115	0.122	0.131	0.137	0.153
<i>a</i>	média	0.003	0.003	0.004	0.004	0.006	0.007	0.022
	desvio-padrão	0.002	0.003	0.003	0.004	0.006	0.008	0.014
<i>R</i> <sup>2</sup>	média	0.887	0.874	0.859	0.844	0.831	0.815	0.740
	desvio-padrão	0.115	0.126	0.141	0.151	0.161	0.155	0.145

5 ATIVOS

Parâmetro		Nível de confiança						
		0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.995	0.999
<i>b</i>	média	0.719	0.698	0.672	0.641	0.604	0.589	0.412
	desvio-padrão	0.125	0.131	0.146	0.154	0.163	0.183	0.246
<i>a</i>	média	0.006	0.006	0.007	0.009	0.012	0.015	0.053
	desvio-padrão	0.003	0.004	0.005	0.006	0.009	0.012	0.022
<i>R</i> <sup>2</sup>	média	0.741	0.709	0.669	0.615	0.556	0.520	0.384
	desvio-padrão	0.157	0.167	0.191	0.204	0.216	0.232	0.228

## Capítulo 12

# Análise de dependência entre mercados financeiros usando o coeficiente implícito de dependência extremal

No capítulo anterior, verificamos que o método 2\* é uma boa aproximação do método 1\* para carteiras de 2 ativos. Portanto, o coeficiente implícito de dependência extremal pode ser tomado como uma medida da dependência bivariada nos extremos<sup>1</sup>. Uma aplicação que podemos fazer desta medida é usá-la para avaliar se os mercados tornam-se mais dependentes (ou independentes) quando as situações de crises ou de euforia (booms) tornam-se mais extremas. Desta possibilidade de aplicação surgem os objetivos deste capítulo. Embora intrinsecamente vinculados, podemos dividir em dois os nossos objetivos.

Nosso primeiro objetivo é usar o coeficiente implícito de dependência extremal ( $\varrho$ ) para avaliar o comportamento de dependência bivariada (para situações de crise ou de booms simultâneos) das amostras de retornos diários dos mercados acionários e de dívida externa analisados no Capítulo 11. Para efetuar esta análise, iremos também avaliar a sensibilidade das estimativas de  $\varrho$  em relação ao número de estatísticas de ordem usadas para determiná-lo ( $k$ ).

O segundo objetivo é comparar nossos resultados com os da primeira pesquisa que utilizou a TVE bivariada na análise de dependência de mercados acionários em situações extremas. O trabalho pioneiro de Longin e Solnik [32, 33], publicado recentemente no *Journal of Finance*, conclui, grosso modo, que a dependência dos mercados aumenta nas crises e diminui nos booms. Os autores interpretam esta conclusão como um “fato estilizado” (recorrência empírica) dos mercados acionários. Assim, nosso segundo objetivo, diretamente vinculado ao primeiro, é avaliar se a conclusão de Longin e Solnik também é verificada nos mercados estudados nesta pesquisa.

O restante deste capítulo é composto de 4 seções. Na seção 12.1, resumimos procedimento experimental e os resultados do trabalho de Longin e Solnik [32, 33]. Na Seção 12.2 descrevemos o procedimento experimental adotado em nossa pesquisa. Na Seção 12.3 apresentamos os resultados que obtivemos. Comparamos nossos resultados aos de Longin e Solnik e concluímos nossa pesquisa na Seção 12.4.

---

<sup>1</sup>Sua interpretação é análoga ao coeficiente de correlação linear: 0 indica independência e 1 (ou -1) total dependência.

## 12.1 O trabalho de Longin e Solnik

Longin e Solnik [32, 33] usaram um estimador de correlação entre pares de retornos extremos obtido da TVE bivariada para analisar a dependência entre mercados em situações extremas. Seu objetivo era avaliar empiricamente o comportamento das dependências entre pares de retornos de índices de ações para vários graus de eventos extremos. Formalmente, sua avaliação consistiu em testar a hipótese de independência assintótica dos retornos extremos, o que é o mesmo que testar se a distribuição é normal multivariada <sup>2</sup>.

Longin e Solnik [32] usaram uma abordagem completamente paramétrica na estimativa das dependências entre pares de retornos. A distribuição de retornos extremos bivariada foi modelada através das caudas das distribuições marginais (aproximadas por GPD) e por uma função de dependência. Escolheram, arbitrariamente, a função Gumbel do tipo 1 para modelar a estrutura de dependência bivariada. Esta escolha facilitou a obtenção do coeficiente de correlação linear necessário à análise pretendida pelos autores, pois a Gumbel do tipo 1 é formada por combinação das distribuições marginais GPD e um parâmetro que apresenta uma relação matemática simples com o coeficiente de correlação linear.

Após definirem a hipótese a ser testada (independência assintótica) e o instrumento de teste (coeficiente de correlação linear extraído da função de dependência Gumbel tipo 1), os autores analisaram o comportamento de retornos mensais dos mercados acionários dos EUA, Inglaterra, França, Alemanha e Japão, no período de janeiro de 1959 a dezembro de 1996. Estimaram as correlações quando os mercados ultrapassavam os níveis (também definidos de forma arbitrária) de 3%, 5%, 8%, 10% (pontos percentuais) além da média estimada. Procedendo dessa forma, rejeitaram a hipótese nula de normalidade multivariada para a cauda negativa, mas não para a cauda positiva. Isso porque a correlação diminui (tendendo a zero) quando se aumenta o limiar positivo, mas não diminui quando se aumenta o limiar negativo. Também encontram que a correlação não é relacionada à volatilidade de mercado, mas à tendência de mercado. Para eles, a correlação aumenta em mercados com tendência de baixa, mas não em mercados com tendência de alta.

## 12.2 Procedimento experimental

A medida de dependência criada neste trabalho permite aproximar quantis elevados de distribuição bivariada pela combinação dos quantis das distribuições marginais. Desta forma, podemos ter um indicador da evolução da dependência em casos extremos comparável ao utilizado por Longin e Solnik [32]. Vamos analisar o comportamento do coeficiente de dependência extremal em duas situações:

- posições longas nos dois ativos: risco de quedas conjuntas refletido por  $\rho^{ll}$  e;
- posições curtas nos dois ativos: risco de altas conjuntas refletido por  $\rho^{ss}$ .

Para estudar se a dependência entre mercados cresce em situações de crise (quedas de preço extremas simultâneas) analisaremos como o  $\rho^{ll}$  varia em relação a quantis tendendo ao extremo da cauda direita da função distribuição acumulada estimada a partir de amostra com sinais invertidos. Vamos escolher arbitrariamente alguns  $\alpha$  considerados suficientemente elevados e observar como a medida de dependência evolui com o aumento do  $\alpha$ . Por exemplo, tomando  $\alpha = 0.95$  vamos verificar o valor que  $\rho^{ll}$  assume e

<sup>2</sup>Se os retornos fossem dois componentes de um processo normal multivariado então os retornos excedentes de todas as variáveis tenderiam a ser independentes conforme o limiar usado para definir as caudas tendesse ao extremo das distribuições dos retornos.



interpretaremos este valor como a medida de dependência entre as estimativas de retornos que, em cada ativo, são inferiores a 95% das demais estimativas de retorno daquele mesmo ativo<sup>3</sup>. Exemplificando em termos práticos: se o par de ativos for composto por retornos diários dos índices do Ibovespa e Merval, então  $\rho^{ll}$  para  $\alpha = 0,95$  exprime a dependência estimada entre os 5% menores retornos (perdas) do Ibovespa e os 5% menores retornos do Merval.

Analogamente, estudaremos se a dependência entre mercados cresce em situações de euforia (altas de preços extremas simultâneas) através da análise de como o  $\rho^{ss}$  varia em relação a quantis tendendo ao extremo da cauda direita da função distribuição acumulada.

Como não fizemos qualquer suposição sobre a função de dependência, não foi possível estabelecer intervalo de confiança para as estimativas de  $\rho$  geradas. Sabemos, no entanto, que as estimativas de  $\rho$  são sensíveis ao número  $k$  de estatísticas de ordem usadas para gerá-las. Vamos, por esta razão, avaliar o grau de sensibilidade das estimativas quando  $k$  varia dentro de um intervalo que provavelmente contém o  $k$ -ótimo, definido entre 5% e 15% do tamanho da amostra<sup>4</sup>.

O procedimento experimental consistiu na aplicação do programa "rho-varia.k.sp" às 5 amostras de retornos diários dos mercados estudados no Capítulo 11 e análise dos resultados obtidos. Assim, para:

- cada um dos 10 pares de amostras analisadas (EI-FRB, Merval-FRB, Merval-EI, IBOVESPA-FRB, IBOVESPA-Merval, IBOVESPA-NASDAQ, IBOVESPA-EI, NASDAQ-Merval, NASDAQ-FRB, NASDAQ-EI);
- cada uma das duas posições consideradas em cada par (longa-longa -  $ll$ , ou curta-curta -  $ss$ <sup>5</sup>) e;
- cada um dos 7 quantis considerados por par e por posição (denominados  $\alpha$  e com valores de 0,95, 0,96, 0,97, 0,98, 0,99, 0,995 e 0,999);

o programa "rho-varia.k.sp" gerou 50 estimativas aleatórias de  $k$  para valores entre 5% e 15% do tamanho da amostra e, usando estas estimativas de  $k$ , calculou 50 estimativas de  $\rho$ .

Com os resultados do programa, geramos gráficos do tipo boxplot de  $(\rho^{ll}, \alpha)$  e  $(\rho^{ss}, \alpha)$  para cada par de mercados. Analisamos se os boxplots gerados apresentam tendência de queda ou de alta para graus crescentes de crises ou euforia de mercado.

## 12.3 Resultados

Os resultados do procedimento experimental estão nas Figuras 12.1 a 12.20. O quadro abaixo resume os resultados obtidos no procedimento experimental quanto à tendência do comportamento observado da dependência dos mercados em situações extremas.

<sup>3</sup>É importante que o leitor note que, de acordo com a convenção adotada neste trabalho, um mesmo valor de  $\alpha$  tem significado diferente dependendo se ele se refere a posições longas ( $ll$ ) nos dois ativos ou a posições curtas nos dois ativos ( $ss$ ). Por exemplo,  $\rho^{ll}$  para  $\alpha = 0,95$  indica, como já dito, a dependência entre as estimativas de retornos que, em cada ativo, são inferiores a 95% das demais estimativas de retorno daquele mesmo ativo. Já  $\rho^{ss}$  para  $\alpha = 0,95$  indica a dependência entre as estimativas de retornos que, em cada ativo, são superiores a 95% das demais estimativas de retorno daquele mesmo ativo. Desta forma, os valores crescentes de  $\alpha$  associados a posições longas nos dois ativos irão indicar situações de crise mais extremas, enquanto valores crescentes de  $\alpha$  associados a posições curtas nos dois ativos indicarão situações de euforia mais extremas.

<sup>4</sup>A análise da sensibilidade das estimativas em relação a  $k$  só foi possível graças às alterações realizadas no programa de estimativa de  $\rho$  efetuadas por Paulo Ricardo M. Rocha, graduando de estatística e aluno de iniciação científica do IME/USP.

<sup>5</sup>Alternativamente também nos referimos à posição  $ll$  por BB para expressar o risco de baixa nos dois ativos e à posição  $ss$  por AA para expressar o risco de alta nos dois ativos.



Par	Cauda	Tendência do coeficiente implícito de dependência extremal
EI-FRB	Direita	Queda
	Esquerda	Queda
MERVAL-FRB	Direita	Queda
	Esquerda	Alta
MERVAL-EI	Direita	-
	Esquerda	Alta
IBOVESPA-FRB	Direita	Queda
	Esquerda	Alta
IBOVESPA-MERVAL	Direita	Queda
	Esquerda	-
IBOVESPA-NASDAQ	Direita	Queda
	Esquerda	Queda
IBOVESPA-EI	Direita	Alta
	Esquerda	Alta (até 0,995)
NASDAQ-MERVAL	Direita	Queda
	Esquerda	Queda
NASDAQ-FRB	Direita	Queda
	Esquerda	Queda
NASDAQ-EI	Direita	Queda
	Esquerda	Queda

## 12.4 Conclusões

Para concluir nosso estudo, vamos interpretar os resultados obtidos na seção anterior, classificando-os de acordo com o tipo de mercados envolvidos.

**Dívida externa x Dívida externa** A análise da dependência entre títulos de dívida externa do Brasil (EI) e da Argentina (FRB) mostra que a dependência, embora altamente dependentes em situações menos extremas ( $\rho$  próximo a 0,8 para  $\alpha = 0,95$  tanto para as caudas direita quanto esquerda), a dependência cai em situações de crises ou booms. Esta conclusão é particularmente relevante se olhada pelo lado da queda de dependência nas situações de crise mais extremas. Ela indica que, nas situações de crises extremas os retornos desses papéis de dívida dos governos brasileiro e argentino não caminham mais atrelados do que em situações normais de mercado. Isto significa que, ao precificar estes papéis, o mercado consegue, em certo grau, separar as crises extremas do Brasil das crises extremas da Argentina.

Verificamos também que a dependência nos extremos cai com velocidade diferente para as situações de crise e boom. Os gráficos 12.1 e 12.2 mostram que para situação de booms mais extremos a queda é mais acentuada ( $\rho^{ss}$  chega a 0,4 para  $\alpha = 0,995$ ) que para situações de crises mais extremas ( $\rho^{ll}$  chega a 0,6 para  $\alpha = 0,995$ ).

**Dívida externa x Mercados acionários** Analisamos as dependências entre os títulos da dívida externa brasileira e argentina e mercados acionários do Brasil (IBOVESPA), Argentina (MERVAL) e Estados- Unidos (NASDAQ).

Os comportamentos das dívidas brasileiras e argentina em relação ao NASDAQ são muito semelhantes. Relativamente baixos ( $\rho$  próximo a 0,4 para  $\alpha = 0,95$  tanto para as caudas direita quanto esquerda) eles tendem a zero conforme as crises ou booms tornam-se mais extremos.

O comportamento da dívida brasileira (EI) em relação ao mercado acionário argentino (MERVAL) revela a existência de aumento de dependência em situações de crise, mas é não claro que haja este aumento em situações de booms. Para situação invertida, de dívida argentina (FRB) e mercado acionário brasileiro (IBOVESPA), o comportamento na crise é muito semelhante. A dependência entre os mercados aumenta de forma significativa e clara. Por outro lado, para booms de mercado há tendência de queda na dependência.

Os resultados dos mercados de dívida externa do Brasil e Argentina em relação aos seus próprios mercados acionários não são tão semelhantes quanto os observados nos cruzamentos desses mercados entre países. A dependência entre os mercados de dívida externa e acionário do Brasil tende a ficar mais forte nos booms e nas crises (não é claro para  $\alpha = 0,999$ ). Já no caso argentino, a dependência cresce nas crises e decai nos booms.

De forma geral, concluímos, como seria de se esperar, que os retornos do NASDAQ tendem a ser independentes dos retornos das dívidas do Brasil e Argentina analisadas para situações tendendo ao extremo, tanto de crises quanto de booms. Por outro lado, concluímos que quanto piores forem as quedas de preços do EI ou do FRB (IBOVESPA ou do MERVAL) maior será a tendência dessas quedas estarem associadas às piores quedas do IBOVESPA ou do MERVAL (ou do EI ou do FRB).

**Mercados acionário x Mercado acionário** Analisamos três casos de dependência. Dos mercados acionários do Brasil (IBOVESPA) e da Argentina (MERVAL), do Brasil (IBOVESPA) e dos EUA (NASDAQ), e da Argentina (MERVAL) e dos EUA (NASDAQ).

Os mercados acionários do Brasil e da Argentina revelaram dependência fraca (para  $\alpha = 0,95$ ,  $\varrho$  é próximo a 0,3 tanto para a cauda direita quanto esquerda) e tendência de queda fraca tanto para booms quanto para crises tendendo mais ao extremo.

Os comportamentos dos mercados acionários brasileiro e argentino são semelhantes em relação ao NASDAQ. A dependência para  $\alpha = 0,95$  é fraca ( $\varrho$  menor do que 0,3 tanto para a cauda direita quanto esquerda) e caem tendendo a zero nas situações de booms mais extremos e caem tendendo a um valor baixo de  $\varrho$  maior do que zero.

Este caso de avaliação do comportamento da dependência entre mercados acionários em situações extremas pode ser comparado ao estudo de Longin e Solnik [32, 33]. Como já vimos, os autores concluem naquele estudo que a correlação aumenta em mercados com tendência de baixa, mas não em mercados com tendência de alta. A nossa avaliação da dependência por  $\varrho$  indica conclusão diferente da apontada por esses autores. Não obtivemos evidência, para pares de mercados acionários, de que a dependência aumente. Seja nos casos de crises ou booms. Note-se que a conclusão a que chegamos é especialmente relevante por tratar dos mercados acionários do Brasil e Argentina. Conseguimos identificar uma relação de dependência crescente em situações de crises mais extremas quando estudamos os mercados de dívida externa desses dois países (EI-FRB) ou quando estudamos os mercados de dívida externa em relação às bolsas (EI-MERVAL, EI-IBOVESPA, FRB-MERVAL ou FRB-IBOVESPA). Portanto, mesmo no caso de dois países com mercados fortemente associados, a dependência entre suas bolsas não é necessariamente mais forte em situações de crises extremas.

A conclusão de nosso estudo quanto à dependência entre pares de mercados acionários aponta três resultados que contrariam a conclusão de Longin e Solnik [32, 33], considerada “fato estilizado”, de que a dependência cresce em mercados acionários com tendência de baixa extrema. No entanto, a comparação que podemos fazer entre nossos resultados e os de Longin e Solnik é limitada pelo fato desses autores

terem analisados amostras de retornos mensais enquanto nós avaliamos retornos diários<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Vale lembrar que nossa escolha por retornos diários deve-se ao fato de que a análise pela TVE requer uma quantidade elevada de observações, conforme discutido no Capítulo 4.

Figura 12.1: EI-FRB - Evolução de  $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

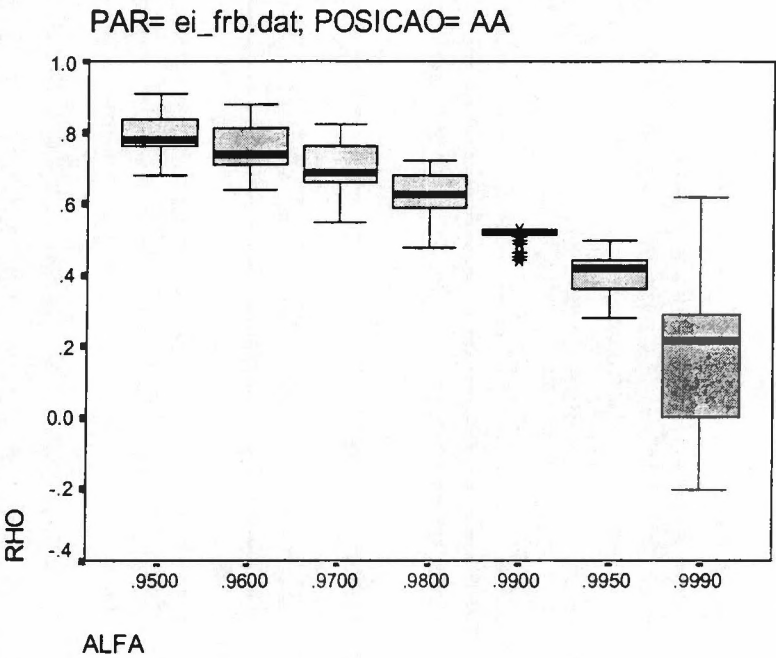


Figura 12.2: EI-FRB - Evolução de  $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.

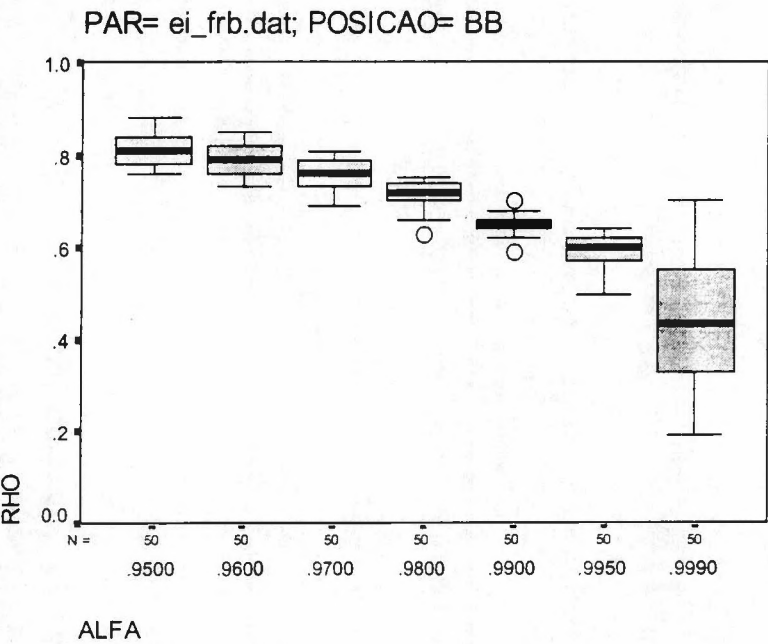


Figura 12.3: MERVAL-FRB - Evolução de  $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

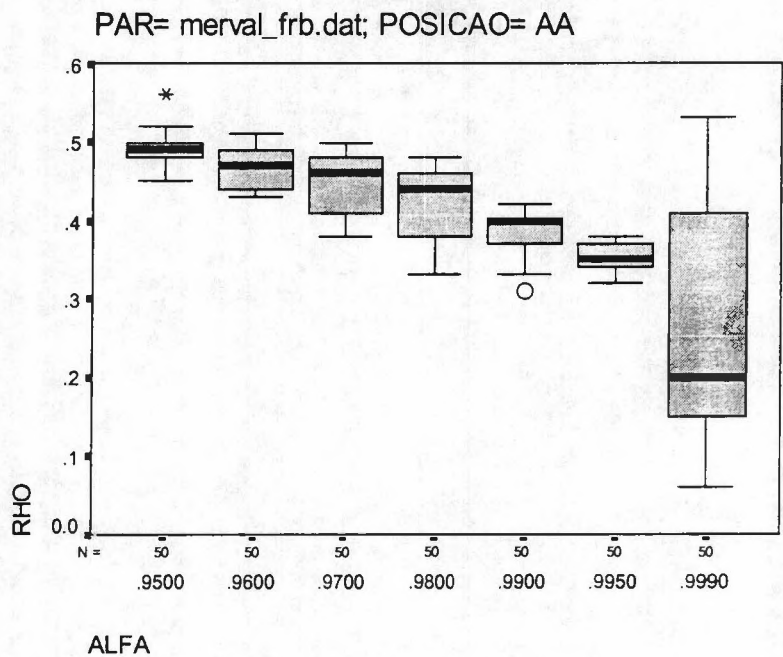


Figura 12.4: MERVAL-FRB - Evolução de  $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.

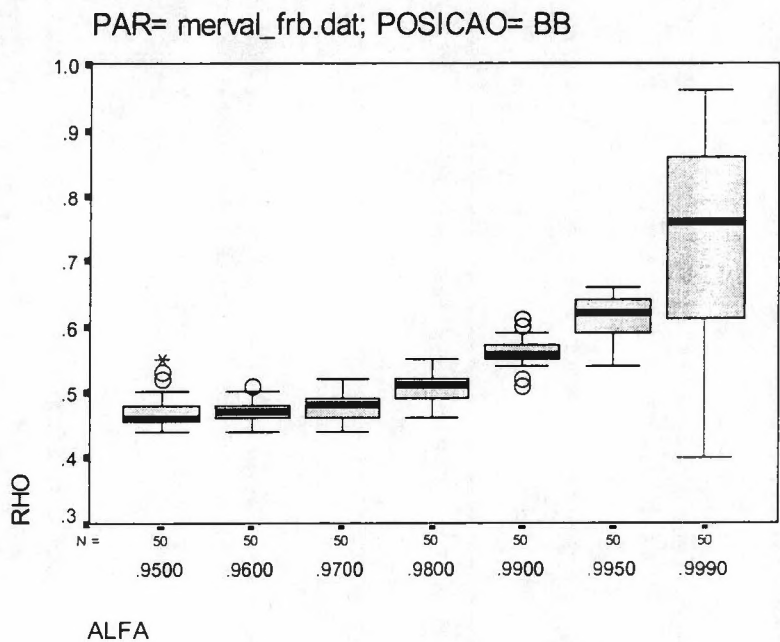


Figura 12.5: MERVAL-EI - Evolução de  $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

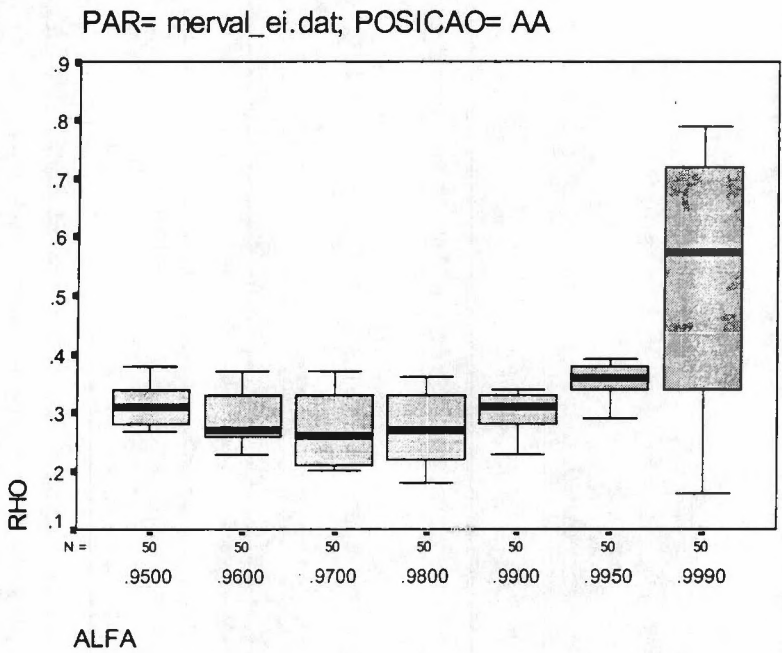


Figura 12.6: MERVAL-EI - Evolução de  $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.

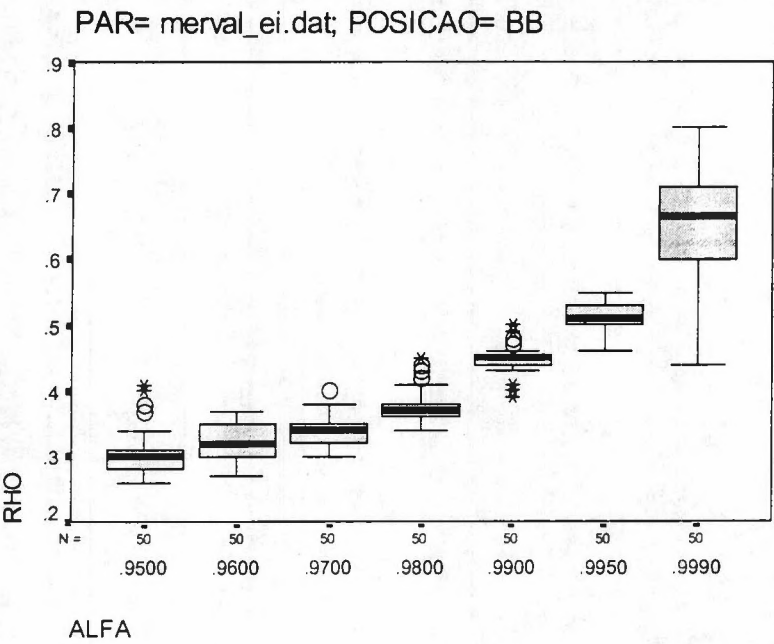




Figura 12.7: IBOVESPA-FRB - Evolução de  $\varrho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

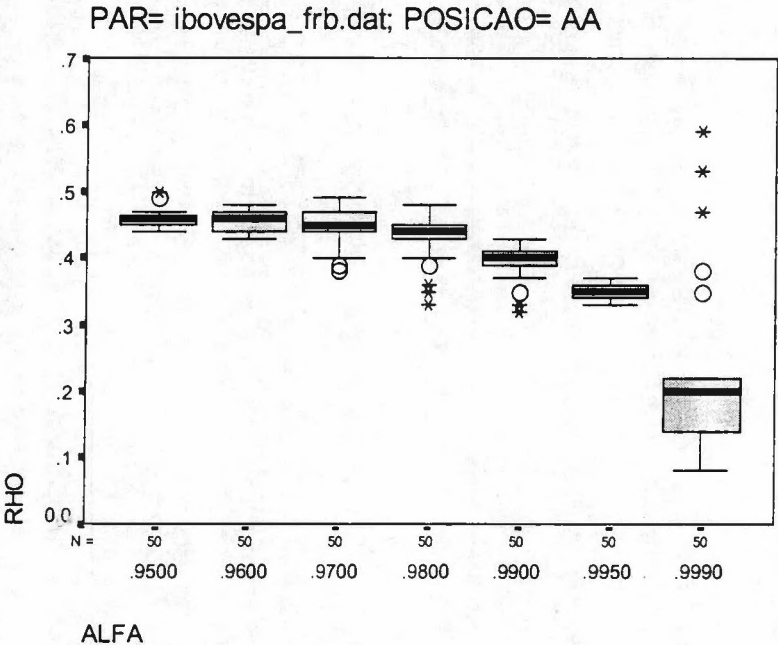


Figura 12.8: IBOVESPA-FRB - Evolução de  $\varrho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.

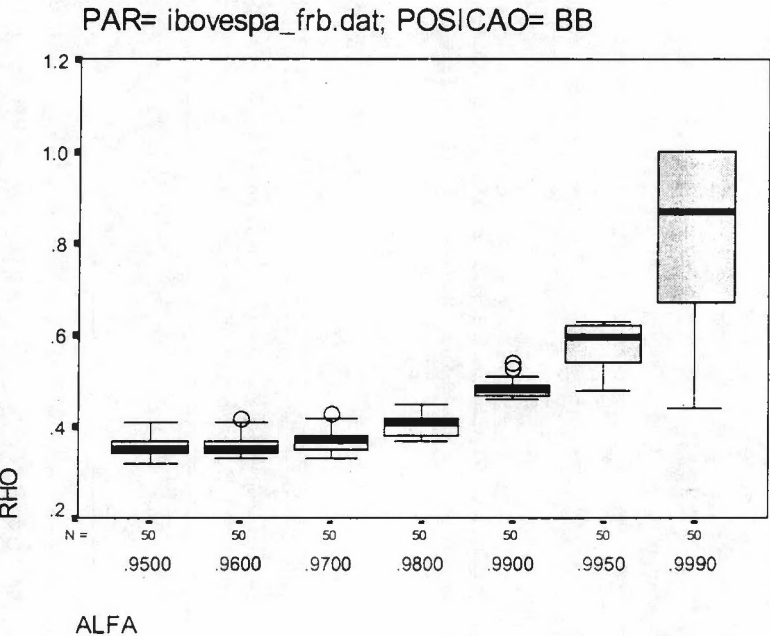


Figura 12.9: IBOVESPA-MERVAL - Evolução de  $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

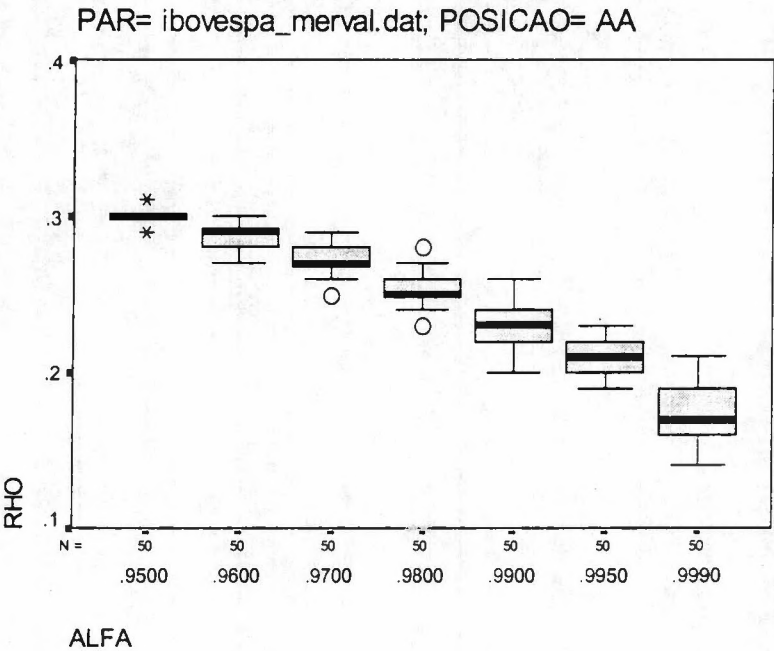


Figura 12.10: IBOVESPA-MERVAL - Evolução de  $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.

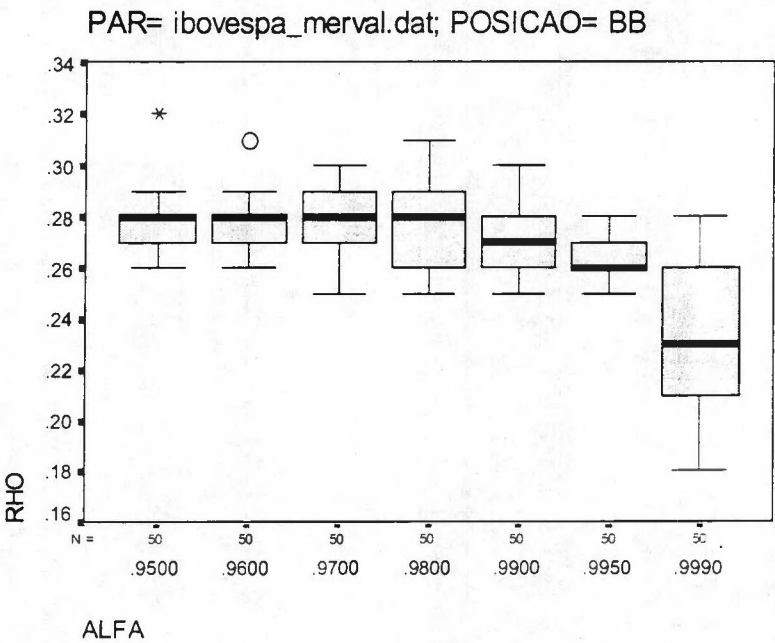


Figura 12.11: IBOVESPA-NASDAQ - Evolução de  $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

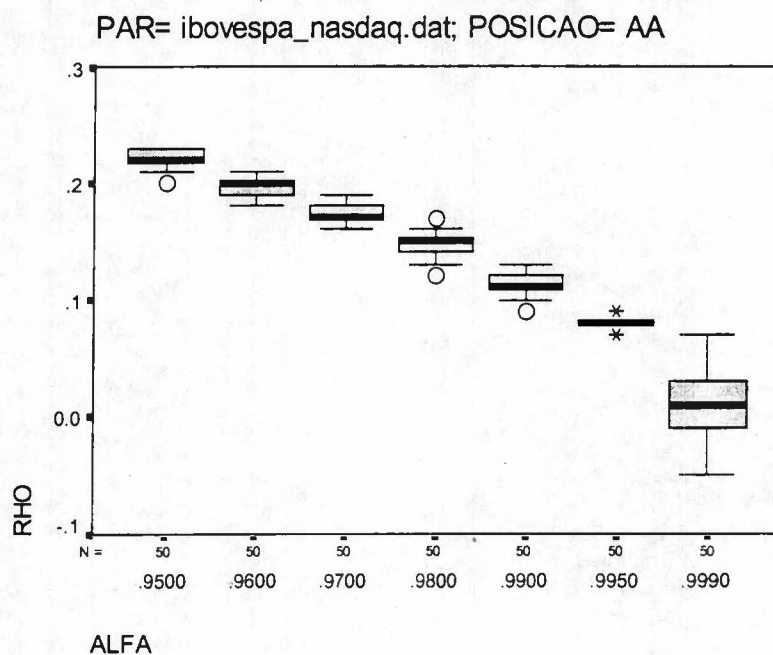


Figura 12.12: IBOVESPA-NASDAQ - Evolução de  $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.

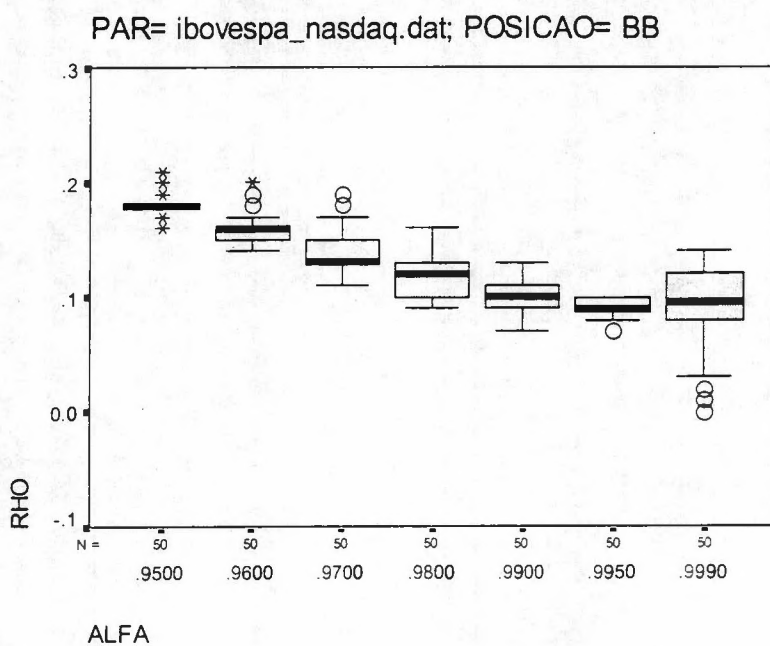


Figura 12.13: IBOVESPA-EI - Evolução de  $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

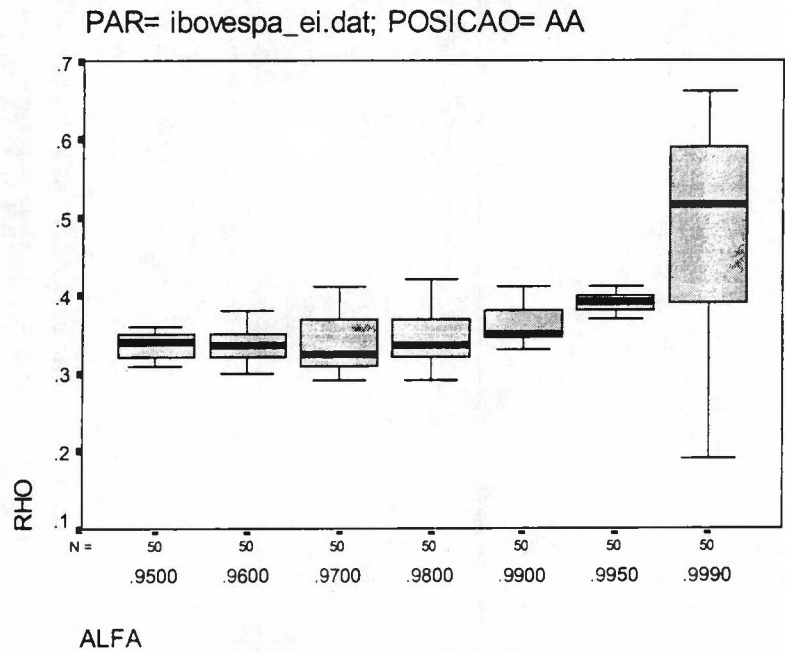


Figura 12.14: IBOVESPA-EI - Evolução de  $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.

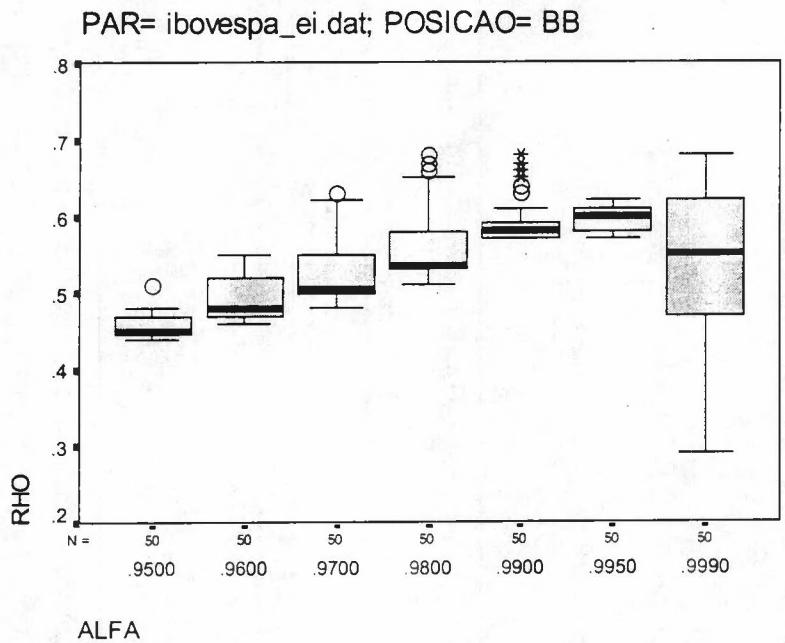


Figura 12.15: NASDAQ-MERVAL - Evolução de  $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

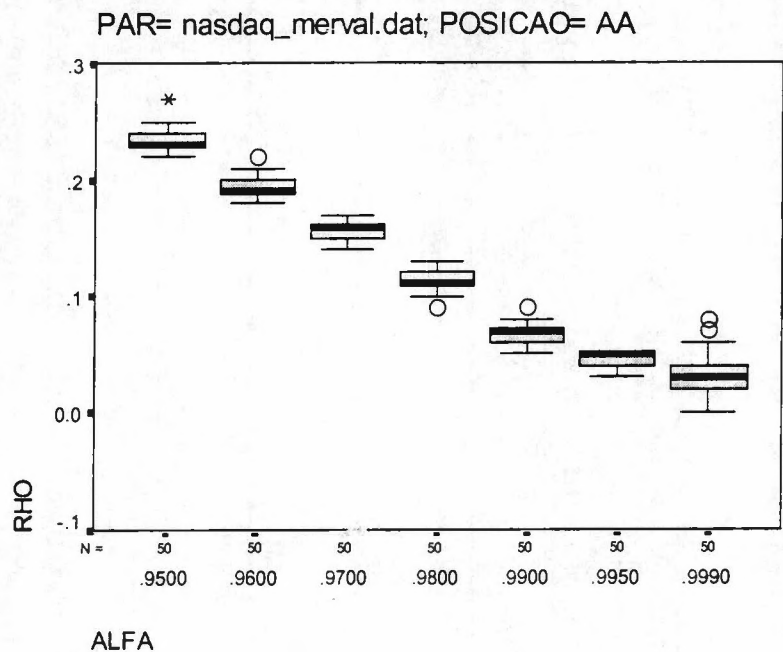


Figura 12.16: NASDAQ-MERVAL - Evolução de  $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.

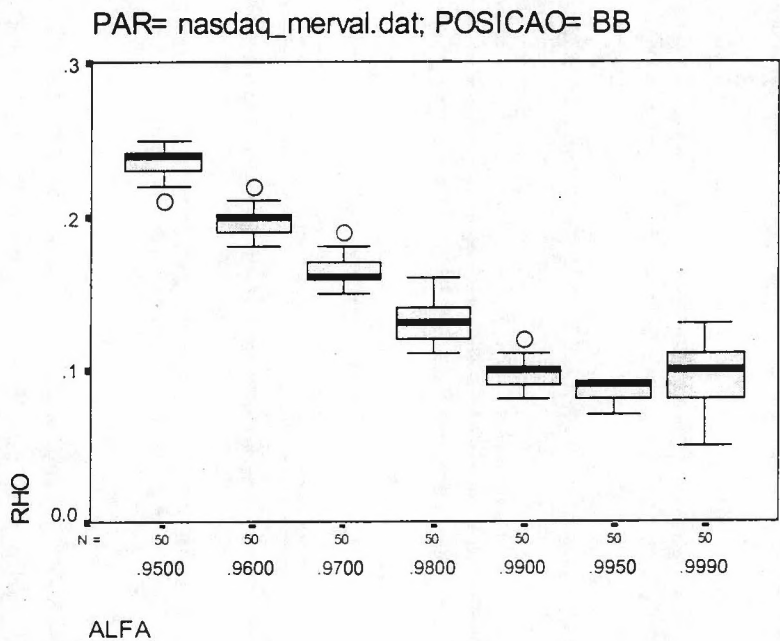


Figura 12.17: NASDAQ-FRB - Evolução de  $\varrho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

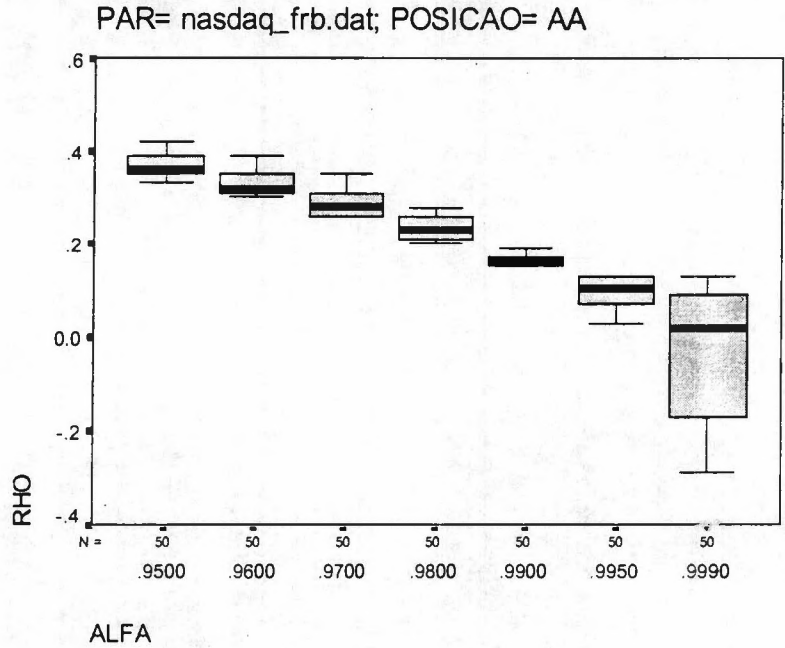


Figura 12.18: NASDAQ-FRB - Evolução de  $\varrho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.

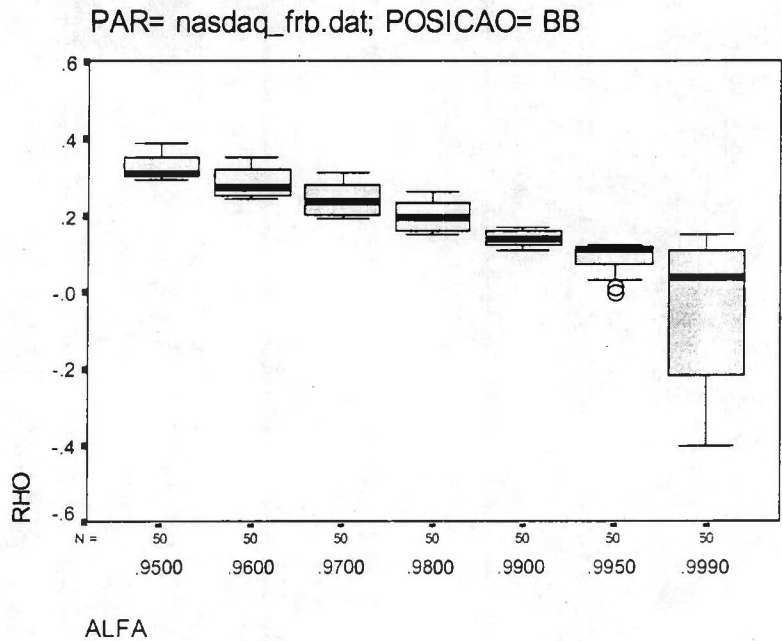




Figura 12.19: NASDAQ-EI - Evolução de  $\rho^{ss}$ . Dependência nos extremos superiores.

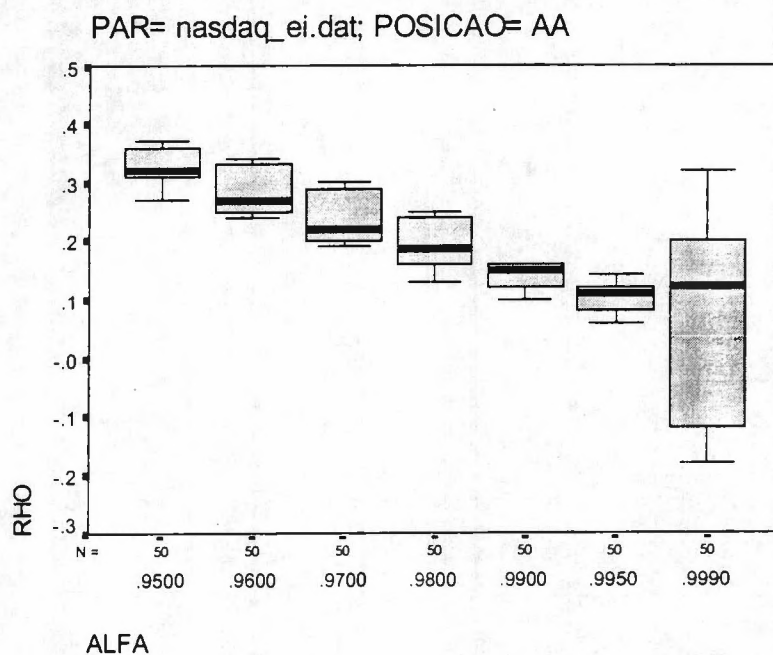
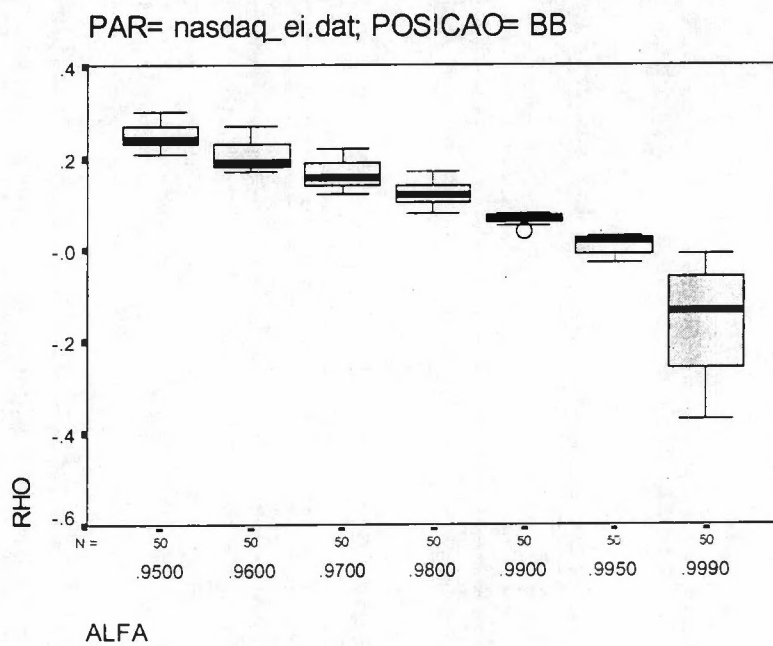


Figura 12.20: NASDAQ-EI - Evolução de  $\rho^{ll}$ . Dependência nos extremos inferiores.



# Bibliografia

- [1] P. S. Cerreta e N. C. A. da Costa Jr. Particularidades do mercado financeiro latino-americano. *Revista de Administração de Empresas*, 41(2):72-77, 2001.
- [2] N. C. A. Costa Jr. Sazonalidades do IBOVESPA. *Revista de Administração de Empresas*, 30(3):79-84, 1990.
- [3] A. Costinot, T. Roncalli, and J. Teiletche. Revisiting the dependence between financial markets with copulas. Working paper, Groupe de Recherche Opérationnelle - Crédit Lyonnais, Paris, Outubro 2000. <http://gro.creditlyonnais.fr/content/rd/wp.htm>.
- [4] M. M. Dacorogna, U. A. Müller, O. V. Pictet, and C.G. de Vries. The distribution of extremal foreign exchange rate returns in extremely large data sets. Working paper, Olsen Associates, Junho 1995. <http://www.olsen.ch>.
- [5] M. M. Dacorogna, U. A. Müller, O. V. Pictet, and C.G. de Vries. Extremal forex returns in extremely large data sets. Working paper, Olsen Associates, Outubro 1998. <http://www.olsen.ch>.
- [6] J. Danielsson e C.G. de Vries. Beyond the sample: Extreme quantile and probability estimation. Working paper, Tinbergen Institute Rotterdam, Dezembro 1997. <http://www.hag.hi.is/~jond/research>.
- [7] J. Danielsson e Y. Morimoto. Forecasting extreme financial risk: A critical analysis of practical methods for the Japanese market. Discussion Paper E-8, Bank of Japan. IMES. Abril 2000. <http://www.risk.is>.
- [8] K. Dowd. The extreme value approach to VaR. *Financial Engineering News*, Agosto 1999. <http://fenews.com>.
- [9] W. H. DuMouchel. Estimating the stable index  $\alpha$  in order to measure tail thickness: A critique. *Annals of Statistics*. 11:1019-1031, 1983.
- [10] V. Durrleman, A. Nikeghbali, e T. Roncalli. Which copula is the right one? Working paper, Crédit Lyonnais. Groupe de Recherche Opérationnelle. Agosto 2000. <http://gro.creditlyonnais.fr/content/rd/wp.htm>.
- [11] P. Embrechts, editor. *Extremes and integrated risk management*. London, 2000. Risk Books.
- [12] P. Embrechts, L. de Haan, e X. Huang. Modelling multivariate extremes. In Embrechts [11].
- [13] P. Embrechts, C. Kluppelberg, e T. Mikosch. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin, 1997.
- [14] R. R. Ferreira. Eventos extremos no mercado acionário latino americano. Dissertação de mestrado, UFRJ/Instituto de Matemática. Rio de Janeiro, 1999.

- [15] R. R. Ferreira, B. V. M. Mendes, e A. M. Duarte Jr. Extreme market events in Latin-American stock markets. *Journal of Emerging Markets*, 5(1):21-48, 2000.
- [16] J. Galambos. *The asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [17] J. Gavin. Extreme value theory: an empirical analysis of equity risk. In Embrechts [11].
- [18] B. V. Gnedenko. Sur la distribution limité du terme d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, 44:423-453, 1943.
- [19] P. Hartmann, S. Straetmans, e C. G. de Vries. Asset market linkages in crisis periods. Working Paper 71, European Central Bank, Julho 2001. <http://www.ecb.int>.
- [20] E. Jondeau e M. Rockinger. The tail behavior of stock returns: emerging versus mature markets. Notes d'Études et de Recherche 66, Banque de France, Julho 1999. <http://banque-france.fr>.
- [21] P. Jorion. *Value-at-risk the new benchmark for managing financial risk*. McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 2000.
- [22] P. Kearns e A. Pagan. Estimating the density tail index for financial time series. *The review of economics and statistics*, 1996.
- [23] T. Kleinow e M. Thomas. Computational resources for extremes. In J. Franke, W. Härdle, e G. Stahl, editors, *Risk in complex stochastic systems*, Seminar Berlin-Paris, <http://www.xplorc.stat.de/ebooks/ebooks.html>. 2000.
- [24] E. Këllezli e M. Gilli. Extreme value theory for tail related measures. Working paper, University of Geneva, Abril 2000. <http://www.gloriamundi.org>.
- [25] P. H. Kupiec. Stress testing in a value-at-risk framework. *The Journal of Derivatives*, 6(1):7-24, 1998.
- [26] H. P. Leite e A. Z. Sanvicente. *Índice BOVESPA: um padrão para os investimentos brasileiros*. Atlas, São Paulo, 1995.
- [27] E. F. Lemgruber, J. L. Becker, e T. B. S. Chaves. O efeito de fim de semana no comportamento dos retornos diários de índices de ações. In N. C. A. Costa Jr., R. P. C. Leal, e E. F. Lemgruber, editors, *Mercado de Capitais: análise empírica no Brasil*. São Paulo, 2000. Atlas.
- [28] F. M. Longin. The asymptotic distribution of extreme stock market returns. *Journal of Business*, 69(3):383-408, 1996.
- [29] F. M. Longin. Stress testing: a method based on extreme value theory. Research paper. BSI GAMMA Foundation, Junho 1999. <http://www.bsi.ch>.
- [30] F. M. Longin. From value at risk to stress testing: the extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, 24:1097-1130, 2000.
- [31] F. M. Longin. From value-at-risk to stress-testing: the extreme value approach. In Embrechts [11].
- [32] F. M. Longin e B. Solnik. The correlation structure of international equity markets in extremely volatile periods. Cahier de Recherche 646. Groupe HEC. Novembro 1999.

- [33] F. M. Longin e B. Solnik. Extreme correlation of international equity markets. *The Journal of Finance*, 2(LVI):649–676, Abril 2001.
- [34] A. J. McNeil. Calculating quantile risk measures for financial return series using extreme value theory. Working paper, ETH Zurich, Abril 1998. <http://www.math.ethz.ch/~mcneil>.
- [35] A. J. McNeil. Extreme value theory for risk managers. In Embrechts [11].
- [36] R. D. Reiss e M. Thomas. *Statistical Analysis of Extreme Values*. Birkhäuser. Berlin. 2001.
- [37] R. D. Reiss e M. Thomas. *StatPascal: User Manual and Reference*. Xtremes Group, <http://www.xtremes.de>, 2001.
- [38] S. I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Weak Convergence*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [39] RiskMetrics Group. Riskmetrics technical document. Technical report, RiskMetrics Group, 1996. <http://www.riskmetrics.com/research/techdocs>.
- [40] J. J. Siegel. *Stocks for the long run*. McGraw-Hill. New York. 1998.
- [41] R. L. Smith. Measuring risk with extreme value theory. In Embrechts [11].
- [42] C. Starica. Multivariate extremes models with constant conditional correlations. *Journal of Empirical Finance*, 6(5):515–553, 1999.
- [43] S. Straetmans. *Extreme financial returns and their comovements*. Thesis Publishers. Amsterdam, 1998.
- [44] S. Straetmans. Extremal spill-overs in equity markets. In Embrechts [11].
- [45] J. A. Tawn. Bivariate extreme value theory: models and estimation. *Biometrika*, 75(3):397–415, 1988.
- [46] J. Tiago de Oliveira. *Statistical Extremes - a survey*. Center of Applied Mathematics. Lisbon. 1973.

## ANEXO 1

Demonstração da Fórmula de Agregação de Riscos  
para retornos com distribuição normal multivariada



Dado um valor  $\alpha \in [0, 1]$  e uma variável aleatória  $X$ , defina-se  $VaR_\alpha(X)$  como um valor tal que a probabilidade de  $X$  assumir valores não superiores<sup>7</sup> a  $VaR_\alpha(X)$  é  $1 - \alpha$ :

$$P[X \leq VaR_\alpha(X)] = 1 - \alpha. \quad (1)$$

$VaR_\alpha(X)$  é denominado *valor sobre risco da variável aleatória  $X$  ao nível  $\alpha$* .

Designando por  $F$  a função de distribuição da variável aleatória  $X$  e lembrando que  $F(x) = P[X \leq x]$ , para todo  $x$ , podemos reescrever (1) de outra maneira, que é completamente equivalente:

$$F(VaR_\alpha(X)) = 1 - \alpha. \quad (2)$$

Quando  $F$  é conhecida, podemos dar o valor exato do  $VaR$  correspondente a um dado nível  $\alpha$ . Por exemplo, se  $X$  tem distribuição normal padrão (i.e.,  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ), temos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{VaR_\alpha(X)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \alpha. \quad (3)$$

Se, por exemplo,  $\alpha = 95\%$ , estimando a integral (3) temos que  $VaR_\alpha(X) \approx -1.65$ .

O valor de  $VaR_\alpha(X)$  para  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  é usado frequentemente na literatura, pois serve como base para a expressão de  $VaR$  para outras variáveis aleatórias. Para facilitar a notação, usa-se a função  $\Phi$  definida por

$$\Phi(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (4)$$

a qual permite a seguinte expressão sucinta:

$$VaR_\alpha(X) = \Phi^{-1}(1 - \alpha), \text{ quando } X \sim \mathcal{N}(0, 1); \quad (5)$$

esta expressão segue diretamente de (3) e de (4).

Abordaremos agora a questão de expressão de  $VaR$  para uma variável aleatória  $Y \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$  (quer dizer, para uma variável aleatória  $Y$  distribuída normalmente com média 0 e variância  $\sigma^2$ ). Neste caso  $Y/\sigma$  tem distribuição normal padrão, quer dizer,

$$P[Y \leq y] = P[X \leq y/\sigma], \text{ para todo } y, \text{ onde } X \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (6)$$

o que implica que

$$1 - \alpha = P[Y \leq VaR_\alpha(Y)] = P[X \leq VaR_\alpha(Y)/\sigma], \text{ para qualquer } \alpha, \quad (7)$$

o que, por sua vez, junto com (1) e (5) nos dá:

$$VaR_\alpha(Y) = \sigma \times VaR_\alpha(X) = \sigma \times \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \sqrt{\text{Var}(Y)} \times \Phi^{-1}(1 - \alpha). \quad (8)$$

Abordaremos agora a questão do cálculo de  $VaR$  de uma carteira e da expressão deste  $VaR$  pelos  $VaR$  dos ativos que a compõem.

Seja  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  um vetor com distribuição normal multivariada e vetor de médias

$$m = (m_1, \dots, m_n) = (E[Y_1], \dots, E[Y_n]) = (0, \dots, 0) \quad (9)$$

e a matriz de covariâncias  $A$ . Esta é uma matriz de  $n$  colunas e  $n$  linhas e sua estrutura é a seguinte: a entrada  $a_{ij}$  que se encontra na intersecção de  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é o valor de

$$E[(Y_i - E(Y_i)) \times (Y_j - E(Y_j))]. \quad (10)$$

<sup>7</sup>Às vezes utiliza-se "inferiores" no lugar de "não superiores" nesta definição. Por considerarmos somente variáveis aleatórias contínuas neste trabalho, não faremos diferença.



A expressão (10) é denominada *covariância entre as variáveis aleatórias*  $Y_i$  e  $Y_j$  e designada por  $\text{cov}(Y_i, Y_j)$ . A covariância de  $Y_i$  com si mesmo é a variância de  $Y_i$ :

$$\text{cov}(Y_i, Y_i) = \text{Var}(Y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

fato que é consequência das definições da variância e da covariância.

Seja agora  $w = (w_1, \dots, w_n)$  um vetor com entradas não negativas. O nosso objetivo é expressar a esperança e a variância da variável aleatória

$$Yw' := Y_1w_1 + Y_2 + \dots + Y_nw_n. \quad (12)$$

Notamos que  $w'$  acima significa o vetor obtido pela transposição do vetor  $w$ <sup>8</sup>. Lembrando agora que  $Y$  foi escolhido de maneira tal que  $E[Y_i] = 0$ , temos de (12) e da linearidade de  $E$  que<sup>9</sup>

$$E[Yw'] = w_1E[Y_1] + \dots + w_nE[Y_n] = 0. \quad (13)$$

Quanto à variância de  $Yw'$ , temos que:

$$\text{Var}(Yw') = E[(Yw' - E(Yw'))^2] = E[(Y_1w_1 + Y_2 + \dots + Y_nw_n)^2] \quad (14)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n w_iw_jE[Y_iY_j] = \sum_{i,j=1}^n w_iw_j\text{cov}(Y_iY_j) = wAw', \quad (15)$$

onde usamos a relação (13), a linearidade de  $E$ , o fato de que  $E[Y_i] = 0$  para todo  $i$ , e a definição da covariância. A última igualdade baseia-se no fato de que a soma dos produtos triplos  $\sum_{i,j=1}^n w_iw_j\text{cov}(Y_iY_j)$  admite uma expressão sucinta que é  $wAw'$ .

Notamos que a derivação de (13) e de (14-15) não usufruiu em lugar algum do fato de  $Y$  ter distribuição normal multivariada. Uma análise simples desta derivação mostra que tanto (13) quanto (14-15) valem para qualquer vetor  $Y$  de variáveis aleatórias, que não necessariamente deve ter distribuição normal multivariada. Notamos também que a suposição  $E[Y_i] = 0$  foi assumida, pois ela é válida em todas as situações tratadas neste trabalho. Porém, (14-15) vale sem esta suposição.

Vamos agora expressar  $\text{VaR}_\alpha(Yw')$ . É na derivação desta expressão que precisaremos do fato de  $Y$  ter distribuição normal multivariada. Este fato implica que a variável aleatória  $Yw'$  tem distribuição normal. Note que os parâmetros desta distribuição já foram achados:  $E[Yw'] = 0$ ,  $\text{Var}(Yw') = wAw'$ , conforme (13) e (14-15) dizem. Juntando todos estes fatos e acrescentando (5) concluímos que

$$\text{VaR}_\alpha(Yw') = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \times \sqrt{wAw'}. \quad (16)$$

Caso  $w$  seja um vetor de pesos, quer dizer, caso  $w_1 + \dots + w_n = 1$ ,<sup>10</sup> a variável aleatória  $Yw'$  pode ser interpretada como o retorno da carteira composta de  $n$  ativos sendo que o  $i$ -ésimo ativo tem a proporção  $w_i$  e o retorno dele sozinho segue a distribuição da variável aleatória  $Y_i$ . Neste caso a fórmula (16) expressa o valor sobre risco da carteira através dos seguintes parâmetros: nível  $\alpha$ : matriz de covariâncias entre os componentes da carteira e: pesos dos componentes da carteira.

Note que os argumentos acima apresentados permitem expressar o  $\text{VaR}$  de uma carteira pelos  $\text{VaR}$  dos seus componentes. É esta expressão que damos agora. Para isso reescrevemos a igualdade

$$\text{Var}(Yw') = \sum_{i,j=1}^n w_iw_j\text{cov}(Y_iY_j)$$

<sup>8</sup>Para eliminar possíveis confusões, esclarecemos que o termo "vetor" neste trabalho corresponde ao "vetor-linha": uma matriz com  $n$  linhas e uma coluna. Com esta interpretação de vetor, o seu transposto é um vetor-coluna: uma matriz com uma coluna e  $n$  linhas, pois a transposição significa a troca de lugares entre linhas e colunas.

<sup>9</sup>Linearidade de  $E$  significa que  $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$  para quaisquer variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  e quaisquer números reais  $a$  e  $b$ .

<sup>10</sup>Vale lembrar que desde começo assumimos que todas as entradas de  $w$  são não negativas. Os argumentos podem ser facilmente estendidos para o caso das entradas do vetor  $w$  poderem assumir valores negativos. Um valor  $w_i$  negativo significa que o  $i$ -ésimo ativo está em posição "vendida" na carteira. Porém, para evitar as confusões, é mais simples inverter o ativo, tomando  $-Y_i$  no lugar de  $Y_i$  e continuar com elementos não negativos de  $w$ . Outra observação é que  $w$  não necessariamente deve ser um vetor de pesos.

obtida em (14-15) como

$$\text{Var}(Yw') = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sqrt{\text{Var}(Y_i)} \sqrt{\text{Var}(Y_j)} \frac{\text{cov}(Y_i Y_j)}{\sqrt{\text{Var}(Y_i)} \sqrt{\text{Var}(Y_j)}} \quad (17)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \rho_{ij} \sqrt{\text{Var}(Y_i)} \sqrt{\text{Var}(Y_j)} \quad (18)$$

onde na segunda passagem usamos o coeficiente de correlação entre  $Y_i$  e  $Y_j$  cuja definição é

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(Y_i Y_j)}{\sqrt{\text{Var}(Y_i)} \sqrt{\text{Var}(Y_j)}}. \quad (19)$$

Dividindo ambos os lados da igualdade (17-18) por  $(\Phi^{-1}(1-\alpha))^2$ , para um  $\alpha$  qualquer, temos que

$$\begin{aligned} (\Phi^{-1}(1-\alpha))^2 \text{Var}(Yw') &= \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \rho_{ij} \times \Phi^{-1}(1-\alpha) \sqrt{\text{Var}(Y_i)} \\ &\quad \times \Phi^{-1}(1-\alpha) \sqrt{\text{Var}(Y_j)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Agora aproveitamos da fórmula (8) segundo a qual

$$\Phi^{-1}(1-\alpha) \text{Var}(Yw') = (VaR_\alpha(Yw'))^2$$

e

$$\Phi^{-1}(1-\alpha) \sqrt{\text{Var}(Y_i)} = VaR_\alpha(Y_i).$$

Estas igualdades <sup>11</sup> e (20) implicam que

$$(VaR_\alpha(Yw'))^2 = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \rho_{ij} VaR_\alpha(Y_i) VaR_\alpha(Y_j), \quad (21)$$

e conclui a demonstração da fórmula de agregação de riscos.

---

<sup>11</sup>Note que a fórmula é válida pois tanto  $Yw'$  quanto cada  $Y_i$  tem distribuição normal.

## ANEXO 2

Programas em StatPascal utilizados

```
(*
PROJETO      : Programa em StatPascal para estimar o coeficiente de
               dependência que minimiza o erro quadrado das estimativas
               de VaR entre os métodos 1* e 2* para uma carteira de 2
               ativos.
ARQUIVO      : determina_rho.sp
AUTOR        : Adonírio Panzieri
DATA DE CRIAÇÃO : 27-Junho-2001
ATUALIZADO EM  : 30-Junho-2001
VERSÃO       : #4
DESCRIÇÃO    : Estima por método numérico o rho que minimiza o erro
               quadrático
               das estimativas de VaR pelos métodos 1* e 2*.
REQUER       : Arquivo de retornos bivariados ativo.
PRODUZ       : Executa estimativas pontuais de rho AA, rho AB, rho BS e
               rho BB.
LIMITAÇÕES   : Usa k igual a 0,1 do tamanho da amostra. Estima rho pela
               varredura dos pontos da função erro x rho.
*)
```

```
program determina_rho;
```

```
var alfa, x, y, z: vector of real;
    h, i, j, k, l, Result: integer;
    e, somaAA, somaAB, somaBA, somaBB, rho, aarho, abrho, barho, bbrho,
    p, w, gamma, mu, sigma, SVx1, SVy1, SVx2, SVy2: real;
    erroAA, erroBB, erroBA, erroAB, correlacao: array [1..201] of real;
    s: array [1..10] of string;
```

```
begin
```

```
s[1]:= "ei_frb.dat";
s[2]:= "merval_frb.dat";
s[3]:= "merval_ei.dat";
s[4]:= "ibovespa_frb.dat";
s[5]:= "ibovespa_merval.dat";
s[6]:= "ibovespa_nasdaq.dat";
s[7]:= "ibovespa_ei.dat";
s[8]:= "nasdaq_merval.dat";
s[9]:= "nasdaq_frb.dat";
s[10]:= "nasdaq_ei.dat";
```

```
for l:= 1 to 1 do begin
```

```
if readdata(s[l])=1 then begin
```

```
x:= columndata(1);
y:= columndata(2);
k:= size(x) div 10;
alfa:= combine(0.95,0.96,0.97,0.98,0.99,0.995,0.999);
```

```
for h:= 7 to 7 do begin
```

```
(** INÍCIO - Cálculo do Stress Value univariado **)
MLEGP(x, k, gamma, mu, sigma, Result);
SVx1:= mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]); (** RISCO DE ALTA **)
MLEGP(-x, k, gamma, mu, sigma, Result);
```

```

SVx2:= mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]); (** RISCO DE BAIXA **)
MLEGP(y, k, gamma, mu, sigma, Result);
SVy1:= mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]); (** RISCO DE ALTA **)
MLEGP(-y, k, gamma, mu, sigma, Result);
SVy2:= mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]); (** RISCO DE BAIXA **)
(** FIM - Cálculo do Stress Value univariado **)

rho:= -1.0;
for j:= 1 to 201 do begin
w:= 0;
somaAA:= 0;
somaAB:= 0;
somaBA:= 0;
somaBB:= 0;

for i:= 1 to 101 do begin
(** RISCO DE ALTA - RISCO DE ALTA **)
z:= w*x*1 + (1-w)*y*1;
MLEGP(z, k, gamma, mu, sigma, Result);
e:= (mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]) -
(w**2*SVx1**2 + 2*rho*w*(1-w)*SVx1*SVy1 + (1-w)**2*SVy1**2)**0.5)**2;
somaAA:= somaAA + e;

(** RISCO DE BAIXA - RISCO DE BAIXA **)
z:= w*x*(-1) + (1-w)*y*(-1);
MLEGP(z, k, gamma, mu, sigma, Result);
e:= (mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]) -
(w**2*SVx2**2 + 2*rho*w*(1-w)*SVx2*SVy2 + (1-w)**2*SVy2**2)**0.5)**2;
somaBB:= somaBB + e;

(** RISCO DE ALTA DE X - RISCO DE BAIXA DE Y **)
z:= w*x*(1) + (1-w)*y*(-1);
MLEGP(z, k, gamma, mu, sigma, Result);
e:= (mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]) -
(w**2*SVx1**2 + 2*rho*w*(1-w)*SVx1*SVy2 + (1-w)**2*SVy2**2)**0.5)**2;
somaAB:= somaAB + e;

(** RISCO DE BAIXA DE X - RISCO DE ALTA DE Y **)
z:= w*x*(-1) + (1-w)*y*(1);
MLEGP(z, k, gamma, mu, sigma, Result);
e:= (mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]) -
(w**2*SVx2**2 + 2*rho*w*(1-w)*SVx2*SVy1 + (1-w)**2*SVy1**2)**0.5)**2;
somaBA:= somaBA + e;

w:= w + 0.01;
end;

erroAA[j]:= somaAA;
erroAB[j]:= somaAB;
erroBA[j]:= somaBA;
erroBB[j]:= somaBB;
correlacao[j]:= rho;
rho:= rho + 0.01;

end;

j:=0;

```



```

repeat
j:= j + 1;
aarho:= correlacao[j];
until (erroAA[j]<erroAA[j+1]) or (j=200);

j:=0;
repeat
j:= j + 1;
abrho:= correlacao[j];
until (erroAB[j]<erroAB[j+1]) or (j=200);

j:=0;
repeat
j:= j + 1;
barho:= correlacao[j];
until (erroBA[j]<erroBA[j+1]) or (j=200);

j:=0;
repeat
j:= j + 1;
bbrho:= correlacao[j];
until (erroBB[j]<erroBB[j+1]) or (j=200);

writeln(s[l],"",k,"",alfa[h],"AA;",aarho);
writeln(s[l],"",k,"",alfa[h],"AB;",abrho);
writeln(s[l],"",k,"",alfa[h],"BA;",barho);
writeln(s[l],"",k,"",alfa[h],"BB;",bbrho);

end;
end else writeln("Falhou a leitura do arquivo ", s[l]);
end;
end.

```



```
(*
PROJETO      : Programa em StatPascal que testa a qualidade das
               estimativas de VaR de uma carteira de 2 ativos (método 1*
               x método 2*).
ARQUIVO      : testa2_rho.sp
AUTOR        : Adonirio Panzieri
DATA DE CRIAÇÃO : 02-Julho-2001
ATUALIZADO EM :
VERSÃO       : #1
DESCRIÇÃO    : Método 1*: método tradicional tomado como
               estimativa verdadeira - é um quantil estimado por MLE.
               Método 2*: derivado de fórmula proposta
               por Longin. É uma aproximação do método anterior. Usa
               estimativas de VaR (calculadas por MLE) univariadas e
               correlações informadas para estimar o VaR da carteira.
REQUER       : Arquivo de retornos ativo (2 variáveis); informação
               de Rho LL, Rho LS, Rho SL e Rho SS extraídas de
               determina_rho.sp.
PRODUZ       : Regressão linear de VaR método 2* x VaR método 1*.
LIMITAÇÕES   : Usa 10% do tamanho da amostra como k.
*)
```

```
program testa2_rho;
```

```
uses correlacoes;
```

```
var i, pos1, pos2, pos3, sinal1, sinal2, sinal3, pos12, pos13, pos23,
    tamanho, h, arquivo, ipar, ialfa, k, Result: integer;
    a, z : vector of real;
    SV: array [1..10, 1..2] of real;
    alfa, x, y, w : array [1..1002] of real;
    media, j, gamma, mu, sigma, p, b, sdb, SST, SSR: real;
    s: array [1..10] of string;
    par: array [1..10] of array [1..4] of integer;
```

```
begin
```

```
s[1]:= "ei_frb.dat";
s[2]:= "merval_frb.dat";
s[3]:= "merval_ei.dat";
s[4]:= "ibovespa_frb.dat";
s[5]:= "ibovespa_merval.dat";
s[6]:= "ibovespa_nasdaq.dat";
s[7]:= "ibovespa_ei.dat";
s[8]:= "nasdaq_merval.dat";
s[9]:= "nasdaq_frb.dat";
s[10]:= "nasdaq_ei.dat";
```

```
par[1,1]:= 1;
par[2,1]:= 2;
par[3,1]:= 3;
par[4,1]:= 4;
par[5,1]:= 5;
par[6,1]:= 6;
par[7,1]:= 7;
par[8,1]:= 8;
par[9,1]:= 9;
par[10,1]:= 10;
```

```

correlacoes;

alfa[1]:= 0.95;
alfa[2]:= 0.96;
alfa[3]:= 0.97;
alfa[4]:= 0.98;
alfa[5]:= 0.99;
alfa[6]:= 0.995;
alfa[7]:= 0.999;

for arquivo:= 1 to 1 do begin

  if readdata(s[arquivo])=1 then begin

    k:= size(columndata(1)) div 10;

    for ialfa:= 1 to 7 do begin
      p:= alfa[ialfa];

      for i:= 1 to dimension do begin
        MLEGP(columndata(i), k, gamma, mu, sigma, Result);
        SV[i,1]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);
        MLEGP(-columndata(i), k, gamma, mu, sigma, Result);
        SV[i,2]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);
      end;

      for pos1:= 1 to 2 do begin
        if pos1 = 1 then sinal1:= 1 else sinal1:= -1;

        for pos2:= 1 to 2 do begin
          if pos2 = 1 then sinal2:= 1 else sinal2:= -1;

          for i:= 1 to 1000 do begin
            for h:=1 to dimension do begin
              w[h]:= random;
            end;
            for h:= 1 to dimension do begin
              w[h]:= w[h]/sum(w);
            end;

            z:= w[1]*columndata(1)*sinal1 + w[2]*columndata(2)*sinal2;
            MLEGP(z, k, gamma, mu, sigma, Result);

            x[i]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);

            pos12:=1;

            if pos1 > pos2 then pos12:= 3 else
              if pos1 < pos2 then pos12:= 2 else
                if pos1 = 1 then if pos2 = 1 then pos12:= 1 else
                  if pos1 = 2 then if pos2 = 2 then pos12:= 4;

            y[i]:= (w[1]**2*SV[1,pos1]**2 +

```

```

w[2]**2*SV[2,pos2]**2 +
2*rho[par[arquivo,1],ialfa,pos12]*w[1]*w[2]*SV[1,pos1]*SV[2,pos2])**0.5;

end;

tamanho:= size(y);

a:= PolynomialRegression(x,y,1);
sdb:= (variance(y)/(variance(x)*(tamanho-2)))**0.5;
SST:= 0;
SSR:= 0;
media:= mean(y);
for h:= 1 to tamanho do begin
SST:= SST + (y[h]-media)**2;
SSR:= SSR + (a[1]+a[2]*x[h]-media)**2;
end;
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,"", "Constante      ; ",a[1]);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,"", "Coeficiente b   ; ",a[2]);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,"", "b inferior      ; ",a[2]-
1.96*sdb);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,"", "b superior      ;
",a[2]+1.96*sdb);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,"", "R-quadrado     ;
",SSR/SST);

end;
end;

end;
end else writeln("Falhou a leitura do arquivo ", s[arquivo]);
end;
end.

```

```
(*
PROJETO      : Programa em StatPascal que testa a qualidade das
               estimativas de VaR de uma carteira de 3 ativos (método 1*
               x método 2*).
ARQUIVO      : testa3_rho.sp
AUTOR        : Adonirio Panzieri
DATA DE CRIAÇÃO : 02-Julho-2001
ATUALIZADO EM  :
VERSÃO       : #1
DESCRIÇÃO    : Método 1*: método tradicional tomado como
               estimativa verdadeira - é um quantil estimado por MLE.
               Método 2*: derivado de fórmula proposta
               por Longin. É uma aproximação do método anterior. Usa
               estimativas de VaR (calculadas por MLE) univariadas e
               correlações informadas para estimar o VaR da carteira.

REQUER       : Arquivo de retornos trivariados ativo; informação
               de Rho LL, Rho LS, Rho SL e Rho SS extraídas de
               determina_rho.sp.

PRODUZ       : Regressão linear de VaR método 2* x VaR método 1*.
LIMITAÇÕES   : Usa 10% do tamanho da amostra como k.
*)
```

```
program testa3_rho;
```

```
uses correlacoes;
```

```
var i, pos1, pos2, pos3, sinal1, sinal2, sinal3, pos12, pos13, pos23,
    tamanho, h, arquivo, ipar, ialfa, k, Result: integer;
    a, z : vector of real;
    SV: array [1..10, 1..2] of real;
    alfa, x, y, w : array [1..1002] of real;
    media, j, gamma, mu, sigma, p, b, sdb, SST, SSR: real;
    s: array [1..10] of string;
    par: array [1..10] of array [1..4] of integer;
```

```
begin
```

```
s[1]:= "ibovespa_nasdaq_merval.dat";
s[2]:= "merval_ei_frb.dat";
s[3]:= "ibovespa_nasdaq_ei.dat";
s[4]:= "ibovespa_nasdaq_frb.dat";
s[5]:= "ibovespa_merval_frb.dat";
s[6]:= "ibovespa_merval_ei.dat";
s[7]:= "ibovespa_ei_frb.dat";
s[8]:= "nasdaq_merval_ei.dat";
s[9]:= "nasdaq_merval_frb.dat";
s[10]:= "nasdaq_ei_frb.dat";
```

```
par[1,1]:= 6;
par[1,2]:= 5;
par[1,3]:= 8;
par[2,1]:= 3;
par[2,2]:= 2;
par[2,3]:= 1;
par[3,1]:= 6;
par[3,2]:= 7;
par[3,3]:= 10;
par[4,1]:= 6;
```

```

par[4,2]:= 4;
par[4,3]:= 9;
par[5,1]:= 5;
par[5,2]:= 4;
par[5,3]:= 2;
par[6,1]:= 5;
par[6,2]:= 7;
par[6,3]:= 3;
par[7,1]:= 7;
par[7,2]:= 4;
par[7,3]:= 1;
par[8,1]:= 8;
par[8,2]:= 10;
par[8,3]:= 3;
par[9,1]:= 8;
par[9,2]:= 9;
par[9,3]:= 2;
par[10,1]:= 10;
par[10,2]:= 9;
par[10,3]:= 1;

```

correlacoes;

```

alfa[1]:= 0.95;
alfa[2]:= 0.96;
alfa[3]:= 0.97;
alfa[4]:= 0.98;
alfa[5]:= 0.99;
alfa[6]:= 0.995;
alfa[7]:= 0.999;

```

```

for arquivo:= 1 to 1 do begin

```

```

    if readdata(s[arquivo])=1 then begin

```

```

        k:= size(columndata(1)) div 10;

```

```

        for ialfa:= 1 to 7 do begin

```

```

            p:= alfa[ialfa];

```

```

            for i:= 1 to dimension do begin

```

```

                MLEGP(columndata(i), k, gamma, mu, sigma, Result);

```

```

                SV[i,1]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);

```

```

                MLEGP(-columndata(i), k, gamma, mu, sigma, Result);

```

```

                SV[i,2]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);

```

```

            end;

```

```

        for pos1:= 1 to 2 do begin

```

```

            if pos1 = 1 then sinal1:= 1 else sinal1:= -1;

```

```

        for pos2:= 1 to 2 do begin

```

```

            if pos2 = 1 then sinal2:= 1 else sinal2:= -1;

```

```

        for pos3:= 1 to 2 do begin

```

```

            if pos3 = 1 then sinal3:= 1 else sinal3:= -1;

```



```

for i:= 1 to 1000 do begin
  for h:=1 to dimension do begin
    w[h]:= random;
  end;
  for h:= 1 to dimension do begin
    w[h]:= w[h]/sum(w);
  end;

  z:= w[1]*columndata(1)*sinal1 + w[2]*columndata(2)*sinal2 +
  w[3]*columndata(3)*sinal3;
  MLEGP(z, k, gamma, mu, sigma, Result);

  x[i]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);

  pos12:=1;
  pos13:=1;
  pos23:=1;

  if pos1 > pos2 then pos12:= 3 else
    if pos1 < pos2 then pos12:= 2 else
      if pos1 = 1 then if pos2 = 1 then pos12:= 1 else
        if pos1 = 2 then if pos2 = 2 then pos12:= 4;

  if pos1 > pos3 then pos13:= 3 else
    if pos1 < pos3 then pos13:= 2 else
      if pos1 = 1 then if pos3 = 1 then pos13:= 1 else
        if pos1 = 2 then if pos3 = 2 then pos13:= 4;

  if pos2 > pos3 then pos23:= 3 else
    if pos2 < pos3 then pos23:= 2 else
      if pos2 = 1 then if pos3 = 1 then pos23:= 1 else
        if pos2 = 2 then if pos3 = 2 then pos23:= 4;

  y[i]:= (w[1]**2*SV[1,pos1]**2 +
    w[2]**2*SV[2,pos2]**2 +
    w[3]**2*SV[3,pos3]**2 +
    2*rho[par[arquivo,1],ialfa,pos12]*w[1]*w[2]*SV[1,pos1]*SV[2,pos2] +
    2*rho[par[arquivo,2],ialfa,pos13]*w[1]*w[3]*SV[1,pos1]*SV[3,pos3] +
    2*rho[par[arquivo,3],ialfa,pos23]*w[2]*w[3]*SV[2,pos2]*SV[3,pos3])**0.5;

end;

tamanho:= size(y);

a:= PolynomialRegression(x,y,1);
sdb:= (variance(y)/(variance(x)*(tamanho-2)))*0.5;
SST:= 0;
SSR:= 0;
media:= mean(y);
for h:= 1 to tamanho do begin
  SST:= SST + (y[h]-media)**2;
  SSR:= SSR + (a[1]+a[2]*x[h]-media)**2;
end;
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,"", "Constante      ;
",a[1]);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,"", "Coeficiente b  ;
",a[2]);

```



```

        writeln(s[arquivo],";",p,";",k,";",pos1,pos2,pos3,";", "b inferior      ;
",a[2]-1.96*sdb);
        writeln(s[arquivo],";",p,";",k,";",pos1,pos2,pos3,";", "b superior      ;
",a[2]+1.96*sdb);
        writeln(s[arquivo],";",p,";",k,";",pos1,pos2,pos3,";", "R-quadrado      ;
",SSR/SST);

end;
end;
end;
end;
end else writeln("Falhou a leitura do arquivo ", s[arquivo]);
end;
end.

```

```
(*
PROJETO      : Programa em StatPascal que testa a qualidade das
               estimativas de VaR de uma carteira de 4 ativos
               (método 1* x método 2*).
ARQUIVO      : testa4_rho.sp
AUTOR        : Adonirio Panzieri
DATA DE CRIAÇÃO : 03-Julho-2001
ATUALIZADO EM :
VERSÃO       : #1
DESCRIÇÃO    : Método 1*: método tradicional tomado como
               estimativa verdadeira - é um quantil estimado por MLE.
               Método 2*: derivado de fórmula proposta
               por Longin. É uma aproximação do método anterior. Usa
               estimativas de VaR (calculadas por MLE) univariadas e
               correlações informadas para estimar o VaR da carteira.
REQUER       : Arquivo de retornos ativo (4 variáveis); informação
               de Rho LL, Rho LS, Rho SL e Rho SS extraídas de
               determina_rho.sp.
PRODUZ       : Regressão linear de VaR método 2* x VaR método 1*.
LIMITAÇÕES   : Usa 10% do tamanho da amostra como k.
*)
```

```
program testa4_rho;
```

```
uses correlacoes;
```

```
var i, pos1, pos2, pos3, pos4, sinal1, sinal2, sinal3, sinal4,
    pos12, pos13, pos14, pos23, pos24, pos34,
    tamanho, h, arquivo, ipar, ialfa, k, Result: integer;
a, z : vector of real;
SV: array [1..10, 1..10] of real;
alfa, x, y, w : array [1..1002] of real;
media, j, gamma, mu, sigma, p, b, sdb, SST, SSR: real;
s: array [1..10] of string;
par: array [1..10] of array [1..10] of integer;
```

```
begin
```

```
s[1]:= "ibovespa_nasdaq_merval_ei.dat";
s[2]:= "ibovespa_nasdaq_merval_frb.dat";
s[3]:= "ibovespa_nasdaq_ei_frb.dat";
s[4]:= "ibovespa_merval_ei_frb.dat";
s[5]:= "nasdaq_merval_ei_frb.dat";
```

```
par[1,1]:= 6;
par[1,2]:= 5;
par[1,3]:= 7;
par[1,4]:= 8;
par[1,5]:= 10;
par[1,6]:= 3;
```

```
par[2,1]:= 6;
par[2,2]:= 5;
par[2,3]:= 4;
par[2,4]:= 8;
par[2,5]:= 9;
par[2,6]:= 2;
```

```

par[3,1]:= 6;
par[3,2]:= 7;
par[3,3]:= 4;
par[3,4]:= 10;
par[3,5]:= 9;
par[3,6]:= 1;

```

```

par[4,1]:= 5;
par[4,2]:= 7;
par[4,3]:= 4;
par[4,4]:= 3;
par[4,5]:= 2;
par[4,6]:= 1;

```

```

par[5,1]:= 8;
par[5,2]:= 10;
par[5,3]:= 9;
par[5,4]:= 3;
par[5,5]:= 2;
par[5,6]:= 1;

```

```

correlacoes;

```

```

alfa[1]:= 0.95;
alfa[2]:= 0.96;
alfa[3]:= 0.97;
alfa[4]:= 0.98;
alfa[5]:= 0.99;
alfa[6]:= 0.995;
alfa[7]:= 0.999;

```

```

for arquivo:= 1 to 5 do begin

```

```

    if readdata(s[arquivo])=1 then begin

```

```

        k:= size(columndata(1)) div 10;

```

```

        for ialfa:= 1 to 7 do begin
            p:= alfa[ialfa];

```

```

            for i:= 1 to dimension do begin
                MLEGP(columndata(i), k, gamma, mu, sigma, Result);
                SV[i,1]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);
                MLEGP(-columndata(i), k, gamma, mu, sigma, Result);
                SV[i,2]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);
            end;

```

```

        for pos1:= 1 to 2 do begin
            if pos1 = 1 then sinal1:= 1 else sinal1:= -1;

```

```

        for pos2:= 1 to 2 do begin
            if pos2 = 1 then sinal2:= 1 else sinal2:= -1;

```

```

        for pos3:= 1 to 2 do begin
            if pos3 = 1 then sinal3:= 1 else sinal3:= -1;

```

```

for pos4:= 1 to 2 do begin
    if pos4 = 1 then sinal4:= 1 else sinal4:= -1;

for i:= 1 to 1000 do begin
    for h:=1 to dimension do begin
        w[h]:= random;
    end;
    for h:= 1 to dimension do begin
        w[h]:= w[h]/sum(w);
    end;

z:= w[1]*columndata(1)*sinal1 + w[2]*columndata(2)*sinal2 +
    w[3]*columndata(3)*sinal3 + w[4]*columndata(4)*sinal4;

MLEGP(z, k, gamma, mu, sigma, Result);

x[i]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);

pos12:=1;
pos13:=1;
pos14:=1;
pos23:=1;
pos24:=1;
pos34:=1;

if pos1 > pos2 then pos12:= 3 else
    if pos1 < pos2 then pos12:= 2 else
        if pos1 = 1 then if pos2 = 1 then pos12:= 1 else
            if pos1 = 2 then if pos2 = 2 then pos12:= 4;

if pos1 > pos3 then pos13:= 3 else
    if pos1 < pos3 then pos13:= 2 else
        if pos1 = 1 then if pos3 = 1 then pos13:= 1 else
            if pos1 = 2 then if pos3 = 2 then pos13:= 4;

if pos1 > pos4 then pos14:= 3 else
    if pos1 < pos4 then pos14:= 2 else
        if pos1 = 1 then if pos4 = 1 then pos14:= 1 else
            if pos1 = 2 then if pos4 = 2 then pos14:= 4;

if pos2 > pos3 then pos23:= 3 else
    if pos2 < pos3 then pos23:= 2 else
        if pos2 = 1 then if pos3 = 1 then pos23:= 1 else
            if pos2 = 2 then if pos3 = 2 then pos23:= 4;

if pos2 > pos4 then pos24:= 3 else
    if pos2 < pos4 then pos24:= 2 else
        if pos2 = 1 then if pos4 = 1 then pos24:= 1 else
            if pos2 = 2 then if pos4 = 2 then pos24:= 4;

if pos3 > pos4 then pos34:= 3 else
    if pos3 < pos4 then pos34:= 2 else
        if pos3 = 1 then if pos4 = 1 then pos34:= 1 else
            if pos3 = 2 then if pos4 = 2 then pos34:= 4;

```

```

y[i]:= (w[1]**2*SV[1,pos1]**2 +
        w[2]**2*SV[2,pos2]**2 +
        w[3]**2*SV[3,pos3]**2 +
        w[4]**2*SV[4,pos4]**2 +
        2*rho[par[arquivo,1],ialfa,pos12]*w[1]*w[2]*SV[1,pos1]*SV[2,pos2] +
        2*rho[par[arquivo,2],ialfa,pos13]*w[1]*w[3]*SV[1,pos1]*SV[3,pos3] +
        2*rho[par[arquivo,3],ialfa,pos14]*w[1]*w[4]*SV[1,pos1]*SV[4,pos4] +
        2*rho[par[arquivo,4],ialfa,pos23]*w[2]*w[3]*SV[2,pos2]*SV[3,pos3] +
        2*rho[par[arquivo,5],ialfa,pos24]*w[2]*w[4]*SV[2,pos2]*SV[4,pos4] +
        2*rho[par[arquivo,6],ialfa,pos34]*w[3]*w[4]*SV[3,pos3]*SV[4,pos4])**0.5;

end;

tamanho:= size(y);
a:= PolynomialRegression(x,y,1);
sdb:= (variance(y)/(variance(x)*(tamanho-2)))*0.5;
SST:= 0;
SSR:= 0;
media:= mean(y);
for h:= 1 to tamanho do begin
    SST:= SST + (y[h]-media)**2;
    SSR:= SSR + (a[1]+a[2]*x[h]-media)**2;
end;
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,"", "Constante      ;
",a[1]);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,"", "Coeficiente b ;
",a[2]);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,"", "b inferior    ;
",a[2]-1.96*sdb);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,"", "b superior    ;
",a[2]+1.96*sdb);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,"", "R-quadrado    ;
",SSR/SST);

end;
end;
end;

end else writeln("Falhou a leitura do arquivo ",s[arquivo]);

end;
end.

```



```
(*
  PROJETO      : Programa em StatPascal que testa a qualidade das
                  estimativas de VaR de uma carteira de 5 ativos
                  (método 1* x método 2*).
  ARQUIVO      : testa5_rho.sp
  AUTOR        : Adonirio Panzieri
  DATA DE CRIAÇÃO : 03-Julho-2001
  ATUALIZADO EM  :
  VERSÃO       : #1
  DESCRIÇÃO    : Método 1*: método tradicional tomado como
                  estimativa verdadeira - é um quantil estimado por MLE.
                  Método 2*: derivado de fórmula proposta
                  por Longin. É uma aproximação do método anterior. Usa
                  estimativas de VaR (calculadas por MLE) univariadas e
                  correlações informadas para estimar o VaR da carteira.
  REQUER       : Arquivo de retornos ativo (5 variáveis); informação
                  de Rho LL, Rho LS, Rho SL e Rho SS extraídas de
                  determina_rho.sp.
  PRODUZ       : Regressão linear de VaR método 2* x VaR método 1*.
  LIMITAÇÕES   : Usa 10% do tamanho da amostra como k.
*)
```

```
program testa5_rho;
```

```
uses correlacoes;
```

```
var i, pos1, pos2, pos3, pos4, pos5, sinal1, sinal2, sinal3, sinal4, sinal5,
    pos12, pos13, pos14, pos15, pos23, pos24, pos25, pos34, pos35, pos45,
    tamanho, h, arquivo, ipar, ialfa, k, Result: integer;
    a, z : vector of real;
    SV: array [1..10, 1..10] of real;
    alfa, x, y, w : array [1..1002] of real;
    media, j, gamma, mu, sigma, p, b, sdb, SST, SSR: real;
    s: array [1..10] of string;
    par: array [1..10] of array [1..10] of integer;
```

```
begin
```

```
s[1]:= "ibovespa_nasdaq_merval_ei_frb.dat";
```

```
par[1,1]:= 6;
par[1,2]:= 5;
par[1,3]:= 7;
par[1,4]:= 4;
par[1,5]:= 8;
par[1,6]:= 10;
par[1,7]:= 9;
par[1,8]:= 3;
par[1,9]:= 2;
par[1,10]:= 1;
```

```
correlacoes;
```

```
alfa[1]:= 0.95;
alfa[2]:= 0.96;
alfa[3]:= 0.97;
```

```

alfa[4]:= 0.98;
alfa[5]:= 0.99;
alfa[6]:= 0.995;
alfa[7]:= 0.999;

for arquivo:= 1 to 1 do begin
  if readdata(s[arquivo])=1 then begin
    k:= size(columndata(1)) div 10;

    for ialfa:= 1 to 7 do begin
      p:= alfa[ialfa];

      for i:= 1 to dimension do begin
        MLEGP(columndata(i), k, gamma, mu, sigma, Result);
        SV[i,1]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);
        MLEGP(-columndata(i), k, gamma, mu, sigma, Result);
        SV[i,2]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);
      end;

      for pos1:= 1 to 2 do begin
        if pos1 = 1 then sinal1:= 1 else sinal1:= -1;
      end;

      for pos2:= 1 to 2 do begin
        if pos2 = 1 then sinal2:= 1 else sinal2:= -1;
      end;

      for pos3:= 1 to 2 do begin
        if pos3 = 1 then sinal3:= 1 else sinal3:= -1;
      end;

      for pos4:= 1 to 2 do begin
        if pos4 = 1 then sinal4:= 1 else sinal4:= -1;
      end;

      for pos5:= 1 to 2 do begin
        if pos5 = 1 then sinal5:= 1 else sinal5:= -1;
      end;

      for i:= 1 to 1000 do begin
        for h:=1 to dimension do begin
          w[h]:= random;
        end;
        for h:= 1 to dimension do begin
          w[h]:= w[h]/sum(w);
        end;

        z:= w[1]*columndata(1)*sinal1 + w[2]*columndata(2)*sinal2 -
            w[3]*columndata(3)*sinal3 + w[4]*columndata(4)*sinal4;

        MLEGP(z, k, gamma, mu, sigma, Result);

        x[i]:= mu + sigma * gpqf(gamma,p);

        pos12:=1;
        pos13:=1;
        pos14:=1;
        pos15:=1;
        pos23:=1;

```

```
pos24:=1;
pos25:=1;
pos34:=1;
pos35:=1;
pos45:=1;
```

```
if pos1 > pos2 then pos12:= 3 else
  if pos1 < pos2 then pos12:= 2 else
    if pos1 = 1 then if pos2 = 1 then pos12:= 1 else
      if pos1 = 2 then if pos2 = 2 then pos12:= 4;
```

```
if pos1 > pos3 then pos13:= 3 else
  if pos1 < pos3 then pos13:= 2 else
    if pos1 = 1 then if pos3 = 1 then pos13:= 1 else
      if pos1 = 2 then if pos3 = 2 then pos13:= 4;
```

```
if pos1 > pos4 then pos14:= 3 else
  if pos1 < pos4 then pos14:= 2 else
    if pos1 = 1 then if pos4 = 1 then pos14:= 1 else
      if pos1 = 2 then if pos4 = 2 then pos14:= 4;
```

```
if pos1 > pos5 then pos15:= 3 else
  if pos1 < pos5 then pos15:= 2 else
    if pos1 = 1 then if pos5 = 1 then pos15:= 1 else
      if pos1 = 2 then if pos5 = 2 then pos15:= 4;
```

```
if pos2 > pos3 then pos23:= 3 else
  if pos2 < pos3 then pos23:= 2 else
    if pos2 = 1 then if pos3 = 1 then pos23:= 1 else
      if pos2 = 2 then if pos3 = 2 then pos23:= 4;
```

```
if pos2 > pos4 then pos24:= 3 else
  if pos2 < pos4 then pos24:= 2 else
    if pos2 = 1 then if pos4 = 1 then pos24:= 1 else
      if pos2 = 2 then if pos4 = 2 then pos24:= 4;
```

```
if pos2 > pos5 then pos25:= 3 else
  if pos2 < pos5 then pos25:= 2 else
    if pos2 = 1 then if pos5 = 1 then pos25:= 1 else
      if pos2 = 2 then if pos5 = 2 then pos25:= 4;
```

```
if pos3 > pos4 then pos34:= 3 else
  if pos3 < pos4 then pos34:= 2 else
    if pos3 = 1 then if pos4 = 1 then pos34:= 1 else
      if pos3 = 2 then if pos4 = 2 then pos34:= 4;
```

```
if pos3 > pos5 then pos35:= 3 else
  if pos3 < pos5 then pos35:= 2 else
    if pos3 = 1 then if pos5 = 1 then pos35:= 1 else
      if pos3 = 2 then if pos5 = 2 then pos35:= 4;
```

```
if pos4 > pos5 then pos45:= 3 else
  if pos4 < pos5 then pos45:= 2 else
    if pos4 = 1 then if pos5 = 1 then pos45:= 1 else
      if pos4 = 2 then if pos5 = 2 then pos45:= 4;
```

```

y[i]:= (w[1]**2*SV[1,pos1]**2 +
        w[2]**2*SV[2,pos2]**2 +
        w[3]**2*SV[3,pos3]**2 +
        w[4]**2*SV[4,pos4]**2 +
        w[5]**2*SV[5,pos5]**2 +
        2*rho[par[arquivo,1],ialfa,pos12]*w[1]*w[2]*SV[1,pos1]*SV[2,pos2] +
        2*rho[par[arquivo,2],ialfa,pos13]*w[1]*w[3]*SV[1,pos1]*SV[3,pos3] +
        2*rho[par[arquivo,3],ialfa,pos14]*w[1]*w[4]*SV[1,pos1]*SV[4,pos4] +
        2*rho[par[arquivo,4],ialfa,pos15]*w[1]*w[5]*SV[1,pos1]*SV[5,pos5] +
        2*rho[par[arquivo,5],ialfa,pos23]*w[2]*w[3]*SV[2,pos2]*SV[3,pos3] +
        2*rho[par[arquivo,6],ialfa,pos24]*w[2]*w[4]*SV[2,pos2]*SV[4,pos4] +
        2*rho[par[arquivo,7],ialfa,pos25]*w[2]*w[5]*SV[2,pos2]*SV[5,pos5] +
        2*rho[par[arquivo,8],ialfa,pos34]*w[3]*w[4]*SV[3,pos3]*SV[4,pos4] +
        2*rho[par[arquivo,9],ialfa,pos35]*w[3]*w[5]*SV[3,pos3]*SV[5,pos5] +
        2*rho[par[arquivo,10],ialfa,pos45]*w[4]*w[5]*SV[4,pos4]*SV[5,pos5])**0.5;

end;

tamanho:= size(y);
a:= PolynomialRegression(x,y,1);
sdb:= (variance(y)/(variance(x)*(tamanho-2)))*0.5;
SST:= 0;
SSR:= 0;
media:= mean(y);
for h:= 1 to tamanho do begin
SST:= SST + (y[h]-media)**2;
SSR:= SSR + (a[1]+a[2]*x[h]-media)**2;
end;
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,pos5,"", "Constante
; ",a[1]);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,pos5,"", "Coeficiente
b ; ",a[2]);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,pos5,"", "b inferior
; ",a[2]-1.96*sdb);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,pos5,"", "b superior
; ",a[2]+1.96*sdb);
writeln(s[arquivo],"",p,"",k,"",pos1,pos2,pos3,pos4,pos5,"", "R-quadrado
; ",SSR/SST);

end;
end;
end;
end;

end;
end;
end else writeln("Falhou a leitura do arquivo ",s[arquivo]);

end;
end.

```

```
(*
PROJETO      : Programa em StatPascal para estimar o coeficiente de
               dependência que minimiza o erro quadrado das estimativas
               de VaR entre os métodos 1* e 2* para uma carteira de 2
               ativos variando o número k de estatísticas de ordem
               usadas para estimá-lo.

ARQUIVO      : rho_varia_k.sp
AUTOR       : Adonírio Panzieri
DATA DE CRIAÇÃO : 17-Julho-2001
MODIFICADO POR : Paulo Ricardo M. Rocha
DATA MODIFICAÇÃO : 22-Agosto-2001
VERSÃO      : #5
DESCRIÇÃO   : Minimiza numericamente a integral (10.17). Analisa a
               sensibilidade de rho em relação ao número k de
               estatísticas de ordem usadas para gerá-lo para k com
               valores entre 0,05 e 0,15 do tamanho da amostra.

REQUER      : Nomes dos arquivos de retornos bivariados a serem
               analisados.

PRODUZ      : Executa estimativas pontuais de rho 1l, rho 1s, rho 1l e
               rho ss segundo k.

LIMITAÇÕES  : Estima rho pela varredura dos pontos da função erro x rho.
*)
```

```
program determina_rho;
```

```
var alfa, x, y, z: vector of real;
    h, i, j, k, l, contak, Result, m: integer;
    percentual, e, w, gamma, mu, sigma, somaAA, somaAB, somaBA, somaBB, rho,
aarlo, abrho,
    barho, bbrho, rho_minAA, rho_minAB, rho_minBA, rho_minBB: real;
    s: array [1..10] of string;
    SV: array [1..2, 1..2] of real;

    v: array [1..10, 1..10] of real;
    a: vector of real;

    v1_aa: array [1..101] of real;
    v2_aa: array [1..101] of real;

    v1_ab: array [1..101] of real;
    v2_ab: array [1..101] of real;

    v1_ba: array [1..101] of real;
    v2_ba: array [1..101] of real;

    v1_bb: array [1..101] of real;
    v2_bb: array [1..101] of real;
    e1: array [1..4, 1..101] of real;
```

```
Begin
```

```
s[1]:= "ei_frb.dat";
s[2]:= "merval_frb.dat";
s[3]:= "merval_ei.dat";
s[4]:= "ibovespa_frb.dat";
s[5]:= "ibovespa_merval.dat";
s[6]:= "ibovespa_nasdaq.dat";
```



```

s[7]:= "ibovespa_ei.dat";
s[8]:= "nasdaq_merval.dat";
s[9]:= "nasdaq_frb.dat";
s[10]:= "nasdaq_ei.dat";

(** Matriz de Sinais **)

a := combine(1,1, 1,-1, -1,1, -1,-1);
l := 1;
For i := 1 to 4 Do Begin
    For j := 1 to 2 Do Begin;
        v[i,j] := a[l];
        l := l+1;
    End;
End;

For l := 1 To 10 Do Begin

If ReadData(s[l])=1 Then Begin

x := columndata(1);
y := columndata(2);

For kontak:= 1 to 50 do Begin
percentual:= (random + 0.5)/10;
k := round(Size(x) * percentual);
alfa := Combine(0.95,0.96,0.97,0.98,0.99,0.995,0.999);

For h := 1 To 7 Do Begin

(** INÍCIO - Cálculo do Stress Value univariado **)
MLEGP(x, k, gamma, mu, sigma, Result);
SV[1,1]:= mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]); (** RISCO DE ALTA **)
MLEGP(-x, k, gamma, mu, sigma, Result);
SV[1,2]:= mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]); (** RISCO DE BAIXA **)
MLEGP(y, k, gamma, mu, sigma, Result);
SV[2,1]:= mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]); (** RISCO DE ALTA **)
MLEGP(-y, k, gamma, mu, sigma, Result);
SV[2,2]:= mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]); (** RISCO DE BAIXA **)
(** FIM - Cálculo do Stress Value univariado **)

w := 0;

For i := 1 To 101 Do Begin
    For m := 1 To 4 Do Begin
        z := w*x*v[m,1] + (1-w)*y*v[m,2];
        MLEGP(z, k, gamma, mu, sigma, Result);
        el[m,i] := mu + sigma * gpqf(gamma,alfa[h]);

    If m = 1 Then Begin
        v1_aa[i] := w**2*SV[1,1]**2 + (1-w)**2*SV[2,1]**2;
        v2_aa[i] := 2*w*(1-w)*SV[1,1]*SV[2,1];
    End
    Else If m = 2 Then Begin
        v1_ab[i] := w**2*SV[1,1]**2 + (1-w)**2*SV[2,2]**2;
        v2_ab[i] := 2*w*(1-w)*SV[1,1]*SV[2,2];
    End
End

```

```

Else If m = 3 Then Begin
  v1_ba[i] := w**2*SV[1,2]**2 + (1-w)**2*SV[2,1]**2;
  v2_ba[i] := 2*w*(1-w)*SV[1,2]*SV[2,1];
End
Else
  v1_bb[i] := w**2*SV[1,2]**2 + (1-w)**2*SV[2,2]**2;
  v2_bb[i] := 2*w*(1-w)*SV[1,2]*SV[2,2];
End;
w := w + 0.01;
End;

```

```

rho := -1.0;
rho_minAA := 1;
rho_minAB := 1;
rho_minBA := 1;
rho_minBB := 1;

```

```

For j := 1 To 201 Do Begin
  somaAA := 0;
  somaAB := 0;
  somaBA := 0;
  somaBB := 0;

```

```

For i := 1 To 101 Do Begin

```

```

  e := (el[1,i] - (v1_aa[i] + rho*v2_aa[i])**0.5)**2;
  somaAA:= somaAA + e;

```

```

  e := (el[2,i] - (v1_ab[i] + rho*v2_ab[i])**0.5)**2;
  somaAB:=somaAB + e;

```

```

  e := (el[3,i] - (v1_ba[i] + rho*v2_ba[i])**0.5)**2;
  somaBA:=somaBA + e;

```

```

  e := (el[4,i] - (v1_bb[i] + rho*v2_bb[i])**0.5)**2;
  somaBB:= somaBB + e;

```

```

End;

```

```

If somaAA <= rho_minAA Then Begin
  rho_minAA:= somaAA;
  aarho:= rho;
End;

```

```

If somaAB <= rho_minAB Then Begin
  rho_minAB := somaAB;
  abrho:= rho;
End;

```

```

If somaBA <= rho_minBA Then Begin
  rho_minBA := somaBA;
  barho:= rho;
End;

```

```

If somaBB <= rho_minBB Then Begin

```

```

        rho_minBB := somaBB;
        bbrho:= rho;
    End;

rho:= rho + 0.01;
End;

Writeln(s[l],";",contak,";",alfa[h],"AA;",aarho);
Writeln(s[l],";",contak,";",alfa[h],"AB;",abrho);
Writeln(s[l],";",contak,";",alfa[h],"BA;",barho);
Writeln(s[l],";",contak,";",alfa[h],"BB;",bbrho);
Writeln;

End;
End;
End Else Writeln("Falhou a leitura do arquivo ", s[l]);
End;

End.

```