

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS  
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

FÁBIO NUNEZ BARJA CORDEIRO

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE CÓPULAS PARA O CÁLCULO DO VALUE AT RISK**

SÃO PAULO  
2009

FÁBIO NUNEZ BARJA CORDEIRO

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE CÓPULAS PARA O CÁLCULO DO VALUE AT RISK**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas (FGV/EESP) como requisito para obtenção do título de Mestre em Finanças e Economia

Campo de conhecimento: Finanças

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Ratner Rochman

SÃO PAULO  
2009

Cordeiro, Fábio Nunez Barja.

Aplicação da Teoria de Cópiulas para o Cálculo do Value at Risk / Fábio Nunez Barja Cordeiro. - 2009.  
88 f.

Orientador: Ricardo Ratner Rochman.

Dissertação (mestrado profissional) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Risco (Economia). 2. Administração de risco. 3. Risco (Economia) – Modelos matemáticos. 4. Administração de risco – Modelos matemáticos. I., Rochman, Ricardo Ratner. II. Dissertação (mestrado profissional) - Escola de Economia de São Paulo. III. Título.

CDU 330.131.7

FÁBIO NUNEZ BARJA CORDEIRO

## **APLICAÇÃO DA TEORIA DE CÓPULAS PARA O CÁLCULO DO VALUE AT RISK**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas (FGV/EESP) como requisito para obtenção do título de Mestre em Finanças e Economia

Campo de conhecimento: Finanças

**Data de aprovação:**

\_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Ricardo Ratner Rochman (Orientador)  
FGV-EESP

---

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto  
FGV-EESP

---

Prof. Dr. Paulo Beltrão Fraletti  
INSPER

*Dedico este trabalho à minha avó,  
Dolores Garcia.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Ratner Rochman, por todo o suporte oferecido ao longo deste trabalho. Suas contribuições foram fundamentais para a realização desta dissertação.

Aos colegas do MPFE, por todos os momentos que passamos juntos.

Aos professores do MPFE, pelo conhecimento transmitido.

Ao amigo Paulo Sain, por ter me incentivado a ingressar no mestrado.

Aos meus pais, Silvia e Ricardo, pela dedicação e paciência.

À Neidinha, que aguentou o meu mau humor e me apoiou durante os três anos de mestrado.

## RESUMO

Este trabalho aplica a teoria de cópulas à mensuração do risco de mercado, através do cálculo do *Value at Risk* (VaR). A função de cópula oferece uma maior flexibilidade para a agregação de riscos quando comparada com abordagens tradicionais de mensuração de risco. A teoria de cópulas permite a utilização de distribuições de probabilidade diferentes da normal para a modelagem individual dos fatores de risco. Além disso, diferentes estruturas de associação entre eles podem ser aplicadas sem que restrições sejam impostas às suas distribuições. Dessa forma, premissas como a normalidade conjunta dos retornos e a linearidade na dependência entre fatores de risco podem ser dispensadas, possibilitando a correta modelagem de eventos conjuntos extremos e de assimetria na relação de dependência. Após a apresentação dos principais conceitos associados ao tema, um modelo de cópula foi desenvolvido para o cálculo do VaR de três carteiras, expostas aos mercados brasileiros cambial e acionário. Em seguida, a sua precisão foi comparada com a das metodologias tradicionais delta-normal e de simulação histórica. Os resultados mostraram que o modelo baseado na teoria de cópulas foi superior aos tradicionais na previsão de eventos extremos, representados pelo VaR 99%. No caso do VaR 95%, o modelo delta-normal apresentou o melhor desempenho. Finalmente, foi possível concluir que o estudo da teoria de cópulas é de grande relevância para a gestão de riscos financeiros. Fica a sugestão de que variações do modelo de VaR desenvolvido neste trabalho sejam testadas, e que esta teoria seja também aplicada à gestão de outros riscos, como o de crédito, operacional, e até mesmo o risco integrado.

**Palavras-chave:** Teoria de Cópulas, Gestão de Riscos, Value at Risk, Distribuições Marginais, Agregação de Riscos.

## ABSTRACT

This study applies the theory of copulas to the measurement of market risk by doing the Value at Risk (VaR) calculation. The copula function offers a greater flexibility to aggregate the risks as compared to traditional approaches of risk measurement. The theory of copulas enables the use of probability distributions different from the normal to the individual modeling of risk factors. Furthermore, different association structures between them can be applied with no restrictions being imposed to its distributions. Thus, premises such as joint normality of returns and linearity in the dependence between risk factors can be dismissed, what enables the correct modelling of extreme joint events and of asymmetry in the dependence relation. After presenting the main concepts associated to the theme, a copula model was developed in order to calculate the VaR for three portfolios which are exposed to the Brazilian foreign exchange and stock markets. Afterwards, its accuracy was compared with that of traditional methodologies, i.e., delta-normal and historic simulation. The results showed that the model based on the theory of copulas was superior to the traditional ones at forecasting extreme events, which are represented by VaR 99%. When it comes to VaR 95%, the delta-normal model presented the best results. Finally, it was possible to conclude that the theory of copulas study is of great relevance to financial risks management. For further research, a suggestion is testing variations of the VaR model developed in this work, as well as applying this theory to managing other risks, such as credit, operational or even integrated risk.

**Keywords:** Theory of Copulas, Risk Management, Value at Risk, Marginal Distributions, Risk Aggregation.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1 - Cópula Clayton com parâmetro $\alpha = 8$ .....	44
Figura 3.2 - Cópula Frank com parâmetro $\alpha = 18$ .....	44
Figura 3.3 - Cópula Gumbel com parâmetro $\alpha = 5$ .....	45
Figura 3.4 - Cópula Normal com correlação $p = 0,95$ .....	46
Figura 3.5 - Cópula T-Student com correlação $p = 0,95$ e 2 graus de liberdade .....	47
Figura 4.1 – Procedimento metodológico .....	65
Figura 5.1 – Ptax – Retorno diário .....	67
Figura 5.2 – Ibovespa – Retorno diário .....	67
Figura 5.3 – Ptax – Distribuição normal x empírica.....	68
Figura 5.4 – Ibovespa – Distribuição normal x empírica .....	68
Figura 5.5 – Ptax – Distribuição HG x empírica.....	69
Figura 5.6 – Ibovespa – Distribuição HG x empírica.....	69
Figura 5.7 – Ptax – Distribuição NIG x empírica .....	70
Figura 5.8 – Ibovespa – Distribuição NIG x empírica .....	70
Figura 5.9 – Ptax – Distribuição HIP x empírica .....	70
Figura 5.10 – Ibovespa – Distribuição HIP x empírica .....	70
Figura 5.11 – Ptax – Extremidades das distribuições.....	70
Figura 5.12 – Ibovespa – Extremidades das distribuições.....	70
Figura 5.13 – Retornos empíricos.....	72
Figura 5.14 – Retornos cópula Normal.....	72
Figura 5.15 – Retornos cópula T-Student.....	72
Figura 5.16 – Retornos cópula Clayton .....	72
Figura 5.17 – Retornos cópula Frank.....	72
Figura 5.18 – Comparação dos modelos de VaR 95% - Carteira 1 .....	76
Figura 5.19 – Comparação dos modelos de VaR 99% - Carteira 1 .....	77
Figura 5.20 – Comparação dos modelos de VaR 95% - Carteira 2.....	78
Figura 5.21 – Comparação dos modelos de VaR 99% - Carteira 2.....	78
Figura 5.22 – Comparação dos modelos de VaR 95% - Carteira 3.....	80
Figura 5.23 – Comparação dos modelos de VaR 99% - Carteira 3.....	80

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Cópuas Arquimedianas: fórmulas e funções geradoras .....	43
Tabela 3.2 - Cópuas Arquimedianas: relação dos parâmetros com medidas de dependência	43
Tabela 4.1 – Composição das carteiras .....	59
Tabela 4.2 – Intervalos de confiança para percentual de excessos esperado .....	63
Tabela 5.1 – Estatísticas básicas.....	67
Tabela 5.2 – Testes de normalidade .....	68
Tabela 5.3 – Estimação dos parâmetros das marginais .....	69
Tabela 5.4 – Teste de Kolmogorov-Smirnov (KS).....	69
Tabela 5.5 – Estimação dos parâmetros das cópuas.....	71
Tabela 5.6 – Medidas de dependência.....	72
Tabela 5.7 – Comparação dos modelos de VaR – Carteira 1 .....	75
Tabela 5.8 – Comparação dos modelos de VaR – Carteira 2 .....	77
Tabela 5.9 – Comparação dos modelos de VaR – Carteira 3 .....	79
Tabela 5.10 – Comparação dos modelos de VaR - Resumo .....	81

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	GESTÃO DE RISCOS .....	15
2.1	Classificação de Riscos .....	16
2.2	Conceitos Básicos de Estatística.....	17
2.3	Medidas de Mensuração de Risco de Mercado .....	19
2.3.1	<i>Value at Risk</i> .....	19
2.3.2	<i>Expected Shortfall</i> .....	21
2.3.3	Teste de Estresse.....	22
2.3.4	Comparação das Medidas de Risco .....	22
2.4	Metodologias Tradicionais de Mensuração do VaR.....	23
2.4.1	VaR Delta-normal.....	24
2.4.2	VaR por Simulação Histórica .....	25
2.4.3	VaR por Simulação de Monte Carlo.....	27
2.4.4	<i>Backtesting</i> .....	29
2.5	Métodos para Estimação de Volatilidade .....	30
2.5.1	Média Móvel .....	30
2.5.2	EWMA .....	30
2.5.3	GARCH .....	31
3	TEORIA DE CÓPULAS .....	33
3.1	Introdução à Teoria de Cópulas.....	33
3.1.1	Definição da Função Cópula .....	34
3.1.2	Teorema de Sklar .....	34
3.1.3	Apelo Conceitual e Prático .....	36
3.2	Medidas de Associação .....	37
3.2.1	Tau de Kendall.....	39
3.2.2	Rho de Spearman.....	40
3.3	Métodos para Criação de Cópulas .....	41
3.4	Famílias de Cópulas .....	42
3.4.1	Cópulas Arquimedianas.....	42
3.4.2	Cópula Normal .....	45
3.4.3	Cópula T-Student.....	46
3.5	Métodos de Estimação dos Parâmetros da Cópula.....	47

3.5.1	Máxima Verossimilhança .....	47
3.5.2	Inferência para as Marginais.....	48
3.5.3	Máxima Verossimilhança Canônica.....	49
3.5.4	Estimação Baseada em Medidas de Dependência.....	49
3.6	Aplicação da Teoria de Cópias.....	50
3.6.1	Cópias, VaR e Risco de Mercado.....	50
3.6.2	Outras Aplicações em Finanças.....	52
4	METODOLOGIA.....	54
4.1	Descrição da Amostra.....	54
4.2	Seleção do Modelo de Cópias.....	55
4.2.1	Distribuições Marginais.....	55
4.2.2	Função de Cópias.....	56
4.3	Cálculo do VaR .....	58
4.3.1	Modelo de Cópias .....	59
4.3.2	Modelo de Simulação Histórica .....	60
4.3.3	Modelo Delta-normal .....	61
4.3.4	Comparação dos Modelos .....	61
5	RESULTADOS .....	66
5.1	Seleção do Modelo de Cópias.....	66
5.1.1	Distribuições Marginais.....	66
5.1.2	Função de Cópias.....	71
5.2	Cálculo do VaR e Comparação dos Modelos.....	73
5.2.1	Carteira 1 .....	74
5.2.2	Carteira 2 .....	77
5.2.3	Carteira 3 .....	78
5.2.4	Consolidação dos Resultados .....	80
6	CONCLUSÃO.....	82
	REFERÊNCIAS .....	85

## 1 INTRODUÇÃO

A partir da década de 1970, a volatilidade nos mercados financeiros sofreu um aumento substancial. As diversas crises financeiras que ocorreram desde então, como a crise do México (1982), a crise asiática (1997), e a crise econômica mundial (2008), aumentaram a exposição das empresas a diversos tipos de risco. Abruptas flutuações nas taxas de juros e de câmbio, no preço de commodities e no mercado acionário são alguns exemplos das dificuldades enfrentadas pelas empresas.

Essas flutuações foram responsáveis pelo aumento da exposição ao risco, gerando uma demanda crescente por métodos e instrumentos de proteção. Segundo Jorion (2007), o desenvolvimento da gestão de riscos financeiros se deve a esse aumento da volatilidade dos mercados financeiros. Desde então, acadêmicos e profissionais da área se dedicaram ao estudo desses riscos, desenvolvendo modelos matemáticos complexos, viabilizados pelos avanços tecnológicos no setor de informática.

Apesar de já ter sido amplamente estudada, a gestão de riscos continua em processo de evolução. O constante desenvolvimento dos mercados financeiros e a imprevisibilidade dos eventos econômicos fazem aparecer novos desafios para quem atua na área de risco. Novos métodos e modelos continuam surgindo para que os riscos possam ser mais bem gerenciados. Crouhy, Galai e Mark (2004) mostram essa transformação através de uma perspectiva histórica da medição de risco, que evoluiu de simples indicadores, como o valor de face, passando por medidas de sensibilidade, como a *duration* e a convexidade, até chegar a metodologias mais recentes, como o *Value at Risk* (VaR).

Autores como Jorion (2007) e Crouhy, Galai e Mark (2004) defendem que o VaR é uma medida poderosa de avaliação do risco de carteiras. Outros autores, como Dowd e Blake (2006) e Matz (2005), fazem críticas a essa metodologia, afirmando que os modelos tradicionais de cálculo de VaR não tratam consistentemente duas características importantes dos ativos financeiros: a não-normalidade de seus retornos, que gera assimetria e leptocurtose em suas distribuições de probabilidade (leptocurtose é o termo utilizado para descrever uma distribuição com densidade de probabilidade elevada em suas extremidades, gerando grande

probabilidade de ocorrência de eventos extremos); e a não-linearidade na estrutura de dependência dos retornos de ativos expostos a diferentes fatores de risco.

Apesar das críticas, o VaR continua sendo amplamente utilizado. Dentre as instituições que o adotam como medida de risco, Jorion (2007) destaca os bancos locais e internacionais, fundos de investimento, seguradoras, empresas não-financeiras e agências reguladoras (como o Comitê da Basileia, o US Federal Reserve - banco central dos Estados Unidos - e reguladores da União Européia). Segundo o autor, novas técnicas de cálculo de VaR continuam sendo desenvolvidas, como a baseada na teoria de cópulas, que vem se mostrando uma alternativa interessante para a mensuração de riscos. Através dela, a agregação de riscos pode ser realizada sem que as premissas de normalidade de retornos e linearidade na estrutura de dependência tenham que ser adotadas, o que possibilita uma melhor modelagem do comportamento dos ativos financeiros.

A teoria básica de cópulas surgiu nas décadas de 1940 e 1950, com os trabalhos de Hoeffding (1940) e Sklar (1959). Entretanto, sua utilização em finanças ainda é recente, com um grande número de trabalhos aparecendo na década de 2000. Dentre suas aplicações, destacam-se a gestão de riscos - Martellini e Meyfredi (2007), Goorah (2007) e Clemente e Romano (2004), a precificação de opções - Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004) e Assis e Laurini (2008), e a precificação de derivativos de crédito - Hull e White (2004).

De maneira simplificada, uma cópula é uma função que modela a relação de dependência entre duas ou mais variáveis aleatórias. Stevenson (1981, p. 97) define uma variável aleatória como “[...] uma função com valores numéricos, cujo valor é determinado por fatores de chance”. Segundo o autor, a distribuição de frequências do resultado de uma variável aleatória é obtida através de sua função distribuição de probabilidades, que “mostra a proporção das vezes em que a variável aleatória tende a assumir cada um dos diversos valores.” (STEVENSON, 1981, p. 102)

Na gestão de riscos, é comum a necessidade de modelar resultados simultâneos de diferentes variáveis aleatórias, que representam os fatores de risco a que uma carteira de ativos está exposta. Essa modelagem é feita através de uma distribuição conjunta de probabilidades, que mostra a frequência de ocorrência de eventos conjuntos.

Assim, utilizando a relação de dependência entre as variáveis aleatórias, a cópula acopla suas distribuições de probabilidade individuais, construindo uma distribuição conjunta de probabilidade. A grande vantagem da cópula é que ela faz isso sem que restrições sejam feitas ao formato das distribuições individuais, as quais podem ser escolhidas de forma a modelar o comportamento dos fatores de risco de maneira realista.

Este trabalho tem como objetivo a aplicação da teoria de cópulas na gestão de riscos financeiros através da mensuração do risco de mercado associado aos mercados de câmbio e acionário. Uma metodologia para o cálculo do *Value at Risk* (VaR) através da função de cópula será apresentada. Em seguida, a precisão do modelo será testada através de sua aplicação em três carteiras bivariadas. Finalmente, os resultados obtidos serão comparados com os de métodos tradicionais de cálculo de VaR, como o delta-normal e a simulação histórica, que, segundo Jorion (2007), Machry (2003) e Crouhy, Galai e Mark (2004), estão entre os mais utilizados para o cálculo do VaR.

As crises financeiras das últimas décadas vieram acompanhadas por perdas bilionárias sofridas por instituições financeiras ao redor do mundo. Dentre as instituições que sofreram com a crise econômica mundial de 2008, destacam-se: Lehman Brothers, Citigroup, Merrill Lynch e American International Group nos Estados Unidos; Northern Rock no Reino Unido; Swiss Re e UBS na Suíça; e Société Générale na França. Porém, tais instituições não são as únicas a ser negativamente impactadas por tais crises. Governos, empresas não-financeiras e o indivíduo comum também são impactados. Em um cenário como esse, faz-se necessário o investimento em sistemas e métodos de gerenciamento de riscos, e a teoria de cópulas surge como uma boa alternativa para a mensuração de risco.

Dentro desse contexto, este trabalho traz duas contribuições para a área de conhecimento ‘Gestão de Riscos’. A primeira reside na validação da aplicabilidade da teoria de cópulas à mensuração de risco de mercado. A flexibilidade na agregação de riscos oferecida pela função de cópula permite que premissas como normalidade dos retornos e linearidade na dependência entre os fatores de risco possam ser descartadas, possibilitando uma melhor modelagem de seus comportamentos. A segunda é a apresentação e discussão dos principais pontos de uma teoria que vem ganhando importância no meio financeiro, com a apresentação do passo-a-passo de uma metodologia para o cálculo do VaR.

Vale ressaltar que um bom sistema de gerenciamento de riscos deve estar baseado em mais de uma forma de mensuração de risco, de acordo com a necessidade da empresa, explorando as vantagens e mitigando as desvantagens de cada método disponível. Embora o VaR tenha sido a medida de risco escolhida para a realização deste trabalho, a teoria de cópulas também pode ser aplicada a outras medidas de risco, como a *expected shortfall*.

Este capítulo termina com uma passagem do livro *Value at Risk*, de um dos maiores difusores do VaR como medida de risco:

Sobretudo, VaR deve ser visto como um procedimento necessário, porém não suficiente, para gerenciamento do risco. Ele precisa ser suplementado por testes de stress, limites, e controles, juntamente a um departamento independente de gerenciamento do risco. (JORION, P., 2007, p. 28, tradução nossa).



## 2 GESTÃO DE RISCOS

Lhabitant e Tinguely (2001) definem risco de uma forma abrangente, como sendo a exposição à incerteza. Segundo os autores, a incerteza pode ser entendida como a possibilidade de realização de uma série de eventos futuros, aos quais é possível associar uma distribuição de probabilidades. Jorion (2007) se baseia na teoria financeira para definir risco como sendo a dispersão de resultados inesperados, gerados pelos movimentos de variáveis financeiras.

A gestão de riscos surge como uma resposta à imprevisibilidade dos acontecimentos futuros. Através dela é possível estruturar e implementar processos de identificação e mensuração de riscos, para que seja possível decidir quais riscos devem ser evitados, reduzidos, diversificados ou gerenciados. Segundo Lhabitant e Tinguely (2001), a gestão de riscos é uma preocupação de todos os participantes do mercado: acadêmicos, investidores, gerentes e agentes reguladores.

Embora a necessidade da gestão de riscos seja mais evidente em empresas financeiras, ela também deve ser utilizada por empresas não-financeiras. A teoria financeira afirma que, em um mercado perfeito, a gestão de riscos não é capaz de gerar valor. Modigliani e Miller (1958) provaram que, em mercados perfeitos, o valor se cria nas empresas através de bons investimentos, e não através das decisões de financiamento e de gestão de riscos. Entretanto, devido às imperfeições de mercado, como a existência de impostos, custos de transação, assimetria de informações e custos associados às dificuldades financeiras, a gestão de riscos pode, sim, gerar valor.

Dentro de tal contexto, Froot, Scharfstein e Stein (1993) afirmam que a gestão de riscos gera valor ao garantir que as empresas tenham caixa suficiente para financiar seus investimentos em um mercado com imperfeições, no qual o custo de financiamento interno é menor do que o externo. Smithson, Associates e Simkins (2005) chegaram a uma conclusão semelhante. Dez trabalhos foram analisados em sua pesquisa, que verificou uma correlação positiva entre o aumento do valor das ações e a prática da gestão de riscos.

## 2.1 Classificação de Riscos

Jorion (2007) afirma que as empresas estão expostas a vários tipos de risco. Os riscos de negócio estão associados ao ambiente competitivo em que a empresa atua e à estratégia utilizada para criar valor para os acionistas. Já os riscos financeiros estão associados às suas atividades financeiras, e podem ser classificados em quatro categorias:

- Risco de Crédito: potencial de perda financeira associado à incapacidade das contrapartes de honrar seus compromissos. A perda pode ocorrer no ato do evento de *default*, ou até mesmo antes, devido à alteração de valor de mercado de uma dívida, geralmente associada à mudança na percepção de risco da contraparte;
- Risco de Liquidez: possibilidade de perda gerada pela negociação de ativos e passivos por um preço diferente do preço justo ou preço de mercado. Essa perda pode se intensificar quando uma instituição possuir descasamento em seus fluxos de caixa, gerando incapacidade de pagamento de suas obrigações e tornando obrigatória a realização imediata de operações financeiras;
- Risco Operacional: risco de perda por falhas nos sistemas ou processos internos, erro humano, fraude, processos jurídicos ou até mesmo eventos externos;
- Risco de Mercado: risco de perda gerada pela combinação da exposição ao fator de risco com a flutuação de seu valor de mercado. Pode ser classificado como direcional, para os fatores de risco preço de ação, taxa de juros, taxa de câmbio e preço de *commodities*, ou não-direcional, para exposições não-lineares ou volatilidades.

Segundo Crouhy, Galai e Mark (2004), embora a abordagem tradicional considere cada um desses tipos de risco isoladamente, existe uma tendência crescente de que eles passem a ser tratados de forma integrada, principalmente nas instituições financeiras, pois o aumento da complexidade dos mercados financeiros exige o gerenciamento da exposição global da empresa.

Jorion (2007) apresenta os diversos benefícios de uma gestão integrada de riscos, que deve abranger não apenas os riscos financeiros, como o de mercado, o de crédito e o operacional, mas também o risco de negócio. A análise da correlação entre diferentes tipos de risco ao longo de todas as unidades de negócio de uma organização permite a utilização de *hedge* natural, reduzindo, assim, os custos com realização de *hedge* no mercado.

Sob o ponto de vista de instituições financeiras, a gestão de riscos integrada traz benefícios como o fornecimento de uma medida mais precisa para a determinação do capital adequado às suas exposições consolidadas. Para empresas não-financeiras, benefícios como a estabilização dos lucros podem ser alcançados, fazendo com que a gestão de riscos contribua com a tomada de decisões estratégicas.

## 2.2 Conceitos Básicos de Estatística

Para um melhor entendimento dos modelos de risco e, posteriormente, da teoria de cópulas, alguns conceitos básicos de estatística serão brevemente apresentados. Para maiores detalhes, consultar Stevenson (1981) e Ross (2002).

### ➤ Variável Aleatória

De acordo com Stevenson (1981), uma variável aleatória (va) é uma função que assume valores numéricos determinados de forma aleatória. Ela pode ser discreta, caso os valores que assumir possam ser contados, ou contínua, caso possa tomar qualquer valor dentro de um intervalo determinado.

### ➤ Distribuição de Probabilidades

Stevenson (1981) define uma distribuição de probabilidades como sendo uma distribuição de frequências para os resultados de uma variável aleatória. Ela é discreta (como a binomial, geométrica ou hipergeométrica) no caso de variáveis aleatórias discretas, e contínua (como a uniforme, normal ou exponencial) para variáveis aleatórias contínuas.

A distribuição de probabilidades é descrita por sua função distribuição acumulada (fda). Supondo um número real  $x$  e uma variável aleatória  $X$ , sua fda  $F(x)$  pode ser representada da seguinte forma:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (2-1)$$

Na equação 2-1, o valor da fda para um valor  $x$  é dado pela probabilidade de a variável aleatória  $X$  ser igual ou inferior ao valor  $x$ .

A distribuição de probabilidades também pode ser descrita por sua função densidade de probabilidade (fdp),  $f(x)$ , definida como a primeira derivada da fda, e que possui a seguinte característica no caso de variável aleatória contínua:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (2-2)$$

O que equivale a dizer que a probabilidade de todo o espaço amostral é igual a um.

#### ➤ Distribuição de Probabilidades Conjunta

A distribuição de probabilidades conjunta é dada pela distribuição de frequências dos resultados simultâneos de duas ou mais variáveis aleatórias. Supondo que  $x$  e  $y$  são dois números reais, e  $X$  e  $Y$ , duas variáveis aleatórias, Ross (2002) define sua função distribuição acumulada conjunta (fdac) da seguinte forma:

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (2-3)$$

É possível, ainda, obter a fda das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  partindo de sua fdac, conforme abaixo:

$$F(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = H(x, \infty) \quad (2-4)$$

Nesse caso, a fda de  $X$  também é conhecida como função distribuição acumulada marginal (fdam).

## 2.3 Medidas de Mensuração de Risco de Mercado

De acordo com Jorion (2007), o processo de gestão de riscos financeiros é composto pelas etapas de identificação, mensuração e gerenciamento de riscos. O objetivo deste item é apresentar três medidas de mensuração de risco de mercado: *Value at Risk*, *Expected Shortfall* e teste de estresse. Para uma análise complementar da teoria, método de estimação e aplicação dessas e de outras medidas de risco, ver Dowd e Blake (2006).

### 2.3.1 *Value at Risk*

O VaR foi desenvolvido na década de 1980, quando as instituições financeiras começaram a criar modelos para a mensuração e agregação de riscos entre suas subsidiárias. Segundo Jorion (2007), ele é uma medida estatística de risco, e pode ser definido como a máxima perda esperada dado um horizonte de tempo e um nível de confiança. Ele pode ser aplicado a ativos isolados, carteiras ou instituições. Dentre suas utilizações, destacam-se:

- Comparação do risco de diferentes carteiras ou instituições;
- Identificação de alterações no nível de risco ao longo do tempo;
- Estimação da pior perda possível;
- Cálculo do capital próprio mínimo exigido para uma instituição financeira.

#### ➤ Cálculo do VaR

Supondo uma carteira de valor inicial  $V_0$  com uma taxa de retorno aleatória  $R$ , pode-se calcular seu valor após um dado período de tempo como sendo  $V = V_0(1 + R)$ . Definindo-se  $V^*$  como o menor valor que a carteira pode atingir dado um nível de confiança  $c$ , sua

fórmula de cálculo será dada por  $V^* = V_0(1 + R^*)$ , com  $R^*$  sendo o retorno da carteira crítico. Supondo, ainda, que o valor esperado do retorno da carteira seja dado por  $\mu$ , a máxima perda dessa carteira em relação ao seu valor esperado, dado o nível de confiança  $c$ , pode ser calculada por:

$$VaR_{relativo} = E(V) - V^* = V_0\mu - V_0R^* \quad (2-5)$$

e a perda absoluta, por:

$$VaR_{absoluta} = V_0 - V^* = -V_0R^* \quad (2-6)$$

De forma geral, o VaR pode ser derivado da distribuição de probabilidade  $f(v)$  do valor futuro da carteira, em que a probabilidade de o valor ser inferior a  $V^*$  é calculada da seguinte forma:

$$P(V \leq V^*) = 1 - c = \int_{-\infty}^{V^*} f(v)dv \quad (2-7)$$

Jorion (2007) descreve, de forma simplificada, as principais etapas para o cálculo do VaR:

- Cálculo do valor da carteira na data atual;
- Identificação dos fatores de risco a que a carteira está exposta, e medição de suas variabilidades;
- Definição do horizonte de tempo;
- Definição do nível de confiança;
- Cálculo da pior perda potencial.

➤ Vantagens e Desvantagens do VaR como Medida de Risco

Dowd e Blake (2006) destacam as principais críticas com relação ao VaR, como o fato de ele não informar o valor que pode ser perdido em situações extremas, quando o nível de

confiança é excedido, e de não ser uma medida de risco coerente de acordo com o critério desenvolvido por Artzner et al (1997).

Segundo Artzner et al (1997), sendo  $X$  e  $Y$  duas posições em risco, e  $V(X)$  e  $V(Y)$  seus valores, uma medida de risco  $\rho$  é coerente se ela satisfaz as seguintes condições:

- Monotonicidade:  $V(Y) \geq V(X) \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$
- Subaditividade:  $\rho(Y + X) \leq \rho(Y) + \rho(X)$
- Homogeneidade positiva:  $\rho(hX) = h\rho(X)$ , para  $h > 0$
- Invariância translacional:  $\rho(X + n) = \rho(X) + n$ , para um valor garantido  $n$

Segundo esse critério, o VaR não pode ser considerado uma medida de risco coerente por violar a condição da subaditividade.

Apesar das críticas, Dowd e Blake (2006) também citam algumas das características que fizeram o VaR ganhar importância como medida de risco financeiro. Dentre elas, destacam-se: possibilidade de ser aplicado a qualquer tipo de carteira; consideração da correlação entre os fatores de risco ao agregá-los; associação de valor em risco e probabilidade; e expressão em uma unidade de medida simples, o ‘dinheiro perdido’.

Jorion (2007) cita, também, outros benefícios do VaR, e afirma que a medida revolucionou a gestão de riscos financeiros por mensurar o risco total da carteira no nível mais alto de uma instituição, considerando seus efeitos de alavancagem e diversificação. Segundo o autor, o método, inicialmente utilizado apenas na gestão de riscos de mercado, hoje é aplicado também na mensuração dos riscos de crédito, operacional e integrado.

### **2.3.2 *Expected Shortfall***

Segundo Jorion (2007), a *Expected Shortfall* (ES) é uma medida de risco complementar ao VaR. Ela representa a perda média de uma carteira para os casos em que a perda supera o

VaR. Sendo  $V$  o valor da carteira e  $f(v)$  sua função densidade de probabilidade, a ES pode ser calculada da seguinte forma:

$$E(V / V < VaR) = \frac{\int_{-\infty}^{VaR} vf(v)dv}{\int_{-\infty}^{VaR} f(v)dv} \quad (2-8)$$

Autores como Peracchi e Tanase (2008) defendem a utilização da *Expected Shortfall* por ela se tratar de uma medida de risco coerente. Porém, segundo Dowd e Blake (2006), essa medida também apresenta uma série de problemas, como não ser consistente com o conceito de aversão ao risco.

### 2.3.3 Teste de Estresse

Assim como a *Expected Shortfall*, o Teste de Estresse pode ser considerado uma ferramenta complementar ao VaR. Enquanto o VaR modela a dispersão dos resultados, o teste de estresse avalia condições extremas de mercado, ou seja, as caudas da distribuição.

De forma simplificada, esse método consiste em aplicar choques sobre os fatores de risco e recalculando o valor da carteira para se chegar a uma possível realização de perda. Os choques podem ser baseados em movimentos históricos dos fatores de risco, observados em situações extremas de mercado, ou podem, até mesmo, ser prospectivos, baseados em cenários econômicos possíveis para o futuro.

### 2.3.4 Comparação das Medidas de Risco

De acordo com Dowd e Blake (2006), existe uma ampla variedade de medidas de risco disponíveis, mas não existe consenso sobre qual delas é a mais apropriada. Os autores



afirmam que a falta de consenso se deve principalmente à não-existência de critérios aceitos para compará-las.

Conforme enunciado no capítulo de introdução, o VaR foi a medida de risco adotada para a realização deste trabalho. Ele foi escolhido por ser amplamente difundido (ver Jorion (2007)), sendo utilizado por bancos, fundos de investimento, seguradoras, empresas não-financeiras e agências reguladoras. Além disso, autores como Jorion (2007), Hull (2006) e Crouhy, Galai e Mark (2004) o consideram a principal medida de mensuração de risco de mercado.

## **2.4 Metodologias Tradicionais de Mensuração do VaR**

De acordo com Bhattacharyya (2008), a mensuração do risco é a etapa mais importante da gestão de riscos. Ela deve ser feita com alto grau de precisão, o que, em geral, é conseguido através da aplicação de modelos matemáticos complexos.

Existem diversas metodologias para o cálculo do VaR. Segundo Jorion (2007), elas podem ser divididas em dois grupos:

- Metodologias de avaliação local: o risco é medido através de derivadas parciais, que identificam alterações no valor da carteira. Seu principal exemplo é o método VaR delta-normal;
- Metodologias de avaliação plena: o risco é medido com o auxílio de cenários, nos quais o valor da carteira é recalculado após choques nos fatores de risco. Os principais métodos são o VaR por simulação histórica e o VaR por simulação de Monte Carlo.

Crouhy, Galai e Mark (2004) também dividem os modelos de VaR em dois tipos: os paramétricos, baseados na estimação dos parâmetros de uma distribuição teórica, e os não-paramétricos, onde a distribuição é construída através da utilização de cenários. Assim como Jorion (2007), os autores destacam o modelo delta-normal, do tipo paramétrico, e os modelos de simulação histórica e de simulação de Monte Carlo, do tipo não-paramétrico. Os três serão detalhados a seguir.

### 2.4.1 VaR Delta-normal

O modelo delta-normal calcula o VaR de forma simplificada, assumindo que as distribuições dos preços dos ativos da carteira são log-normais, o que faz com que os retornos dos ativos sigam distribuições normais. De acordo com Crouhy, Galai e Mark (2004), como a distribuição normal é caracterizada por seus dois primeiros momentos, o VaR pode ser calculado com base na média e variância do retorno da carteira, que dependem da composição da carteira e da distribuição conjunta dos fatores de risco a que ela está exposta.

Para tanto, é necessário que a distribuição do valor futuro da carteira  $f(v)$  seja transformada em uma distribuição normal padrão  $\Phi(\varepsilon)$ , com  $\varepsilon$  tendo média zero e desvio-padrão 1. Pode-se obter essa transformação através da normalização do retorno crítico, fazendo  $z = \frac{R^* - \mu}{\sigma}$ , onde  $z$  obrigatoriamente assume um valor negativo, o que leva à seguinte equação:

$$P(V \leq V^*) = 1 - c = \int_{-\infty}^{V^*} f(v) dv = \int_{-\infty}^{R^*} f(r) dr = \int_{-\infty}^z \phi(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2-9)$$

Em seguida, basta encontrar o termo  $z$  que resolve  $1 - c = \int_{-\infty}^z \phi(\varepsilon) d\varepsilon$ , o qual pode ser obtido na tabela da função distribuição normal padrão cumulativa, e calcular o retorno crítico  $R^* = z\sigma + \mu$ . Finalmente, partindo-se das equações 2.5 e 2.6, tem-se que:

$$VaR_{relativo} = V_0\mu - V_0R^* = -V_0z\sigma \quad (2-10)$$

$$VaR_{absoluto} = -V_0R^* = -V_0(z\sigma + \mu) \quad (2-11)$$

Essas fórmulas indicam que o VaR pode ser calculado pela multiplicação do valor inicial da carteira pelo seu desvio-padrão, que deve ser ajustado pelo fator  $z$ , de acordo com o nível de confiança escolhido.

Segundo Jorion (2007), uma das vantagens desse modelo em relação aos demais é seu apelo intuitivo. As fórmulas acima mostram que o VaR nada mais é do que um múltiplo do desvio-padrão da carteira, aplicado sobre seu valor inicial. Outra vantagem reside na rapidez e facilidade de cálculo, sendo que a maior dificuldade é a definição da matriz de variância-covariância, que, para uma carteira de  $n$  ativos, pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\sigma_p^2 = [v_1 \cdots v_N] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

em que o vetor  $[v_1 \cdots v_N]$  representa a proporção do valor de cada ativo em relação ao valor da carteira.

Apesar de difundido, esse método é muito criticado por suas premissas. Matz (2005) afirma que o método delta-normal não apresenta bons resultados em situações extremas de mercado, pois assume normalidade dos retornos, o que não acontece na prática, já que os eventos geram uma distribuição de retornos leptocúrtica (i.e. apresenta ‘caudas pesadas’). Autores como Jorion (2007) e Crouhy, Galai e Mark (2004) consideram essa a principal crítica com relação a tal modelo.

Outra crítica comum se refere à sua ineficiência em mensurar o risco de instrumentos não-lineares, como as opções, que apresentam distribuições de probabilidade dos retornos não-simétricas.

#### 2.4.2 VaR por Simulação Histórica

Diferentemente do delta-normal, o método de simulação histórica não faz qualquer tipo de pressuposto sobre a distribuição dos retornos dos fatores de risco. Ele se apropria de suas distribuições históricas reais e as utiliza para reavaliar o valor da carteira em cenários

distintos, o que permite calcular o VaR. Crouhy, Galai e Mark (2004) definem as três etapas para a aplicação desse método:

- Coleta de uma amostra de dados históricos contendo as variações diárias dos fatores de risco a que a carteira está exposta;
- Aplicação da variação encontrada em cada dia da amostra sobre o valor atual dos fatores de risco e reavaliação do valor da carteira em todos esses cenários;
- Construção de um histograma com as variações no valor da carteira obtidas nos diversos cenários e identificação do VaR associado ao nível de confiança escolhido.

Portanto, a variação do valor da carteira em um cenário é dada por

$$\Delta V = V^* - V_0 = V_0(1 + R^*) - V_0 = V_0 R^* \quad (2-13)$$

em que o retorno da carteira  $R^*$  depende do retorno de cada ativo ponderado pelo seu peso  $v_i$  dentro da carteira

$$R^* = \sum_{i=1}^N v_i R_i \quad (2-14)$$

e o retorno de cada ativo depende do novo nível do seu fator de risco  $F_i^*$ , calculado através da variação histórica observada

$$F_i^* = F_{i,0} + \Delta F_i \quad (2-15)$$

Esse método é de fácil implementação e de grande apelo intuitivo. Além disso, costuma ser elogiado por não exigir a adoção de uma distribuição de probabilidades para os retornos, como, por exemplo, a normal, o que o permite considerar eventos extremos, desde que eles estejam presentes nos dados históricos, além de captar os movimentos de instrumentos não-lineares.

Entretanto, esse método possui uma série de desvantagens, como a adoção da premissa de volatilidade constante dos retornos. Segundo Bhattacharyya (2008), essa premissa é

insustentável, já que o agrupamento da volatilidade no tempo é um fenômeno conhecido e bem documentado. A autora defende a utilização de modelos de volatilidade dinâmica.

Jorion (2007) faz outras críticas ao método de simulação histórica, como o problema da escolha do horizonte de tempo. Se a escolha for por poucas observações passadas, o modelo fica suscetível a grandes erros de estimação. Por outro lado, se o horizonte escolhido for longo, eventos antigos e de pouca relevância podem distorcer o cálculo do VaR.

Outras críticas também são frequentes, como a demora a incorporar quebras estruturais nos dados, e o fato de ele se basear em apenas um caminho de preços, quando diversos outros caminhos também são possíveis no futuro.

### 2.4.3 VaR por Simulação de Monte Carlo

Assim como o método de simulação histórica, a simulação de Monte Carlo também calcula o VaR através da geração de cenários. A diferença entre eles está na maneira como os cenários são construídos. No método de Monte Carlo, eles são gerados através de um processo randômico, especificado a partir de uma distribuição de probabilidades.

A primeira etapa consiste em definir o modelo estocástico para a simulação do comportamento do fator de risco. Segundo Jorion (2007), o modelo de movimento geométrico browniano costuma ser utilizado para simular os mercados de câmbio e acionário. Ele descreve os movimentos através da equação:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz \quad (2-16)$$

onde  $dz$  é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com média zero e variância  $dt$ .  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  representam a tendência e volatilidade do fator de risco e podem variar ao longo do tempo. Consequentemente, o caminho percorrido pelo fator de risco segue um passeio aleatório, com choques não-reversíveis à média, o que dificulta a utilização dessa

técnica para a simulação do comportamento da taxa de juros. Para esse fator de risco, existem outros modelos mais adequados, como o de Vasicek (1977):

$$dr_t = K(\theta - r_t)dt + dz_t\sigma \quad (2-17)$$

em que o  $K$  representa a velocidade com que a taxa de juros  $r_t$  se reverte para o seu nível de longo prazo  $\theta$ .

A segunda etapa da simulação de Monte Carlo consiste em gerar números aleatórios para alimentar o processo estocástico, que irá traçar o caminho percorrido pelo fator de risco, permitindo o cálculo do valor futuro do ativo.

A repetição desse processo gera uma distribuição de possíveis valores do ativo em uma data futura  $T$ , e possibilita o cálculo do valor futuro esperado  $E(F_T)$  e do VaR, como segue:

$$VaR = E(F_T) - Q(F_T, c) \quad (2-18)$$

em que  $Q(F_T, c)$  é o valor que é excedido pelos possíveis valores futuros do ativo em  $c$  % das simulações realizadas.

Como, em geral, as carteiras possuem mais de um fator de risco, as simulações devem ser feitas conjuntamente, o que torna o processo mais complicado caso exista relação de dependência entre os fatores, pois seus componentes aleatórios precisam ser associados. Isso pode ser obtido através da geração de números aleatórios correlacionados.

No caso simplificado de dois fatores, o processo se inicia com números aleatórios independentes  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , que são transformados nos números aleatórios correlacionados  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , conforme abaixo:

$$\varepsilon_1 = \eta_1 \quad (2-19)$$

$$\varepsilon_2 = \rho\eta_1 + (1 - \rho^2)^{0.5}\eta_2 \quad (2-20)$$

No caso mais geral, com mais fatores de risco, pode-se ainda utilizar a decomposição de Cholesky, conforme ilustrado por Jorion (2007).

De acordo com Jorion (2007), o método de Monte Carlo costuma ser utilizado por permitir a modelagem de instrumentos não-lineares, incorporar a variação da volatilidade no tempo e considerar eventos extremos. Segundo o autor, as maiores críticas a ele são o tempo de execução elevado, podendo se tornar inviável para carteiras com muitos instrumentos, e a existência de risco de modelo, devido à dificuldade de modelagem dos processos estocásticos que regem o comportamento dos fatores de risco. O autor também cita outras desvantagens, como a dificuldade de análise, o alto custo de implementação e seu baixo poder intuitivo.

#### 2.4.4 *Backtesting*

*Backtesting* é o nome dado ao processo de validação de um modelo de VaR. Seu objetivo é verificar se o número de vezes em que o retorno real da carteira excede o VaR está de acordo com o nível de confiança escolhido. Através dessa validação, é possível ajustar os parâmetros do modelo para que ele se torne mais eficiente.

Sendo  $E$  o número de excessos em relação ao VaR em uma amostra de  $N$  verificações, é de se esperar que um bom modelo apresente a seguinte característica:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{E}{N} \right) = 1 - c \quad (2-21)$$

em que  $c$  representa o nível de confiança adotado.

O *Backtesting* será a técnica utilizada para a comparação entre os modelos de VaR testados neste trabalho.

## 2.5 Métodos para Estimação de Volatilidade

Segundo Jorion (2007), a volatilidade pode ser estimada através de modelos estáticos ou dinâmicos. Os estáticos assumem volatilidade constante no tempo, como o modelo de média móvel. Já os dinâmicos, como o *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) e o *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH), reconhecem que a volatilidade varia com o tempo.

### 2.5.1 Média Móvel

A volatilidade é calculada como sendo uma média simples das volatilidades passadas. Sendo  $n$  o número de observações,  $r_i$  o retorno do fator de risco no instante de tempo  $i$ , e  $\bar{r}$  o seu retorno médio no período de análise, tem-se que a volatilidade  $\sigma$  é dada por:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{n-1}\right) \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2} \quad (2-22)$$

### 2.5.2 EWMA

No modelo EWMA, a volatilidade é calculada como sendo uma média ponderada das volatilidades passadas, com pesos maiores para as observações mais recentes. Os pesos decaem exponencialmente de acordo com o fator de decaimento  $\lambda$ , que varia entre 0 e 1. O cálculo pode ser feito conforme abaixo, onde  $r_{n-1}$  representa o retorno no dia anterior ao dia da medição.

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) r_{n-1}^2 \quad (2-23)$$



No caso de mais de um fator de risco, é necessária a estimação das covariâncias, conforme abaixo:

$$\sigma_{12,n}^2 = \lambda \sigma_{12,n-1}^2 + (1 - \lambda) r_{1,n-1} r_{2,n-1} \quad (2-24)$$

onde  $\sigma_{12,n}^2$  representa a covariância entre os retornos dos ativos 1 e 2.

Um caso particular da aplicação do EWMA é o modelo RiskMetrics, criado pelo banco J.P. Morgan. Ele utiliza o fator de decaimento  $\lambda$  igual a 0.94, calculado com base em estudos realizados com diversas variáveis de mercado.

### 2.5.3 GARCH

O modelo GARCH é semelhante ao EWMA, a diferença está na incorporação do termo  $V_L$  de reversão à média, ou variância de longo prazo. Na equação abaixo, os pesos dos três termos devem somar 1 ( $\gamma + \alpha + \beta = 1$ ), e a dependência em relação às volatilidades passadas decai exponencialmente de acordo com a taxa  $\beta$ .

$$\sigma_n^2 = \mathcal{V}_L + \alpha r_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (2-25)$$

Os modelos EWMA e GARCH estimam volatilidades que se agrupam no tempo, apresentando valores altos durante períodos de retornos absolutos altos (devido à presença do termo  $r_{n-1}^2$ ), que decaem exponencialmente quando os retornos voltam para níveis mais baixos. Essa característica faz com que esses modelos se adaptem de forma rápida às mudanças no nível de volatilidade.

Segundo Jorion (2007), a vantagem do modelo GARCH é a existência do termo de reversão à média, que permite estimativas consistentes de volatilidade no longo prazo. O autor também

cita as vantagens do modelo EWMA, como a facilidade de especificação/implementação e o bom ajustamento aos dados.

Embora a volatilidade esteja no centro de alguns estudos de risco de mercado, como no caso de Su e Knowles (2006), autores como Pochon e Teiletche (2007) comprovaram que a escolha do modelo de volatilidade tem uma importância pequena para o cálculo do VaR quando comparada com a importância da definição da distribuição de probabilidade adotada para a modelagem dos retornos dos fatores de risco.

### 3 TEORIA DE CÓPULAS

Segundo Nelsen (2006), o estudo de cópulas e sua aplicação em estatística, probabilidade e processos estocásticos ainda são recentes, e existe muito campo para seu desenvolvimento. Apesar de seu teorema central ter sido publicado por Abe Sklar (1959), a teoria de cópulas se desenvolveu principalmente nos últimos vinte anos. O autor cita as principais conferências dedicadas ao tema: “Symposium on Distributions with Given Marginals (Fréchet Classes)”, em Roma, 1990; “Distributions with Fixed Marginals, Doubly Stochastic Measures, and Markov Operators”, em Seattle, 1993; “Distributions with Given Marginals and Moment Problems”, em Praga, 1996; “Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling”, em Barcelona, 2000; e “Dependence Modelling: Statistical Theory and Applications in Finance and Insurance”, em Quebec, 2004.

A aplicação da teoria de cópulas em finanças e na gestão de riscos financeiros é ainda mais recente. Martellini e Meyfredi (2007) citam algumas aplicações nessas áreas de conhecimento: precificação de derivativos - Cherubini e Luciano (2002) e Bennet e Kennedy (2004); análise da dependência entre mercados financeiros internacionais - Hu (2006); análise do risco de crédito - Li (2000) e Schonbucher e Schubert (2001). Além dessas aplicações, vale ressaltar sua utilização na gestão de riscos de mercado, como, por exemplo, na mensuração do VaR, conforme será descrito adiante neste trabalho.

Por simplicidade de exposição, os conceitos descritos neste capítulo referem-se à situação bidimensional, que considera apenas dois fatores de risco. Porém, eles também são válidos para a situação multidimensional, o que permite a utilização da teoria de cópulas para análises com mais de dois fatores de risco, conforme descrito por Nelsen (2006) e Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004).

#### 3.1 Introdução à Teoria de Cópulas

Para o entendimento deste item é necessário compreender os conceitos descritos no item 2.2 (Conceitos Básicos de Estatística).

### 3.1.1 Definição da Função Cópula

Segundo Nelsen (2006), uma cópula bidimensional  $C$  é uma função real com domínio  $I^2 = [0,1] \times [0,1]$  e contida no intervalo  $I = [0,1]$ , que possui as seguintes características:

- Para todo par  $(a,b) \in I^2$ , tem-se que  $C(a,0) = C(0,b) = 0$ ,  $C(a,1) = a$  e  $C(1,b) = b$ ;
- Para todo retângulo  $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \in I^2$ , com  $a_1 \leq a_2$  e  $b_1 \leq b_2$ , tem-se que  $C(a_2, b_2) - C(a_2, b_1) - C(a_1, b_2) + C(a_1, b_1) \geq 0$

Note-se que, até aqui, a cópula foi definida apenas como uma função real que apresenta algumas características específicas. Sua interpretação probabilística será dada através do Teorema de Sklar. Porém, antes da apresentação desse teorema, vale fazer uma introdução conceitual à interpretação probabilística da função de cópula, conforme proposto por Nelsen (2006).

Sendo  $x$  e  $y$  números reais, podemos definir  $X$  e  $Y$  como duas variáveis aleatórias com funções distribuições acumuladas  $F(x) = P[X \leq x]$  e  $G(y) = P[Y \leq y]$ , e cuja função distribuição conjunta é definida por  $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ . Dessa forma, cada par de números  $(x_i, y_i)$  gera um ponto  $(F(x_i), G(y_i))$  contido no intervalo  $[0,1] \times [0,1]$ . Cópulas são funções que associam o ponto  $(F(x_i), G(y_i))$  a um valor específico da sua função conjunta  $H(x, y)$ , definida no intervalo  $[0,1]$ .

### 3.1.2 Teorema de Sklar

De acordo com Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004), o ponto de partida do estudo de cópulas é o entendimento de sua relação com as distribuições de probabilidade. Segundo os autores, esta relação está expressa no Teorema de Sklar, que faz duas afirmações importantes:

- Cópulas são funções de distribuição conjunta cujas distribuições marginais são uniformes no intervalo  $(0,1)$ ;
- A relação de dependência entre duas ou mais funções de distribuição marginal e sua função de distribuição conjunta é totalmente expressa por sua cópula.

De maneira mais formal, sendo  $H(x, y)$  a função distribuição conjunta das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ ,  $F(x)$  e  $G(y)$  suas funções distribuições marginais contínuas e  $x$  e  $y$  números reais, existe uma única cópula  $C$ , tal que:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (3-1)$$

Do Teorema de Sklar segue o corolário que, dada uma cópula que satisfaça a equação 3-1, ela pode ser obtida por inversão, conforme abaixo:

$$C(a, b) = H(F^{-1}(a), G^{-1}(b)) \quad (3-2)$$

em que  $F^{-1}(a)$  e  $G^{-1}(b)$  são as funções pseudo inversas de  $F(x)$  e  $G(y)$ . Posteriormente, ver-se-á que o método da inversão é um dos principais métodos para a criação de cópulas.

A seguir será apresentada a relação entre cópulas, distribuições conjuntas e marginais, o que fornece uma breve intuição da origem da equação 3-1, base do Teorema de Sklar (para uma demonstração formal ver Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004) ou Nelsen (2006)).

- Supondo que  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias que possuem uma distribuição conjunta  $H(x, y)$ , pode-se escrever  $H(x, y)$  da seguinte forma:

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (3-3)$$

- Se  $F(x)$  e  $G(y)$  forem definidos como sendo as distribuições marginais de  $X$  e  $Y$ , ou seja,  $F(x) = P[X \leq x]$  e  $G(y) = P[Y \leq y]$ , pode-se dizer que ambas seguem uma distribuição uniforme padrão,  $F(X) \sim U_1$  e  $G(Y) \sim U_2$ , e que suas funções inversas

podem ser escritas como  $F^{-1}(U_1) \sim X$  e  $G^{-1}(U_2) \sim Y$ , o que permite reescrever a equação 3-3 da seguinte forma:

$$H(x, y) = P(F^{-1}(U_1) \leq x, G^{-1}(U_2) \leq y) \quad (3-4)$$

ou então:

$$H(x, y) = P(U_1 \leq F(x), U_2 \leq G(y)) \quad (3-5)$$

- Como uma cópula é definida como uma função de distribuição conjunta cujas distribuições marginais são uniformes no intervalo  $[0,1]$ , pode-se substituir o segundo termo da equação 3-5 pela cópula  $C$ , e, finalmente, tem-se que uma cópula é uma função que associa uma função de distribuição conjunta às suas funções de distribuição marginais, conforme abaixo:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (3-6)$$

### 3.1.3 Apelo Conceitual e Prático

De acordo com Cherubini e Luciano (2001), a principal vantagem das cópulas é a maneira como elas representam uma distribuição conjunta de probabilidades. Elas oferecem maior flexibilidade na agregação de riscos, pois a escolha das distribuições marginais pode ser feita de forma independente da modelagem da estrutura de associação das variáveis estudadas.

Essa flexibilidade permite, por exemplo, que, ao se construir uma distribuição conjunta de duas ou mais variáveis aleatórias, cada uma delas seja individualmente modelada por uma distribuição marginal diferente, que pode ser a Normal, T-Student, Exponencial, Qui-quadrado, ou qualquer outra. Ao mesmo tempo, a dependência entre essas variáveis pode assumir estruturas diversas, até mesmo não-lineares, de acordo com o tipo de cópula utilizada.

Jorion (2007) afirma que a abordagem tradicional de agregação de riscos é baseada na premissa de normalidade conjunta dos retornos dos fatores de risco. Isto significa assumir que todos os fatores seguem obrigatoriamente uma distribuição normal, e que a sua distribuição conjunta também é normal. Essas premissas implicam a existência de uma relação linear entre os fatores de risco, e a baixa probabilidade de ocorrência de eventos conjuntos extremos. De acordo com o autor, essas premissas são questionáveis e podem levar à subestimação do risco.

Dessa forma, Jorion (2007) acredita que a utilização da teoria de cópulas para a modelagem de riscos financeiros tende a crescer, devido à forma flexível com que a distribuição conjunta dos fatores de risco pode ser construída.

### 3.2 Medidas de Associação

Duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são consideradas independentes se sua distribuição conjunta for equivalente à multiplicação de suas distribuições marginais, conforme abaixo:

$$F(x, y) = F(x)F(y) \quad (3-7)$$

Contudo, como em geral as variáveis financeiras não são independentes, torna-se de suma importância o entendimento da relação entre elas para a correta mensuração do risco de uma carteira.

De acordo com Nelsen (2006), a relação de dependência entre variáveis aleatórias é um dos assuntos mais estudados em probabilidade e estatística. Como o intuito da função de cópula é representar essa relação, a teoria de cópulas está diretamente relacionada ao estudo de medidas de dependência entre variáveis aleatórias.

Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004) apresentam alguns conceitos de associação de variáveis:

- **Concordância:** um par de variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é concordante se valores grandes de  $X$  estão associados a valores grandes  $Y$ , e se valores pequenos de  $X$  estão associados a

valores pequenos de  $Y$ . De maneira mais formal, sendo  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  duas observações de  $(X, Y)$ , existe concordância se  $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) > 0$ , e existe discordância se  $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) < 0$ . As medidas mais conhecidas que se valem desse conceito são o Tau de Kendall e o Rho de Spearman;

- Correlação linear: a associação é feita através do coeficiente de correlação linear. Supondo duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , ele é calculado com base na covariância e desvio-padrão das variáveis, conforme abaixo:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \quad (3-8)$$

- Dependência nas caudas: esse conceito se concentra na relação entre os valores extremos das variáveis. De forma geral, supondo  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias contínuas, a dependência na cauda é dada pela probabilidade condicional de que a função distribuição de  $X$  exceda um dado valor  $v$ , assumindo que esse valor tenha sido excedido pela função distribuição de  $Y$ ;
- Dependência de quadrante positiva: sendo  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias, e  $C$  a cópula que acopla suas distribuições marginais, existe dependência de quadrante positiva entre as variáveis se  $C(a, b) \geq ab$ , para todo  $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

De acordo com Pereira (2006), a correlação linear é a medida de dependência mais difundida. Contudo, ela possui uma série de problemas, como não capturar relações não-lineares entre variáveis e somente poder ser utilizada para a construção de distribuições conjuntas que sejam normalmente distribuídas.

Já as medidas de concordância podem ser aplicadas a outros tipos de distribuição conjunta, e são capazes de capturar relações não-lineares entre as variáveis. Além disso, de acordo com Nelsen (2006), essas medidas são invariantes no caso de transformações estritamente crescentes das variáveis aleatórias, ou seja, se duas variáveis são concordantes, elas continuarão concordantes após sofrerem esse tipo de transformação. Segundo o autor, o Tau de Kendall e o Rho de Spearman são as medidas de concordância mais conhecidas e



apresentam uma relação direta com a função de cópula. Elas serão apresentadas com maior profundidade nos próximos itens.

### 3.2.1 Tau de Kendall

O Tau de Kendall pode ser entendido como a diferença entre a probabilidade de concordância e a probabilidade de discordância de duas variáveis aleatórias. De maneira mais formal, temos a seguinte definição para sua versão populacional:

$$\tau = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) \quad (3-9)$$

em que  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  são vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos, formados a partir de observações  $(x_i, y_i)$  e  $(x_j, y_j)$  do vetor de variáveis aleatórias  $(X, Y)$ .

A versão amostral pode ser facilmente calculada. Dado o vetor de variáveis aleatórias contínuas  $(X, Y)$ , e supondo uma amostra contendo  $n$  observações,  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ , pode-se afirmar que existem  $\binom{n}{2}$  pares distintos  $(x_i, y_i)$  e  $(x_j, y_j)$ . Sendo  $c$  o número de pares concordantes e  $d$  o número de pares discordantes, tem-se que a versão amostral do Tau de Kendall é dada por:

$$t = (c - d) / \binom{n}{2} = \frac{2}{n(n-1)}(c - d) \quad (3-10)$$

A estimação do Tau de Kendall pode ser utilizada, por exemplo, para a estimação da cópula que relaciona  $X$  e  $Y$ , já que a seguinte relação é válida entre o Tau de Kendall e a cópula (para constatação formal, ver Nelsen (2006)):

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C(a, b) dC(a, b) - 1 \quad (3-11)$$

### 3.2.2 Rho de Spearman

Assim como o Tau de Kendall, o Rho de Spearman é uma medida de dependência calculada a partir das probabilidades de concordância e discordância. Sendo  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  e  $(X_3, Y_3)$  três vetores aleatórios e independentes, obtidos das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , as quais possuem funções marginais  $F(x)$  e  $G(y)$  e função distribuição conjunta  $H(x, y)$ , a versão populacional do Rho de Spearman é calculada pela diferença entre a probabilidade de concordância e a probabilidade de discordância dos vetores  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_3)$ :

$$\rho_s = 3[P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)] \quad (3-12)$$

em que  $(X_1, Y_1)$  têm distribuição conjunta  $H(x, y)$ , e  $(X_2, Y_3)$ , por serem independentes, têm distribuição conjunta dada pela multiplicação de suas distribuições marginais  $F(x)$  e  $G(y)$ .

Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004) apresentam a fórmula para o cálculo da versão amostral do Rho de Spearman. Ela é baseada no posto das observações extraídas da amostra aleatória de  $n$  pares de  $(X, Y)$ :

$$\rho_s = 12 \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{n(n^2 - 1)} \quad (3-13)$$

em que  $R_i$  e  $S_i$  são os postos das observações  $X_i$  e  $Y_i$ .

Nelsen (2006) mostra a relação do Rho de Spearman com a cópula  $C$  que acopla as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ :

$$\rho_s = 12 \iint_{I^2} C(a, b) da db - 3 = 12 \iint_{I^2} ab dC(a, b) - 3 \quad (3-14)$$

### 3.3 Métodos para Criação de Cópulas

Nelsen (2006) apresenta diversos métodos para a criação de cópulas. Entre eles estão os métodos algébricos, que utilizam relações algébricas entre a função distribuição conjunta e suas marginais para criar cópulas através do Teorema de Sklar. Segundo o autor, cópulas também podem ser criadas a partir de alguma relação geométrica entre as variáveis estudadas, como nos métodos da soma convexa e da soma ordinal. O autor também apresenta o método da inversão, que será exposto a seguir em maiores detalhes.

#### ➤ Método da Inversão

Nesse método, as cópulas são criadas a partir de distribuições conjuntas. De forma simplificada, três etapas são necessárias:

- Dada uma função de distribuição conjunta  $H(x, y)$ , encontrar suas funções marginais  $F(x)$  e  $G(y)$ , onde  $F(x) = H(x, \infty)$  e  $G(y) = H(\infty, y)$ ;
- Fazer  $F(x) = a$  e  $G(y) = b$ , para achar suas funções pseudo-inversas  $F^{-1}(a)$  e  $G^{-1}(b)$ ;
- Obter a cópula, através da equação  $C(a, b) = H(F^{-1}(a), G^{-1}(b))$ .

Segundo Nelsen (2006), outras funções de distribuição conjunta podem ser obtidas a partir da cópula  $C$ . Por exemplo, dadas as funções marginais arbitrárias  $M(x)$  e  $N(y)$ , a aplicação do Teorema de Sklar permite a construção da sua distribuição conjunta  $O(x, y)$ , conforme abaixo:

$$O(x, y) = C(M(x), N(y)) \quad (3-15)$$

### 3.4 Famílias de Cópulas

Neste item serão apresentados cinco tipos de cópulas bivariadas. Três delas pertencem à classe de cópulas arquimedianas (cópulas de Clayton, Frank e Gumbel), e são construídas a partir de funções geradoras específicas. As outras duas pertencem à classe de cópulas elípticas (cópulas Normal e T-Student), e são construídas a partir de distribuições multivariadas, pelo método de inversão (conforme detalhado no item 3.3).

#### 3.4.1 Cópulas Arquimedianas

A classe de cópulas arquimedianas é bastante flexível, permitindo a modelagem de diversas formas de dependência, incluindo assimetria e dependência extrema nas extremidades. Ela é definida da seguinte maneira:

$$C^A(a,b) = \phi^{[-1]}(\phi(a) + \phi(b)) \quad (3-16)$$

em que  $\phi$  é chamada de função geradora, e apresenta as seguintes características:

- $\phi : [0,1] \rightarrow [0,\infty]$ ;
- Contínua, decrescente ( $\phi'(t) < 0$ ) e convexa ( $\phi''(t) \geq 0$ );
- $\phi(1) = 0$

E que  $\phi^{[-1]}$ , a função pseudo-inversa de  $\phi$ , é definida da seguinte maneira:

- $\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \phi(0) \leq t \leq +\infty \end{cases}$
- $\phi^{[-1]}(\phi(t)) = t$ , para todo  $t \in [0,1]$

Assim sendo, cópulas arquimedianas podem ser construídas a partir de qualquer função que respeite as condições expostas acima.

A tabela 3.1 apresenta as fórmulas e funções geradoras de três cópulas arquimedianas de um parâmetro, conforme exposto por Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004). A tabela 3.2 apresenta a relação de seus parâmetros com as medidas de dependência Tau de Kendall e Rho de Spearman. Em todas as fórmulas, o  $\alpha$  representa o parâmetro da cópula. Para outras cópulas arquimedianas, ver Nelsen (2006).

**Tabela 3.1 - Cópulas Arquimedianas: fórmulas e funções geradoras**

Família	Cópula $C(a, b)$	Gerador $\phi_\alpha(t)$	Intervalo para $\alpha$
Clayton	$\max\left[\left(a^{-\alpha} + b^{-\alpha} - 1\right)^{(-1/\alpha)}, 0\right]$	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$	$[-1, 0) \cup (0, +\infty)$
Frank	$-\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(\exp(-a\alpha) - 1)(\exp(-b\alpha) - 1)}{(\exp(-\alpha) - 1)}\right)$	$-\ln\left(\frac{\exp(-t\alpha) - 1}{\exp(-\alpha) - 1}\right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Gumbel	$\exp\left(-\left((-\ln(a))^\alpha + (-\ln(b))^\alpha\right)^{1/\alpha}\right)$	$(-\ln(t))^\alpha$	$[1, +\infty)$

Fonte: Adaptado de CHERUBINI, LUCIANO e VECCHIATO (2004).

**Tabela 3.2 - Cópulas Arquimedianas: relação dos parâmetros com medidas de dependência**

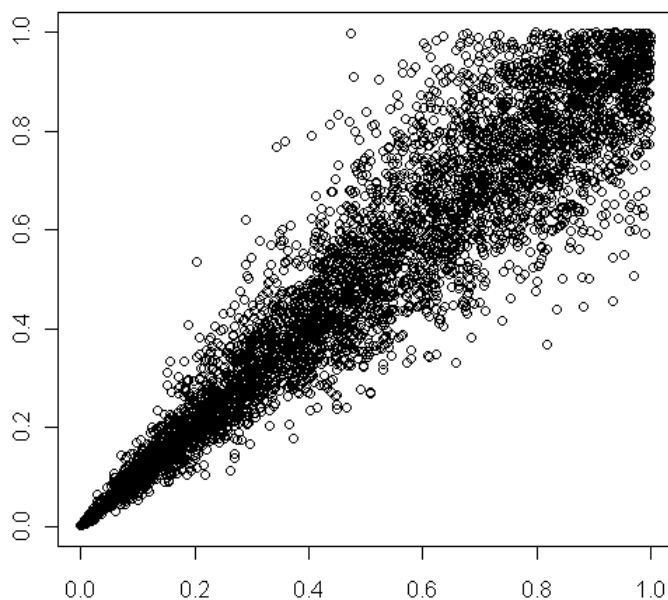
Família	Tau de Kendall ( $\tau$ )	Rho de Spearman ( $\rho_s$ )
Clayton	$\alpha/(\alpha + 2)$	expressão complexa
Frank	$1 + 4(D_1(\alpha) - 1)/\alpha$	$1 - 12(D_2(-\alpha) - D_1(-\alpha))/\alpha$
Gumbel	$1 - \alpha^{-1}$	sem forma fechada

Fonte: Adaptado de CHERUBINI, LUCIANO e VECCHIATO (2004).

$$\text{Onde: } D_K(\alpha) = \frac{k}{\alpha^k} \int_0^\alpha \frac{t^k}{\exp(t) - 1} dt \quad \text{e} \quad D_K(-\alpha) = D_K(\alpha) + \frac{k\alpha}{k+1}$$

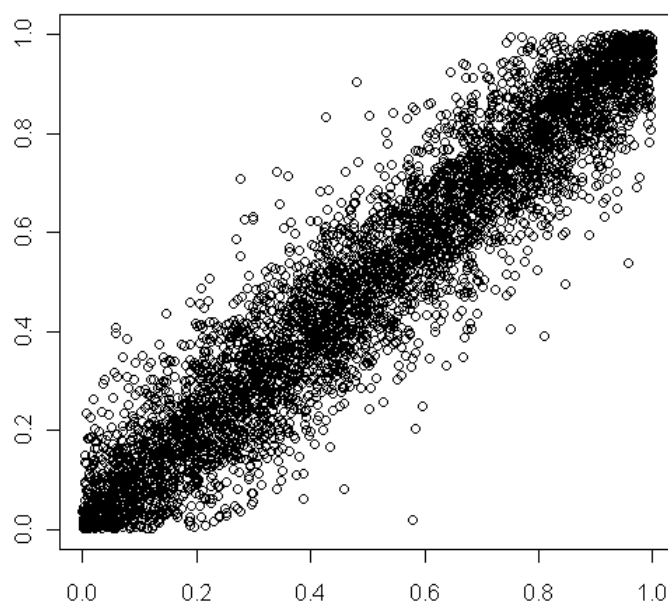
Os gráficos a seguir ilustram a forma de dependência oferecida pelas três cópulas arquimedianas apresentadas acima. Eles foram construídos com base em 5000 observações de cada variável aleatória, as quais foram relacionadas entre si pelo parâmetro da cópula. Em cada situação, o parâmetro foi calculado através de sua relação com a medida de dependência Tau de Kendall, conforme apresentado na tabela 3.2, assumindo  $\tau = 0,8$ .

- Cópula Clayton: apresenta estrutura assimétrica, com dependência extrema na cauda inferior.



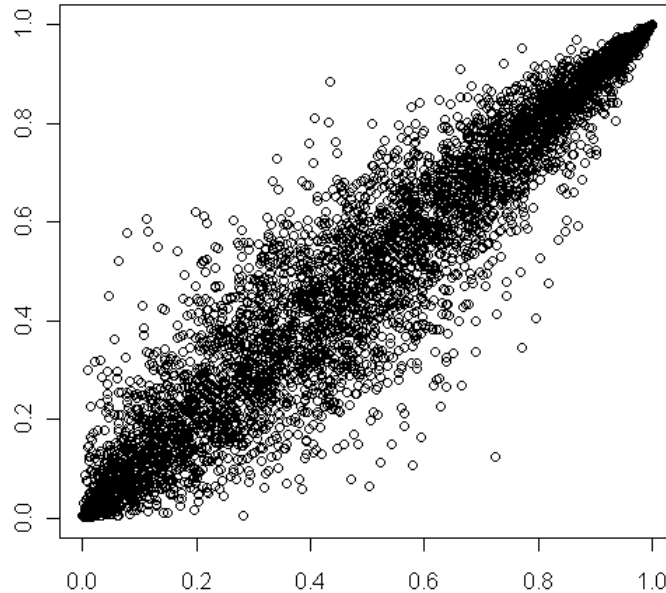
**Figura 3.1 - Cópula Clayton com parâmetro  $\alpha = 8$**   
Fonte: Elaboração própria.

- Cópula Frank: possui estrutura de dependência simétrica nas duas caudas.



**Figura 3.2 - Cópula Frank com parâmetro  $\alpha = 18$**   
Fonte: Elaboração própria.

- Cópula Gumbel: apresenta estrutura assimétrica, com dependência extrema na cauda superior.



**Figura 3.3 - Cópula Gumbel com parâmetro  $\alpha = 5$**

Fonte: Elaboração própria.

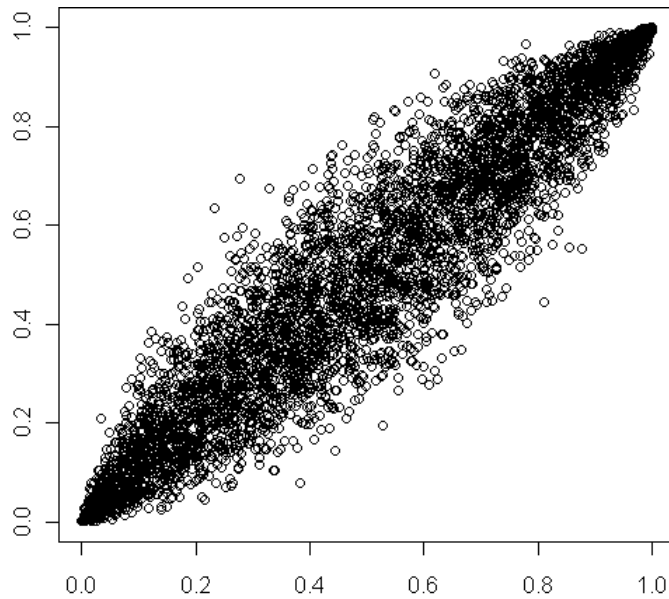
### 3.4.2 Cópula Normal

A cópula Normal é simétrica e não admite dependência extrema em suas extremidades. Ela é obtida de uma distribuição multivariada, pelo método da inversão, conforme abaixo.

$$C^N(a, b) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(a), \Phi^{-1}(b)) \quad (3-17)$$

em que  $\Phi_\rho$  é a função distribuição conjunta de um vetor normal padrão bidimensional, com coeficiente de correlação linear  $\rho$ , e  $\Phi^{-1}$  é a inversa da função distribuição normal univariada (para a fórmula de  $\Phi_\rho$ , ver Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004)).

A figura 3.4 exemplifica o tipo de dependência oferecida por esta cópula.



**Figura 3.4 - Cópula Normal com correlação  $p = 0,95$**

Fonte: Elaboração própria.

A vantagem da modelagem via cópula normal em relação à via distribuição normal conjunta é que a primeira pode ser combinada com marginais diferentes da normal, conforme explicado por Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004).

### 3.4.3 Cópula T-Student

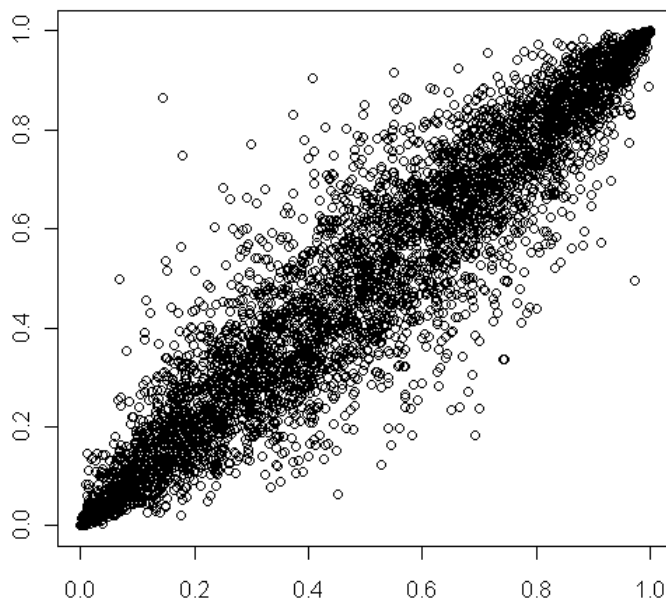
Assim como a Normal, a cópula T-Student também é simétrica, mas possui a vantagem de possibilitar a modelagem de um maior grau de dependência em suas extremidades. Sua fórmula é dada por:

$$C^T(a,b) = t_{\rho,n} \left( t_n^{-1}(a), t_n^{-1}(b) \right) \quad (3-18)$$

em que  $t_{\rho,n}$  é a função distribuição conjunta de um vetor t-student bidimensional, com correlação linear  $\rho$  e  $n$  graus de liberdade, e  $t_n^{-1}$  é a inversa da função distribuição t-student univariada. De acordo com Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004), essa cópula se aproxima da normal quando  $n$  tende ao infinito. Porém, o resultado se torna diferente para baixos



valores de  $n$ , o que gera maior dependência nas extremidades. A Figura 3.5 mostra o grau de dependência gerado por essa cópula.



**Figura 3.5 - Cópula T-Student com correlação  $p = 0,95$  e 2 graus de liberdade**

Fonte: Elaboração própria.

A cópula T-Student também pode ser utilizada com outros tipos de distribuição marginal.

### 3.5 Métodos de Estimação dos Parâmetros da Cópula

Segundo Stevenson (1981, p. 194), “a estimação é o processo que consiste em utilizar dados amostrais para estimar os valores de parâmetros populacionais desconhecidos”. Este capítulo visa apresentar os principais métodos de estimação para cópulas. As descrições a seguir foram baseadas em Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004).

#### 3.5.1 Máxima Verossimilhança

O método da Máxima Verossimilhança (ML, da expressão *Maximum Likelihood*) faz a estimação dos parâmetros das distribuições marginais e da cópula de forma simultânea.

Definindo  $\theta$  como o conjunto de parâmetros a ser estimado, pode-se escrever a função de verossimilhança  $l(\theta)$  da seguinte maneira:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln(c(F_1(x_{1t}), F(x_{2t}))) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^2 \ln(f_j(x_{jt})) \quad (3-19)$$

onde  $c$  é densidade da copula  $C$  e  $f_j$  a densidade de cada marginal. O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}_{ML}$  é obtido através da maximização dessa função:

$$\hat{\theta}_{ML} = \max l(\theta) \quad (3-20)$$

O estimador  $\hat{\theta}_{ML}$  tem a vantagem de ser consistente e assintoticamente eficiente sob condições de regularidade (para maiores detalhes sobre as condições de regularidade, ver Serfling (1980)), além de ser assintoticamente normal. Por outro lado, esse método pode ser de difícil convergência, principalmente quando o número de parâmetros a ser estimado aumenta.

### 3.5.2 Inferência para as Marginais

O método da Inferência para as Marginais (IFM, da expressão *Inference for Margins*) é baseado no método ML. Ele utiliza os dois termos da função de verossimilhança de forma isolada, fazendo a estimação dos parâmetros em duas etapas. Inicialmente, os parâmetros das marginais, representados por  $\theta_1$ , são estimados através da maximização do segundo termo da função ML:

$$l(\theta_1) = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^2 \ln(f_j(x_{jt})) \quad (3-21)$$

Em seguida, os parâmetros estimados das marginais são utilizados para a estimação dos parâmetros da cópula, que é feita através da maximização do primeiro termo da função ML:

$$l(\theta_2) = \sum_{t=1}^T \ln(c(F_1(x_{1t}), F(x_{2t}))) \quad (3-22)$$

Dessa forma, temos que o estimador IFM é dado por:

$$\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \quad (3-23)$$

Esse estimador também é considerado assintoticamente normal. Sua vantagem em relação ao método ML é a facilidade de convergência, o que o fez ser utilizado por autores como Assis e Laurini (2008) e Pereira (2006).

### 3.5.3 Máxima Verossimilhança Canônica

Os parâmetros da cópula também podem ser estimados sem que as distribuições marginais sejam especificadas. O método da Máxima Verossimilhança Canônica (CML, da expressão *Canonical Maximum Likelihood*) é composto por duas etapas: estimação das marginais sem assumir qualquer tipo de forma paramétrica para elas, utilizando suas distribuições empíricas; e estimação dos parâmetros da cópula através da maximização da função de verossimilhança, representada abaixo:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln \left( c \left( \hat{F}_1(x_{1t}), \hat{F}_2(x_{2t}) \right) \right) \quad (3-24)$$

### 3.5.4 Estimação Baseada em Medidas de Dependência

Uma maneira alternativa de estimar o parâmetro de uma cópula foi apresentada por Genest e MacKay (1986). Ela consiste em identificar a relação entre as variáveis através da estimação

de medidas de dependência como o Tau de Kendall e o Rho de Spearman, para posterior cálculo do parâmetro da cópula através das relações apresentadas na tabela 3.2.

Esse método tem a vantagem de ser mais simples do que os anteriores. Por outro lado, sua aplicação é restrita, ficando limitada ao caso bivariado, e para cópulas com apenas um parâmetro, como as cópulas arquimedianas.

### **3.6 Aplicação da Teoria de Cópulas**

#### **3.6.1 Cópulas, VaR e Risco de Mercado**

As principais críticas aos métodos tradicionais de cálculo de VaR foram apresentadas ao longo do capítulo 2.4. De forma resumida, segundo Jorion (2007), a abordagem tradicional é baseada na normalidade da distribuição conjunta dos fatores de risco, o que implica a existência de uma correlação linear entre os fatores, e uma pequena probabilidade de ocorrência de eventos extremos. O autor afirma que estudos empíricos indicam que essas premissas se mostram cada vez mais suspeitas, e que adotar a normalidade pode levar à subestimação do cálculo do valor em risco.

Através da aplicação da teoria de cópulas, tais premissas podem ser deixadas de lado, já que outros tipos de distribuição de probabilidade e estruturas de dependência podem ser utilizados. Segundo Jorion (2007), devido à flexibilidade com que as cópulas podem ser modeladas, sua aplicação na gestão de riscos financeiros tende a crescer. O autor cita as principais etapas de sua utilização para o cálculo do VaR de uma carteira composta por mais de um fator de risco:

- Determinação das distribuições marginais dos fatores de risco;
- Escolha da cópula para a integração das distribuições marginais;
- Estimação dos parâmetros das marginais e da cópula;
- Geração de realizações das variáveis aleatórias;
- Construção da distribuição dos retornos da carteira;

- Determinação do VaR como sendo um quantil da distribuição gerada, de acordo com o nível de confiança escolhido.

A seguir serão apresentadas algumas aplicações da teoria de cópulas na gestão de riscos de mercado.

Pereira (2006) utiliza a teoria de cópulas para mensurar o VaR e a *Expected Shortfall* (ES) de uma carteira de quatro ativos (taxa de juros pré-fixada, taxa de cupom cambial, e os índices Ibovespa e Dow Jones dos mercados acionários brasileiro e norte-americano, respectivamente). Segundo o autor, a cópula se mostra uma boa alternativa para a gestão de riscos, pois permite que distribuições multivariadas sejam criadas sem que restrições sejam impostas às distribuições marginais. A cópula Clayton e um processo de estimação em dois estágios foram utilizados, e a conclusão foi que, para altos níveis de confiança, o modelo se mostrou superior aos modelos tradicionais de VaR, como o histórico e o delta-normal. Os principais problemas encontrados foram a lentidão e a dificuldade de convergência do modelo.

Outros autores também aplicaram a teoria de cópulas para a mensuração do risco de mercado. Martellini e Meyfredi (2007) mensuraram o VaR para uma carteira de renda fixa, utilizando a cópula T-Student para caracterizar a estrutura de dependência dos fatores de risco, as taxas de juros pré-fixadas para diferentes vencimentos. Goorah (2007) utilizou as cópulas elípticas para calcular o VaR de uma carteira composta por índices do setor imobiliário.

Em suma, segundo Goorah (2007), estas são as principais vantagens da teoria de cópulas em relação às técnicas tradicionais de mensuração do VaR:

- A premissa de normalidade conjunta dos retornos não é necessária;
- Medidas de dependência mais robustas do que o coeficiente de correlação linear podem ser aplicadas;
- Diferentes distribuições marginais podem ser utilizadas para ativos que possuem comportamentos distintos.

### 3.6.2 Outras Aplicações em Finanças

#### ➤ Precificação de Derivativos

Assis e Laurini (2008) desenvolveram um modelo para a precificação de opções que dependem de mais de um ativo. Os autores testaram cópulas elípticas e arquimedianas através do método de estimação IFM e concluíram que a cópula T-student com marginais hiperbólicas generalizadas foi a que mais se adequou aos dados analisados. Em seguida, através de uma simulação de Monte Carlo, foram gerados cenários para o cálculo do valor da opção, que pode ser comparado com o valor obtido pelo modelo de Black and Sholes (1973).

Os autores ressaltam a flexibilidade nos processos de modelagem e estimação proporcionada pela teoria de cópulas, e concluem que o modelo desenvolvido via cópula obteve melhor desempenho ao representar o comportamento dos ativos estudados. Sua maior limitação foi o tempo excessivo de execução, causado pelo grande número de cenários utilizados durante a simulação de Monte Carlo.

#### ➤ Risco de Crédito

Clemente e Romano (2004) desenvolveram um modelo para mensuração e otimização do risco de crédito de uma carteira de empréstimos. Para modelar os eventos de *default* conjuntos, os autores recorreram à teoria de cópulas, devido à característica de não-normalidade dos retornos dos ativos de crédito, que possuem assimetria e leptocurtose. Através da simulação de Monte Carlo e das cópulas Normal, Clayton, T-Student e T-Student agrupada (extensão da cópula anterior), os autores reproduziram a estrutura de dependência dos eventos de *default* e mensuraram as seguintes medidas de risco de crédito: Perda Esperada, Perda Máxima, *Value at Risk* de Crédito e *Expected Shortfall*. A cópula mais adequada à carteira foi a T-Student agrupada, que apresentou melhor desempenho em captar a dependência nas caudas das distribuições dos retornos dos ativos de crédito.

➤ Gestão de Riscos Integrada

Rosenberg e Schuermann (2004) elaboraram um modelo para a mensuração do risco integrado aplicável a bancos internacionais de grande porte. Os autores estimaram as medidas de risco VaR e ES com o auxílio de cópulas elípticas, considerando os riscos de mercado, crédito e operacional.

Os autores concluem que a simples adição de diferentes tipos de risco superestima o risco total da instituição em mais de 40%. Dentre as abordagens que consideram o fator diversificação, a de normalidade conjunta dos riscos também não se mostrou adequada, pois subestimou o risco total na mesma proporção. A abordagem mais flexível permitida pela teoria de cópulas apresentou resultados melhores do que as duas anteriores, embora tenha sido de difícil implementação. Segundo os autores, a teoria de cópulas permitiu a adoção de distribuições marginais realistas, capazes de representar características dos fatores de risco como leptocurtose e assimetria.

Para outras aplicações da teoria de cópulas em finanças e gestão de riscos, ver Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004), Cherubini e Luciano (2001), Hotta, Lucas e Palaro (2008) e Hull e White (2004).

## 4 METODOLOGIA

O teste empírico deste trabalho foi dividido em duas etapas. A primeira consiste em selecionar as distribuições marginais e funções de cópula mais adequadas para a modelagem das séries financeiras. A segunda etapa consiste em estimar diariamente os parâmetros dos modelos selecionados na primeira etapa, utilizá-los para o cálculo do VaR, e, através de *backtesting*, comparar seu desempenho com o obtido pelas metodologias delta-normal e de simulação histórica.

Os testes estatísticos, estimação de parâmetros e demais cálculos e procedimentos necessários para a modelagem e cálculo de VaR via função de cópula serão realizados através do software R, que pode ser obtido gratuitamente através do website [www.r-project.org](http://www.r-project.org). Os modelos delta-normal e de simulação histórica serão desenvolvidos no software MS Excel, que também será utilizado para a realização de *backtesting*, desenvolvimento de gráficos e tabelas.

### 4.1 Descrição da Amostra

As séries financeiras analisadas neste trabalho serão os retornos diários dos fatores de risco cotação de fechamento do Índice Bovespa (Ibovespa) e cotação de fechamento do Dólar comercial de venda a vista (Ptax 0800). Suas cotações diárias serão extraídas do banco de dados BDS, e o cálculo de seus retornos será feito conforme abaixo:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (4-1)$$

em que  $P_t$  e  $P_{t-1}$  são as cotações em  $t$  e  $t-1$ .

O período de análise será de 6 anos e contemplará dados que vão de julho de 2003 até julho de 2009, totalizando um número de 1500 observações de retorno diário para cada série financeira. Com esse tamanho de amostra, será possível estimar os modelos e calcular o VaR



para um período de tempo suficiente para que os resultados possam ser devidamente comparados.

## **4.2 Seleção do Modelo de Cópula**

O objetivo desta seleção será encontrar os modelos de cópula que melhor representam os retornos conjuntos dos fatores de risco. Todos os testes serão realizados utilizando a amostra completa, ou seja, 1500 observações para cada fator de risco.

### **4.2.1 Distribuições Marginais**

O primeiro passo será a escolha das distribuições marginais. Inicialmente, a distribuição normal será testada. Serão efetuados os seguintes testes:

- Análise das estatísticas descritivas, como curtose e assimetria;
- Teste Jarque-Bera: utilizado para testar a hipótese nula de que os dados empíricos seguem uma distribuição normal. Para tanto, comparam-se os valores de curtose e assimetria dos dados com os esperados para uma distribuição normal (3 e 0, respectivamente);
- Teste Kolmogorov-Smirnov (KS): verifica se a amostra segue a distribuição analisada através de teste de hipótese. A estatística calculada representa a distância entre a distribuição empírica (amostra) e a distribuição de probabilidade analisada;
- Teste Shapiro-Wilk: considerado uma evolução do teste KS, esse teste é específico para avaliar se dados empíricos seguem uma distribuição normal;
- Análise gráfica: comparação da densidade de probabilidade dos dados empíricos com a obtida pela distribuição normal.

Como alternativa à distribuição normal, serão testadas três distribuições pertencentes à classe das hiperbólicas generalizadas: Hiperbólica (HIP), Hiperbólica Generalizada (HG) e Normal Inversa Gaussiana (NIG). Segundo Teixeira (2006), as distribuições hiperbólicas se tornaram populares para a modelagem de retornos de ativos financeiros devido à flexibilidade de seus

parâmetros, que se adequam a conjuntos de dados e contextos variados. Assis e Laurini (2008) citam alguns autores que aplicaram essas distribuições na modelagem de ativos financeiros, como Eberlein e Keller (1995), Rydberg (1997) e Eberlein, Keller, e Prause (1998).

Essa classe de distribuições é caracterizada por possuir 5 parâmetros que definem suas principais características como assimetria, curtose, escala, localização e formato. O parâmetro associado à curtose ( $\lambda$ ) é o responsável pela diferenciação entre as três variações a serem testadas neste trabalho:

- HIP:  $\lambda = 1$ ;
- NIG:  $\lambda = -0,5$ ;
- HG: o parâmetro  $\lambda$  é deixado livre.

As distribuições serão estimadas pelo método da máxima verossimilhança e serão comparadas com a distribuição normal, e também entre si, da seguinte maneira:

- Valor da função de máxima verossimilhança;
- Teste de Kolmogorov-Smirnov;
- Análise gráfica da densidade de probabilidade.

Maiores detalhes sobre a classe de distribuições hiperbólicas generalizadas podem ser encontrados em Teixeira (2006), como gráficos ilustrando a contribuição de cada parâmetro para a formação da estrutura da distribuição, além das fórmulas de densidade de probabilidade.

#### **4.2.2 Função de Cópula**

Após a seleção das distribuições marginais, o próximo passo será a escolha das funções de cópula. Cinco famílias de cópula serão testadas: três arquimedianas (Clayton, Gumbel e Frank) e duas elípticas (Normal e T-student). A estimação dos parâmetros será feita através do método de máxima verossimilhança e serão escolhidas as cópulas que apresentarem um bom

ajustamento aos dados, a ser avaliado pelo valor da função de máxima verossimilhança e análise gráfica. Para outros métodos de avaliação do ajustamento de cópulas aos dados de uma amostra, ver Fermanian (2003).

Ainda com relação à estimação dos parâmetros, o método de máxima verossimilhança pode ser aplicado em um ou dois estágios. Autores como Assis e Laurine (2008) e Pereira (2006) desenvolveram modelos baseados na teoria de cópulas e os aplicaram no mercado brasileiro. Ambos encontraram dificuldades de convergência ao utilizarem o método de um estágio (ML), e acabaram optando por uma estimação em dois estágios (IFM).

Inicialmente, neste trabalho, será feita uma tentativa de estimação em um estágio, e, em caso de dificuldade de convergência, será utilizado o método de dois estágios. Ambos serão descritos a seguir.

➤ Método ML:

O método ML faz a estimação em um estágio via maximização da função de verossimilhança (ver item 3.5.1). Isso significa que os parâmetros da cópula serão estimados conjuntamente com os parâmetros das marginais.

Esse método exige a adoção de parâmetros iniciais para que a otimização possa ser realizada. Para as marginais, serão adotados os parâmetros estimados durante a seleção descrita no item 4.2.1. Para as cópulas arquimedianas, os parâmetros iniciais serão obtidos através de sua relação com a medida de dependência Tau de Kendall (tabela 3.2). Para as cópulas elípticas, será adotado o valor do coeficiente de correlação linear.

➤ Método IFM:

Caso o método ML não convirja, a estimação será feita em dois estágios, através do método IFM. O primeiro estágio, que consiste na estimação das marginais, não precisará ser realizado, visto que seus parâmetros já terão sido estimados durante a escolha das marginais. Portanto, bastará estimar os parâmetros da cópula, o que será feito através do método da máxima verossimilhança, de acordo com a equação 3-22. Os parâmetros iniciais das cópulas serão obtidos de forma equivalente à descrita para o método ML.

### 4.3 Cálculo do VaR

Este item descreverá os procedimentos metodológicos adotados para o cálculo do VaR, para os modelos de cópula, delta-normal e de simulação histórica, assim como especificará os critérios de comparação entre eles.

A primeira definição será com relação à periodicidade de atualização dos parâmetros dos modelos. Como o VaR será calculado diariamente, optou-se por efetuar novas estimações dos parâmetros com a mesma frequência. Por um lado, isso aumentará o tempo de processamento, entretanto, o esforço será recompensado pela maior precisão dos resultados.

Outra definição diz respeito ao período de cálculo do VaR. A amostra de 1500 observações foi dividida em dois subperíodos. O número de observações para a estimação inicial dos parâmetros variará de acordo com o modelo, mas terá um limite máximo de 500 retornos diários. Dessa forma, as primeiras 500 observações serão alocadas para esse propósito. Consequentemente, o VaR será calculado diariamente para os últimos 1000 registros da amostra. Vale também ressaltar que, como os modelos serão estimados diariamente, a janela de estimação será móvel, onde a cada dia uma nova observação será acrescentada, e a observação mais antiga será excluída.

Para se obter uma maior generalização dos resultados, o VaR será calculado para dois níveis de significância - 95% e 99%. Eles foram escolhidos por serem usualmente utilizados no cálculo de VaR, como, por exemplo, nos trabalhos de Martellini e Meyfredi (2007), Sain (2001) e Caselato (2009).

Com o mesmo objetivo, serão testadas, ao todo, três carteiras diferentes, cujas composições foram apresentadas na tabela 4.1. As composições serão mantidas constantes durante todo o período de cálculo de VaR, como se a cada dia a carteira fosse rebalanceada para voltar a sua composição inicial, de forma a compensar eventuais ganhos ou perdas ocorridos em cada dia.

**Tabela 4.1 – Composição das carteiras**

	Composição		
	Ptax	Ibovespa	Total
Carteira 1	50%	50%	100%
Carteira 2	25%	75%	100%
Carteira 3	75%	25%	100%

Fonte: Elaboração própria

#### 4.3.1 Modelo de Cópula

As funções de cópula e as distribuições marginais serão definidas durante a realização dos testes iniciais, conforme descrito no item 4.2. Cada configuração escolhida será testada com três janelas de estimação diferentes, de 500, 250 e 100 observações. Para cada variação do modelo, o cálculo será composto pelas etapas descritas abaixo. Vale ressaltar que o procedimento a seguir deverá ser repetido para cada um dos 1000 dias que compõem o período de cálculo do VaR.

Para o caso de estimação em um estágio (ML), o seguinte procedimento será executado:

1. Seleção da amostra de acordo com a janela móvel de estimação;
2. Estimação, conjuntamente, dos parâmetros das distribuições marginais e da cópula, através do método da máxima verossimilhança (ML);
3. De acordo com os parâmetros estimados, geração de 1000 observações de retornos iid (independentes e identicamente distribuídos) para cada fator de risco;
4. Cálculo do retorno da carteira para cada uma das 1000 observações, conforme ponderação apresentada na tabela 4.1;
5. Ordenação dos retornos de forma crescente e seleção dos que correspondem aos percentis 5% e 1%. Esses serão os valores de VaR 95% e VaR 99%.

Para o caso de estimação em dois estágios (IFM), substituem-se as etapas 2 e 3 citadas acima por:

- a) Estimação dos parâmetros das distribuições marginais pelo método da máxima verossimilhança (primeiro estágio da estimação IFM);

- b) Transformação dos retornos da amostra em probabilidades, através da função distribuição acumulada gerada a partir dos parâmetros das marginais;
- c) A partir das probabilidades calculadas, estimação do parâmetro da função de cópula pelo método da máxima verossimilhança (segundo estágio da estimação IFM);
- d) Através do parâmetro da cópula estimado, geração de 1000 observações de probabilidades iid (independentes e identicamente distribuídas) para cada fator de risco;
- e) Transformação das probabilidades em retornos, através da função distribuição acumulada inversa, gerada a partir dos parâmetros das marginais.

#### **4.3.2 Modelo de Simulação Histórica**

O cálculo do VaR será baseado nas movimentações históricas dos fatores de risco que compõem a carteira. Ao todo, serão testadas três variações desse modelo, cada uma considerando um número diferente de observações passadas (ou cenários) para a formação da janela de estimação. Essas foram as variações escolhidas, nas quais as observações serão contadas retroativamente a partir da data em que se está calculando o VaR:

- Histórico 500: considera as últimas 500 observações;
- Histórico 250: considera as últimas 250 observações;
- Histórico 100: considera as últimas 100 observações.

O procedimento de cálculo para cada modelo será composto pelas seguintes etapas:

- Cálculo do retorno da carteira para cada cenário, com base na ponderação da carteira e nos retornos históricos observados para cada fator de risco;
- Ordenação dos retornos de forma crescente;
- O VaR será igual ao retorno que corresponde ao percentil definido pelo nível de confiança em questão (95% ou 99%).

### 4.3.3 Modelo Delta-normal

O VaR delta-normal será calculado pela multiplicação do desvio-padrão (volatilidade) da carteira pelo fator de ajuste associado ao nível de confiança em questão. A diferença entre os três modelos delta-normais aplicados neste trabalho será a forma de estimação de volatilidade:

- DN EWMA 0.94: utilizará o modelo EWMA para a estimação da volatilidade, assumindo fator de decaimento 0,94, conforme proposto pela metodologia RiskMetrics. O cálculo será efetuado conforme detalhado no item 2.5.2;
- DN EWMA 0.97: equivalente ao anterior, mas com fator de decaimento 0,97, dando, dessa forma, maior peso às observações mais antigas;
- DN Móvel 20: utilizará o modelo de Média Móvel para a estimação da volatilidade, conforme descrito no item 2.5.1. Para tanto, serão considerados os 20 retornos mais recentes dos fatores de risco, contados retroativamente a partir da data de cálculo do VaR.

### 4.3.4 Comparação dos Modelos

A validação dos modelos de VaR será feita através de *backtesting*, conforme sugerido por Jorion (2007). Modelos com um bom desempenho são aqueles que apresentam um percentual de excessos empírico condizente com o nível de confiança escolhido. Sendo  $N$  o número de observações da amostra, e  $R_i$  o retorno empírico da carteira referente à observação  $i$ , pode-se calcular o número de excessos  $E$  da seguinte maneira:

$$E = \sum_{i=1}^N \begin{cases} 1, & R_i < VaR_i \\ 0, & R_i \geq VaR_i \end{cases} \quad (4-2)$$

Onde  $VaR_i$  será o pior retorno esperado associado à observação  $i$ , calculado com base nas informações disponíveis até o dia anterior. Assim, sendo  $c$  o nível de confiança escolhido, espera-se que o percentual de excessos  $(E/N)$  tenha o seguinte comportamento:

$$\frac{E}{N} \cong (1 - c) \quad (4-3)$$

Com o intuito de obter uma maior generalização dos resultados, optou-se por comparar os modelos de três maneiras distintas. Considerando que o VaR será calculado para um período total de 1000 dias, serão feitas as seguintes avaliações:

- Percentual de excessos encontrado em uma janela móvel de 250 dias. Ao todo, o percentual de excessos será calculado para 751 períodos distintos;
- Percentual de excessos encontrado em uma janela móvel de 500 dias. Ao todo, o percentual de excessos será calculado para 501 períodos distintos;
- Percentual de excessos encontrado no período total, de 1000 dias.

Para a avaliação dos resultados alcançados nas três janelas especificadas acima, o percentual de excessos empírico será comparado com intervalos de confiança para o percentual de excessos esperado, calculado com base no tamanho da janela móvel. Essa prática costuma ser utilizada para a avaliação de modelos de VaR, como, por exemplo, nos trabalhos de Machry (2003) e Alarcon (2005).

Supondo que  $p$  seja uma proporção real associada a uma população, de acordo com o teorema central do limite, pode-se dizer que a distribuição da proporção amostral  $\hat{p}$ , encontrada em uma amostra de  $n$  observações, é aproximadamente normalmente distribuída com média  $p$  e desvio padrão  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ . Em geral, como não se sabe o valor exato da proporção  $p$ , usa-se o próprio valor da estimativa  $\hat{p}$  para o cálculo do desvio-padrão.

Dessa forma, definindo  $z$  como o número de desvios-padrão a ser utilizado, de acordo com o nível de confiança escolhido, Stevenson (1981) define o erro da estimativa conforme abaixo:

$$e = z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \quad (4-4)$$



Porém, como a proporção real é conhecida neste trabalho (5% de excessos para o VaR 95% e 1% para o VaR 99%), ela será utilizada para o cálculo do erro de estimativa. O intervalo de confiança para a proporção de excessos esperada será, então, calculado da seguinte forma:

$$IC = p \pm z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (4-5)$$

Os intervalos de confiança para as três janelas de comparação foram apresentados na tabela 4.2. Eles foram calculados de acordo com a equação 4-5, utilizando o nível de significância de 5% para a definição do  $z$ , tanto para o VaR 95% quanto para o VaR 99%.

**Tabela 4.2 – Intervalos de confiança para percentual de excessos esperado**

Tamanho da Janela de Comparação	VaR 95%		VaR 99%	
	Limite Inf.	Limite Sup.	Limite Inf.	Limite Sup.
250	2,30%	7,70%	0,00%	2,23%
500	3,09%	6,91%	0,13%	1,87%
1000	3,65%	6,35%	0,38%	1,62%

Fonte: Elaboração própria

Assim sendo, quando o percentual de excessos empírico (obtido por cada modelo) estiver dentro dos limites apresentados na tabela 4.2, pode-se aceitar a hipótese nula  $H_0$  de que o percentual de excessos previsto pelo modelo é estatisticamente equivalente ao encontrado empiricamente.

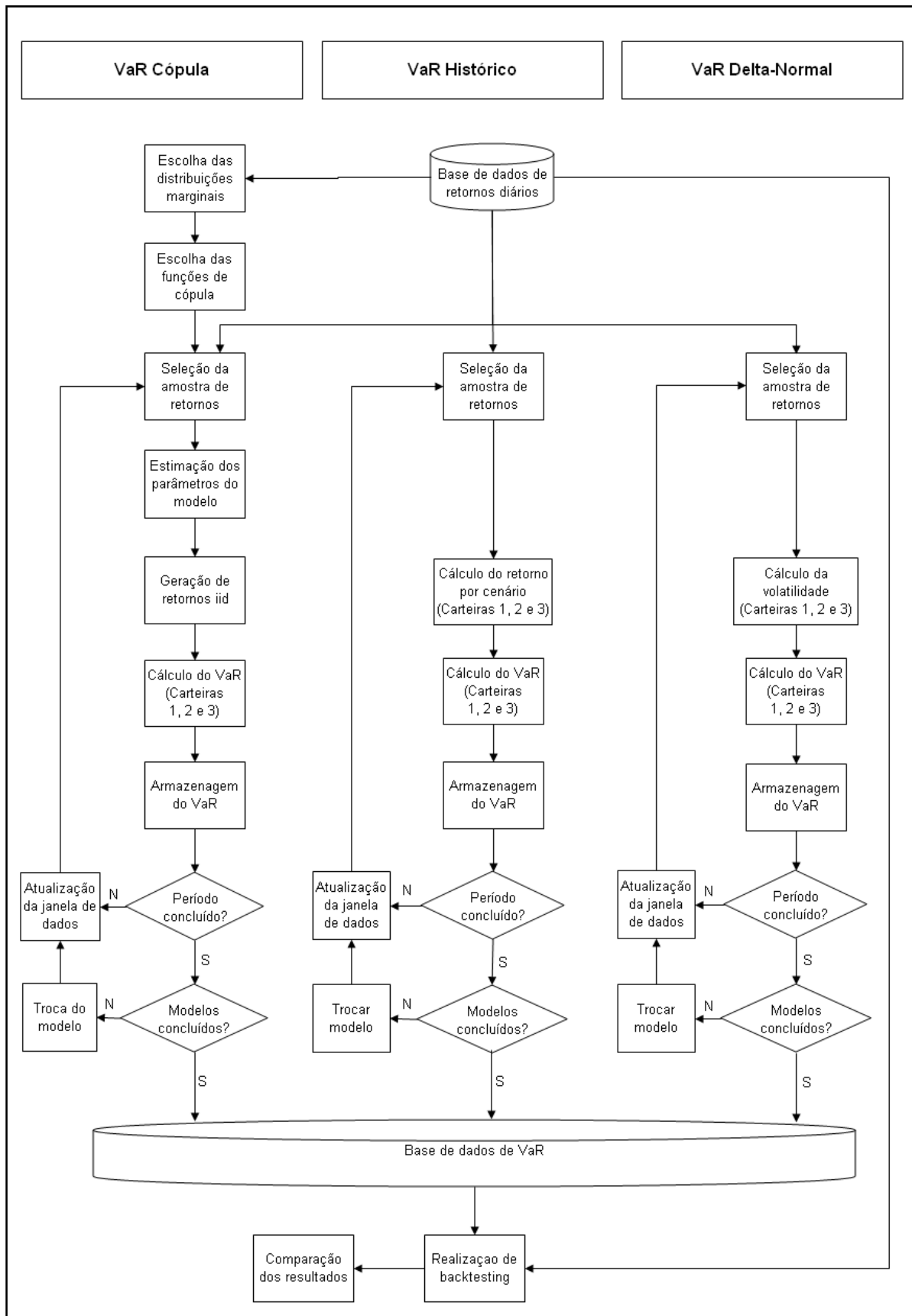
Para as janelas móveis de comparação de 250 e 500 dias, o modelo com melhor desempenho será aquele com menor percentual de ocorrências fora da zona de aceitação de  $H_0$ , ao longo de 751 períodos distintos para a janela de 250 dias, e 501 períodos para a janela de 500 dias. Para a janela de 1000 dias, o melhor modelo será aquele que apresentar o percentual de excessos mais próximo do percentual alvo (1% ou 5%).

Finalmente, os critérios de seleção para a escolha dos melhores modelos de VaR 95% e VaR 99% para cada carteira serão apresentados a seguir:

- Critério 1: Caso apenas um modelo apresente o melhor desempenho nas 3 janelas de comparação, ele será o escolhido. Se houver mais de um modelo nessa situação, todos que se encaixarem serão escolhidos;
- Critério 2: Caso apenas um modelo apresente o melhor desempenho em 2 janelas, ele será o escolhido. Se houver mais de um modelo nessa situação, será considerado superior o que apresentar melhor resultado na janela de 1000 dias. Caso o empate permaneça, o desempate será feito através da soma dos percentuais de ocorrências fora da zona de aceitação de  $H_0$  encontrados nas janelas de 250 e 500 dias, e será selecionado o modelo que apresentar a menor soma. Se houver mais de um modelo nessa situação, todos que se encaixarem serão escolhidos;
- Critério 3: Caso não existam modelos com melhor desempenho em mais de uma janela, a escolha será feita da mesma forma descrita no critério 2, inicialmente pelo desempenho na janela de 1000 dias, e, caso seja necessário, pela soma dos percentuais de ocorrências fora da zona de aceitação de  $H_0$  encontrados nas janelas de 250 e 500 dias.

Em seguida, os resultados alcançados em todas as carteiras serão consolidados de forma a se obter o melhor modelo de VaR 95% e Var 99%.

Este capítulo apresentou o procedimento metodológico a ser utilizado neste trabalho. A figura 4.1 ilustra de forma simplificada o fluxo de todo o processo.



**Figura 4.1 – Procedimento metodológico**

Fonte: Elaboração própria.

## **5 RESULTADOS**

Conforme informado no capítulo de metodologia, as séries financeiras analisadas foram os retornos diários dos fatores de risco Ptax e Ibovespa.

### **5.1 Seleção do Modelo de Cópula**

A primeira etapa da seleção do modelo de cópula será encontrar as distribuições marginais que melhor representam o comportamento dos retornos diários dos fatores de risco estudados. A segunda será escolher a função de cópula mais adequada para replicar a relação de dependência entre eles.

#### **5.1.1 Distribuições Marginais**

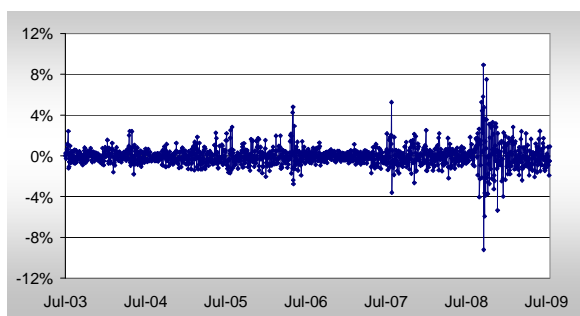
A tabela 5.1 mostra as estatísticas descritivas dos dois fatores de risco. Conforme esperado, os valores de curtose são superiores aos encontrados em uma distribuição normal, que possui curtose igual a 3. Isso indica que ambos possuem distribuições de probabilidade leptocúrticas, caracterizadas por serem mais altas (concentradas) do que o normal, e possuírem caudas mais pesadas, sendo comum a existência de valores que se afastam da média por vários desvios-padrão. Nota-se também a maior volatilidade (desvio-padrão) do Ibovespa em relação ao Ptax e a presença de assimetria positiva do Ptax e levemente negativa do Ibovespa.

**Tabela 5.1 – Estatísticas básicas**

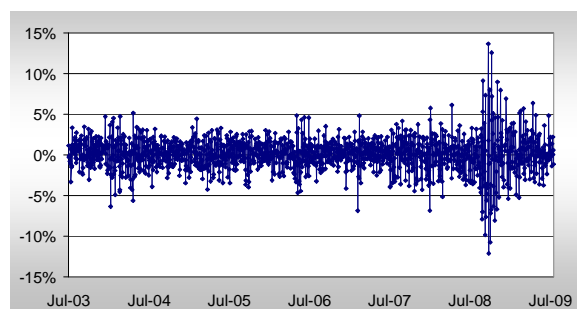
	PTAX	IBOVESPA
Média	-0,0303%	0,0937%
Desvio Padrão	1,0185%	2,0643%
Curtose	17,49	7,92
Assimetria	0,64	-0,07
Mínimo	-9,21%	-12,10%
Máximo	8,92%	13,68%
Intervalo	18,13%	25,78%
Contagem	1.500	1.500

Fonte: Elaboração própria.

Os gráficos 5.1 e 5.2 ilustram o comportamento dos retornos diários ao longo do período da amostra, de aproximadamente seis anos. O agrupamento da volatilidade pode ser mais bem observado para o Ptax, na figura 5.1. A volatilidade foi menor do que sua média no segundo semestre de 2006 e primeiro semestre de 2007, e maior no segundo semestre de 2008 e primeiro semestre de 2009. Para o Ibovespa, o agrupamento da volatilidade fica claro principalmente a partir do segundo semestre de 2008 (figura 5.2).

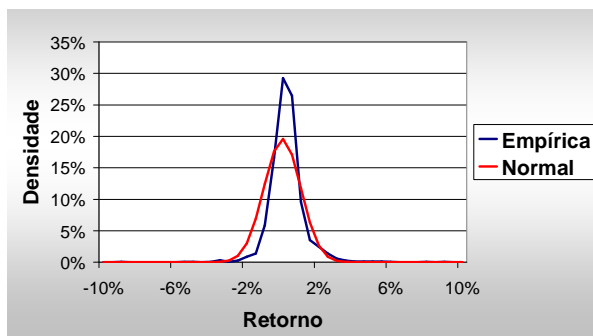
**Figura 5.1 – Ptax – Retorno diário**

Fonte: Elaboração própria.

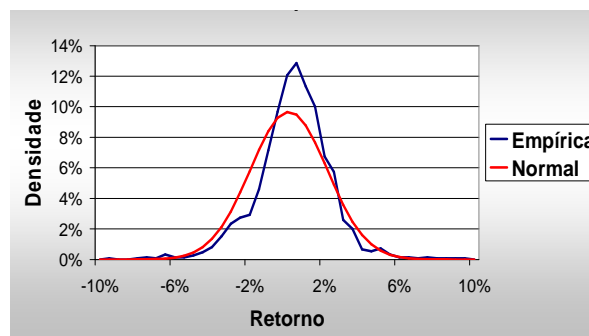
**Figura 5.2 – Ibovespa – Retorno diário**

Fonte: Elaboração própria.

Já o excesso de curtose, apresentado na tabela 5.1, pode ser constatado nas figuras 5.3 e 5.4, que comparam a densidade de probabilidade da distribuição empírica com a densidade da normal. Nelas, fica claro que a distribuição normal não é adequada para a modelagem dos retornos do Ibovespa e Ptax.



**Figura 5.3 – Ptax – Distribuição normal x empírica**  
Fonte: Elaboração própria.



**Figura 5.4 – Ibovespa – Distribuição normal x empírica**  
Fonte: Elaboração própria.

Outra forma de testar a normalidade dos retornos é através dos testes estatísticos apresentados na tabela 5.2. A hipótese nula de que os dados empíricos seguem uma distribuição normal pode ser rejeitada a 5% nos três testes aplicados, para ambos os fatores de risco.

**Tabela 5.2 – Testes de normalidade**

	PTAX			IBOVESPA		
	KS	Jarque Bera	Shapiro-Wilk	KS	Jarque Bera	Shapiro-Wilk
Estatística	0,1131	13.124,57	0,8577	0,0615	1.501,76	0,9480
P-Valor	< 2.2e-16	< 2.2e-16	< 2.2e-16	0,0028%	< 2.2e-16	< 2.2e-16
Ho	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita	Rejeita

Fonte: Elaboração própria

Nota: Ho – Dados empíricos seguem a distribuição normal

Como alternativa à utilização da distribuição normal para a modelagem dos fatores de risco, serão analisadas as distribuições Hiperbólica (HIP), Hiperbólica Generalizada (HG) e Normal Inversa Gaussiana (NIG). Seus parâmetros foram estimados através do método da máxima verossimilhança. A tabela 5.3 apresenta os valores estimados e também o valor da função de máxima verossimilhança em seu ponto ótimo (ou máximo). A distribuição HG foi a que obteve o melhor desempenho, segundo esse critério, para os dois fatores de risco.

**Tabela 5.3 – Estimação dos parâmetros das marginais**

	PTAX			IBOVESPA		
	HG	NIG	HIP	HG	NIG	HIP
alfa	22,40	66,86	159,78	20,75	46,29	77,35
beta	10,08	11,30	16,29	-5,31	-5,95	-6,60
delta	0,0087	0,0061	0,0012	0,0264	0,0189	0,0080
mu	-0,0013	-0,0014	-0,0016	0,0032	0,0034	0,0036
lambda	-1,2174	-	-	-1,5922	-	-
Valor Função	5.046,50	5.041,38	5.014,62	3.805,03	3.803,85	3.799,40

Fonte: Elaboração própria.

Outra forma de verificar a adequação das distribuições aos dados empíricos é através de testes estatísticos, como o de Kolmogorov-Smirnov. Para o Ptax, a hipótese nula pode ser rejeitada a 5% para a distribuição HIP, mas foi aceita para as outras duas, com um melhor desempenho da HG (maior p-valor). Para o Ibovespa, a hipótese nula foi aceita para as três distribuições, mas com um maior p-valor para a HG. Os resultados são apresentados na tabela 5.4.

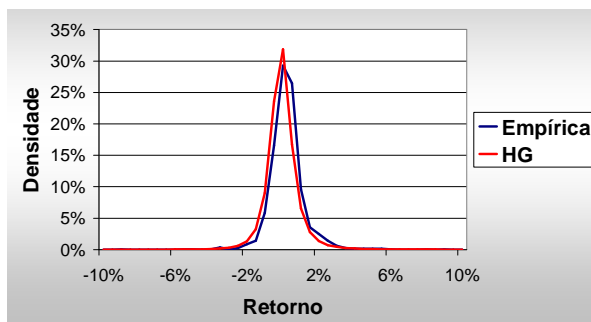
**Tabela 5.4 – Teste de Kolmogorov-Smirnov (KS)**

	PTAX			IBOVESPA		
	HG	NIG	HIP	HG	NIG	HIP
Estatística	0,0165	0,0215	0,0385	0,0131	0,0156	0,0194
P-Valor	81,57%	50,25%	2,49%	96,18%	86,70%	63,40%
Ho	Aceita	Aceita	Rejeita	Aceita	Aceita	Aceita

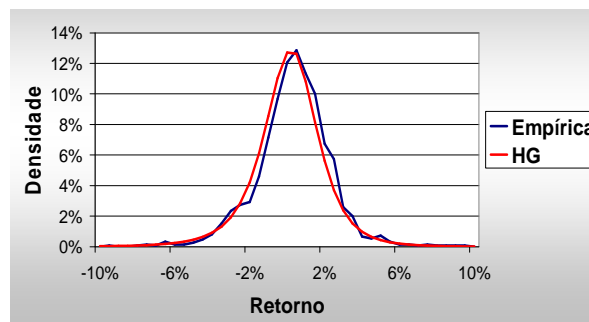
Fonte: Elaboração própria.

Nota: Ho – Dados empíricos seguem a distribuição em questão.

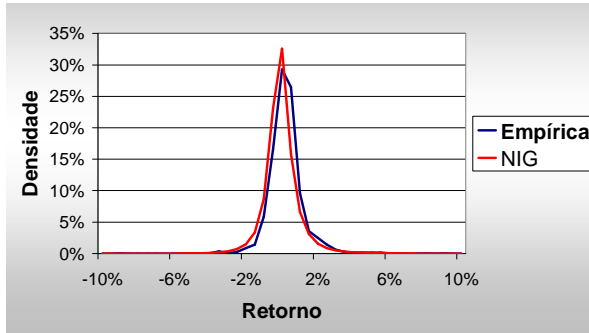
Para ratificar os resultados, foram construídos gráficos comparando a densidade de probabilidade dos dados empíricos com a densidade das três distribuições avaliadas. As figuras de 5.5 a 5.10 mostram que as três possuem um bom ajustamento aos dados, muito superior ao obtido pela distribuição normal.

**Figura 5.5 – Ptax – Distribuição HG x empírica**

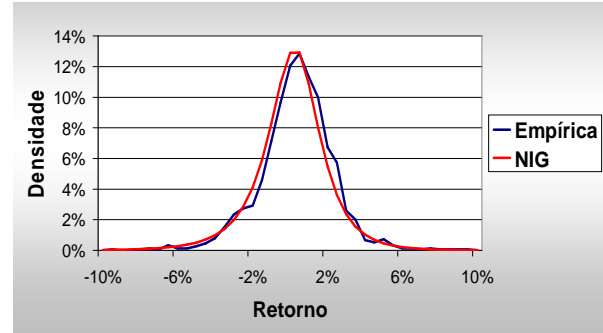
Fonte: Elaboração própria.

**Figura 5.6 – Ibovespa – Distribuição HG x empírica**

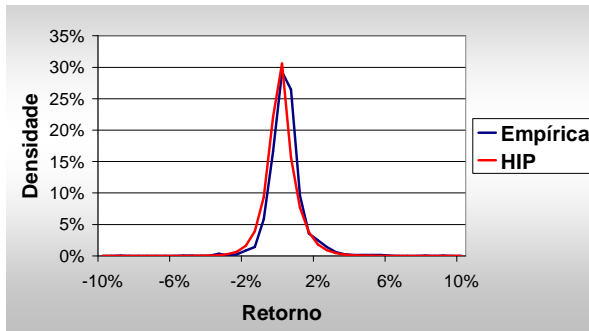
Fonte: Elaboração própria.



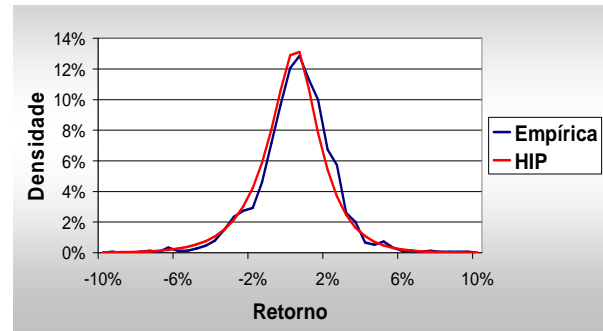
**Figura 5.7 – Ptax – Distribuição NIG x empírica**  
Fonte: Elaboração própria.



**Figura 5.8 – Ibovespa – Distribuição NIG x empírica**  
Fonte: Elaboração própria.

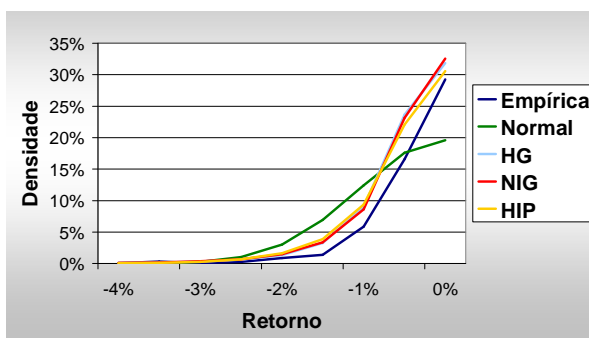


**Figura 5.9 – Ptax – Distribuição HIP x empírica**  
Fonte: Elaboração própria.

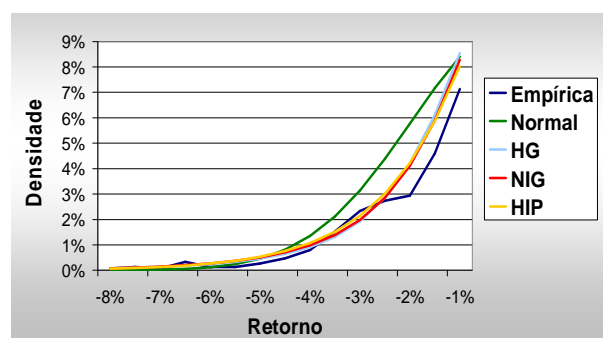


**Figura 5.10 – Ibovespa – Distribuição HIP x empírica**  
Fonte: Elaboração própria.

Finalmente, as figuras 5.11 e 5.12 comparam o desempenho das quatro distribuições analisadas ao se modelar a cauda esquerda da distribuição empírica, de grande interesse para o cálculo do VaR. Mais uma vez, nota-se o pior desempenho da distribuição normal. Portanto, sua utilização foi, definitivamente, descartada.



**Figura 5.11 – Ptax – Extremidades das distribuições**  
Fonte: Elaboração própria.



**Figura 5.12 – Ibovespa – Extremidades das distribuições**  
Fonte: Elaboração própria.

Embora a comparação gráfica entre as distribuições HG, NIG e HIP seja de difícil conclusão, optou-se por adotar a HG para a modelagem dos dois fatores de risco, devido a seu melhor desempenho nos outros dois critérios utilizados, o valor da função de verossimilhança e o teste de Kolmogorov-Smirnov.



### 5.1.2 Função de Cópula

Com as distribuições marginais selecionadas foi possível iniciar a estimação da função de cópula. Inicialmente, tentou-se a estimação em um estágio (ML), utilizando como parâmetros iniciais para as marginais HG os valores da tabela 5.3. Embora a convergência tenha sido obtida, o tempo de processamento foi extenso, o que inviabilizaria a utilização desse método para a realização dos testes deste trabalho, uma vez que os parâmetros precisariam ser estimados diariamente, resultando em 1000 estimações para cada modelo de cópula escolhido.

A alternativa foi a estimação em dois estágios (IFM), de rápida convergência e que, segundo Joe (1997), apresenta resultados semelhantes aos encontrados na estimação em um estágio. Autores como Assis e Laurini (2008) e Pereira (2006) encontraram a mesma dificuldade de convergência ao aplicarem o método ML no mercado brasileiro e também optaram pelo método IFM.

Os resultados do método IFM, apresentados na tabela 5.5, indicam a existência de correlação negativa entre os fatores de risco, o que está de acordo com a relação de dependência capturada pelas três medidas apresentadas na tabela 5.6. A cópula T-Student foi a que obteve o maior valor da função de máxima verossimilhança, indicando um melhor ajustamento aos dados, seguida pelas cópulas Normal e Frank. Já a cópula Clayton não foi capaz de capturar a relação de dependência entre os fatores de risco, apresentando um valor de função de máxima verossimilhança muito inferior às demais. A cópula Gumbel não convergiu, e foi excluída da análise.

**Tabela 5.5 – Estimação dos parâmetros das cópulas**

	Cópula				
	Normal	T-Student	Clayton	Frank	Gumbel
Parâmetro 1	-0,4229	-0,4312	-0,0984	-2,7961	-
Parâmetro 2	-	4,0911	-	-	-
Valor Função	147,77	193,57	30,76	139,67	-

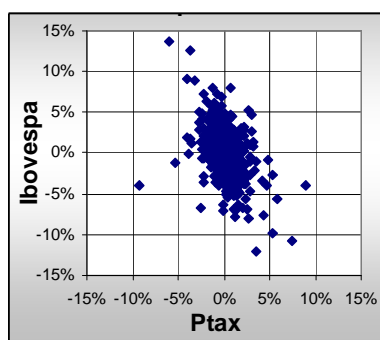
Fonte: Elaboração própria.

**Tabela 5.6 – Medidas de dependência**

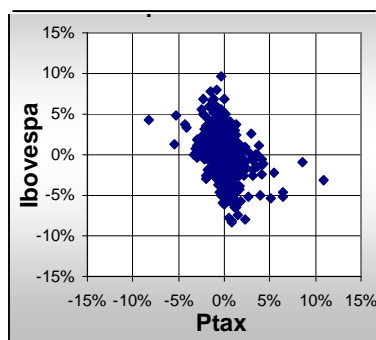
	Tau de Kendall	Rho de Spearman	Correlação Linear
Valor da Medida	-0,2820	-0,4137	-0,4355

Fonte: Elaboração própria.

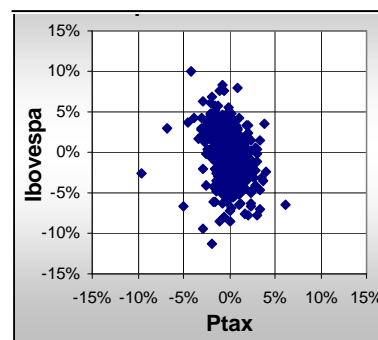
O próximo passo para a escolha da função de cópula é uma análise gráfica comparando os retornos empíricos aos obtidos por simulações feitas a partir das cópulas, fazendo uso dos parâmetros estimados (tabelas 5.3 para as marginais e 5.5 para as cópulas). Os resultados são apresentados nas figuras de 5.13 a 5.17, e mostram que as cópulas T-student, Normal e Frank geraram gráficos semelhantes ao empírico. Já a cópula Clayton não obteve um bom desempenho, o que ratificou a evidência levantada pela análise do valor da função de máxima verossimilhança.



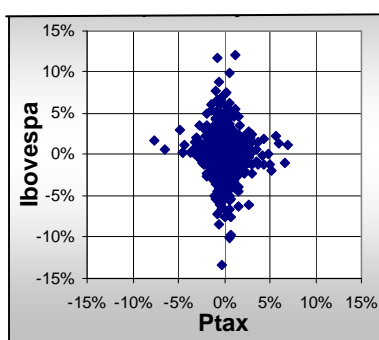
**Figura 5.13 – Retornos empíricos**  
Fonte: Elaboração própria.



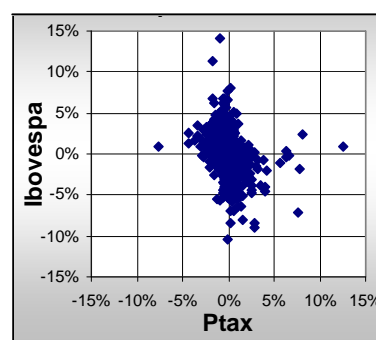
**Figura 5.14 – Retornos cópula Normal**  
Fonte: Elaboração própria.



**Figura 5.15 – Retornos cópula T-Student**  
Fonte: Elaboração própria.



**Figura 5.16 – Retornos cópula Clayton**  
Fonte: Elaboração própria.



**Figura 5.17 – Retornos cópula Frank**  
Fonte: Elaboração própria.

Finalmente, optou-se por excluir a cópula Clayton da análise, e utilizar as outras três cópulas para a mensuração do VaR (Normal, Frank e T-student), todas utilizando a distribuição Hiperbólica Generalizada para as marginais dos dois fatores de risco, e com três variações de

janela de estimação (500, 250 e 100 dias úteis), totalizando nove modelos de cópula a serem testados.

## 5.2 Cálculo do VaR e Comparação dos Modelos

O cálculo do VaR foi realizado conforme detalhado na capítulo 4 deste trabalho (Metodologia). Os modelos delta-normais e de simulação histórica foram desenvolvidos no software MS Excel, e não apresentaram qualquer tipo de problema de convergência. Seus resultados serão apresentados nos próximos itens, de acordo com a composição das carteiras testadas.

Os modelos de cópula foram desenvolvidos no software R. Os modelos estimados com janelas de 500 e 250 observações não apresentaram problemas de convergência, e seus resultados também serão apresentados a seguir. Os modelos que utilizaram janelas de estimação de 100 dias não convergiram em parte do período total avaliado, composto por 1000 dias de cálculo de VaR. As inconsistências ocorreram durante a estimação das distribuições marginais, do tipo hiperbólica generalizada. Embora tenha sido possível estimar as funções de cópula, optou-se por excluir esses modelos das análises posteriores.

Após realização de *backtesting*, todos os modelos foram avaliados conforme detalhado no item 4.3.4. Para facilitar a análise dos resultados, o modelo com melhor desempenho em cada janela de comparação para cada cálculo de VaR (95% e 99%) teve sua estatística sublinhada. Em caso de empate, todos os que obtiveram o melhor resultado foram sublinhados.

A aceitação ou rejeição da hipótese nula de que o percentual de excessos previsto pelo modelo é estatisticamente equivalente ao encontrado empiricamente foi feita com base nos intervalos de confiança para proporções, apresentados na tabela 4.2.

### 5.2.1 Carteira 1

A Carteira 1 foi composta de forma a apresentar exposições idênticas aos dois fatores de risco (50% Ptax e 50% Ibovespa). Os resultados foram apresentados na tabela 5.7.

O modelo com melhor desempenho de cálculo do VaR 95% foi o delta-normal com fator de decaimento 0,94 (metodologia Riskmetrics). Além de ter sido o modelo com o menor número de ocorrências fora da zona de aceitação de  $H_0$  para as janelas móveis de 250 e 500 dias, foi também o mais bem sucedido na janela de 1000 dias, obtendo o percentual de excessos mais próximo do esperado, de 5%. Além disso, foi possível aceitar  $H_0$  para este modelo na janela de 1000 dias.

O modelo cópula Frank com janela de estimação de 250 dias foi o que obteve o melhor desempenho para o VaR 99%. A hipótese nula foi aceita em 100% dos casos para as janelas móveis de comparação de 250 e 500 dias. Além disso, foi o que obteve o melhor desempenho no período total de 1000 dias, com um percentual de excessos igual a 1,1%, ficando muito próximo do percentual alvo de 1%.

Nota-se também uma clara superioridade dos modelos de cópula com janela de estimação de 250 dias em relação aos de 500 dias, tanto para o VaR de 95% quanto para o de 99%. Outro fato marcante foi o melhor desempenho no cálculo do VaR 99% obtido pelos modelos de cópula ( $H_0$  aceito em cinco dos seis modelos, para o período de 1000 dias) em relação aos delta-normais e de simulação histórica ( $H_0$  rejeitado para os 6 modelos).

**Tabela 5.7 – Comparação dos modelos de VaR – Carteira 1**

	VaR 95%				VaR 99%			
	% de ocorrências fora da zona de aceitação de Ho *		Período total (1000du)		% de ocorrências fora da zona de aceitação de Ho *		Período total (1000du)	
	751 janelas móveis de 250du	501 janelas móveis de 500du	% Excessos	Ho *	751 janelas móveis de 250du	501 janelas móveis de 500du	% Excessos	Ho *
DN EWMA 0.94	<b>13,7%</b>	<b>0,0%</b>	<b>5,20%</b>	Aceita	25,4%	56,3%	1,70%	Rejeita
DN EWMA 0.97	16,5%	20,4%	5,30%	Aceita	58,3%	97,0%	1,90%	Rejeita
DN Móvel 20	21,3%	15,6%	5,60%	Aceita	24,2%	74,7%	1,80%	Rejeita
Histórico 500	51,1%	50,5%	7,10%	Rejeita	29,6%	43,3%	2,20%	Rejeita
Histórico 250	52,2%	50,3%	6,20%	Aceita	32,2%	56,1%	2,00%	Rejeita
Histórico 100	35,7%	70,1%	6,50%	Rejeita	70,2%	89,2%	2,10%	Rejeita
Cóp Normal 500	54,7%	54,9%	6,60%	Rejeita	29,3%	40,7%	1,50%	Aceita
Cóp Normal 250	48,2%	44,3%	6,00%	Aceita	14,5%	10,6%	1,40%	Aceita
Cóp Frank 500	39,9%	45,3%	6,30%	Aceita	29,3%	40,7%	1,50%	Aceita
Cóp Frank 250	39,4%	43,3%	5,50%	Aceita	<b>0,0%</b>	<b>0,0%</b>	<b>1,10%</b>	Aceita
Cóp T-Student 500	50,9%	51,7%	6,90%	Rejeita	29,3%	43,3%	1,80%	Rejeita
Cóp T-Student 250	36,0%	42,3%	5,70%	Aceita	28,9%	40,7%	1,60%	Aceita

Fonte: Elaboração própria.

Nota: \* Ho: percentual de excessos previsto pelo modelo é estatisticamente equivalente ao encontrado empiricamente

Duas características dos mercados de câmbio e acionário ajudam a explicar os resultados encontrados para a Carteira 1: as distribuições dos retornos de seus fatores de risco apresentam caudas pesadas, gerando maior probabilidade de eventos extremos; a volatilidade dos retornos não é constante no tempo, fazendo com que existam dias de alta volatilidade durante longos períodos, seguidos por períodos de volatilidade mais baixa.

Conforme esperado, os modelos de cópulas apresentaram um melhor desempenho na modelagem de eventos extremos (VaR 99%), uma vez que utilizaram a distribuição hiperbólica generalizada para representar o comportamento das marginais. Embora esse tipo de distribuição seja superior à normal ao longo de toda a distribuição, conforme constatado nas figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6, a diferença de desempenho entre elas se torna ainda mais marcante para eventos extremos, que se distanciam da média por muitos desvios-padrão.

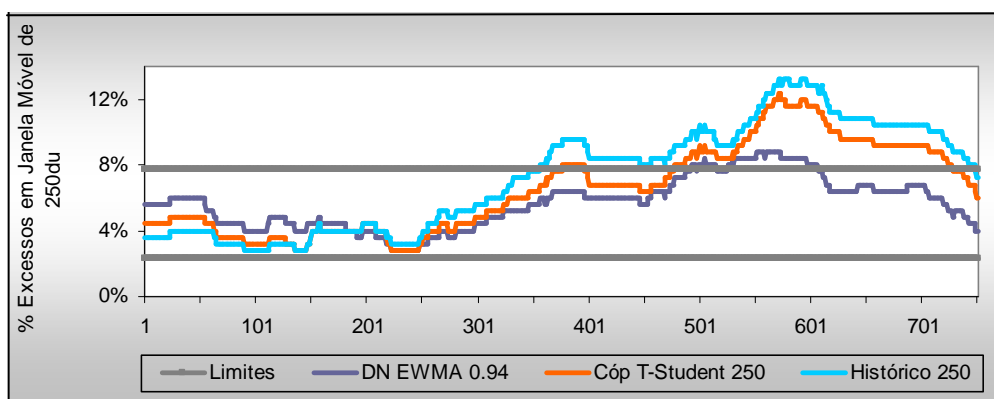
Ainda sobre o VaR 99%, o fenômeno do agrupamento da volatilidade no tempo não foi forte o suficiente a ponto de os modelos delta-normais EWMA superarem os de cópula, apesar de o EWMA ser próprio para capturar mudanças repentinas no nível de volatilidade. Por outro lado, esse fenômeno foi decisivo para que os modelos de cópula com janela de estimação

mais curta (250 dias) fossem superiores em relação aos de janela mais longa (500 dias), já que os primeiros dão um peso maior para as observações mais recentes.

Os modelos delta-normais foram superiores no cálculo do VaR 95%. Isso se deve ao fato de o agrupamento da volatilidade no tempo ter interferido de forma semelhante nos dois cálculos de VaR (95% e 99%), enquanto o desempenho da distribuição normal foi menos inferior em relação à hiperbólica generalizada no cálculo do VaR 95%, quando comparado com o VaR 99%.

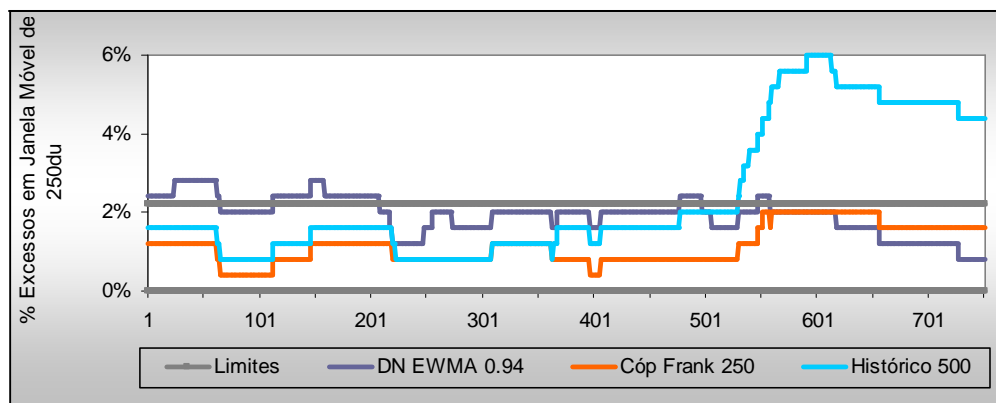
O fraco desempenho dos modelos históricos para o VaR 95% e 99% se deve, principalmente, à premissa de volatilidade constante dos retornos, e à demora para incorporar as quebras estruturais das séries. Isso fica claro nos gráficos apresentados nas figuras 5.18 e 5.19, que mostram o melhor modelo de cada categoria (cópula, delta-normal e simulação histórica), selecionados com base nas três janelas de comparação. Por simplicidade de exposição, apenas o gráfico da janela de 250 dias foi apresentado, pois contém o maior número de períodos distintos analisados (751 ao todo).

Através da figura 5.18, foi possível ratificar a superioridade do modelo delta-normal para o VaR 95%. Já a figura 5.19 permitiu a confirmação do melhor desempenho da cópula no caso do VaR 99%, sendo o único modelo dentro do intervalo de confiança de aceitação de  $H_0$  em 100% das 751 verificações.



**Figura 5.18 – Comparação dos modelos de VaR 95% - Carteira 1**

Fonte: Elaboração própria.



**Figura 5.19 – Comparação dos modelos de VaR 99% - Carteira 1**

Fonte: Elaboração própria.

## 5.2.2 Carteira 2

A Carteira 2 foi composta de forma a apresentar uma maior exposição ao fator de risco Ibovespa (25% Ptax e 75% Ibovespa). A tabela 5.8 mostra que o modelo delta-normal com fator de decaimento 0,97 obteve o melhor desempenho para o VaR 95%, apresentando o melhor resultado em duas das três janelas de comparação. Para o VaR 99%, mais uma vez o modelo selecionado foi a Cópula Frank 250, com melhor desempenho nas três janelas.

**Tabela 5.8 – Comparação dos modelos de VaR – Carteira 2**

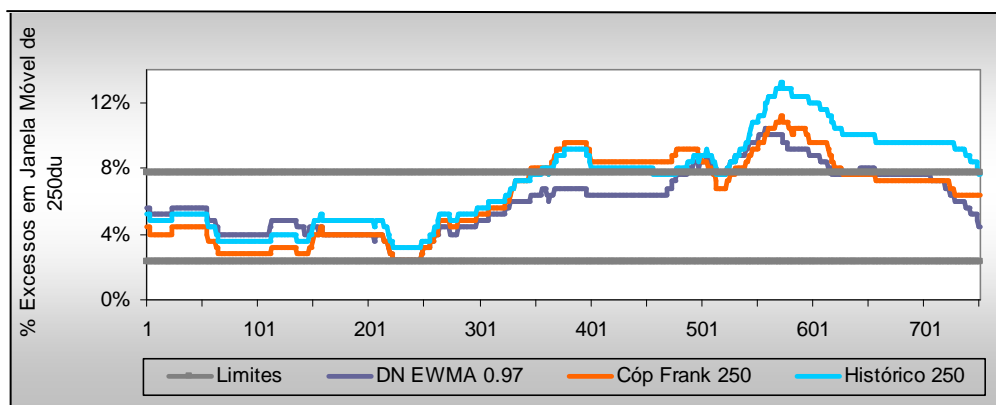
	VaR 95%				VaR 99%			
	% de ocorrências fora da zona de aceitação de Ho *		Período total (1000du)		% de ocorrências fora da zona de aceitação de Ho *		Período total (1000du)	
	751 janelas móveis de 250du	501 janelas móveis de 500du	% Excessos	Ho *	751 janelas móveis de 250du	501 janelas móveis de 500du	% Excessos	Ho *
DN EWMA 0.94	<b>17,2%</b>	43,5%	5,70%	Aceita	33,4%	74,9%	1,70%	Rejeita
DN EWMA 0.97	18,0%	<b>32,7%</b>	<b>5,40%</b>	Aceita	45,1%	100,0%	2,00%	Rejeita
DN Móvel 20	26,1%	45,3%	6,20%	Aceita	27,6%	59,5%	1,70%	Rejeita
Histórico 500	54,2%	74,7%	7,70%	Rejeita	57,1%	68,9%	2,20%	Rejeita
Histórico 250	48,2%	43,9%	6,30%	Aceita	36,8%	55,3%	2,00%	Rejeita
Histórico 100	40,1%	52,9%	6,30%	Aceita	81,2%	100,0%	2,40%	Rejeita
Cóp Normal 500	51,4%	50,5%	7,30%	Rejeita	29,6%	53,7%	1,80%	Rejeita
Cóp Normal 250	51,0%	52,7%	6,20%	Aceita	28,2%	19,0%	1,60%	Aceita
Cóp Frank 500	52,6%	70,5%	7,50%	Rejeita	28,2%	40,7%	1,60%	Aceita
Cóp Frank 250	34,4%	41,1%	5,60%	Aceita	<b>9,3%</b>	<b>12,2%</b>	<b>1,50%</b>	Aceita
Cóp T-Student 500	51,8%	66,9%	7,70%	Rejeita	56,3%	68,5%	2,20%	Rejeita
Cóp T-Student 250	52,7%	44,3%	6,20%	Aceita	28,2%	40,7%	1,70%	Rejeita

Fonte: Elaboração própria.

Nota: \*Ho: percentual de excessos previsto pelo modelo é estatisticamente equivalente ao encontrado empiricamente.

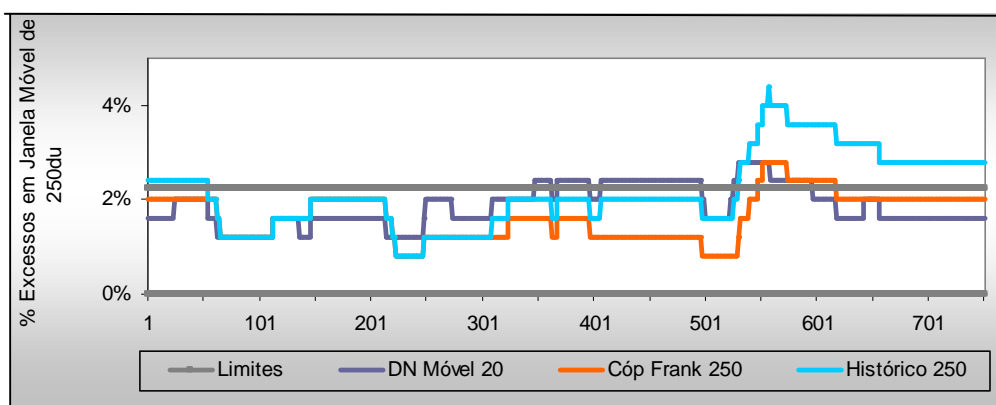
Assim como na Carteira 1, os resultados obtidos na Carteira 2 podem ser explicados pelas distribuições leptocúrticas do Ibovespa e Ptax, que beneficiaram a Cópula Frank 250 no cálculo do VaR 99%, e pelo agrupamento da volatilidade no tempo, que beneficiou o DN EWMA 0.97 no cálculo do VaR 95%.

Os modelos também foram comparados através dos gráficos apresentados nas figuras 5.20 e 5.21, que oferecem as mesmas conclusões apontadas na tabela 5.8.



**Figura 5.20 – Comparação dos modelos de VaR 95% - Carteira 2**

Fonte: Elaboração própria.



**Figura 5.21 – Comparação dos modelos de VaR 99% - Carteira 2**

Fonte: Elaboração própria.

### 5.2.3 Carteira 3

A Carteira 3 foi composta de forma a apresentar uma maior exposição ao fator de risco Ptax (75% Ptax e 25% Ibovespa). Os resultados foram apresentados na tabela 5.9.



Os modelos delta-normais apresentaram ótimo desempenho para o VaR 95%, com uma leve vantagem para o de fator de decaimento 0,97. Já para o VaR 99%, houve um equilíbrio entre os modelos de cópula e delta-normal. O modelo selecionado foi a Cópula Frank 250, que empatou com o modelo DN EWMA 0.97 na janela de comparação de 1000 dias, mas obteve menor soma das estatísticas nas janelas móveis de 250 e 500 dias.

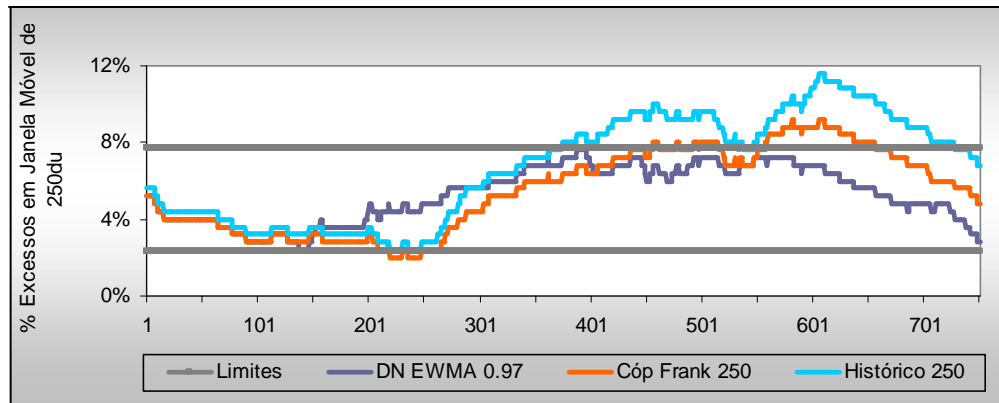
**Tabela 5.9 – Comparação dos modelos de VaR – Carteira 3**

	VaR 95%				VaR 99%			
	% de ocorrências fora da zona de aceitação de Ho *		Período total (1000du)		% de ocorrências fora da zona de aceitação de Ho *		Período total (1000du)	
	751 janelas móveis de 250du	501 janelas móveis de 500du	% Excessos	Ho *	751 janelas móveis de 250du	501 janelas móveis de 500du	% Excessos	Ho *
DN EWMA 0.94	<b>0,0%</b>	<b>0,0%</b>	4,90%	Aceita	<b>17,4%</b>	12,4%	1,40%	Aceita
DN EWMA 0.97	<b>0,0%</b>	<b>0,0%</b>	<b>5,00%</b>	Aceita	<b>17,4%</b>	4,2%	<b>1,20%</b>	Aceita
DN Móvel 20	<b>0,0%</b>	<b>0,0%</b>	5,50%	Aceita	18,5%	27,3%	1,90%	Rejeita
Histórico 500	46,7%	36,9%	6,90%	Rejeita	26,8%	38,7%	1,80%	Rejeita
Histórico 250	45,4%	40,1%	6,20%	Aceita	25,7%	38,7%	1,60%	Aceita
Histórico 100	25,8%	41,1%	6,50%	Rejeita	47,3%	55,9%	2,00%	Rejeita
Cóp Normal 500	43,0%	36,9%	6,30%	Aceita	36,0%	31,9%	1,90%	Rejeita
Cóp Normal 250	41,1%	40,7%	6,10%	Aceita	22,6%	<b>0,0%</b>	1,50%	Aceita
Cóp Frank 500	43,7%	36,9%	6,20%	Aceita	27,0%	29,1%	1,60%	Aceita
Cóp Frank 250	20,2%	27,5%	5,10%	Aceita	21,3%	<b>0,0%</b>	<b>1,20%</b>	Aceita
Cóp T-Student 500	42,7%	38,7%	6,60%	Rejeita	28,4%	31,9%	1,70%	Rejeita
Cóp T-Student 250	40,7%	40,7%	6,00%	Aceita	22,6%	31,9%	1,70%	Rejeita

Fonte: Elaboração própria.

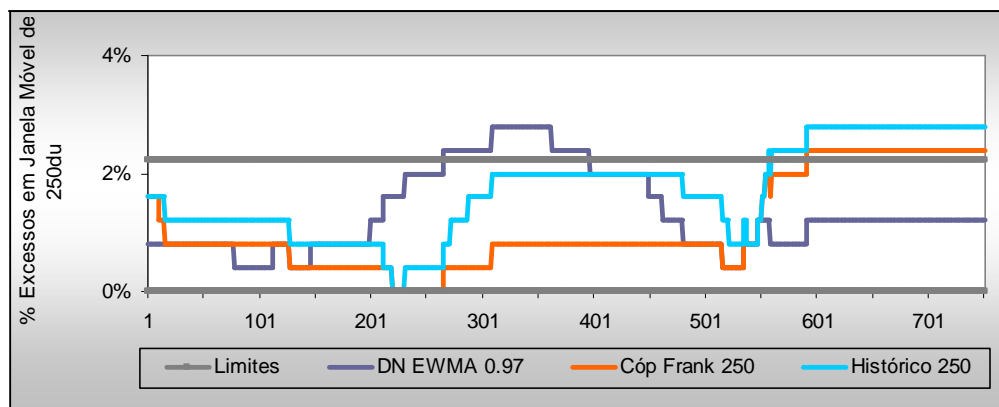
Nota: \*Ho: percentual de excessos previsto pelo modelo é estatisticamente equivalente ao encontrado empiricamente.

Os resultados foram semelhantes aos obtidos nas duas carteiras anteriores. A principal diferença foi o bom desempenho do modelo delta-normal no cálculo do VaR 99%, embora a Cópula Frank 250 também tenha sido a escolhida para essa carteira. As figuras 5.22 e 5.23 ilustram os gráficos para a Carteira 3.



**Figura 5.22 – Comparação dos modelos de VaR 95% - Carteira 3**

Fonte: Elaboração própria.



**Figura 5.23 – Comparação dos modelos de VaR 99% - Carteira 3**

Fonte: Elaboração própria

#### 5.2.4 Consolidação dos Resultados

A tabela 5.10 traz a comparação dos resultados obtidos para as três carteiras analisadas. Os modelos delta-normais obtiveram melhor desempenho no cálculo do VaR 95%. Para o VaR 99%, o melhor modelo foi a Cópula Frank 250.

**Tabela 5.10 – Comparação dos modelos de VaR - Resumo**

	VaR 95%			VaR 99%		
	Carteira 1	Carteira 2	Carteira 3	Carteira 1	Carteira 2	Carteira 3
Janela Móvel 250du	DN EWMA 0.94	DN EWMA 0.94	DN EWMA 0.94 DN EWMA 0.97 DN Móvel 20	Cóp. Frank 250	Cóp. Frank 250	DN EWMA 0.94 DN EWMA 0.97
Janela Móvel 500du	DN EWMA 0.94	DN EWMA 0.97	DN EWMA 0.94 DN EWMA 0.97 DN Móvel 20	Cóp. Frank 250	Cóp. Frank 250	Cóp. Normal 250 Cóp. Frank 250
Amostra Completa 1000du	DN EWMA 0.94	DN EWMA 0.97	DN EWMA 0.97	Cóp. Frank 250	Cóp. Frank 250	DN EWMA 0.97 Cóp. Frank 250
Modelo Selecionado	DN EWMA 0.94	DN EWMA 0.97	DN EWMA 0.97	Cóp. Frank 250	Cóp. Frank 250	Cóp. Frank 250

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados encontrados neste trabalho foram semelhantes aos apresentados por Pereira (2006). Segundo o autor, apesar de a teoria de cópulas não ter sido superior às técnicas tradicionais para o cálculo do VaR 97,5% de uma carteira composta por ativos financeiros, ela foi claramente superior na modelagem dos eventos extremos associados à mesma carteira, medidos pelo cálculo do VaR 99,5%.

## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho aplicou a teoria de cópulas na gestão de riscos financeiros. Ela foi utilizada para o cálculo do VaR, uma importante medida de mensuração de risco de mercado.

A teoria de cópulas vem sendo cada vez mais utilizada no meio financeiro, especialmente no que tange à gestão de riscos. A função de cópula oferece uma grande flexibilidade na agregação de riscos. Ela permite que a relação de dependência entre duas ou mais variáveis aleatórias seja modelada de forma independente em relação ao formato das distribuições marginais aplicadas.

Foram desenvolvidos seis modelos de cópulas para o cálculo do VaR de três carteiras bivariadas, expostas aos fatores de risco Dólar Ptax e Índice Ibovespa. A modelagem individual dos fatores de risco foi feita através da distribuição hiperbólica generalizada. Para a modelagem conjunta, foram utilizadas as cópulas Frank, T-Student e Normal, com janelas de estimação de 500 e 250 dias úteis. Finalmente, os modelos de cópula foram comparados com seis outros modelos, baseados nas metodologias delta-normal e de simulação histórica.

O modelo cópula Frank com janela de 250 dias foi o que obteve os melhores resultados no cálculo do VaR 99%, apresentando o melhor desempenho nas três carteiras testadas. Para o cálculo do VaR 95%, o modelo com melhor desempenho foi o delta-normal, sendo o escolhido para as três carteiras, ora utilizando o fator de decaimento 0,94, ora o de 0,97.

Os dados empíricos mostraram que a modelagem de eventos extremos (VaR 99%) foi melhor executada pelo modelo de cópula, conforme previsto. Dessa forma, foi possível comprovar a principal crítica feita à modelagem de riscos via distribuição normal: a sua incapacidade de assimilar a característica dos retornos de ativos financeiros de apresentarem distribuições leptocúrticas (caudas pesadas).

A função de cópula foi flexível a ponto de permitir a utilização da distribuição hiperbólica generalizada para a modelagem dos retornos marginais, o que foi decisivo para o cálculo do VaR 99%. Por outro lado, apesar de essa distribuição ter se mostrado mais adequada do que a normal para representar todas as faixas da distribuição empírica, o fato de a volatilidade ter se

agrupado no tempo foi decisivo para que o modelo delta-normal fosse superior ao de cópula na mensuração do VaR 95%. O método EWMA de estimação de volatilidade, utilizado pelo modelo delta-normal, permitiu uma resposta mais rápida às alterações de nível de volatilidade dos retornos dos fatores de risco.

Apesar de ter sido menos eficiente em capturar as mudanças no nível de volatilidade, a modelagem via função de cópula também reagiu a essa característica dos ativos financeiros. Os modelos de cópula construídos com janela de estimação de 250 dias foram sempre superiores em relação aos que utilizaram 500 dias, por se adaptarem mais rapidamente às condições atuais do mercado.

Seguindo esse mesmo raciocínio, janelas de estimação mais curtas devem construir modelos de cópulas capazes de se adaptar mais rapidamente, levando a melhores desempenhos. Janelas mais curtas também foram testadas neste trabalho, como a de 100 dias. Devido a problemas de convergência nas distribuições marginais, os resultados não foram apresentados.

Fica aqui a sugestão para novas pesquisas sobre o tema. Um modelo capaz de conciliar um bom ajustamento aos eventos extremos com uma rápida adaptação às mudanças repentinas do nível de volatilidade dos mercados parece ser o ideal. A flexibilidade da função de cópula permite que outras distribuições marginais sejam testadas, como alternativas à normal e até mesmo à hiperbólica generalizada, utilizada neste trabalho. A simples utilização de janelas de estimação mais curtas, aplicadas à própria distribuição hiperbólica generalizada, pode ser uma boa alternativa.

Todos os modelos de cópula foram estimados em dois estágios. Dessa forma, foi possível reduzir drasticamente o tempo de processamento dos cálculos, que mesmo assim foi superior ao consumido pelos modelos delta-normais e históricos. Fica a recomendação dessa técnica, pois o tempo pode se tornar excessivo em caso de estimação em apenas um estágio, especialmente para carteiras compostas por um número de fatores de risco maior do que o utilizado neste trabalho.

Finalmente, este trabalho conclui que o estudo da teoria de cópulas é de grande importância para a gestão de riscos financeiros. Ela permite que a agregação de riscos seja feita de maneira flexível, possibilitando, por exemplo, a modelagem de assimetria, eventos extremos, relações

de dependência não-lineares, além de admitir diferentes distribuições marginais para a representação dos comportamentos individuais dos fatores de risco. O presente trabalho se limitou à mensuração do *Value at Risk*, mas a teoria de cópulas pode, também, ser aplicada a outras medidas de risco de mercado, como a *Expected Shortfall*, ou até mesmo a outros tipos de risco, como o de crédito, o operacional, e o integrado.

## REFERÊNCIAS

- ALARCON, C. M. **Avaliação de modelos de Value-at-Risk para ações**. 2005. Dissertação (Mestrado em economia) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- ARTZNER, P. et al. Thinking Coherently. **Risk**. v. 10, n. 11, p. 68-71, 1997.
- ASSIS, R. M.; LAURINI, M. P. **Funções de Cópula na Precificação de Opções**. 2008. Working Paper 148 - Ibmec São Paulo, São Paulo.
- BENNET, M. N.; KENNEDY, J. E. Quanto Pricing with Copulas. **Journal of Derivatives**, v. 12, n. 1, p. 26-45, 2004.
- BHATTACHARYYA, M. Contemporary Financial Risk Management: The Role of Value at Risk (VAR) Models, an Academic Perspective. **IIMB Management Review**, p. 292-296, set./ 2008.
- CASELATO, L. **Uma comparação dos modelos de Value at Risk aplicados em carteiras de renda fixa**. 2009. Dissertação (Mestrado em Administração) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- CHERUBINI, U.; LUCIANO, E. **Multivariate Option Pricing with Copulas**. Working paper, International Centre for Economic Research. 2002.
- CHERUBINI, U.; LUCIANO, E. Value-at-Risk Trade-off and Capital Allocation with Copulas. **Banca Monte dei Paschi di Siena SpA**, v. 30, n. 2, p. 235-256, 2001.
- CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. **Copula Methods in Finance**. 1ª ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- CLEMENTE, A. D.; ROMANO, C. Measuring and Optimizing Portfolio Credit Risk: A Copula-based Approach. **Banca Monte dei Paschi di Siena SpA**, v. 33, n. 3, p. 325-357, 2004.
- CROUHY, M.; GALAI, D; MARK, R. **Gerenciamento de risco: abordagem conceitual e prática: uma visão integrada dos riscos de crédito, operacional e de mercado**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Qualitymark: São Paulo: SERASA, 2004.

DOWD, K.; BLAKE, D. After VaR: The Theory, Estimation, and Insurance Applications of Quantile-Based Risk Measures. **The Journal of Risk and Insurance**, v. 73, n. 2, p. 193-229, 2006.

EBERLEIN, E.; KELLEER, U. Hyperbolic distributions in finance. **Bernoulli**, v. 1, p. 281-299, 1995.

EBERLEIN, E.; KELLER, U.; PRAUSE, K. New insights into smile, mispricing and value at risk: The hyperbolic model. **Journal of Business**, v.71, p. 371-406, 1998.

FERMANIAN, J. D. **Goodness of Fit Tests for copulas**. 2003. Working Paper - INSEE, Paris.

FROOT, K. A.; SCHARFSTEIN, D. S.; STEIN, J. C. Risk Management: Coordinating Corporate Investments and Financing Policies. **The Journal of Finance**, v. XLVIII, n. 5, p. 1629-1658, 1993.

GENEST, C.; MACKAY, J. The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. **The American Statistician**, v. 40, p. 280-283, 1986.

GOORAH, A. Real Estate Risk Management with Copulas. **Journal of Property Research**, v. 24, n. 4, p. 289-311, dez./2007.

HOEFFDING, W. **Masstabinvariante korrelationstheorie**, Schr. Math. Inst. Univ. Berlin, v. 5, p. 179-233, 1940.

HOTTA, L. K.; LUCAS, E. C.; PALARO, H. P. Estimation of VaR Using Copula and Extreme Value Theory. **Multinational Finance Journal**, v. 12, n. 3/4, p. 205-218, 2008.

HU, L. Dependence Patterns across Financial Markets. **Applied Financial Economics**, v. 16, p. 717-729, 2006.

HULL, J. C. **Options, Futures, and Other Derivatives**. 6<sup>a</sup> ed. New Jersey: Prentice Hall, 2006.

HULL, J.; WHITE, A. Valuation of a CDO and an nth to Default CDS Without Monte Carlo Simulation. **Journal of Derivatives**, v. 12, n. 2, inverno/2004.



JOE, H. **Multivariate Models and Dependence Concepts**. 1ª ed. London: Chapman & Hall, 1997.

JORION, P. **Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk**. 3ª ed. New York: McGraw-Hill, 2007.

LHABITANT, F. S.; TINGUELY, O. Financial Risk Management: An Introduction. **Thunderbird International Business Review**, v. 43, n. 3, p. 343-363, maio/jun. 2001.

LI, D. X. **On Default Correlation: A Copula Function Approach**. Working paper 99-07 Riskmetrics. 2000.

MARTELLINI, L.; MEYFREDI, J. C. A Copula Approach to Value-at-Risk Estimation for Fixed-Income Portfolios. **The Journal of Fixed Income**, p. 5-15, verão/2007.

MATZ, L. Use and Misuse of Value-at-Risk Analysis for Bank Balance Sheet Risk Analysis. **Bank Accounting & finance**, p. 13-18. dez/jan. 2005.

MACHRY, M. S. **O uso do value at risk (var) como medida de risco para os fundos de pensão**. 2003. Dissertação (Mestrado em administração) - Escola de Administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getulio Vargas, São Paulo.

MODIGLIANI, F.; MILLER, M. The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. **American Economic Review**, v. 48, n. 3, p. 261-297, 1958.

NELSEN, R. B. **An Introduction to Copulas**. 2ª ed. New York: Springer, 2006.

PERACCHI, F.; TANASE, A. V. On estimating the conditional expected shortfall. **Appl. Stochastic Models Bus**, v. 24, p. 471-493, ago./ 2008.

PEREIRA, D. E. **Cópuas: uma alternativa para a estimação de modelos de risco multivariados**. 2006. Dissertação (Mestrado Profissional em Economia) - Faculdade Ibmecc São Paulo, São Paulo.

POCHON, F.; TEILETCHE, J. Empirical investigation of the VaR of hedge funds using daily data. **Derivatives Use, Trading & Regulation**, v. 12, n. 4, p. 314-329, 2007.

ROSENBERG, J. V.; SCHUERMANN, T. **A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risks**. 2004. Staff Report n. 185 - Federal Reserve Bank of New York, New York.

ROSS, S. M. **A First Course in Probability**. 6ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

RYDBERG, T. H. The normal inverse Gaussian Lévy process: Simulation and approximation. **Communications in Statistics: Stochastic Models**, v. 13, p. 887-910, 1997.

SAIN, P. K. S. **Estudo Comparativo dos Modelos de Value-at-Risk para Instrumentos Pré-Fixados**. 2001. Dissertação (Mestrado em Administração) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SCHONBUCHER, P.; SCHUBERT, D. **Copula-Dependent Default Risk in Intensity Models**. Working paper, Department of Statistics - Bonn University. 2001.

SERFLING, R. J. **Approximation Theorems of Mathematical Statistics**. New York: John Wiley & Sons, 1980.

SKLAR, A. **Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges**. Pub. Inst. Statist. Univ. Paris, v. 8, p. 229-231, 1959.

SMITHSON, C.; ASSOCIATES, R.; SIMKINS, B. J. Does Risk Management Add Value? A Survey of the Evidence. **Journal of Applied Corporate Finance**, v. 17, n. 3, p. 8-16, verão/2005.

STEVENSON, W. J. **Estatística Aplicada à Administração**. Tradução por Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Harper and Row do Brasil, 1981. (Trabalho original publicado em 1978).

SU, E.; KNOWLES, T. W. Asian Pacific Stock Market Volatility Modeling and Value at Risk Analysis. **Emerging Markets Finance and Trade**, v. 42, n. 2, p. 18-62. mar./abr. 2006.

TEIXEIRA, V. M. M. **Distribuições Hiperbólicas Generalizadas: Aplicações ao Mercado Português**. 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade da Madeira, Funchal.