FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
EPGE
Escola de Pós-Graduação em Economia

Ensaios Econômicos

Escola de Pós Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas

Nº 621 ISSN 0104-8910

Resultados uniformemente seguros e equilíbrio de Nash em jogos compactos

Paulo Klinger Monteiro, Frank H. Page Jr.

Setembro de 2006

Resultados uniformemente seguros e equilíbrio de Nash em jogos compactos ⋆

Paulo Klinger Monteiro

FGV-EPGE, Praia de Botafogo 190, sala 1103, 22250-900, RJ, Brasil

Frank H. Page Jr.

Department of Finance, University of Alabama, Tuscaloosa, AL 35487, EUA

Resumo

Nós introduzimos uma condição, *resultados uniformemente seguros*, para jogos compactos e resultados ("payoffs") limitados e mensuráveis nas estratégias. Demonstramos que se um jogo compacto tem resultados uniformemente seguros, então sua extensão mista tem resultados seguros.
JEL: C72

Palavras-chave: resultados uniformemente seguros, equilíbrio de Nash

1 Introdução

Em seu artigo sobre equilíbrio de Nash em jogos discontínuous, Reny ([6]) apresentou a noção de melhor resposta segura ("better-reply security") e demonstrou que todo jogo com estratégias compactas e convexas e resultados quasi-concâvos nas estratégias individuais tem um equilíbrio de Nash se tiver melhor resposta segura. Neste artigo nós demonstramos que se um jogo G com espaço de estratégias compacto de Hausdorff e resultados limitados, mensuráveis (i.e., um jogo compacto) satisfaz *resultados uniformemente seguros*,

⋆ Monteiro agradece o apoio financeiro do CNPq/Edital Universal/471899/2003-8. Page agradece o apoio financeiro e a hospitalidade do CERMSEM, University of Paris I e o apoio financeiro do Department of Finance, UAL. Ambos autores agradecem a dois pareceristas anônimos, a Luis Braido, e a Wassim Daher por seus comentários.

Setembro de 2006

então a sua extensão mista, $\overline{G}$, tem resultados seguros.[1] Reny ([6]) observa que em geral, resultados seguros para G não implica nem é implicado por resultados seguros para $\overline{G}$.[2] Assim, nosso resultado mostra que se a hipótese de resultados seguros para G for substítuida pela hipótese de resultados uniformemente seguros para G, então $\overline{G}$ terá resultados seguros. Este resultado é útil, pois verificar que G tem resultados uniformemente seguros é fácil em geral, mas o mesmo não pode-se dizer de verificarmos resultados seguros para a extensão mista $\overline{G}$.

Um corolário imediato é que se um jogo compacto G tiver resultados uniformemente seguros, então sua extensão mista $\overline{G}$ tem um equilíbrio de Nash se além disso for recíprocamente semicontínua superiormente. Outro corolário imediato é que se um jogo compacto G tiver resultados uniformemente seguros e for semicontínuo superiormente, então sua extensão mista $\overline{G}$ tem um equilíbrio de Nash.

2 Jogos compactos

Um jogo compacto, $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$, tem N jogadores, sendo que cada jogador tem espaço de estratégias, X_i, compacto de Hausdorrf e uma função de resultados mensurável, $u_i : X \to \mathbb{R}$. Temos $X := \prod_{i=1}^N X_i$. Denotamos por X_{-i} o produto Cartesian $\prod_{j \neq i} X_j$. O jogo compacto $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ é semicontínuo superiormente se as funções de resultado, $u_i(\cdot)$ são semicontínuas superiormente em X.

Se G é um jogo compacto e $\mathcal{M}_i$ é o conjunto das medidas de probabilidades regulares de Borel em X_i, $1 \leq i \leq N$ definimos

$$U_i(\mu) = \int_X u_i(x)\, d\mu(x), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N) \in \mathcal{M} := \prod_{i=1}^N \mathcal{M}_i.$$

O conjunto $\mathcal{M}_i$ é convexo e compacto para a topologia da convergência fraca de medidas.[3]

O jogo compacto, $\overline{G} = (U_i, \mathcal{M}_i)_{i=1}^N$, é a extensão mista do jogo G.

[1] Veja definição 2 abaixo.
[2] Na seção 5 apresentamos um exemplo de Carmona (2005) de um jogo compacto com resultados seguros mas cuja extensão mista não tem resultados seguros.
[3] A compacidade decorre do teorema de representação de Riesz e do teorema de Alaoglu (veja Aliprantis e Border (1999)).

3 Resultados uniformemente seguros

Seja $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ um jogo compacto.

Definição 1 *(resultados seguros) O jogo G tem resultados seguros se para todo $x = (x_i, x_{-i}) \in X$ e $\epsilon > 0$ existe para cada jogador i uma estratégia $\bar{x}_i \in X_i$ e uma vizinhança $\mathcal{N}(x_{-i}) \subset X_{-i}$ de x_{-i} tal que*

$$y \in \mathcal{N}(x_{-i}) \Rightarrow u_i(\bar{x}_i, y) \geq u_i(x_i, x_{-i}) - \epsilon.$$

Assim, um jogo G tem resultados seguros se partindo de qualquer vetor de estratégias $x = (x_i, x_{-i}) \in X$, cada jogador tem uma estratégia $\bar{x}_i \in X_i$ que pode usar para garantir um resultado de $u_i(x_i, x_{-i}) - \epsilon$ contra desvios dos outros jogadores numa vizinhança de $x_{-i} \in X_{-i}$ (i.e., para cada estratégias $x = (x_i, x_{-i}) \in X$ cada jogador tem uma estratégia $\bar{x}_i \in X_i$ que é segura neste vetor).

Definição 2 *(Resultados uniformemente seguros) O jogo G tem resultados uniformemente seguros se para todo $x_i \in X_i$ e todo $\epsilon > 0$ existe para cada jogador i uma estratégia $\bar{x}_i \in X_i$ tal que para todo $y \in X_{-i}$ existe uma vizinhança $\mathcal{N}(y)$ of y tal que*

$$z \in \mathcal{N}(y) \Rightarrow u_i(\bar{x}_i, z) \geq u_i(x_i, y) - \epsilon.$$

Então, um jogo G tem resultados *uniformemente* seguros se cada jogador partindo de qualquer estratégia $x_i \in X_i$ tem uma estratégia $\bar{x}_i \in X_i$ que ele pode se desviar para assegurar um resultado de $u_i(x_i, y) - \epsilon$ contra desvios dos outros jogadores numa vizinhança de $y \in X_{-i}$ *para todo* vetor de estratégias $y \in X_{-i}$ (i.e., para cada jogador i e cada estratégia $x_i \in X_i$ existe uma estratégia $\bar{x}_i \in X_i$ que é segura *para todo* y).

4 Exemplos

Vejamos alguns exemplos de jogos compactos com resultados uniformemente seguros. Começamos com um leilão "all-pay"de informação completa.

Exemplo 1 *São N licitantes, $i \in I := \{1, 2, \ldots, N\}$, competindo por um objeto com valor 1. O maior lance ganha e cada licitante paga o seu lance ganhando ou perdendo. Empates são quebrados aletóriamente com probabilidades iguais. Portanto se os lances são dados pela N-upla*

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_N) \in [0, 1]^N,$$

o lance vencedor é definido por

$$b^* = max_{j\leq N} b_j.$$

Seja $H = \{i \in I : b_i = b^*\}$ *o conjunto de licitantes vencedores. O resultado do licitante* i *é dado por:*

$$u_i(b) = \begin{cases} \frac{1}{|H|} - b_i \ se \ \ b_i = b^*; \\ \quad -b_i \quad se \ \ b_i < b^*, \end{cases}$$

Este leilão selado tem resultados uniformemente seguros.

Comentário 1 *É fácil de se checar que o exemplo acima não tem equilíbrio em estratégias puras (veja Baye, Kovenock, e de Vries [1]). É também fácil de se checar que a soma dos resultados dos licitantes é contínua. Portanto o leilão "all-pay"é recíprocamente semicontínuo superiormente.*

O próximo exemplo vem de Carbonell-Nicolau e Ok ([4]).

Exemplo 2 (competição eleitoral) *Carbonell-Nicolau e Ok consideram o jogo de votação com dois partidos e de soma zero. Neste jogo cada partido– que maximiza o número de votos - propõe uma função de taxação de um dado conjunto de funções de taxação (que geram uma certa receita fixada) e os eleitores votam pela função de taxação que os taxa menos. A população de eleitores com renda* $x \in [0, 1]$ *está distríbuida de acordo com a distribuição contínua e estritamente crescente* $F : [0, 1] \to [0, 1]$*. A distribuição de renda tem mais peso à direita. I.e.*

$$F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) < m_F := \int_0^1 x dF(x).$$

A função de taxação $t(\cdot) \in \mathcal{T}$ *é contínua* $t : [0, 1] \to [0, 1]$ *e tal que* $t(x) \leq x$, t *é crescente, e* $x - t(x)$ *é crescente. Uma função de taxação* $t(\cdot) \in \mathcal{T}$ *é admissivel se*

$$\int_0^1 t(x) dF(x) \geq r,$$

sendo r *a receita a ser obtida. Seja* $\mathcal{T}_{(F,r)}$ *o conjunto de funções admissiveis.* $\mathcal{T}_{(F,r)}$ *é um subconjunto compacto do espaço métrico* $\mathbf{C}[0, 1]$ *de funções contínuas definidas em* $[0, 1]$ *equipadas com a métrica do sup (veja lema 2 em [4]). Se* t *e* τ *são funções de taxação ofertadas pelos partidos 1 e 2 respectivamente, a fração dos eleitores que estritamente preferem* t *sobre* τ *é dada por*

$$\omega(t, \tau) = \int_{[t<\tau]} dF = \Pr(t < \tau).$$

Se o objetivo de cada partido é de maximizar a diferença de seus votos, então

o resultado do partido um é dado por

$$u_1(t,\tau) = \omega(t,\tau) - \omega(\tau,t),$$

enquanto o do partido 2 é dado por

$$u_2(t,\tau) = -u_1(t,\tau) = \omega(\tau,t) - \omega(t,\tau).$$

O jogo $G = (X_i, u_i)_{i=1}^2$, com $X_1 = X_2 = \mathcal{T}_{(F,r)}$ e resultados u_i como definidos acima, é compacto. Na demonstração do seu lema 3, Carbonell-Nicolau e Ok demonstram que para todo $t \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ existe uma função de taxação $t_\epsilon \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ tal que para $\tau \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ existe uma vizinhança $\mathcal{N}(\tau)$ de τ tal que

$$f \in \mathcal{N}(\tau) \Rightarrow \omega(t_\epsilon, f) - \omega(f, t_\epsilon) > \omega(t,\tau) - \omega(\tau,t) - \epsilon.$$

Isto é resultados uniformemente seguros. Portanto o jogo de soma zero

$$(\mathcal{T}_{(F,r)}, u_1, u_2),$$

tem resultados uniformemente seguros.

Nosso último exemplo vem de [5].

Exemplo 3 (catálogos) *Page e Monteiro (2003) consideram um jogo no qual as firmas competem pelo comércio de um agente de tipo desconhecido $t \in T$, sendo T um espaço de Borel. Os tipos estão distríbuidos de acordo com a medida de probabilidades μ definida em $B(T)$, a σ-álgebra de Borel em T. Suponhamos agora que são duas firmas indexadas por i ou $j = 1,2$, e que as firmas competem simultaneamente em preços e produtos (definidos amplamente). Seja X um espaço métrico compacto, representando o conjunto de todos os produtos que cada firma pode oferecer e seja $D = \left[0, \bar{d}\right]$ o conjunto de preços que podem ser cobrados. Suporemos que X contém um elemento 0 que denota a não contratação. Supomos também que o agente somente contrata com uma firma ou pode se abster completamente de contratar. Seja X_i um subconjunto fechado de X e seja $K_i := X_i \times D$ o conjunto dos produtos e preços que as firmas $i = 1,2$ podem oferecer. Para permitir a possibilidade de não contratação, suporemos que existe uma firma $i = 0$ com conjunto de produção $K_0 := \{(0,0)\}$. As firmas competem, oferecendo ao agente um conjunto fechado não-vazio $C_i \subset K_i$, $i = 0,1,2$, de produtos e preços (um catálogo). Assim o conjunto de estratégias de cada firma é dado por $P_f(K_i)$, o conjunto dos subconjuntos fechados e não-vazios de K. O conjunto $P_f(K_i)$ é compacto métrico se equipado com a métrica de Hausdorff ([2], seção 3.15). Um agente de tipo t que escolhe (i,x,p), $(x,p) \in C_i$ tem utilidade $v_t(i,x,p) = 0$ se $i = 0$ e tem utilidade $v_t(i,x,p) = u_t(i,x) - p$ se $i = 1,2$. Em [5] supõe-se que a utilidade é mensurável no tipo t e contínua na escolha de contratos (i,x,p). Se as firmas oferecem o vetor de catálogos (C_1, C_2), então o conjunto de escolhas*

do agente é dado por

$$\Gamma\left(C_1, C_2\right) = \left\{(i, x, p) : (x, p) \in C_i,\ i \in \{0, 1, 2\}\right\},$$

e o problema de escolha do agente é dado por

$$\max\left\{v_t\left(i, x, p\right); (i, x, p) \in \Gamma\left(C_1, C_2\right)\right\}.$$

Seja

$$v^*\left(t, C_1, C_2\right) = \max\left\{v_t\left(i, x, p\right); (i, x, p) \in \Gamma\left(C_1, C_2\right)\right\},$$

e

$$\Phi\left(t, C_1, C_2\right) = \left\{(i, x, p) \in \Gamma\left(C_1, C_2\right); v_t\left(i, x, p\right) = v^*\left(t, C_1, C_2\right)\right\},$$

a função $v^*\left(t, \cdot, \cdot\right)$ especifica as preferências induzidas do tipo t enquanto a correspondência $\Phi\left(t, \cdot, \cdot\right)$ é a melhor resposta do tipo t. O lucro da firma jth é dado por

$$\pi_j\left(i, x, p\right) = \left(p - c_j\left(x\right)\right) I_j(i)$$

sendo a função de custo $c_j\left(\cdot\right)$ limitada e semicontínua inferiormente e

$$I_j(i) = \begin{cases} 1 \ \textit{if}\ i = j \\ 0 \ \textit{if}\ i \neq j. \end{cases}$$

Seja

$$\pi_j^*\left(t, C_1, C_2\right) := \max\left\{\pi_j\left(i, x, p\right) : (i, x, p) \in \Phi\left(t, C_1, C_2\right)\right\},$$

o resultado esperado da firma j's quando o vetor de catálogs (C_1, C_2) é dado por

$$\Pi_j\left(C_1, C_2\right) = \int_T \pi_j^*\left(t, C_1, C_2\right) d\mu\left(t\right),\ j = 1, 2.$$

O jogo de catálogos, $G = (P_f(K_i), \Pi_i)_{i=1}^2$, é semicontínuo superiormente e compacto. Está demonstrado no teorema 5, página 96 de [5] que este jogo tem resultados uniformemente seguros.

5 Resultado principal

Teorema 1 *Se um jogo compacto G tem resultados uniformemente seguros, então a sua extensão mista $\overline{G}$ tem resultados seguros.*

Necesitamos do seguinte:

Lema 1 *Seja Z um espaço topológico. Se $v : Z \to \mathbb{R}$ é limitada existe uma função semicontínua inferiormente $\phi : Z \to \mathbb{R}$ tal que $v \geq \phi$, e se $v \geq g$ e g é semicontínua inferiormente então $\phi \geq g$.*

Demonstração do lema 2: Seja

$$\mathcal{L} = \{g : Z \to \mathbb{R} : v \geq g \text{ e } g \text{ é semicontínua inferiormente}\}.$$

Este conjunto é não-vazio uma vez que a função constante $\inf v(Z)$ pertence a $\mathcal{L}$. Agora se definirmos $\phi(z) = \sup\{g(z); g \in \mathcal{L}\}$ temos que ϕ é semicontínua inferiormente uma vez que é o supremo pontual de funções semicontínuas inferiormente ([2], Lema 2.38, pág. 42). ■

A função ϕ é chamada de fecho semicontínuo inferior de v. Agora demonstramos o teorema 1.

Dem. do teorema 1: Seja $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_N^*) \in \mathcal{M}$ um vetor de estratégias mistas. Seja $\epsilon^* > 0$ dado. Temos que encontrar uma estratégia mista λ_i' e uma vizinhança $\mathcal{N}(\lambda_{-i}^*) \subset \mathcal{M}_{-i}$ de λ_{-i}^* tal que

$$\lambda_{-i} \in \mathcal{N}(\lambda_{-i}^*) \Rightarrow \int_X u_i(x_i, y)\, d\lambda_i'(x_i)\, d\lambda_{-i}(y) \geq \int_X u_i(x)\, d\lambda^*(x) - \epsilon^*.$$

Dado que λ_i^* é uma medida de probabilidades, existe $\tilde{x}_i \in X_i$ tal que

$$\int_{X_{-i}} u_i(\tilde{x}_i, y)\, d\lambda_{-i}^*(y) \geq \int_X u_i(x_i, y)\, d\lambda_i^*(x_i)\, d\lambda_{-i}^*(y) = \int_X u_i(x)\, d\lambda^*(x). \quad (1)$$

Aplicamos agora a propriedade de resultados uniformemente seguros para encontrar para o dado $\tilde{x}_i$ um $\bar{x}_i \in X_i$ tal que para todo $y \in X_{-i}$ existe uma vizinhança $\mathcal{N}(y)$ *de* y tal que

$$z \in \mathcal{N}(y) \Rightarrow u_i(\bar{x}_i, z) \geq u_i(\tilde{x}_i, y) - \frac{\epsilon^*}{2}. \quad (2)$$

Seja $\phi(\cdot)$ o fecho semicontínuo inferior de $u_i(\bar{x}_i, \cdot)$. Já que $\phi(\cdot)$ é semicontínua inferiormente, $\int_{X_{-i}} \phi(y) d\mu_{-i}(y)$ é semicontínua inferiormente em μ_{-i} (Reny (1999), Proposição 5.1). Assim existe uma vizinhança $\mathcal{N}(\lambda_{-i}^*)$ de λ_{-i}^* tal que para todo $\mu_{-i} \in \mathcal{N}(\lambda_{-i}^*)$,

$$\int_{X_{-i}} \phi(y) d\mu_{-i}(y) > \int_{X_{-i}} \phi(y) d\lambda_{-i}^*(y) - \frac{\epsilon^*}{2}.$$

Portanto

$$\int_{X_{-i}} u_i(\bar{x}_i, y)\, d\mu_{-i}(y) \geq \int_{X_{-i}} \phi(y) d\mu_{-i}(y) > \int_{X_{-i}} \phi(y) d\lambda_{-i}^*(y) - \frac{\epsilon^*}{2}. \quad (3)$$

Para todo $y \in X_{-i}$ definamos a função $\psi^y : X_{-i} \to \mathbb{R}$ por:

$$\psi^y(z) = \begin{cases} u_i(\tilde{x}_i, y) - \frac{\epsilon^*}{2} & \text{se } z \in \mathcal{N}(y) \\ \inf u_i(X) & \text{se } z \notin \mathcal{N}(y). \end{cases} \quad (4)$$

Para todo $y \in X_{-i}$ a função ψ^y é semicontínua inferiormente com

$$u_i(\bar{x}_i, x) \geq u_i(\tilde{x}_i, y) - \frac{\epsilon^*}{2} = \psi^y(x) \text{ para } x \in \mathcal{N}(y), \text{ e}$$

$$u_i(\bar{x}_i, x) \geq \inf u_i(X) = \psi^y(x) \text{ para } x \notin \mathcal{N}(y).$$

Assim para todo $y \in X_{-i}$, ψ^y é semicontínua inferiormente com $u_i(\bar{x}_i, x) \geq \psi^y(x)$ para $x \in X_{-i}$. Como ϕ é o fecho semicontínuo inferior de $u_i(\bar{x}_i, \cdot)$, Lema 2 implica que para todo $x \in X_{-i}$

$$\phi(x) \geq \sup_y \psi^y(x) \geq \psi^x(x) = u_i(\tilde{x}_i, x) - \frac{\epsilon^*}{2}. \tag{5}$$

Dado (3) e (5) temos

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\int_{X_{-i}} u_i(\bar{x}_i, y)\, d\mu_{-i}(y) \geq \int_{X_{-i}} \phi(y) d\mu_{-i}(y) > \int_{X_{-i}} \phi(y) d\lambda^*_{-i}(y) - \frac{\epsilon^*}{2} \\ \geq \textstyle\int_{X_{-i}} \left(u_i(\tilde{x}_i, y) - \frac{\epsilon^*}{2}\right) d\lambda^*_{-i}(y) - \frac{\epsilon^*}{2} \\ = \textstyle\int_{X_{-i}} u_i(\tilde{x}_i, y)\, d\lambda^*_{-i}(y) - \epsilon^* \\ \geq \textstyle\int u_i(x)\, d\lambda^*(x) - \epsilon^*. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

A última desigualdade em (6) segue de (1). Portanto a extensão mista $\overline{G}$ tem resultados seguros. ■

Terminamos esta seção com um exemplo de um jogo com resultados seguros cuja extensão mista não tem resultados seguros. [4]

Exemplo 4 (Carmona (2005)) *São dois jogadores. O conjunto de estratégias é $X_i = [0, 1]$. O jogo é de soma zero e o resultado do jogador 1 é*

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & se \quad y \in [0, x) \\ 0 & se\ y = x \ ou\ y = x + \frac{1}{2} \\ -1 & se \quad x < y < x + \frac{1}{2} \\ 1 & se \quad x + \frac{1}{2} < y \leq 1. \end{cases}$$

Para mostrar que o jogo tem resultados seguros note que sendo $u(x, z)$ contínua para $z \neq x$ e $z \neq x + \frac{1}{2}$ ela tem, automaticamente, resultados seguros nesta região. Suponha agora que $y = x$. Defina $\bar{x} = x + \epsilon$ se $x < 1, \epsilon < 1 - x$. Se $x = 1$ o resultado é seguro em qualquer vizinhança de y. Suponha agora que $y = x + \frac{1}{2}$. Neste case aumentar x não é uma boa idéia. Entretanto se reduzimos x tudo está bem. Se $x = 0$ então escolha $\bar{x} = 1$. Um racíocinio análogo mostra que o resultado é seguro para o jogador 2. Agora demonstramos que a

[4] Agradecemos a Wassim Daher por trazer este exemplo à nossa atenção.

extensão mista não tem resultados seguros. Seja $\lambda_1^* = \delta_0$ *e* $\lambda_2^* = \frac{1}{3}\delta_{1/2} + \frac{2}{3}\delta_1$.[5] *Assim* $u(\lambda^*) = \frac{1}{3}u\left(0, \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}u(0,1) = \frac{2}{3}$. *Seja* $0 < \epsilon < 1/3$. *Suponhamos que se pode assegurar um resultado* $\frac{2}{3} - \epsilon$ *com desvios* μ *numa vizinhança* $\mathcal{N}(\lambda_2^*)$ *de* λ_2^*. *Definamos* $\nu_n := \frac{1}{3}\delta_{\frac{n-1}{2n}} + \frac{2}{3}\delta_1$. *Uma vez que* $\nu_n \to \lambda_2^*$ *temos que* $\nu_n \in \mathcal{N}(\lambda_2^*)$ *para* n *grande o bastante. Assim*

$$u(\mu, \nu_n) = \frac{1}{3}u\left(\mu, \frac{n-1}{2n}\right) + \frac{2}{3}u(\mu, 1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\mu\left([0, \tfrac{n-1}{2n})\right) + \mu\left((\tfrac{n-1}{2n}, 1]\right)\right) + \frac{2}{3}\left(\mu\left([0, \tfrac{1}{2})\right) - \mu\left((\tfrac{1}{2}, 1]\right)\right).$$

Uma vez que $\frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \uparrow \frac{1}{2}$ *temos*

$$\lim_{n\to\infty} u(\mu, \nu_n) = \frac{1}{3}\left(-\mu\left([0, \tfrac{1}{2})\right) + \mu\left((\tfrac{1}{2}, 1]\right)\right) + \frac{2}{3}\left(\mu\left([0, \tfrac{1}{2})\right) - \mu\left((\tfrac{1}{2}, 1]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\mu\left([0, \tfrac{1}{2})\right) - \mu\left((\tfrac{1}{2}, 1]\right)\right) \le \frac{1}{3} < \frac{2}{3} - \epsilon.$$

Contradição.

Referências

[1] M. R. Baye, D. Kovenock, C. G. de Vries, The all-pay auction with complete information, Economic Theory 8 (1996), 291-305.

[2] C. Aliprantis, Kim Border, Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide, segunda edição, Springer, 1999.

[3] G. Carmona, On the existence of equilibria in discontinuous games: three counterexamples, Int. J. Game Theory 33 (2005), 181-187.

[4] O. Carbonell-Nicolau, Efe A. Ok, Voting over income taxation, Working Paper (2005), Rutgers University.

[5] F. H. Page, Jr., P. K. Monteiro, Three principles of competitive nonlinear pricing, J. Math. Econ. 39 (2003), 63-109.

[6] P. J. Reny, On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games, Econometrica 67 (1999), 1029-1056.

[5] Aqui, δ_x é a medida de Dirac que concentra massa 1 em x.

Últimos Ensaios Econômicos da EPGE

[595] Carlos Eugênio Ellery Lustosa da Costa e Lucas Jóver Maestri. *The Interaction Between Unemployment Insurance and Human Capital Policies*. Ensaios Econômicos da EPGE 595, EPGE–FGV, Jul 2005.

[596] Carlos Eugênio Ellery Lustosa da Costa. *Yet Another Reason to Tax Goods*. Ensaios Econômicos da EPGE 596, EPGE–FGV, Jul 2005.

[597] Marco Antonio Cesar Bonomo e Maria Cristina Trindade Terra. *Special Interests and Political Business Cycles*. Ensaios Econômicos da EPGE 597, EPGE–FGV, Ago 2005.

[598] Renato Galvão Flôres Junior. *Investimento Direto Estrangeiro no Mercosul: Uma Visão Geral*. Ensaios Econômicos da EPGE 598, EPGE–FGV, Ago 2005.

[599] Aloisio Pessoa de Araújo e Bruno Funchal. *Past and Future of the Bankruptcy Law in Brazil and Latin America*. Ensaios Econômicos da EPGE 599, EPGE–FGV, Ago 2005.

[600] Marco Antonio Cesar Bonomo e Carlos Carvalho. *Imperfectly Credible Disinflation under Endogenous Time–Dependent Pricing*. Ensaios Econômicos da EPGE 600, EPGE–FGV, Ago 2005.

[601] Pedro Cavalcanti Gomes Ferreira. *Sobre a Inexistente Relação entre Política Industrial e Comércio Exterior*. Ensaios Econômicos da EPGE 601, EPGE–FGV, Set 2005.

[602] Luiz Renato Regis de Oliveira Lima, Raquel Sampaio, e Wagner Gaglianone. *Limite de Endividamento e Sustentabilidade Fiscal no Brasil: Uma abordagem via modelo Quantílico Auto–Regressivo (QAR)*. Ensaios Econômicos da EPGE 602, EPGE–FGV, Out 2005.

[603] Ricardo de Oliveira Cavalcanti e Ed Nosal. *Some Benefits of Cyclical Monetary Policy*. Ensaios Econômicos da EPGE 603, EPGE–FGV, Out 2005.

[604] Pedro Cavalcanti Gomes Ferreira e Leandro Gonçalves do Nascimento. *Welfare and Growth Effects of Alternative Fiscal Rules for Infrastructure Investment in Brazil*. Ensaios Econômicos da EPGE 604, EPGE–FGV, Nov 2005.

[605] João Victor Issler, Afonso Arinos de Mello Franco, e Osmani Teixeira de Carvalho Guillén. *The Welfare Cost of Macroeconomic Uncertainty in the Post–War Period*. Ensaios Econômicos da EPGE 605, EPGE–FGV, Dez 2005.

[606] Marcelo Côrtes Neri, Luisa Carvalhaes, e Alessandra Pieroni. *Inclusão Digital e Redistribuição Privada*. Ensaios Econômicos da EPGE 606, EPGE–FGV, Dez 2005.

[607] Marcelo Côrtes Neri e Rodrigo Leandro de Moura. *La institucionalidad del salario mínimo en Brasil*. Ensaios Econômicos da EPGE 607, EPGE–FGV, Dez 2005.

[608] Marcelo Côrtes Neri e André Luiz Medrado. *Experimentando Microcrédito: Uma Análise do Impacto do CrediAMIGO sobre Acesso a Crédito*. Ensaios Econômicos da EPGE 608, EPGE–FGV, Dez 2005.

[609] Samuel de Abreu Pessôa. *Perspectivas de Crescimento no Longo Prazo para o Brasil: Questões em Aberto*. Ensaios Econômicos da EPGE 609, EPGE–FGV, Jan 2006.

[610] Renato Galvão Flôres Junior e Masakazu Watanuki. *Integration Options for Mercosul – An Investigation Using the AMIDA Model*. Ensaios Econômicos da EPGE 610, EPGE–FGV, Jan 2006.

[611] Rubens Penha Cysne. *Income Inequality in a Job–Search Model With Heterogeneous Discount Factors (Revised Version, Forthcoming 2006, Revista Economia)*. Ensaios Econômicos da EPGE 611, EPGE–FGV, Jan 2006.

[612] Rubens Penha Cysne. *An Intra–Household Approach to the Welfare Costs of Inflation (Revised Version, Forthcoming 2006, Estudos Econômicos)*. Ensaios Econômicos da EPGE 612, EPGE–FGV, Jan 2006.

[613] Pedro Cavalcanti Gomes Ferreira e Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo. *On the Economic and Fiscal Effects of Infrastructure Investment in Brazil*. Ensaios Econômicos da EPGE 613, EPGE–FGV, Mar 2006.

[614] Aloisio Pessoa de Araújo, Mario R. Páscoa, e Juan Pablo Torres-Martínez. *Bubbles, Collateral and Monetary Equilibrium*. Ensaios Econômicos da EPGE 614, EPGE–FGV, Abr 2006.

[615] Aloisio Pessoa de Araújo e Bruno Funchal. *How much debtors' punishment?*. Ensaios Econômicos da EPGE 615, EPGE–FGV, Mai 2006.

[616] Paulo Klinger Monteiro. *First–Price Auction Symmetric Equilibria with a General Distribution*. Ensaios Econômicos da EPGE 616, EPGE–FGV, Mai 2006.

[617] Renato Galvão Flôres Junior e Masakazu Watanuki. *Is China a Northern Partner to Mercosul?*. Ensaios Econômicos da EPGE 617, EPGE–FGV, Jun 2006.

[618] Renato Galvão Flôres Junior, Maria Paula Fontoura, e Rogério Guerra Santos. *Foreign direct investment spillovers in Portugal: additional lessons from a country study*. Ensaios Econômicos da EPGE 618, EPGE–FGV, Jun 2006.

[619] Ricardo de Oliveira Cavalcanti e Neil Wallace. *New models of old(?) payment questions*. Ensaios Econômicos da EPGE 619, EPGE–FGV, Set 2005.