Nº 27

MICROECONOMIA

(Parte 1)

FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS PREÇOS

por Mário Henrique Simonsen

ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

* EPGE *

M I C R O E C O N O M I A

(parte I)

FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS PREÇOS

por Mario Henrique Simonsen

INSTITUTO BRASILEIRO DE ECONOMIA

da FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

Rio de Janeiro, 1979

CAPÍTULO I

AS TEORIAS DO CUSTO DE PRODUÇÃO

1.1) *O desenvolvimento das teorias do custo de produção*

Até que o cálculo diferencial se introduzisse na análise econômica, praticamente todas as teorias de formação de preços se ergueram a partir de uma observação contábil: o preço pelo qual uma mercadoria é vendida é igual ao seu custo de produção mais o lucro de quem a negocia. Essa observação está longe de constituir uma teoria: trata-se apenas de uma igualdade que serve para definir o lucro. Contudo, com algum esforço taxionômico, foi possível partir desse truismo para a construção de teorias.

O primeiro trabalho nessa direção foi o de classificar os custos de produção em quatro grupos:

(*a*) as despesas com matérias-primas e o desgaste de máquinas e equipamentos;

(*b*) as rendas pagas aos proprietários de terras;

(*c*) os salários pagos aos trabalhadores;

(*d*) os pagamentos a capitalistas a título de lucros, juros e aluguéis. Haveria um quinto grupo, o dos im-

postos pagos ao Governo, mas os economistas, desde Adam Smith até Marx, se concentraram em explicar a formação dos preços antes da incidência dos impostos.

O segundo trabalho foi um exercício de regressão nas etapas de produção: as despesas com matérias-primas e o desgaste das máquinas e equipamentos representavam, numa etapa anterior da produção, a soma de outros quatro grupos de custos e remunerações de terra, trabalho e capital. Assim, integrando as várias etapas da produção se cancelariam as despesas com matérias-primas e depreciações, podendo-se desdobrar os preços em três componentes: a renda da terra, os salários e o lucro (como tal entendido o conjunto dos lucros propriamente ditos, mais os juros e aluguéis). Essa redução do preço das mercadorias a três componentes se encontra admiravelmente exposta no Capítulo VI da Riqueza das Nações.

Um terceiro trabalho foi o de estabelecer as tendências à equalização:

(*a*) terras de igual fertilidade e igual distância dos mercados deveriam receber a mesma renda por hectare;

(*b*) trabalhadores de igual habilidade e aplicação deveriam auferir iguais salários;

(*c*) o capital tenderia sempre a procurar os caminhos mais lucrativos, deslocando-se dos setores menos rentáveis para os mais rentáveis. Assim, as taxas de lucro

deveriam, a longo prazo , igualar-se, nos diversos ramos da atividade econômica. Adam Smith, todavia, deixou bem claro que essas tendências à equalização se estabeleciam com velocidades distintas: no caso da renda da terra e dos salários, o equilíbrio se atingiria com apreciável rapidez, já que ninguém de bom senso paga mais pelo por que pode pagar menos. O deslocamento do capital dos setores menos lucrativos para os mais rentáveis, no entanto, levaria mais tempo a se completar, e seria freqüentemente perturbado pelas oscilações de mercado.

Essas observações podem ser resumidas numa equação que, embora não tenha sido escrita por Adam Smitn, está perfeitamente implícita na Riqueza das Nações. Se para produzir uma mercadoria são necessários: $\underline{a}$ hectares-ano de um certo tipo de terra, cuja renda por hectare-ano é igual a $\underline{t}$; $\underline{n}$ homens-hora, cujo salário horário é w; e $\underline{k}$ cruzeiros-ano de capital cuja rentabilidade anual é de $100r\%$, então o preço p da mercadoria será expresso por:

$$p = at + nw + kr \quad (1.1)$$

Com todo o trabalho taxionômico até agora realizado, ainda continuamos no campo das tautologias. Para transformar a equação (1.1) numa verdadeira teoria é preciso explicar como se determinam os salários, as rendas da terra e as

taxas de lucro. Essa construção, iniciada por Adam Smith, formidavelmente desenvolvida por Ricardo, e dogmaticamente fechada por Marx, teria que esbarrar contra uma série de obstáculos que só poderiam ser transpostos com muito fôlego imaginativo e com boa dose de imprudência científica.

O primeiro obstáculo a vencer estava em que as explicações dos preços pelos custos de produção só focalizavam um lado do problema. As mercadorias não valem apenas porque custam a ser produzidas. Elas valem igualmente porque, direta ou indiretamente, satisfazem às necessidades e aos desejos dos indivíduos. Para usar um exemplo de Samuelson, um alfinete com o hino nacional gravado na cabeça pode ser custosíssimo, mas dificilmente valerá alguma coisa. Adam Smith era demasiadamente lúcido para deixar escapar esse problema e, por outro lado, não dispunha do equipamento analítico necessário à sua solução. Ainda assim, a Riqueza das Nações encontrou, senão uma solução, pelo menos uma saída hábil, baseada em duas observações.

A primeira observação, apresentada no Capítulo IV da Riqueza das Nações, é a de que a palavra valor tem dois sentidos diferentes, podendo exprimir a utilidade de um dado objeto ou a possibilidade de esse objeto servir para comprar outras mercadorias. No primeiro caso se trata do "*valor do uso*", no segundo, do "*valor de troca*", distinção que já ha

via sido estabelecida por Aristóteles. As coisas que têm grande valor de uso, como a água, freqüentemente possuem pequeno ou nenhum valor de troca. Já os diamantes, embora pouco úteis, possuem enorme valor de troca. Com isso,Adam Smith estabelecia uma dicotomia de conceitos, propondo-se a analisar apenas um deles, o valor de troca, que tinha como expressão monetária o preço da mercadoria. Ricardo, no primeiro capítulo dos seus *"Princípios de Economia Política e Tributação"*, introduziu uma ponta de veneno nessa dissociação de conceitos, ao observar que a utilidade, embora não seja medida do valor de troca, é essencial à existência desse valor. Um bem que não pudesse contribuir de alguma forma para a nossa satisfação, por escasso que pudesse ser, ou fosse qual fosse a quantidade de trabalho necessária para obtê-lo, seria fatalmente destituído de valor de troca. Mas também Ricardo não conseguiu ir além desse ponto, e a conciliação do valor de uso com o valor de troca só se estabeleceu muito mais tarde , com o desenvolvimento da teoria marginalista.

A segunda observação, que constitui o objeto do Capítulo VII da Riqueza das Nações, é que o preço de mercado pode desviar-se, mas tende a flutuar em torno daquilo que Adam Smith denomina o *"preço natural"*. O capítulo em questão começa por notar que existe em cada comunidade ou região um índice normal de salários para cada ramo de trabalho,de renda para cada tipo de terra, e de lucro de capital. Esses níveis normais variam conforme a riqueza de cada comunidade e o seu

ritmo de progresso. Quando o preço de determinada mercadoria remunera a terra, o trabalho e o capital exatamente nesses índices normais, diz-se que a mercadoria é vendida ao seu preço natural. Os desajustes entre a oferta e a procura podem desviar o preço de mercado do produto do seu nível natural. Se a oferta for insuficiente, ou a procura excessiva, o preço subirá acima do natural. Mas, aí, o mercado exercerá o seu efeito corretivo: as altas rendas, salários ou lucros estimularão o afluxo de mais fatores para a produção da mercadoria. Com o aumento da oferta, o preço de mercado tende a voltar ao nível natural. O raciocínio inverso, obviamente, se aplica ao caso em que a oferta é excessiva em relação à procura. Embora sem dizer exatamente como, Adam Smith admite que a procura esteja ligada à utilidade dos bens. Com isso fica claro por que não sobrevivem os capitalistas que se lançam na produção de bens inúteis: simplesmente, porque não conseguirão remunerar terra, trabalho e capital pelos seus índices naturais.

A segunda dificuldade a transpor nas teorias do custo de produção residia na escolha das unidades de medida. Na realidade, essa dificuldade poderia ser contornada se a preocupação viesse a ser, como mais tarde se fez com as equações de Walras, a de explicar como se formam os preços relativos, e não os preços absolutos. Mas, Adam Smith pretendia encontrar uma unidade estável de medida para os valores, como na física o são o metro, o quilograma ou o segundo. Embora a humanidade ainda não tivesse ingressado na era inflacionária

do papel-moeda, as oscilações de preços em termos de ouro ou prata já eram suficientemente importantes para que não se aceitasse a moeda como uma unidade estável de valor. Adam Smith, no Capítulo V da Riqueza das Nações, imaginou encontrar uma solução para o problema admitindo que o preço real de uma mercadoria fosse o expresso em unidades de trabalho, em contraposição ao preço nominal, que se estabelece em dinheiro. Na realidade, a distinção entre preço nominal e preço real não tinha maior profundidade do que dividir a equação (1.1) pelo salário unitário w, transformando-a em:

$$p/w = at/w + n + kr/w \qquad (1.2)$$

o que de fato significa passar de uma tautologia a outra. Mas, a idéia de exprimir os valores em unidades de trabalho inspiraria nova concepção, que seria amplamente explorada primeiro por Ricardo e depois por Marx: a teoria do valor-trabalho.

A dificuldade mais substantiva das teorias do custo de produção, efetivamente, residia na ausência de um denominador comum que pudesse ser cancelado na determinação dos preços relativos. Na equação (1.1) existem três coeficientes técnicos, que se supõem determinados pelos melhores métodos conhecidos de produção: $\underline{a}$, $\underline{n}$ e $\underline{k}$, aos quais correspondem três níveis naturais de remuneração, $\underline{t}$, $\underline{w}$ e $\underline{r}$. Como a proporção em que se empregam terra, trabalho e capital não é a mesma na fabricação de diferentes produtos, os preços rela-

tivos não se podem determinar apenas em função dos coeficientes técnicos. Não há como escapar,assim,a uma teoria que explique como se formam a renda da terra, os salários e as taxas de lucro, ou, pelo menos, as relações entre essas remunerações de fatores.

A situação é muito diversa da que ocorreria se só existisse um fator de produção, e esse ponto foi muito bem entendido por Adam Smith na Riqueża das Nações. Se admitíssemos que o trabalho fosse o único fator de produção, a relação de preços de duas mercadorias seria igual à relação entre o número de homens - hora empregados na respectiva fabricação. Adam Smith apresenta essa teoria de formação dos preços como válida para uma sociedade primitiva, onde as terras ainda não foram apropriadas e onde o trabalho manual não seja ajudado pelas máquinas e equipamentos. Mas,logo a descarta para as sociedades mais sofisticadas,onde se tenham estabelecido a propriedade da terra e a acumulação de capital.Note-se que com um único fator de produção é dispensável saber como se forma a sua remuneração,para explicar a determinação dos preços relativos. Simplesmente,essa remuneração é o denominador comum que se cancela.

As construções unificadas, todavia, exercem enorme fascínio intelectual, e a idéia de que o valor de uma mercadoria pudesse exprimir-se pelo número de horas necessá -

rias à sua produção, isto é, a teoria do valor-trabalho, não iria morrer com tanta facilidade quanto imaginava Adam Smith. Na Riqueza das Nações, trata-se apenas de uma teoria aplicável às sociedades rudimentares. Ricardo, apesar da sua estupenda formação lógica, conseguiu, nos seus *Princípios de Economia Política e Tributação* , o aparentemente impossível: em alguns capítulos consagrar,e em outros,refutar a teoria do valor-trabalho. Até que veio Marx,para erguê-la à categoria de religião.

1.2) *Do impressionismo de Adam Smith à lógica de Ricardo*

A celebridade da Riqueza das Nações se deve a pelo menos duas características. De um lado, a de ter sido o primeiro livro importante escrito sobre economia. De outro lado, a de provavelmente conter muito menos erros do que os livros originais de economia publicados posteriormente. Essa segunda característica se deve ao fato de Adam Smith se ter mostrado suficientemente prudente para não se aventurar a ingressar no limite de incompetência. O custo dessa prudência, todavia, foi o de apenas esboçar, sem completar, uma teoria de formação de preços.

Após mostrar, no Capítulo VI, que o preço das mercadorias se decompõe em salários, rendas e lucros, e de a-

nalisar, no Capítulo VII, como o preço de mercado flutua em torno do natural, seria esperável que a Riqueza das Nações descrevesse o que determina a remuneração de cada fator de produção. Os capítulos seguintes são repletos de excelentes observações quanto a causas de variações dos salários,da renda da terra e dos lucros, mas estão longe de fornecer algo que se possa considerar uma teoria de determinação.Adam Smith naturalmente observa que o salário do trabalhador deve permitir a subsistência sua e de seus dependentes, sem o que a raça humana acabaria em uma geração. Mas,não afirma que os salários tendam a permanecer nesse nível de subsistência, admitindo que, na Grã-Bretanha de então, os salários fossem mais elevados do que o estritamente necessário para que o trabalhador constituísse família. Sem muita precisão, admite que o aumento do capital da sociedade eleve os salários e baixe as taxas de lucro. Num outro ponto, afirma que os salários mais altos não são os das nações mais ricas, mas os das nações que mais rapidamente crescem. Os salários individuais variam conforme a aptidão de cada trabalhador, a dificuldade de aprendizado da profissão, a regularidade do emprego, a salubridade das condições de trabalho, etc. As corporações, restringindo artificialmente a oferta de alguns empregos, conseguem aumentar os salários dos seus associados. Na mesma linha,Adam Smith observa que as taxas de lucro variam conforme o risco dos negócios, e o grau de concorrência ou monopólio. A renda da terra é uma típica remuneração de monopólio, sendo maior para

as terras mais férteis e mais próximas dos mercados.Todas essas observações são apresentadas na Riqueza das Nações com preciosos pormenores, fluência de estilo e acuidade empírica. Mas, no conjunto, representam apenas pinceladas impressionistas em direção a uma teoria de formação dos preços dos fatores de produção. Como se determinam os salários, a renda da terra e as taxas de lucro é questão que, efetivamente,não foi respondida por Adam Smith.

Na realidade, a maior contribuição de Adam Smith não reside na estrutura lógica da sua teoria da formação dos preços dos produtos e dos fatores de produção. Mas, identificar como era possível chegar a uma ordem econômica natural a partir de um sistema inteiramente descentralizado de decisões, o livre jogo das forças de mercado. O sistema se equilibraria como se guiado por *"mão invisível"*, que operaria as necessárias correções de rumo sempre que os preços de mercado se desviassem do seu nível natural. Retrospectivamente, seria possível afirmar que a Riqueza das Nações provou que o sistema de mercado era capaz de funcionar, mas não que ele fosse capaz de distribuir eficientemente recursos escassos. Esse tipo de consideração exigiria um aparato analítico fora do alcance da "Riqueza das Nações". Por acreditar que o indivíduo soubesse, melhor do que qualquer planejador oficial,julgar o que mais lhe convinha,Adam Smith induziu que a mão invisível não apenas era capaz de operar,mas também de operar com maior

eficiência do que a intervenção governamental. Smith não era um panglossiano a ponto de acreditar que todos vivessem no melhor dos mundos. Não apenas a intervenção governamental,mas também os monopólios e coalizões de produtores o inquietavam. Sua preocupação, por outro lado, não era combater o socialismo, que só iria ganhar corpo no Século XIX, mas o mercantilismo,tão em moda na época. Ao descobrir, pela lógica, que o sistema de mercado era ordenado por mão invisível,Adam Smith partiu, não por um silogismo, mas por uma extrapolação analógica, para a pregação do"laissez-faire". Os empiristas britânicos, desde Locke, preocupavam-se menos em construir grandes edifícios dedutivos a partir de umas poucas premissas,do que em alinhavar observações extraídas da realidade. Essa é a linha filosófica da Riqueza das Nações.

Ao contrário de Adam Smith, Ricardo é um escritor bastante árido. A Riqueza das Nações lê-se de um fôlego só. Os Princípios de Economia Política e Tributação só podem ser lidos com um lápis e papel ao lado,e alguns raciocínios de Ricardo só se tornam perfeitamente claros com o auxílio de um manual interpretativo. Na realidade, Ricardo possuía formidável propensão à abstração e, do ponto de vista lógico, as suas construções se tornariam muito mais precisas se fossem apresentadas na embalagem moderna de um modelo matemático. Ao invés, Ricardo apresenta seus raciocínios com base em fastidiosos exemplos sobre a composição do preço do trigo. Não se

pode criticar Ricardo por não ter apresentado os Princípios sob a forma de um modelo, primeiro porque seria exigir demais para a época, segundo porque, em 1821, um livro de economia repleto de equações dificilmente encontraria leitores. É natural, todavia, que numa exposição moderna do pensamento de Ricardo se recorra a equações interpretativas, com o que se ganha muito em tempo e em precisão.

Como compensação pela aridez, Ricardo realmente consegue construir uma teoria de determinação dos preços dos fatores de produção. O leitor desprevenido pode ter a impressão de que os Princípios de Economia Política e Tributação apresentam não apenas uma, mas às vezes duas teorias conflitantes para explicar a mesma coisa. Por exemplo, a formação de preços primeiro é explicada pela teoria do valor-trabalho, depois a partir da teoria de determinação da renda da terra, dos salários e dos lucros. Do mesmo modo há duas teorias de salários, a "lei férrea" segundo a qual os salários tendem ao nível de subsistência, e a "lei do fundo de salários" que, expressa em linguagem moderna, admite que os salários sejam proporcionais à relação capital/mão-de-obra.

Uma leitura atenta dos Princípios, no entanto, desfaz essas aparentes contradições. O Capítulo I dos Princípios de Economia Política e Tributação parte da teoria do valor-trabalho como primeira aproximação, mas não tarda a iden-

tificar as suas imperfeições, e a necessidade de substituí-la por outra explicação mais precisa. As duas teorias de salários são apresentadas em horizontes temporais distintos: a teoria do fundo se aplica a curto prazo, a lei férrea representa a tendência a longo prazo. O elo entre as duas se estabelece pela combinação da lei dos rendimentos decrescentes com a teoria malthusiana da população.

A explicação da renda da terra como o resultado do diferencial de fertilidade, apresentada no Capítulo II dos Princípios de Economia Política e Tributação, constitui uma das contribuições mais originais de Ricardo à análise econômica. Nos seus aspectos fundamentais, a teoria continua aceita até hoje. A teoria do lucro surge naturalmente como resíduo: a produção de uma sociedade é função da extensão e qualidade das terras cultivadas, da mão-de-obra empregada e do estoque de capital aplicado. A sobra, após o pagamento dos salários e da renda da terra, é o lucro. A taxa de rentabilidade, evidentemente, obtém-se dividindo o lucro total pelo estoque de capital.

Ricardo poderia ter parado aí, e já teria construído uma teoria estática de formação dos preços dos fatores de produção. Contudo, os Princípios de Economia Política e Tributação se preocupam em elaborar uma teoria dinâmica, que leva a importantes exercícios de futurologia. As hipóteses des

se modelo dinâmico são,basicamente,duas: primeiro, que os lucros são automaticamente reinvestidos e transformados em mais capital; segundo, que, na linha malthusiana, a população cresce a taxas tanto maiores quanto maior for o excedente dos salários sobre o nível de subsistência.

A conclusão de Ricardo é que, numa economia em que todas as terras férteis já tenham sido ocupadas, a mecânica dos rendimentos decrescentes necessariamente conduz ao estado estacionário ao nível da miséria. A população chegaria ao seu limite compatível com a escassez de alimentos, e o seu crescimento seria freiado pela equalização das taxas de mortalidade às de natalidade. Os proprietários de terras se apropriariam de uma proporção extorsiva do produto, os salários cairiam ao nível de subsistência e a acumulação de capital cessaria,pela exaustão dos lucros.

Contudo, o pessimismo de Ricardo não é incondicional. A lei dos rendimentos decrescentes só se aplica aos países onde a produção de alimentos é detida pela escassez de terras férteis, como se admitia ser a Grã-Bretanha. Em outros países, dotados de abundância de terras em relação à população, nada deteria o progresso da sociedade.

Mesmo para os países premidos pela escassez de terras, Ricardo aponta uma solução: a abertura ao comércio internacional, importando alimentos e exportando manufaturas.Nes

se sentido, o Capítulo VII dos Princípios de Economia Política e Tributação oferece mais uma das notáveis invenções de Ricardo, a doutrina das vantagens comparativas.

Como conclusão de sua análise, Ricardo não havia apenas construído uma teoria dinâmica de formação dos preços dos produtos e dos fatores de produção. Mas, também apresentava uma mensagem programática para a Grã-Bretanha da época: a de abolir o protecionismo à importação de alimentos. É impossível evitar que os marxistas afirmem que Ricardo desenvolveu toda a sua teoria porque era ligado aos capitalistas, adversários dos proprietários rurais. O fato é que os "Princípios de Economia Política e Tributação" representam um dos livros mais importantes e originais já escritos em matéria de análise econômica. O pensamento de Ricardo é suficientemente rico e fecundo para merecer uma síntese interpretativa, como a que se apresentará mais adiante.

1.3) A teoria ricardiana do valor-trabalho

O Capítulo I dos Princípios de Economia Política e Tributação abre a sua primeira seção com um longo subtítulo: "*O valor de uma mercadoria, ou seja, a quantidade de qualquer outra pela qual pode ser trocada, depende da quantidade relativa de trabalho necessária à sua produção, e não da maior ou menor compensação que é paga por esse trabalho*".

Fundamentalmente,esse é o enunciado da teoria do valor-trabalho, segundo a qual o preço de uma mercadoria é proporcional à quantidade de trabalho exigida na sua produção. Ricardo, após relembrar a distinção entre valor de uso e valor de troca, cuida de uma ligeira ressalva: há um pequeno grupo de mercadorias cujo valor é regulado apenas pela escassez. São as mercadorias não susceptíveis de reprodução, como algumas estátuas e quadros raros, livros e moedas escassos, vinhos de qualidade peculiar. A sua teoria do valor aplicar-se-á apenas às mercadorias cuja quantidade pode ser aumentada pelo exercício da atividade humana, e em cuja produção a concorrência opere sem restrições.

O subtítulo da Seção I é extremamente enfático, mas Ricardo tem o cuidado de só desenvolver a teoria do valor-trabalho para as mesmas economias rudimentares a que se havia referido Adam Smith. O ponto importante detectado por Ricardo é que, a vigorar a teoria do valor-trabalho, é desnecessário dispor de uma teoria de salários para determinar a estrutura dos preços relativos. Com efeito, no caso, o salário unitário é o denominador comum que se cancela.

A Seção II do Capítulo I assinala que trabalhos de diferentes qualidades são remunerados diferentemente, mas que isso não é causa de variação do valor relativo das mercadorias. Com isso ,Ricardo lembra que o trabalho não é um

fator de produção homogêneo, mas que se distingue qualitativamente, conforme o grau de habilidade e instrução do trabalhador. A solução para o problema está em admitir que o mercado estabeleça coeficientes estáveis de proporcionalidade dos salários, conforme o grau de qualificação da mão-de-obra. Esses coeficientes devem ser usados para a conversão de horas de trabalho qualificado em horas-equivalentes de trabalho comum.

Na Seção III, Ricardo prossegue com a teoria, observando que não apenas o trabalho aplicado imediatamente às mercadorias afeta o seu valor; também o trabalho gasto em implementos, ferramentas e edifícios que são usados na produção daquelas mercadorias. Mas, já na Seção IV surge a primeira grande pedra no caminho. O subtítulo é sugestivo: " *O princípio de que a quantidade de trabalho empregada na produção de mercadorias regula seu valor relativo, consideravelmente modificado pelo emprego de maquinária e de outros capitais fixos e duráveis*". Com alguns exemplos numéricos, Ricardo conclui que a teoria do valor-trabalho não serve para determinar os preços relativos de mercadorias que se fabriquem com diferentes relações capital/mão-de-obra. Isso o leva, nas seções restantes, a reconhecer que os preços relativos das mercadorias não podem ser determinados apenas a partir dos coeficientes técnicos de produção. Havendo mais de um fator de produção, e as proporções de emprego dos fatores não sendo as mesmas para os diferentes produtos, não mais existe um de

nominador comum que se possa cancelar.

O leitor propenso à crítica tem o direito de indagar por que Ricardo dedica o primeiro capítulo dos seus Princípios inicialmente para consagrar, e depois para derrubar a teoria do valor-trabalho. É possível que, didaticamente, o método não seja dos melhores. A impressão que se tem é que Ricardo aceitava a teoria do valor-trabalho como primeira aproximação, mas que julgava absolutamente necessário apontar as suas imperfeições e substituí-la por outra melhor. Seja como for, essa teoria melhor é apresentada nos demais capítulos dos Princípios de Economia Política e Tributação.

1.4) *A teoria da renda da terra*

O Capítulo II dos Princípios de Economia Política e Tributação, que trata da renda da terra, não apenas é muito original, mas também muito didático, trazendo embutida a lei dos rendimentos decrescentes. O Capítulo III estende os mesmos princípios para explicar a renda das minas.

Ricardo começa por observar que, num país subpovoado e com abundância de terras férteis, não haveria renda da terra. O que faz surgir essa renda é a necessidade ,

com o crescimento demográfico, de ocupar não apenas as melhores terras, mas também outras de menor fertilidade. O preço do trigo é o mesmo, quer ele provenha de uma terra mais ou de outra menos produtiva. Mas, a quantidade de capital e trabalho necessária à produção de uma tonelada de trigo é menor na terra mais fértil. Como o preço do trigo deve remunerar o capital e o trabalho empregados na terra de pior qualidade, o proprietário da terra mais fértil se beneficiará de uma renda, como fruto do seu diferencial de fertilidade.

Em termos analíticos simples, suponhamos que o método mais econômico para a produção de uma tonelada de trigo exija n_1 unidades de trabalho e k_1 unidades de capital, na terra de pior qualidade que esteja sendo cultivada. Essa terra, segundo Ricardo, não faz jus a qualquer renda, de modo que o preço de uma tonelada de trigo será dado por:

$$p = n_1 w + k_1 r \qquad (1.3)$$

sendo w o salário e r a taxa de lucro. Admitamos, agora, que numa terra mais fértil uma tonelada de trigo se produza usando a_0 unidades de terra, n_0 de trabalho e k_0 de capital. A hipótese de que esta terra seja mais fértil equivale a afirmar que $n_0 w + k_0 r < n_1 w + k_1 r$. Como o preço do trigo produzido nas duas terras é o mesmo, a terra mais fértil receberá uma renda t_0 por unidade de área, tal que:

$$p = a_0 t_0 + n_0 w + k_0 r = n_1 w + k_1 r \quad (1.4)$$

ou seja:

$$a_0 t_0 = (n_1 - n_0) w + (k_1 - k_0) r \qquad (1.5)$$

Naturalmente, o aumento da população num país com relativa escassez de terras obriga o aproveitamento de áreas cada vez piores. O resultado é o progressivo aumento da renda das propriedades mais férteis. Nesse sentido, Ricardo deixa bem claro que a renda da terra é efeito, e não causa, do encarecimento dos alimentos:

"Portanto, a razão pela qual os produtos primários aumentam em valor comparativo é o emprego de mais trabalho para produzir a última porção obtida, e não o pagamento de renda ao proprietário de terra. O valor do cereal é regulado pela quantidade de trabalho aplicada à sua produção naquela qualidade de terra, ou com aquela porção de capital que não gera pagamento de renda. O cereal não encarece por causa do pagamento da renda, mas, ao contrário, a renda é paga porque o cereal encarece e, como acabamos de observar, nenhuma redução ocorreria no seu preço mesmo que os donos de terras renunciassem à totalidade das suas rendas. Tal medida somente permitiria que alguns fazendeiros vivessem como cavalheiros, mas não reduziria a quantidade de trabalho necessária para obter produtos primários nas terras menos produtivas que se cultivassem".

A teoria da renda da terra tal como apresentada por Ricardo não apenas é muito hábil. Ela continua substancialmente válida para explicar não só a renda da terra e das minas, mas também a de todos os bens que não são susceptíveis de reprodução (inclusive máquinas usadas, embora,aqui, a sua remuneração não corra o risco de se transformar em problema social). Naturalmente, a renda da terra não depende apenas da sua fertilidade, mas também da sua proximidade dos centros consumidores, um ponto apenas lembrado de passagem por Ricardo. Também o progresso tecnológico pode alterar substantivamente a estrutura das rendas e freiar a tendência ao seu aumento. Mas, nas linhas mestras, o Capítulo II dos Princípios de Economia Política e Tributação incorporou-se sem maiores reparos à teoria econômica moderna.

1.5) *Salários, lucros, rendimentos decrescentes*

Os capítulos dos Princípios de Economia Política e Tributação que tratam dos salários e lucros são suficientemente importantes e insuficientemente claros para pedirem uma análise interpretativa. A falta de clareza resulta, em primeiro lugar, da mistura algo desordenada da teoria do fundo de salários com a lei férrea do nível de subsistência e, ainda, com a lei dos rendimentos decrescentes. Em segundo lu

gar, da concepção dúbia quanto ao papel do capital como fator de produção. Para tornar ainda menos cômoda a leitura, Ricardo se refere a aumentos e diminuições de salários que ora são nominais, ora reais.

A origem, quer da lei férrea, quer da lei dos rendimentos decrescentes, se encontra na teoria malthusiana da população. Em seu famoso ensaio, Malthus anteviu a catástrofe a que estava condenado um mundo onde a população tendia a crescer em progressão geométrica, enquanto os recursos para alimentá-la aumentavam apenas em progressão aritmética: a humanidade parecia caminhar, inexoravelmente, para a estagnação ao nível da miséria, onde o tremento aviltamento dos salários se encarregaria de freiar o crescimento demográfico, elevando as taxas de mortalidade ao nível das de natalidade. O remédio pregado por Malthus era a planificação familiar da época: a abstenção sexual voluntária, nenhum homem se casando nem antes dos vinte e cinco anos nem antes de ganhar o suficiente para sustentar mulher e seis filhos.

A disparidade entre as progressões de Malthus, a aritmética e a geométrica, espontaneamente conduziu à lei dos rendimentos decrescentes, freqüentemente usada por Ricardo em seus exercícios explicativos. Devido à limitação das terras e à necessidade de se ocuparem áreas cada vez menos férteis, cada trabalhador a mais aumentaria o produto total

da comunidade; mas,o adicional de produção por trabalhador se tornaria cada vez menor. (Em linguagem moderna,dir-se-ia que, mantidas as quantidades dos demais fatores, a produtividade marginal do trabalho é positiva,mas decrescente; ou, com um mínimo de cálculo diferencial, que se $y=f(N)$, sendo y o produto e N o emprego, $f'(N) > 0$, mas $f''(N)<0$).

Um outro subproduto da teoria malthusiana era a chamada lei férrea dos salários: devido à pressão demográfica contra os rendimentos decrescentes do trabalho, os salários tenderiam a permanecer ao nível de subsistência.

Ricardo encampa explicitamente a lei férrea logo no início do Capítulo V dos Princípios,ao afirmar que o preço natural do trabalho é aquele necessário a capacitar os trabalhadores a subsistir e a perpetuar a sua raça, sem aumento ou diminuição. A definição ricardiana de nível de subsistência é,assim,bastante objetiva: salário natural seria aquele que mantivesse estável à oferta de trabalho. Logo adiante, Ricardo acentua que esse preço natural varia no espaço e no tempo,conforme os hábitos e costumes dos povos.

Uma outra teoria, no entanto, havia surgido no início do Século XIX: a do fundo de salários. Na sua versão original, essa teoria afirmava que o capital de uma sociedade é igual ao total dos salários por ela pagos (isto é, o pro

duto do salário unitário pelo volume de emprego). Essa versão é demasiadamente tosca, contendo uma inconsistência dimensional, já que capital é estoque (valor), e salário, fluxo (valor por unidade de tempo). Mas, é possível torná-la digerível admitindo que o total de salários pagos, num determinado período, seja proporcional ao estoque de capital existente no início desse período:

$$wN = cK \qquad (1.6)$$

w representando o salário por homem-hora, N o número de trabalhadores-hora empregados, K o estoque de capital e c uma constante dimensional.

Essa teoria equivale à hipótese de que o salário $w = cK/N$ seja proporcional à relação capital/mão-de-obra, ou, ainda, que a taxa de crescimento dos salários seja igual à diferença entre as taxas de aumento do capital e da mão-de obra empregada. Ricardo não enuncia explicitamente a teoria do fundo de salários, mas admite com muita clareza que a procura de mão-de-obra seja determinada pelo estoque de capital, e a oferta pelo tamanho da população; e que os salários aumentem, permaneçam estacionários ou declinem conforme o estoque de capital se expanda a taxas maiores, iguais ou inferiores à oferta de trabalho. Isso equivale à aceitação de algo próximo da teoria do fundo de salários. Com rigor matemático, pode-se assegurar que Ricardo admite que os salários sejam fun-

ção crescente da relação capital/população.

A conciliação das duas teorias, a do fundo de salários, que determina o preço de mercado da mão-de-obra,e a da lei férrea, que determina o seu preço natural, é estabelecida nos Princípios de Economia Política e Tributação pela combinação de duas outras hipóteses: uma versão aprimorada da teoria malthusiana da população e a lei dos rendimentos decrescentes.

A primeira dessas hipóteses complementares é apresentada com muita precisão. Ricardo supõe que a taxa de crescimento da população seja função crescente da diferença entre o salário de mercado e o nível de subsistência. Entra, aí, a lei dos rendimentos decrescentes. O aumento demográfico acabará obrigando o aproveitamento de terras cada vez menos férteis, e o excedente do produto sobre as necessidades básicas da população se tornará cada vez menor. Com isso, diminuirá a taxa de crescimento do estoque de capital,e os salários começarão a cair em poder aquisitivo, convergindo para o seu nível natural de subsistência.

Esse emprego da lei dos rendimentos decrescentes para explicar por que a taxa de crescimento do capital acaba caindo abaixo da correspondente à expansão populacional requer maiores esclarecimentos. É preciso,primeiro, saber o que

determina a acumulação de capital; segundo, como o aumento do capital e da força de trabalho afetam a capacidade de produção do país.

Embora, do ponto de vista didático, os Princípios de Economia Política e Tributação tenham sido escritos numa espécie de ordem indireta, não é difícil descobrir a teoria ricardiana da acumulação. Tautologicamente, Ricardo admite que o produto y se distribua entre o total da renda da terra R, a folha de pagamento wN e o lucro L:

$$y = R + wN + L \qquad (1.7)$$

O crescimento da população e do produto obriga a ocupação de terras cada vez menos férteis, o que faz com que a renda da terra absorva parcela cada vez maior do produto:

$$R = yh(y) \qquad (1.8) \quad \text{sendo} \quad h'(y) > 0.$$

Os salários supõem-se, numa versão adaptada da teoria do fundo de salários, função crescente da relação capital/população:

$$w = g(K/P) \qquad (1.9) \quad \text{sendo} \quad g'(K/P) > 0.$$

O crescimento da população supõe-se regulado por uma versão modificada da teoria malthusiana:

$$\frac{1}{P}\ \frac{dP}{dt} = z(W)\text{, sendo } z'(w) > 0 \text{ e } z(w_0) = 0 \qquad (1.10)$$

P designando a população, w_0 o salário de subsistência, t o tempo.

Ricardo considera os lucros como resíduo, isto é, a sobra $y - R - wN = L$ do produto, após o pagamento da renda da terra e dos salários. E supõe que, enquanto os assalariados e proprietários de terra gastam todos seus rendimentos em consumo, os capitalistas reinvestem todos os seus lucros . Isso equivale à seguinte lei analítica de acumulação do capital:

$$\frac{dK}{dt} = L = y\left[1 - h(y)\right] - wN \qquad (1.11)$$

O elo que falta é a função de produção, isto é, a relação entre o produto y , o estoque de capital K e a força de trabalho N .É óbvio que Ricardo admite alguma relação desse tipo, mas qual a forma específica dessa relação,eis uma questão insuficientemente esclarecida nos Princípios de Economia Política e Tributação. A ausência desse esclarecimento tem levado os intérpretes de Ricardo a construir três tipos diferentes de modelos formais de tendências dos salários e lucros.

O primeiro tipo de modelo supõe que a força de trabalho empregada seja proporcional à população, e que o pro

duto dependa apenas da força de trabalho, $y = f(N)$. Esse tipo de modelo tem a grande vantagem da simplicidade. A lei dos rendimentos decrescentes, como é fácil provar com um pouco de cálculo diferencial, não implica apenas que a produtividade marginal do trabalho, $f'(N)$, seja decrescente; implica, também, a queda da produtividade média, $f(N)/N$. Como hipótese complementar (indispensável ao funcionamento do raciocínio ricardiano), supõe-se que, se a força de trabalho crescer ilimitadamente, a sua produtividade média cairá abaixo do salário de subsistência, w_0. Como parte do produto (uma proporção crescente, segundo Ricardo) destina-se ao pagamento da renda da terra, é claro que a população cessará de crescer antes que a produtividade média do trabalho caia até w_0. De alguma forma, a economia deverá marchar para um estado estacionário, onde desapareçam os lucros e, conseqüentemente, a acumulação de capital; onde os salários caiam ao nível de subsistência, e, aí, a população pare de crescer.

O defeito desse tipo de modelo é ignorar o papel do capital como fator de produção. O estoque de capital passa a figurar nas equações apenas como o determinante da folha de salários, mas sem nada ter a ver com o total da produção. Fica, aí, a pergunta: para que se usa o capital na produção ? O esquecimento de que o capital tem algo a ver com o nível de produção, por absurdo que possa soar nos dias de hoje,

foi pecado freqüentemente cometido por ilustres economistas do século passado, inclusive por Marx, em muitas passagens de "*O Capital*". Mas, não é essa a impressão que se tem do pensamento de Ricardo, após a leitura cuidadosa dos Princípios.

Um segundo tipo de modelo continua admitindo a força de trabalho como uma fração constante da população, mas adota uma função de produção da forma $y = f(K,N)$, onde capital e trabalho se podem combinar em proporções variáveis. A hipótese dos rendimentos decrescentes é, agora, equacionada supondo-se que, se $m > 1$, $f(mK, mK) < mf(K,N)$. (Se o capital e a mão-de-obra duplicam, a produção total não chega ao dobro, porque a disponibilidade de terra não variou). Esse tipo de construção parece bastante atualizado, mas no tempo de Ricardo não era habitual o emprego de funções de produção com fatores substituíveis. As possibilidades de substituição eram, quando muito, discutidas em função de mutações tecnológicas, mas não com a tranqüila continuidade implícita nos exercícios da teoria marginalista. De resto, sem o uso de derivadas parciais seria muito difícil construir qualquer teoria de salários, para uma função de produção dessa forma.

Um terceiro tipo de modelo reconhece que o capital é fator de produção, mas admite que capital e trabalho se combinem em proporções fixas. É provável que esse seja o

tipo de modelo que mais se aproxime do pensamento de Ricardo. Como as taxas de crescimento do estoque de capital e da população podem diferir, pelo menos a curto prazo, torna-se necessário admitir que a fração empregada da população possa variar. Isso, todavia, nada tem de absurdo, nem contradiz qualquer das linhas de argumentação apresentadas nos Princípios de Economia Política e Tributação. Uma ligeira complicação surge em relação à teoria do fundo de salários. Supondo-se tecnicamente constante a relação capital/mão-de-obra, e admitindo-se a folha de salários, wN, proporcional ao estoque de capital, conclui-se, naturalmente, que o salário unitário deve também ser constante. Isso conflita com as diversas passagens dos Princípios que admitem explicitamente que os salários possam aumentar ou diminuir, conforme o estoque de capital cresça mais ou menos rapidamente do que a população. Deve-se observar, porém, que em nenhum momento Ricardo enuncia a lei do fundo de salários na sua forma $wN = cK$, mas admite, apenas, que o salário seja função crescente da relação capital/população.

Desenvolveremos mais adiante um modelo formal desse terceiro tipo. Como os economistas do século passado não tinham o hábito de explicitar com suficiente clareza todas as suas hipóteses, é impossível saber qual seria a reação de Ricardo ao ver o seu pensamento enquadrado em determinado con -

junto de formulações matemáticas. O importante a notar é que qualquer dos tipos de modelo mencionados conduz precisamente às conseqüências da lei dos rendimentos decrescentes previstas por Ricardo.

1.6) *A teoria das vantagens comparativas*

O Capítulo VII dos Princípios de Economia Política e Tributação, que trata do comércio exterior, é dos mais densos e originais concebidos por Ricardo. Não só é apresentada com muita clareza a teoria das vantagens comparativas, como se encontra, já mais do que em forma embrionária, a teoria quantitativa da moeda, e um modelo de distribuição internacional do ouro monetário, em regime de comércio livre.

A primeira observação de Ricardo é que a troca de mercadorias entre as nações não é regida pelas vantagens absolutas, em termos de maior ou menor quantidade de trabalho necessária à produção de determinada mercadoria. A produção de certa metragem de tecidos pode custar 100 homens-hora na Inglaterra e apenas 90 homens-hora em Portugal, mas isso, a priori, não impede que a Inglaterra seja exportadora de tecidos para Portugal. A razão está em que não é possível deslocar automaticamente trabalhadores ingleses para Portu -

gal, ou vice-versa. Na realidade, Ricardo admite,na ausência de barreiras aduaneiras, ampla mobilidade internacional dos produtos. Mas, nenhuma mobilidade do capital e do trabalho.Isso permite que as remunerações dos fatores sejam completamente diferentes,de um país para outro. (Só um século mais tarde Bertil Ohlin demonstraria que o comércio livre tende a atenuar as desigualdades internacionais dos preços dos fatores de produção. E só na década de 1940 surgiria o famoso teorema de Stolper-Samuelson, que prova que, em condições ideais que nunca se verificaram na prática, o comércio livre entre as nações igualaria a remuneração dos fatores). Citando especificamente Ricardo, "*o trabalho de 100 ingleses não pode ser trocado pelo de 80 ingleses, mas a produção de 100 trabalhadores ingleses pode ser trocada pela de 80 portugueses, 60 russos ou 120 índios orientais*".

A observação seguinte de Ricardo é que o interesse do comércio internacional provém das diferenças de vantagens comparativas. Suponhamos que para produzir determinada quantidade de tecidos sejam necessários 100 homens-ano na Inglaterra, e 90 homens-ano em Portugal. E que para a fabricação de um certo volume de vinho sejam exigidos 120 homens-ano na Inglaterra, e apenas 80 em Portugal. Então,embora Portugal possua vantagem absoluta na produção de ambas as mercadorias,seria do interesse dos dois países que a Inglaterra exportasse os tecidos para Portugal,em troca de vinho.De fato, para a Inglaterra, a troca significaria obter com o produ

to de 100 homens-ano, o que lhe custaria 120; para Portugal, conseguir com 80 homens-ano o que lhe custaria 90.

Ricardo naturalmente observa que, como as mercadorias não se trocam umas pelas outras, mas por moeda (na época o ouro), para que as vantagens comparativas efetivamente criem o comércio é preciso que o preço do vinho seja menor em Portugal do que na Inglaterra,e que o oposto ocorra no caso dos tecidos. O comércio livre, no entanto, acabará regulando o estoque de ouro em circulação em cada país , de modo a que as vantagens comparativas sejam efetivamente aproveitadas. Suponhamos que tanto o vinho como os tecidos custassem mais, em termos de ouro, na Inglaterra do que em Portugal. A Inglaterra então se tornaria, numa primeira etapa, importadora de ambos os produtos. O déficit comercial, no entanto ,teria que ser saldado com a transferência de ouro da Inglaterra para Portugal. Isso faria com que a quantidade de moeda, e portanto todos os preços, baixassem na Inglaterra e subissem em Portugal. (Aí está implícita a teoria quantitativa da moeda). O contrário ocorreria se o preço-ouro tanto do vinho como dos tecidos fosse maior em Portugal. O equilíbrio, assim, se daria num ponto em que a distribuição de ouro entre os dois países fosse tal que o preço dos tecidos fosse menor na Inglaterra e o do vinho menor em Portugal, permitindo o equilíbrio do comércio entre os dois países.

Ricardo reconhece que o seu exercício, supondo apenas a troca de duas mercadorias entre dois países e usando a teória do valor-trabalho, é puramente esquemático. Os princípios gerais, todavia, pareciam extrapoláveis para um comércio multilateral envolvendo diversos produtos, partindo-se de uma teoria mais complexa de formação dos preços. Na realidade, o Capítulo VII dos Princípios é o ponto de partida de toda a teoria moderna do comércio internacional. Além do mais, para a época de Ricardo, continha uma mensagem eminentemente prática. A lei dos rendimentos decrescentes, de tão trágicas conseqüências, funcionava apenas na agricultura dos países com escassez de terras, como se admitia ser a Inglaterra da época. Mas não era aplicável nem à indústria britânica nem à agricultura dos países dotados de terras férteis e abundantes em relação à população. A Inglaterra teria,assim, como escapar, pelo menos por muito tempo, à fatalidade dos rendimentos decrescentes, exportando manufaturas para importar alimentos, dentro de um esquema internacional de divisão do trabalho proveitoso para todos os países.

1.7) *Um modelo de convergência para o estado estacionário*

Vejamos, agora, como é possível descrever a teoria ricardiana da evolução dos salários e lucros por um mode

lo formal. Como assinalamos na seção 1.5, o elo que faltava era a função de produção. Admitiremos que o produto y seja função do estoque de capital K e da força de trabalho empregada N, as quantidades de fatores devendo combinar-se em proporções fixas. Isso se traduz pelas equações

$$y = f(N) \qquad (1.12)$$

e

$$K = kN \qquad (1.13)$$

Admite-se, de acordo com a lei dos rendimentos decrescentes, que $f'(N) > 0$, mas $f''(N) < 0$; e, como hipótese complementar, que para valores suficientemente grandes de N a produtividade média do trabalho, $f(N)/N$, se torne inferior ao salário de subsistência, w_o.

As demais equações do modelo são as já apresentadas na seção 1.5:

$$y = R + wN + L \qquad (1.7)$$

$$R = yh(y) \qquad (1.8), \text{ sendo } h'(y) > 0;$$

$$w = g(K/P) \qquad (1.9), \text{ sendo } g'(K/P) > 0;$$

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = z(w) \qquad (1.10), \text{ sendo } z'(w) > 0 \text{ e } z(w_o) = 0$$

$$\frac{dK}{dt} = L \qquad (1.11)$$

A figura 1.1 resume as relações de produção e distribuição implícitas no modelo. Escolhendo-se convenientemente as unidades de tempo, é possível tornar $k=1$ e, portanto, $K=N$ (13). Isso permite marcar simultaneamente o estoque de

capital e a força de trabalho no eixo das abcissas. As três curvas traçadas representam o produto y, o produto menos a renda da terra $y-R = y\left[1-h(y)\right]$, e a despesa w_0N com o pagamento da mão-de-obra ao salário de subsistência.

O gráfico indica uma posição inicial em que $K_0 = N_0 = OA$. Do produto AE, a parcela DE destina-se ao pagamento da renda da terra. Presume-se que a parcela restante, AD, se distribua entre os salários AC e os lucros CD. O salário unitário $w=AC/OA$ seria superior ao de subsistência, e a taxa de lucro, $r=CD/OA$, positiva. Os lucros incentivariam a acumulação de capital, o excedente de salários sobre o nível de subsistência e o aumento demográfico.

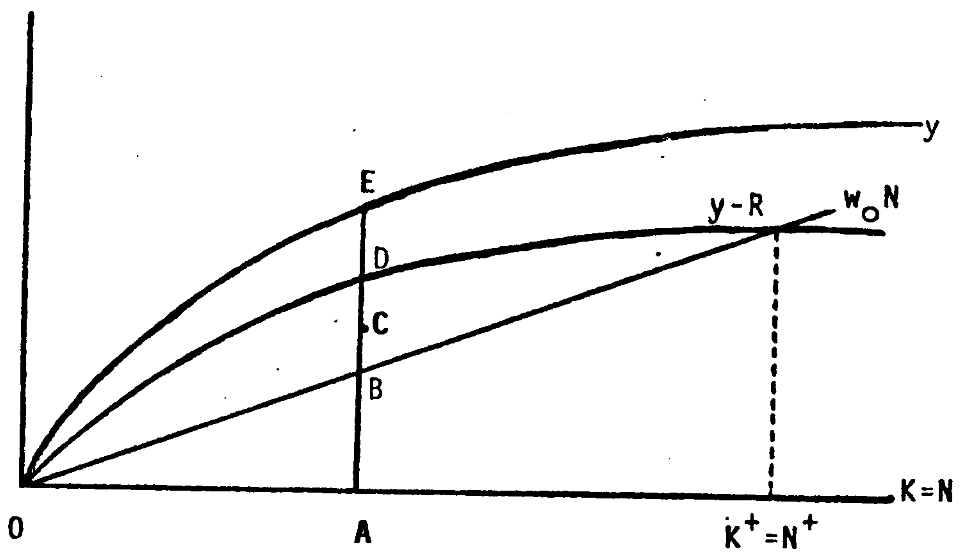


FIGURA 1.1

A margem do produto que se distribui entre salários além do nível de subsistência e lucros é representada

pela diferença de ordenadas entre as curvas $y-R$ e w_0N. No ponto de abcissa $K^+ = N^+$, essa margem se reduziria a zero. A FIGURA 1.1 sugere que a acumulação de capital e o crescimento da população levem a economia ao estado estacionário, nesse ponto. Os lucros, aí, se reduziriam a zero, cessando a acumulação de capital e, conseqüentemente, o aumento do emprego. Ao mesmo tempo, os salários desceriam ao nível de subsistência, paralisando o crescimento da população. Enquanto isso, boa parte do produto ficaria concentrada nas mãos dos proprietários de terras. Esse era, nas linhas mestras, o raciocínio de Ricardo.

Uma análise mais precisa da convergência para o estado estacionário exige que se dissequem as equações do modelo. Introduzamos, de início, a função auxiliar

$$v(N) = \frac{y\,[1-h(y)]}{kN} \qquad (1.14)$$

É imediato que $v(N)$ é função decrescente de $\underline{N}$. Pelas hipóteses complementares, para valores de $\underline{N}$ inferiores a N^+, $v(N)$ excede w_0/k; além de N^+, $v(N)$ se torna inferior a w_0/k.

Combinando-se as equações (1.7) e (1.8), resulta que $L=kNv(N) - wN$. Como, por (1.12) e (1.13),

$$\frac{dK}{dt} = k\,\frac{dN}{dt} = L \text{ , segue-se que:}$$

$$\frac{1}{N} \quad \frac{dN}{dt} = v(N) - w/k$$

Pela equação (1.9), o salário $\underline{w}$ é função crescente da relação $K/P = kN/P$. Isso permite que se tome:

$$w/k = \frac{g(kN/P)}{k} = j(N/P) \qquad (1.15)$$

sendo $j(N/P)$ uma função crescente. Reunindo os resultados até aqui obtidos, chegamos à equação:

$$\frac{1}{N} = \frac{dN}{dt} = v(N) - j(N/P) \qquad (1.16)$$

sendo $v(N)$ decrescente e $j(N/P)$ crescente.

Vejamos, agora, a relação correspondente ao crescimento demográfico. A equação (1.10) estabelece que a taxa de crescimento da população é função crescente dos salários ; estes, por sua vez, de acordo com a equação (1.15), crescem com a relação N/P. Podemos, assim, escrever:

$$\frac{1}{P} \quad \frac{dP}{dt} = s(N/P) \qquad (1.17)$$

sendo $s(N/P)$ uma função crescente que se anula para a relação N/P que, pela equação (1.15), reduza o salário ao nível de subsistência.

As equações diferenciais (1.16) e (1.17) permitem que se determinem as trajetórias de evolução da força de trabalho $\underline{N}$ e da população $\underline{P}$. A partir dessas trajetórias, obtêm-se imediatamente as do estoque de capital $K=kN$, do salário $w=g(K/P)$, do produto $y=f(N)$, da renda da terra $R=yh(y)$, e do lucro $L=y-R-wN$. Note-se que a taxa de lucro $r=L/K$, pelas equações (1.11) e (1.12), é dada por

$$r = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt} = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} \qquad (1.18)$$

ou seja, a taxa de lucro é igual à taxa comum de crescimento do estoque de capital e da força de trabalho.

A configuração de estado estacionário é dada pelos valores N^+ e P^+, tais que:

$$v(N^+) - j(N^+/P^+) = 0 \qquad (1.19)$$

e

$$s(N^+/P^+) = 0 \qquad (1.20)$$

Mostremos, agora, como se processa a convergência para o estado estacionário. A FIGURA 1.2 combina as curvas AB, de equação $v(N) - j(N/P)=0$, e OC, de equação $s(N/P)=0$. Pelas equações (1.16) e (1.17), conclui-se que a população cresce, se estabiliza ou decresce conforme se esteja à esquerda, sobre, ou à direita de OC. Do mesmo modo, a força de trabalho cresce abaixo de AB, e decresce acima de AB. O

ponto E de interseção das duas curvas corresponde ao estado estacionário.

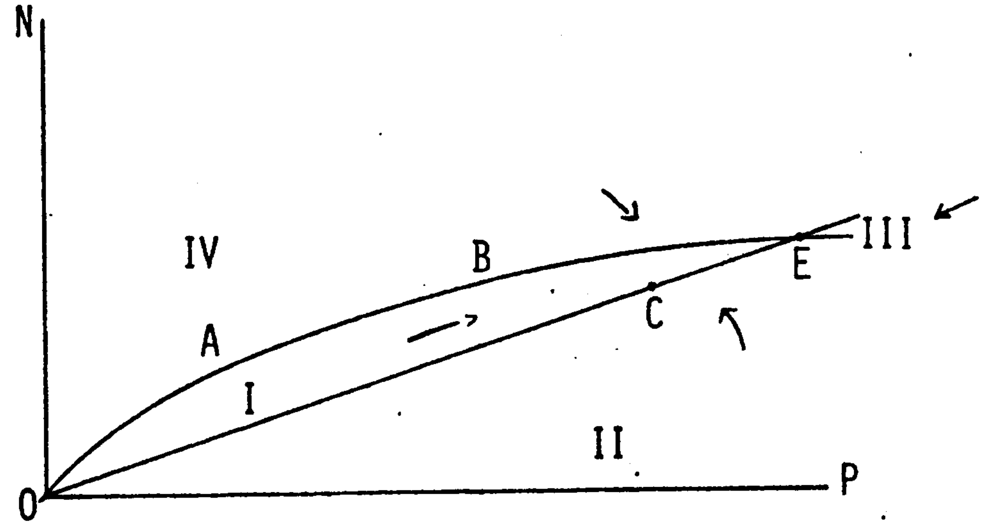


FIGURA 1.2

A combinação das duas curvas divide o primeiro quadrante em quatro regiões, com as seguintes características:

REGIÃO	$w-w_0$	P	L	N
I	positivo	cresce	positivo	cresce
II	negativo	decresce	positivo	cresce
III	negativo	decresce	negativo	decresce
IV	positivo	cresce	negativo	decresce

A análise do gráfico nos leva à conclusão de que uma trajetória que se inicie nas Regiões II ou IV pode, ou permanecer nessas regiões, ou entrar nas regiões vizinhas I e III.Contudo,uma trajetória que se inicie ou tenha entrado nas regiões I ou III fica nelas aprisionada. Na realidade, do ponto de vista prático é de se presumir que o ponto de parti-

da esteja na região I, onde os lucros são positivos e os salários se situam acima do nível de subsistência. Em qualquer caso, porém, é fácil concluir que a trajetória converge para o estado estacionário, em E.

O modelo acima discutido é um exemplo da prática moderna de interpretar o pensamento dos economistas clássicos enquadrando-o numa camisa de força matemática. A vantagem dessa prática está em obrigar a explicitação de todas as hipóteses e de tornar absolutamente precisa a obtenção das conclusões. Como se salientou anteriormente, é impossível saber qual seria a reação de Ricardo ao ver a sua teoria formulada em termos desse conjunto de equações diferenciais. Também se deve lembrar que, exatamente por não exprimirem as suas hipóteses em linguagem matemática, os economistas do século passado (e também de boa parte deste século), nem sempre deixavam muito claro o que era premissa, o que era conclusão. Por essa razão, um esforço moderno de reconstrução não pode ter qualquer pretensão de exclusividade.

De fato, o modelo acima é apenas uma das muitas construções formais capazes de interpretar, com razoável fidelidade, o pensamento de Ricardo. A conclusão final é profundamente pessimista: a humanidade não teria como escapar ao estado estacionário ao nível da miséria. Nos Princípios de Economia Política e Tributação, Ricardo admite explicitamente

que a economia britânica ainda estivesse longe desse estado estacionário, e que a marcha para a estagnação fosse retardada, periodicamente, pelas inovações (que, no modelo analítico acima apresentado, corresponderiam a um deslocamento para cima da curva AB). Ricardo também demonstra como o comércio livre entre as nações poderia retardar ainda mais essa convergência para o estado estacionário, o que corresponderia no modelo ao abrandamento da lei dos rendimentos decrescentes e da conseqüente tendência à concentração de renda nas mãos dos proprietários de terras. Todas essas ressalvas, no entanto, apenas amenizam o pessimismo embutido nos Princípios. O mundo de Adam Smith marchava para o progresso pela divisão do trabalho. O de Ricardo vivia em luta permanente contra o caminho mais ou menos inexorável para o estado estacionário.

1.8) *A visão marxista*

A enorme influência exercida por Marx sobre a história contemporânea dificilmente se pode explicar pela sua contribuição à teoria econômica. Sob esse ponto de vista, o Capital é bem menos denso do que a Riqueza das Nações, os Princípios de Economia Política e Tributação, ou os Elementos de Economia Pura de Walras. A força de Marx está na sua capacidade de combinar economia, sociologia, política, filosofia, história e misticismo, em escala sem paralelo na história do

pensamento econômico.

As duas grandes influências sobre Marx foram a lógica de Hegel e a escola clássica inglesa. A lógica, para Hegel, correspondia ao que normalmente se considera metafísica: a busca do conhecimento do Absoluto. A conquista desse conhecimento, na filosofia hegeliana, seguia o movimento tríplice, denominado dialético: tese-antítese-síntese. A tese apresentaria o Absoluto sob uma visão suficientemente parcial e incompleta para se tornar auto-contraditória; o enunciado da contradição geraria a antítese, também contraditória; da fusão da tese e da antítese resultaria a síntese. Esta serviria de tese à nova etapa do movimento dialético, etc.

A lógica de Hegel é razoavelmente extra-terrena, e a grande habilidade de Marx constituiu em trazer à terra o seu componente místico, para construir o socialismo científico. Tal como Hegel, Marx admite que a História evolua pelo tríplice movimento dialético, mas em termos bem mais palpáveis. Em Hegel, a dialética é guiada por uma entidade mística denominada Espírito. Em Marx, pelas relações do homem com a matéria, através dos meios de produção.

O ponto central da filosofia de Marx é a chamada concepção materialista da história. A política, a religião, a filosofia, a organização econômica e a arte de qualquer épo

ca são, segundo Marx, conseqüência dos métodos de produção. É de se presumir que com isso Marx não pretendesse explicar todos os pormenores da cultura, mas apenas os seus traços gerais. Os métodos de produção, todavia, podem levar a organização social a contradições internas que levam à sua ruptura.

Essa idéia é o ponto de partida para a construção do socialismo científico que Marx iria elaborar com grandiosidade apocalíptica. Os socialistas utópicos, em maior ou menor escala, atribuiam a miséria dos trabalhadores ao egoismo dos capitalistas. Marx apresenta a marcha para o socialismo num outro nível de dignidade, revestindo-a com a impressionante armadura do determinismo histórico. O sistema capitalista teria sucedido o feudalismo pela substituição da produção artesanal pela industrial. O capitalismo operava de acordo com suas regras de jogo, e não em função da maior ou menor generosidade dos patrões. Essas regras do jogo compreendiam duas leis básicas: a da manutenção dos salários ao nível de subsistência e a da acumulação sistemática dos lucros.

A derrocada do capitalismo decorreria não de seus pecados contra a humanidade, mas das contradições internas das suas leis de funcionamento. A primeira conseqüência da acumulação de capital seria o progressivo decréscimo da taxa de lucro. Esse decréscimo provocaria a contínua extinção das pequenas empresas e a concentração cada vez maior da pro-

dução em organizações monopolistas. A finalidade última dos bens de capital, todavia, é produzir bens de consumo. Mas, se os salários se mantêm no nível de subsistência, o consumo não cresce. Por que então acumular capital ? Essa contradição da lei da acumulação com a lei férrea dos salários levaria à repetição cada vez mais freqüente das crises de produção e emprego. Nessa fase, não só a taxa de lucro, mas a massa total de lucros tenderia a cair. Os capitalistas tentariam em vão opor-se a essas leis, oprimindo cada vez mais as classes trabalhadoras. Com isso, se agravariam as tensões entre os pouco ricos e os muito pobres, até o ponto em que inevitavelmente eclodisse a revolução do proletariado.

Dentro dessa ordem de idéias, Marx não era apenas um pregador da revolução comunista: era o seu profeta. Em sua concepção, todavia, profetizar e agir eram trabalhos complementares. " *Os filósofos apenas interpretaram o mundo de diversas maneiras, mas a tarefa real consiste em modificá-lo* ". Essa frase, apresentada nas " *Onze teses contra Feuerbach* ", resume o preceito marxista segundo o qual o pensador deve antecipar-se à História, transformando-se em ativista.

Embora Marx nutrisse profundo desprezo pelos socialistas utópicos, e, em sua obra, sempre se propusesse a ser científico, não são poucos os ingredientes românticos de

todos os seus escritos. Em centenas de páginas de " *O Capital* ", Marx deixa transparecer sua profunda indignação com as péssimas condições de vida dos trabalhadores ingleses de meados do século passado. A veemência da linguagem marxista , por seu turno, muitas vezes carregada de insultos aos seus adversários, não é própria de alguém interessado apenas numa pesquisa científica. Nesse sentido, o socialismo de Marx, antes de científico é de se classificar como teológico.

O conteúdo teológico de "*O Capital*" é certamente a razão de ser de sua grande influência sobre o pensamento contemporâneo. Cada um de nós possui preferências afetivas, pois, como disse Pascal, o coração tem razões que a razão desconhece. Confortar-nos-ia bastante, no entanto, que as razões do coração pudessem ser justificadas pela lógica. Essa sempre foi a preocupação dos teólogos, e é precisamente o objetivo de Marx em relação ao socialismo. Um marxista ortodoxo, embora possa discordar deste ou daquele teorema demonstrado em "*O Capital* ", deve crer que a ideologia socialista é a única que resistirá à evolução da História, e que o capitalismo, mais cedo ou mais tarde, será destruído pelas suas contradições internas. E essa é uma atitude mental bastante confortadora para todos aqueles que, por razões do coração, optaram pela ideologia socialista. O fato de "*O Capital*" ser um livro extremamente prolixo, sob vários aspectos ajudou o seu sucesso teológico. Pois é bem mais cômodo, para quem dese

ja que Marx esteja certo, acreditar nas suas previsões do que digerir e criticar as várias centenas de páginas de "*O Capital*".

Quem não deseje engulir dogmas é obrigado, todavia, a realizar aquilo que os marxistas consideram blasfêmia: dissecar " *O Capital* " em termos puros de análise econômica. Com efeito, é em termos de teoria econômica que Marx constrói sua teologia.

Sob esse aspecto, a obra de Marx é uma revisão, metodologicamente original, mas logicamente empobrecida, da teoria clássica inglesa. A teoria do valor-trabalho, a lei férrea dos salários, a tendência da taxa de lucro ao declínio, que são os pilares da análise econômica de Marx, encontram-se com bastante nitidez em Ricardo e seus contemporâneos. Os economistas ingleses haviam chegado a essas leis partindo dos rendimentos decrescentes e da teoria malthusiana da população.Marx, todavia, recusa-se a aceitar a teoria de Malthus, por ele considerada um libelo contra a humanidade, e não emprega a lei dos rendimentos decrescentes. Não usando essas duas leis, a futurologia marxista é, sob muitos aspectos,mais otimista que a dos clássicos ingleses, como de resto conviria a um bom teólogo. A teoria ricardiana descreve a marcha virtualmente inexorável para o estado estacionário ao nível da miséria. Em Marx, o capitalismo representa apenas um purgató

rio para os trabalhadores, com a salvação final assegurada pela revolução comunista.

A indagação natural se refere a o que Marx coloca no lugar dessas duas hipóteses. A resposta é: nada. Simples tautologias. Marx gasta algumas centenas de páginas de " *O Capital* " manipulando equações contábeis de um lado para outro, e sempre provando que uma fração cresce quando seu numerador aumenta ou seu denominador diminui. Essas manipulações são absolutamente corretas, mas também perfeitamente óbvias para o leitor versado em aritmética. O erro de Marx está em querer extrair leis científicas de equações contábeis. Nessa linha, a análise econômica marxista é logicamente bastante pobre, comparada à dos clássicos ingleses.

1.9) *A teoria marxista do valor-trabalho*

Vejamos, agora, como se desenvolve a teologia marxista. O seu primeiro ingrediente é a teoria do valor-trabalho, que, em O Capital, passa por várias etapas.

A primeira etapa, estritamente dogmática, é apresentada no Capítulo I do Livro Primeiro. Marx observa que se 1"quarter" de trigo se troca por *n* quintais de ferro, algo comum existe a essas duas coisas. Esse algo comum é necessa-

riamente uma terceira coisa que delas difere: o número de horas de trabalho socialmente necessárias à sua produção. Como valores, as mercadorias são apenas dimensões definidas do tempo de trabalho que nelas se cristaliza.

Marx define tempo de trabalho socialmente necessário como o requerido para produzir uma mercadoria, nas condições de produção socialmente normais existentes e com o grau médio de destreza e intensidade do trabalho. Com isso, fica descartada a hipótese, obviamente pouco digerível, de o valor de uma mercadoria aumentar quando for produzida por um trabalhador preguiçoso. Ao contrário, Marx reconhece explicitamente que, se uma nova técnica de produção diminui o número de horas necessárias à sua produção, o valor da mercadoria cai. Um trabalhador que continuasse a técnica antiga poderia despender o mesmo tempo que antes (digamos, o dobro do exigido pela nova tecnologia) para produzir a mesma coisa. No caso, porém, a sua hora individual de trabalho só representaria meia hora de trabalho social.

A conceituação de tempo de trabalho socialmente necessário é bastante habilidosa, mas o ponto de partida para a construção da teoria do valor é logicamente muito frágil. Não fica claro por que, se 1"quarter"de trigo se troca por *n* quintais de ferro, entre essas duas coisas deve haver em comum uma terceira, delas diferente. E, muito menos, por que essa terceira coisa deve ser o número de horas socialmente ne

cessárias à produção. Numa versão caricatural, o raciocínio de Marx lembra o seguinte: " *Se João e Pedro são gêmeos, deve existir um trigêmio; e esse terceiro irmão deve chamar-se Aristófanes* ".

No Capítulo VII do Livro Primeiro, Marx introduz a sua famosa tautologia $p = c + v + s$, onde p representa o valor (preço) da mercadoria; c o capital constante (matérias-primas mais desgaste dos equipamentos); v o capital variável (salários); s a mais-valia (lucros, rendas, juros, aluguéis). Marx observa que o valor efetivamente adicionado em cada etapa de produção é a soma $v+s$ do capital variável com a mais-valia, e que o capital constante é a soma de capitais variáveis e mais-valias em etapas anteriores. Isso nos permitiria escrever:

$$p = \Sigma v_i + \Sigma s_i \qquad (1.21)$$

o índice i se referindo à etapa de produção.

A relação s/v é denominada por Marx "*taxa de mais valia* ". Se admitirmos que essa taxa se iguale em todas as atividades, então realmente chegaremos ao valor-trabalho . Com efeito, nesse caso as relações s_i/v_i seriam iguais a uma constante , m; o capital variável usado em determinada etapa de produção seria expresso por $v_i = wh_i$, sendo w o sa

lário horário e h_i o número de horas trabalhadas. Teríamos , então:

$$p = w(1+m)\ \Sigma\ h_i = w(1+m)H \qquad (1.22)$$

$H = \Sigma h_i$ representando o número de horas socialmente necessárias à produção da mercadoria. Sendo w e m os mesmos para os diferentes ramos de atividade, as relações de preço entre duas mercadorias seriam iguais às dos respectivos tempos de trabalho.

O defeito dessa demonstração da teoria do valor-trabalho não é lógico, mas empírico. O pressuposto é que os capitalistas procurem elevar ao máximo a taxa de mais-valia, o que, em condições de concorrência, levaria ao nivelamento de s/v entre os diversos setores. Ocorre que o objetivo normal dos capitalistas não é o de maximizar a relação lucro/salários, mas a relação lucro/capital. Marx percebe esse problema no Capítulo IX do Livro Primeiro, mas efetivamente só o enfrenta no Livro Terceiro.

Marx define o capital total como a soma $C = c+v$ do capital constante com o variável; a taxa de lucro, como sendo a relação $s/C = s/(c + v)$; e batiza a relação c/v de "composição orgânica do capital". O pressuposto da teoria do valor-trabalho é que a taxa de mais-valia s/v seja a mesma em todos os ramos de atividade. Mas, se é a taxa de lucro, e não a de mais-valia, a que tende a se nivelar, s/v deve ser

tanto maior quanto mais elevada for a composição orgânica do capital. Isso se depreende imediatamente da relação:

$$\frac{s}{v} = \frac{s}{c+v} \, (c/v+1) \qquad (1.23)$$

As definições marxistas hoje soam algo estranhas, pois c, v e $c+v$ são fluxos, e o capital normalmente é entendido como estoque. Não haveria dificuldade, todavia em designar por $\underline{K}$ o estoque de capital, e substituir a composição orgânica do capital pela relação capital/mão-de-obra K/N. A taxa de lucro seria s/K e teríamos:

$$\frac{s}{v} = \frac{s}{K} \cdot \frac{K}{Nw} \qquad (1.24)$$

$\underline{w}$ designando o salário, e portanto $Nw = v$. A conclusão seria a mesma de Marx: se s/K tende a se igualar, s/v deve ser tanto maior quanto mais alta for a relação capital/mão-de-obra.

A saída de Marx diante do impasse é muito pouco convincente: a de que, numa economia capitalista, preços não correspondem a valores. E que a teoria do valor-trabalho efetivamente indicou os valores de troca nas sociedades primitivas (o que Adam Smith já reconhecera), e que também os indicaria caso os meios de produção pertencessem aos trabalhadores (o que Marx postula, mas obviamente não tem como demonstrar). Trata-se de um fecho melancólico para uma teoria que,

desde o começo de *"O Capital"*, se propunha a explicar o que eram os valores de troca, e não o que, segundo Marx, deveriam ser esses valores.

Na realidade, Marx não via como reconhecer que os paradoxos da teoria do valor-trabalho não representavam uma contradição interna do regime capitalista, mas de *"O Capital"*. Naturalmente pode-se conceber uma economia socialista onde os preços sejam fixados proporcionalmente aos salários despendidos na fabricação de cada mercadoria. Isso envolveria alguns problemas práticos, pois um mesmo produto homogêneo pode ser fabricado por diferentes processos, com coeficientes capital/mão-de-obra distintos; contudo, restaria, no caso, a escapatória de fixar o seu preço pelo custo médio em salários. Resta indagar por que escolher esse critério de fixação dos preços, e não um outro qualquer. No regime capitalista, em condições ideais de concorrência, o sistema de preços teria o mérito de exprimir o grau de utilização dos recursos escassos, servindo como um orientador eficiente da alocação desses recursos. Já um sistema de preços baseado na teoria do valor-trabalho teria o defeito de esquecer que o capital é fator escasso, inflando o consumo das mercadorias produzidas com alta relação capital/mão-de-obra.

Em suma, pouco ou nada resta de útil da teoria marxista do valor-trabalho. Ela falhou, quer como explicação pragmática da formação dos preços de mercado, quer como

tentativa de estabelecer como se deveriam determinar os preços numa economia ideal. O que ficou de mais importante foi a comunicação subliminar que Marx desejava transmitir aos seus discípulos: *a de que o trabalho era a única fonte legítima de valor, e a mais-valia o resultado da exploração do homem pelo homem.*

1.10) *A teoria marxista dos salários*

Marx usa dois argumentos para explicar por que os salários se fixam no nível de subsistência. O primeiro consiste em aplicar ao trabalho a própria teoria do valor trabalho. "*O valor da força de trabalho é determinado, como o de qualquer outra mercadoria, pelo tempo de trabalho necessário à sua produção, e por conseqüência da sua reprodução*". Suponhamos que a jornada de trabalho seja de doze horas. E que o tempo necessário para a produção das mercadorias indispensáveis ao sustento do trabalhador e seus dependentes seja de 6 horas. Então o operário trabalhará seis horas para si e seis para o seu patrão, originando 100% de taxa de mais valia. Assim, numa só penada Marx explica ao mesmo tempo por que, no regime capitalista, os salários se estabilizam ao nível de subsistência, e por que surge o fenômeno da mais valia: os métodos capitalistas de produção permitem que, para produzir 12 horas de traba -

lho, baste o consumo de 6 horas. A argumentação de Marx pode não ser logicamente convincente, mas é comunicativamente impressionante.

O problema da aplicação ao trabalho da própria teoria do valor-trabalho não é, como pode parecer à primeira vista, uma petição de princípio. Marx estava certo ao afirmar que, para o capitalista, o trabalho é uma mercadoria como outra qualquer, e que as leis que determinam o seu valor devem ser as mesmas que se aplicam a qualquer matéria-prima. A questão está na aceitação da teoria do valor-trabalho. Como vimos, essa teoria é, em primeira instância, apresentada por Marx como dogma, e é ainda nessa fase dogmática de " *O Capital* " que se expõe a teoria dos salários. Na realidade, mesmo os economistas, como Ricardo, que adotaram como primeira aproximação a hipótese do valor-trabalho, faziam questão de ressalvar que ela só era aplicável às mercadorias que pudessem ser reproduzidas em qualquer escala. A força de trabalho, afinal, mantém alguma relação com o tamanho da população. Esta pode variar ao longo do tempo, mas não pode aumentar ou encolher com a mesma elasticidade com que se fabricam tecidos ou sapatos.

Na realidade, o argumento de Marx supõe oferta infinitamente elástica de mão-de-obra, ao salário de subsistência. Isso se pode admitir dentro de certa faixa de demanda de trabalho, quando há desemprego, mas não indefinidamente. Marx

compreende essa dificuldade, e mais adiante desenvolve uma teoria segundo a qual a procura de mão-de-obra tende sistematicamente a se ajustar,de modo a manter um excedente de trabalhadores desempregados, o *"exército industrial de reserva"*.

Essa teoria é uma versão revista e, sob vários aspectos,melhorada, da teoria do fundo de salários. Tal como os clássicos ingleses, Marx admite que os capitalistas acumulem todos seus lucros. Mas,corrige a teoria do fundo de salários, observando que a procura de mão-de-obra é determinada,não pelo capital total, mas pela sua componente variável. Faz parte do sistema capitalista o aparecimento periódico de inovações que substituem trabalho por capital, aumentando a composição orgânica do capital, c/v. Em fases transitórias, a composição orgânica pode manter-se constante e,aí, por algum tempo a acumulação de capital pode efetivamente provocar a alta dos salários. Mas,não tardarão a aparecer os técnicos a serviço dos capitalistas,que se encarregarão de descobrir novos métodos de produção que poupem mão-de-obra, restabelecendo o exército industrial de reserva e fazendo os salários voltar ao nível de subsistência. O que Marx admite é que, ao longo do tempo, o efeito positivo do crescimento do estoque de capital sobre a demanda de mão-de-obra seja mais do que neutralizado pelo efeito negativo do aumento da composição orgânica do capital.

Numa notação dimensionalmente correta, que evite confusões entre estoques e fluxos, a teoria de Marx pode

ria expor-se nos seguintes termos:"a cada instante existe, em função do conhecimento tecnológico disponível, uma relação média capital/mão-de-obra igual a k. A procura de mão-de-obra não é determinada pelo estoque de capital K, mas pela relação K/k. Tanto K como k crescem no tempo. Mas, exceto em fases transitórias, a taxa de crescimento de k é superior à de K."

A substituição de K por K/k como determinante da demanda de mão-de-obra constitui inegável melhoria da teoria do fundo de salários. Contudo, a suposição de que K cresça mais lentamente do que k é absolutamente gratuita. Poder-se-ia, com igual coeficiente de arbitrariedade (e, certamente, com melhor base histórica), supor exatamente o contrário. Na realidade, trata-se de um exemplo do método, freqüentemente empreendido por Marx, de querer extrair de uma tautologia algo que não seja outra tautologia.

O que Marx parece não ter percebido é que, para o capitalista que deseje maximizar a sua taxa de lucro, o processo de produção ideal não é, necessariamente, o que use menos mão-de-obra por unidade do produto. Imaginemos que o preço de um produto seja p, que o salário seja w, e que determinada tecnologia use k unidades de capital e n unidades de mão-de-obra. A tecnologia ideal é a que maximiza a taxa de lucro

$$r = \frac{p - nw}{k} \qquad (1.25)$$

a qual não tem por que coincidir com a que minimiza n/k.

1.11) *A taxa decrescente de lucro*

A terceira parte do Livro Terceiro é o ponto culminante de *"O Capital"*, pois nela Marx tenta provar que a acumulação, inerente ao regime capitalista, traz em si o germe da sua própria ruína. Além de, pelo aumento da composição orgânica do capital, a acumulação manter os salários ao nível de subsistência e engrossar continuamente o exército industrial de reserva, ela provoca três outros efeitos, desastrosos para o próprio capitalista:

(*a*) a queda da taxa de lucro;

(*b*) a repetição cada vez mais freqüente das crises;

(*c*) a concentração monopolista da produção.

Marx começa tentando demonstrar a tendência à queda da taxa de lucro por exemplos numéricos que equivalem ao seguinte algebrismo: a taxa de lucro é expressa por:

$$\frac{s}{c+v} = \frac{s/v}{1+c/v} \qquad (1.26)$$

Faz parte do desenvolvimento capitalista o aumento progressivo da composição orgânica do capital, c/v; as

sim, supondo-se inalterada a taxa de mais-valia, s/v, a taxa de lucro deve declinar.

É fácil tornar a suposta demonstração acima dimensionalmente correta, substituindo a expressão da taxa de lucro por

$$\frac{s}{K} = \frac{s/v}{K/Nw} \qquad (1.27)$$

O que não é fácil é aceitar, dentro da tese marxista de que os salários não cresçam, que a taxa de mais valia permaneça inalterada. Com efeito, a acumulação de capital aumenta a produtividade do trabalho. Assim, da jornada de trabalho, digamos, de 12 horas, uma fração cada vez menor se destinará à produção dos bens indispensáveis à subsistência do trabalhador. Aumentará, com isso, o tempo excedente explorado pelos patrões e, por conseguinte, a taxa de mais-valia, s/v.

Essa objeção não passa despercebida a Marx. O aumento da produtividade gera, no seu entender, a elevação da massa absoluta de mais-valia (de fato, o produto cresce, enquanto a folha total de salários fica estável, ou diminui). Gera também o crescimento, dentro de certos limites, da taxa de mais-valia, s/v; mas, esse crescimento não é suficiente para neutralizar o aumento da composição orgânica do capital, e o

resultado,inevitável,é a queda da taxa de lucro. Trata-se, obviamente, de mais uma suposição gratuita. Mais uma vez , Marx tenta o impossível, que é de uma tautologia extrair uma lei econômica.

A teoria marxista das crises é bem mais interessante, e de alguma forma antecipa o que neste século viria a ser o pensamento keynesiano. O objetivo final da acumulação de capital é produzir maior quantidade de bens de consumo; mas,como vender mais bens de consumo, se aumenta continuamente o desemprego,e os salários não saem do nível de subsistência?Marx apenas percebe o problema de que uma economia capitalista pode entrar em depressão por insuficiência de demanda global. Na realidade, a sua hipótese de que os capitalistas apliquem automaticamente todos os seus lucros na aquisição de novos bens de capital não deixa lugar, no seu raciocínio, para essa insuficiência de demanda. A sua saída, na linha hegeliana de pensamento,consiste em, aí, identificar mais uma contradição interna das leis da acumulação capitalista.Essa contradição se resolveria pelas crises.

A teoria da concentração é apresentada como corolário bastante plausível da lei da taxa declinante de lucro. Em síntese, quando as taxas de lucro são baixas é mais fácil aos grandes capitalistas engolir os pequenos; estes não têm como se firmar no mercado, e facilmente se arruínam,tentando aumentar seus lucros em aventuras especulativas.

O declínio da taxa de lucro, evidentemente, provoca violentas tensões no regime capitalista. Não apenas os grandes devoram os pequenos; os patrões procuram opor-se à queda do próprio objetivo da acumulação, que é a taxa de lucro, aumentando cada vez mais as jornadas de trabalho e comprimindo os salários além dos limites socialmente suportáveis. Marx chega, assim, numa linguagem bastante digna, à sua conclusão apocalíptica:

" .... a acumulação crescente de capital reduz-da em concentração crescente. Assim, aumenta a força do capital, a autonomia em relação aos produtores reais, personificada no capitalista, das condições sociais de produção. O capital cada vez mais se patenteia força social: tem o capitalista por agente, e não se relaciona mais com o que pode criar o trabalho de cada indivíduo; mas patenteia-se força social alienada, autônoma, que enfrenta a sociedade como coisa e como poder do capitalista por meio dessa coisa. A contradição entre a força social geral que o capital privado encarna e o poder privado dos diferentes capitalistas sobre essas condições sociais torna-se cada vez mais aguda e acarreta que se dissolva essa relação, e a dissolução implica que os meios de produção se tornem sociais, coletivos, gerais. "

Como estilista, Marx não era primoroso, e o trecho acima é um bom exemplo. A linguagem messiânica, todavia, era a conveniente a um profeta. A concepção materialista da

História está longe de representar contribuição irrelevante à sociologia e à filosofia. Em particular, ela chama a atenção sobre a influência dos métodos de produção de cada época sobre não apenas a organização político-econômica, mas sobre a própria maneira de pensar. Os marxistas sempre acusam seus adversários de filosofar de acordo com seus interesses, embora não aceitem que esse mesmo princípio, como seria lógico, a eles se aplique. Dois pontos importantes, todavia, parecem ter sido esquecidos por Marx. Primeiro, que a humanidade não é apenas movida por interesses econômicos, mas também por sentimentos afetivos e pela ambição do poder. Segundo, que a simples curiosidade intelectual de alguns pensadores pode levar a descobertas teóricas e práticas que modificam profundamente a evolução da tecnologia, da filosofia e da organização social dos povos.

Também o processo dialético não parece constituir o caminho ideal para a formulação de um modelo científico, como Marx pretendia fazer para o socialismo. Enunciar leis e apontar suas contradições internas é método que sempre deixa o espectador numa dúvida: se as contradições são do sistema, ou de quem o está analisando. Por último, como filósofo e historiador, Marx parece bastante estreito nos seus horizontes. Para ele, o mundo se resume em três fases: feudalismo, capitalismo, socialismo. Pelo menos depois de Copérnico, é de se convir que isso seja muito pouco.

Apesar desses defeitos, a obra de Marx possui uma grandiosidade dificilmente encontrada em outros economistas. Como profeta, Marx atirou no que viu e acertou no que não viu. O regime comunista realmente estabeleceu-se em boa parte do mundo. Mas a Revolução Soviética não foi causada nem pelo aumento da composição orgânica do capital nem pelo declínio da taxa de lucro. O capitalismo, por sua vez, evoluiu de forma inteiramente diversa da prevista por Marx. O que talvez se possa dizer é que *"O Capital"* de alguma forma contribuiu para que essa evolução fosse diferente. Pois, nada melhor para prevenir uma catástrofe do que vaticinar a sua inevitabilidade.

Refutar a teoria econômica de Marx não chegou a ser tarefa difícil para aqueles que não gostavam de suas previsões. Mas exigiu, no plano teórico, que os economistas afiassem a sua capacidade de análise. E, no plano político, que o sistema capitalista passasse a ter maiores preocupações com sua dimensão social. Em suma, para usar sua própria linguagem, Marx talvez não tenha conseguido construir uma boa tese. Mas, certamente, pela sua capacidade de provocação, elaborou uma formidável antítese.

CAPÍTULO II

A TEORIA MARGINALISTA

2.1) *Cálculo diferencial e análise econômica*

A teoria marginalista pode ser definida como a solução dos problemas econômicos pelo cálculo diferencial. Dois séculos se passaram entre a invenção do cálculo diferencial por Newton e Leibniz e a sua introdução na análise econômica. Um desses séculos de atraso se explica pelo fato de a teoria econômica só se ter organizado como disciplina independente a partir de Adam Smith. O outro corre por conta de duas razões.

Em primeiro lugar, até não muito tempo atrás, a matemática,em geral,e o cálculo diferencial em particular , não eram o forte dos economistas, mais treinados em humanidade ou na prática dos negócios. Por esse motivo, os primeiros marginalistas a serem entendidos foram aqueles que conseguiram raciocinar com derivadas sem recorrer à simbologia do cálculo diferencial. Isso, dentro de certos limites,é praticável. Economistas com excelente formação matemática, como Marshall, trataram de traduzir derivadas em linguagem corren-

te em todos os seus textos, usando fórmulas apenas nos Apêndices destinados à leitura pelos iniciados. Essa prática ainda é adotada em textos de economia para principiantes. Também, como meio de evitar o simbolismo das derivadas, os elaboradores da teoria marginalista trataram de apelar para os gráficos e curvas. Contudo, as construções geométricas acabaram ficando tão complicadas que muitos leitores ou desistiram ou preferiram seguir um curso de cálculo diferencial.

Em segundo lugar, por muito tempo perdurou a crença de que, não sendo a economia uma ciência exata, nela não cabia a intromissão da matemática. Esse ponto requer esclarecimento, pois resulta da confusão, de um lado, do que seja ciência exata e de outro lado, do que seja matemática.

O apelido ciência exata se aplica àqueles ramos do conhecimento que a humanidade conseguiu enquadrar em fórmulas susceptíveis de aplicação numérica. Um exemplo clássico é a lei newtoniana da gravitação universal. Dadas as massas de dois corpos e a respectiva distância, consegue-se calcular a força de atração entre esses dois corpos. Os céticos sempre lançam dúvida sobre se é a ciência que é exata, ou os aparelhos de medição que são grosseiros, mas, no fundo, esse é apenas um problema de semântica.

Os progressos dos computadores têm facilitado o uso e o abuso dos modelos econométricos, mas poucos são os

economistas que acreditam que suas previsões quantitativas possam equiparar-se, em precisão, às de um astrônomo. Nesse sentido é que a economia é classificada como ciência inexata. Contudo, a teoria econômica, se não ensina tudo o que desejaríamos conhecer, pelo menos nos informa alguma coisa.E, como em qualquer ciência, esse ensinamento não se resume num amontoado desconexo de observações, mas em determinadas relações entre variáveis susceptíveis de mensuração. O que se pode dizer é que, freqüentemente, as relações identificadas não são quantitativas, mas apenas qualitativas. Para citar um exemplo, a lei dos rendimentos decrescentes nos informa sobre uma propriedade da função de produção, mas não nos permite conhecer a sua expressão analítica.

Ocorre que a matemática não lida apenas com funções analiticamente explicitadas, como $f(x)x^2$, $f(x)=5+sen2x + log x$, *etc*. A linguagem matemática presta-se, igualmente,ao trabalho com funções das quais apenas se conhecem algumas propriedades. Para dar um exemplo, quando se enuncia a lei dos rendimentos decrescentes sob a forma $y=f(N)$, sendo $f'(N) > 0$ e $f''(N)<0$, está-se afirmando alguma coisa de relevante sobre as relações entre produto $\underline{y}$ e emprego $\underline{N}$. A afirmação não é tão forte quanto seria a especificação exata da função de produção,mas,ainda assim, nos permite tirar conclusões bastante importantes.Em suma, a matemática não nos obriga apenas a raciocinar com leis quantitativas,mas serve igualmente ao desenvolvi -

mento das leis qualitativas.

Na realidade, a matemática é uma forma de linguagem, como o são o português, o inglês ou o turco. Mas, com uma peculiaridade: ela se presta, como nenhuma outra, à elaboração de longas cadeias dedutivas de raciocínio. A reconstrução do modelo ricardiano de convergência para o estado estacionário, desenvolvida no capítulo anterior, serve como exemplo. As conclusões a que se chega são realmente as previstas por Ricardo, mas por caminhos lógicos, muito mais precisos. Por outro lado, no momento em que um modelo econômico é enquadrado em linguagem matemática, tornamo-nos submetidos a uma disciplina de trabalho que nem sempre é imposta pela linguagem corrente. Somos obrigados a deixar bem claro o que é hipótese, o que é conclusão. E os erros dedutivos, tornando-se mais facilmente detectáveis, também se tornam menos prováveis. Na realidade, a maior parte das tolices já escritas e que se continuam a escrever sobre economia poderia ter sido poupanda, se todo economista fosse obrigado a expor suas idéias construindo um modelo matemático.

Há quem indague para que usar uma linguagem dedutiva tão poderosa, quando se parte de premissas tão sujeitas a contestação quanto as leis econômicas. A resposta envolve três considerações. Primeiro, se temos dúvidas quanto às premissas, o remédio é examiná-las melhor, e não elaborar con

clusões,errando nos silogismos. A economia pode não ser ciência exata, mas nem por isso se deve transformar em ciência confusa. Segundo, não apenas as leis econômicas, mas também as da física, são passíveis de substituição por outras melhores; apenas,em economia,isso ocorre com maior freqüência. Terceiro, a melhor maneira de descobrir que algo errado pode haver uma hipótese aparentemente plausível consiste em examinar todas as suas conseqüências. Um exemplo ilustrativo se pode extrair da física. Admitamos que determinado indivíduo proponha que a gravitação universal não é inversamente proporcional ao quadrado, mas à quarta potência da distância. A priori, essa não parece ser uma hipótese nem melhor nem pior do que a de Newton. A única maneira de se provar que ela é errada consiste em resolver uma série de equações diferenciais e concluir que, com essa hipótese gravitacional, as órbitas dos planetas em torno do sol seriam completamente diferentes das que se observam.

Obviamente,o economista, como aliás qualquer praticante de ciência aplicada, deve usar a matemática como instrumento,e não como objetivo. Há teoremas que os iniciados classificam como de grande beleza poética, e o economista não tem o direito de se perder nesse enlevo, reservado aos matemáticos puros. A rigor,esse perigo também existe na linguagem corrente, e muitos economistas são melhores construtores de frases do que de idéias. Mas,na linguagem matemática, que pa

ra muitos economistas tem o sabor de novidade, e que para os leigos possui a força da intimidação,esse perigo pode ser maior. Nesse sentido, é de se reconhecer que alguns economistas-matemáticos desenvolveram teorias que se podem considerar mais elegantes do que relevantes.

Feitas essas observações de ordem metodológica, vejamos como se desenvolveu a teoria marginalista.

Ao que se sabe, as primeiras aplicações do cálculo diferencial à análise econômica foram desenvolvidas por Cournot, nas suas "*Recherches sur les principes mathématiques de la theorie des richesses*", publicadas em 1838. Os exercícios de Cournot, ainda hoje apresentados nos textos sobre concorrência imperfeita, seguiam mais ou menos o seguinte estilo: Suponhamos que uma empresa fabrique determinado produto , cujas quantidades designaremos por q; o custo de produção será uma função $C(q)$ da quantidade produzida; a Receita será $R(q)=pq$, sendo p o preço de venda do produto. Se a empresa operar em regime de concorrência, p será um dado do problema. Se a empresa for monopolista $p=f(q)$,sendo $f(q)$ decrescente. Em qualquer hipótese, a empresa escolherá a produção que maximize o seu lucro

$$(q) = R(q) - C(q) = pq - C(q) \qquad (2.1)$$

Assim, a quantidade produzida pela empresa deve ser aquela que iguale a zero a derivada do lucro em relação a q , ou se

ja:

$$R'(q) = C'(q) \qquad (2.2)$$

sendo $R'(q) = p$, quando o mercado for de concorrência perfeita (pois p é um dado para a empresa e $R'(q) = f(q) + qf'(q)$, em regime de monopólio).

Como condição de segunda ordem, a derivada segunda do lucro deve ser negativa, ou seja:

$$R''(q) < C''(q) \qquad (2.3)$$

No caso de concorrência perfeita, essa condição se expressa por

$$C''(q) > 0 \qquad (2.4)$$

e no de concorrência imperfeita por

$$C''(q) > 2f'(q) + f''(q) \qquad (2.5)$$

As pesquisas de Cournot passaram praticamente despercebidas em seu tempo, e só vieram a ser desenterradas em 1872, por Walras. Fora o seu pioneirismo, no entanto, elas encerram notável inovação metodológica: a de tratar as questões econômicas como problemas de maximização. Sem dúvida, pelo menos desde Adam Smith, os economistas sabiam que os capitalistas procuravam extrair a maior taxa de rentabilidade possível do capital aplicado, o que em condições de concorrência levaria ao nivelamento da taxa de lucro. Contudo, antes de

Cournot nenhum economista explorou suficientemente os resultados dessa hipótese. Toda a teoria marginalista ergueu-se sobre duas premissas, a de que o empresário procurasse maximizar seu lucro e a de que o consumidor tratasse de maximizar a sua satisfação,dentro das suas limitações orçamentárias.

O exemplo acima apresentado de exercício de Cournot serve, entre outras coisas, para mostrar até que ponto o cálculo diferencial pode ser substituído pela linguagem corrente, e a partir de onde isso se torna muito pouco prático.

A equação (2.2) é daquelas que, sem maior dificuldade, se traduz em linguagem corrente. Denominemos receita marginal o acréscimo de receita resultante da produção e venda de uma unidade a mais do produto, e por custo marginal o acréscimo de custo provocado pela produção de uma a unidade adicional. Enquanto a receita marginal for superior ao custo marginal, a empresa aumenta seu lucro expandindo a sua produção. No momento em que o custo marginal se tornar superior à receita marginal, a expansão da produção deixa de ser interessante para a empresa. Segue-se que a produção de equilíbrio será aquela que iguale a receita marginal ao custo marginal . Em termos de cálculo diferencial, receita marginal e custo marginal são, respectivamente, as derivadas $R'(q)$ e $C'(q)$ da receita e do custo,em relação à quantidade produzida.

Foi em termos desse tipo de tradução que a teoria marginalista conseguiu entrar no círculo dos economistas do Século XIX. A esse respeito, valem duas observações:

A *primeira* é que está implícito, em todo o raciocínio, que até determinado nível de produção a receita marginal seja superior ao custo marginal, e que, a partir do ponto de equalização, mude o sinal da desigualdade. Essa é uma maneira de escapar às condições de segunda ordem de maximização, que sempre se mostram muito mais difíceis, para efeitos de tradução em linguagem corrente. Não é impossível traduzir nessa linguagem corrente a desigualdade (2.5), mas tornam-se necessárias tantas circunvoluções que o leitor acaba achando mais prático estudar cálculo diferencial. Acontece que as condições de segunda ordem de maximização são tão importantes quanto as de primeira, pois derivar e igualar a zero é técnica que às vezes conduz a um máximo, às vezes a um mínimo, e ainda possivelmente nem a uma coisa nem outra. O que se pode alegar é que, se as condições de segunda ordem são de tradução tão difícil em termos econômicos palpáveis, deve haver algo de errado numa formulação que as considera imprescindíveis. Essa é uma crítica tão válida quanto insolúvel dentro da teoria marginalista. A única solução consiste em usar técnicas matemáticas mais refinadas do que o cálculo diferencial, assunto de que cuidaremos no próximo capítulo.

A segunda observação se refere a uma sutileza lógica. Quando se define receita marginal como adicional de receita resultante da venda de uma unidade a mais do produto, estamos supondo, das duas uma: ou que o produto seja indivisível, ou que o acréscimo de receita seja proporcional ao aumento da produção vendida. A segunda hipótese é por demais restritiva para que possa ser aceita, a menos que se raciocine com o conceito místico de infinitésimo, que felizmente a matemática moderna conseguiu colocar em desuso. Já na primeira hipótese, a da indivisibilidade das unidades produzidas, teríamos que contemplar a possibilidade de que para nenhum nível de produção a receita marginal fosse exatamente igual ao custo marginal. Nesse caso, o enunciado correto do teorema de equilíbrio seria outro: o número ideal de unidades vendidas corresponderia ao maior inteiro para o qual a receita marginal fosse maior do que o custo marginal; e se, para algum inteiro q, a receita marginal igualasse o custo marginal, seria indiferente para a empresa produzir q ou $q-1$ unidades. Esse enunciado não é apenas muito pedante. Ele também é de manipulação muito pouco cômoda, para efeitos de desenvolvimento de qualquer teoria. De alguma forma, devemo-nos sentir satisfeitos de que os economistas do século passado não se tivessem preocupado com essas sutilezas lógicas, sem o que dificilmente a teoria marginalista teria saído da estaca zero.

Cournot pode-se considerar um precursor, mas não o fundador da escola marginalista. Esta foi uma composi

ção de muitos autores, entre os quais se devem destacar pelo menos Hermann Gossen, Stanley Jevons, Carl Menger, Friedrich von Wieser, Eugen von Böhm-Bawerk, e, num plano de síntese, Leon Walras, Alfred Marshall e Vilfredo Pareto. Pelo menos três grandes inovações se devem ao pensamento marginalista:

a) a descoberta do elo entre o valor de uso e o valor de troca;

b) a teoria da remuneração dos fatores pela produtividade marginal;

c) a revisão das teorias do capital e do juro.

A apresentação dessas novas idéias foi freqüentemente sublinhada por graves tropeços lógicos. Os clássicos ingleses e Marx só haviam pensado na oferta. Alguns marginalistas, sobretudo os três austríacos Menger, Wieser e Böhm-Bawerk só pensaram na procura. Mais difícil ainda foi construir uma teoria satisfatória do capital, do juro e do lucro. Böhm-Bawerk introduziu idéias interessantes nesse sentido, mas a teoria do capital realmente só se solidificou com os trabalhos de Wicksell, Hayek e Fisher.

2.2) *A teoria da utilidade marginal*

A descoberta do elo entre valor de uso e valor de troca deve-se pelo menos a William Stanley Jevons e a

Leon Walras, cabendo provavelmente as maiores glórias ao primeiro. Seguindo a filosofia utilitarista de Bentham,Jevons partiu do pressuposto de que o indivíduo, dentro de suas possibilidades, tratasse de maximizar o saldo do seu prazer sobre a dor (que, para efeitos analíticos, era tratada como um prazer negativo). Passando para o terreno analítico,Jevons admitia que a posse de determinada quantidade de uma mercadoria proporcionasse ao indivíduo um certo grau de prazer, que era denominado utilidade(*). Esse nível de utilidade seria regido pela lei da utilidade marginal decrescente, a qual se poderia enunciar nos seguintes termos:

(i) quanto maior a quantidade disponível de um bem, maior a utilidade total por ela proporcionada;

(ii) a utilidade marginal, isto é, o acréscimo de utilidade proporcionado por uma unidade a mais da mercadoria, decresce com a respectiva quantidade.

É fácil multiplicar exemplos da lei da utilidade marginal decrescente. Para qualquer indivíduo, a utilidade do primeiro litro diário de água é enorme; a do segundo litro,um pouco menos,e a do milésimo litro,certamente muito pequena. Assim, a utilidade marginal não é apenas função da essencialidade do bem, mas particularmente da sua escassez. Os bens superabundantes podem ser muito úteis no total, mas devem ter utilidade marginal muito pequena.

(*) Estamos aqui usando as denominações modernas. Jevons apelidava a utilidade marginal de grau final de utilidade; Walras,de rareté;Wieser,de Grenznutzen; Pareto, de ophelimité, etc.

Em termos analíticos, isso significava que o nível de utilidade $U(q)$ proporcionado pelo consumo de q unidades de determinada mercadoria por unidade de tempo seria tal que $U'(q) > 0$, e $U''(q) < 0$. A curva de utilidade total seria, assim, crescente e côncava, tal como na FIGURA 2.1.

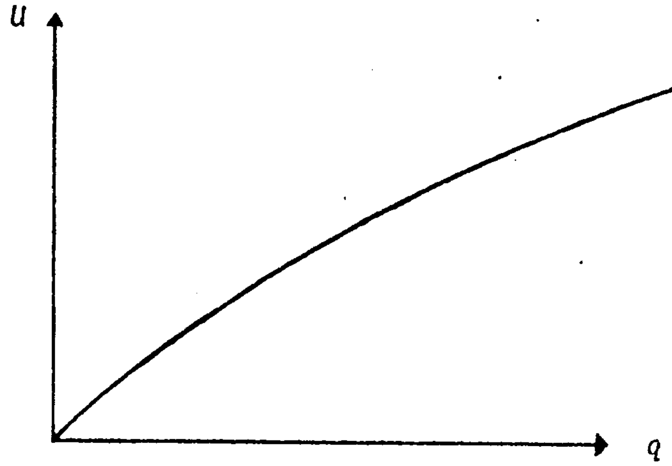


FIGURA 2.1

A tarefa seguinte consistia em estabelecer o vínculo entre utilidades marginais e preços. O raciocínio pode-se apresentar nos seguintes termos: seja u a utilidade marginal de um bem cujo preço é p; então, u/p representa a utilidade marginal de um cruzeiro adicional aplicado na compra da mercadoria. Consideremos, agora, duas mercadorias A e B consumidas por determinado indivíduo. Dentro de suas limitações orçamentárias, o indivíduo pode aumentar de um cruzeiro suas compras de A, desde que reduza de um cruzeiro a aquisição de B. O ganho líqüido de utilidade (positivo ou negativo) será dado por $u_A/p_A - u_B/p_B$; quanto maior a quantidade de A, e portanto menor a de B, menor esse ganho líqüido,

pois, pela lei da utilidade marginal decrescente, u_A diminui e u_B aumenta. Admitindo que o indivíduo compre ambas as mercadorias, e que procure maximizar sua satisfação, na posição de equilíbrio o ganho líqüido de qualquer substituição de A por B ou de B por A deve ser nulo. Em suma, na posição de equilíbrio, $u_A/p_A = u_B/p_B$. Raciocinando com um número qualquer de mercadorias, o consumidor graduará as compras de modo a tornar todas as utilidades marginais proporcionais aos preços, isto é:

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \ldots \frac{u_n}{p_n} \qquad (2.6)$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ designando as utilidades marginais dos diversos bens, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ os respectivos preços. Naturalmente, na linguagem do cálculo diferencial, a utilidade marginal u_i é a derivada parcial da utilidade total em relação à quantidade possuída, q_i, do $i^{\underline{ésimo}}$ bem.

A equação (2.6) corresponde a um dos mais veneráveis teoremas marginalistas, servindo para explicar como a água, tão útil, pode ser tão barata, e os diamantes, tão supérfluos, podem ser tão caros. A resposta está em que os preços são proporcionais, não ao total das utilidades, mas às utilidades marginais, que são altas para os bens escassos e baixas para os bens superabundantes. Com isso se decifrava o enigma que, desde Aristóteles, inquietava todos os pesquisado-

res da teoria dos preços, o da discrepância entre valores de uso e valores de troca.

Algumas observações, todavia, devem ser feitas a propósito da lei de proporcionalidade entre utilidades marginais e preços.

Em primeiro lugar, a dedução da equação (2.6) pressupõe que o consumidor não tenha qualquer capacidade de, individualmente, influenciar os preços de mercado. Pelo menos na grande maioria dos casos, essa é uma suposição plausível, mas é importante deixá-la bem explícita.

Em segundo lugar, a proporcionalidade entre utilidades marginais e preços deve-se observar para as mercadorias que são efetivamente adquiridas pelo indivíduo, mas não para aquelas que ele deixa de comprar. Suponhamos, por exemplo, que o consumidor goste de feijão, mas não de jiló. Pode ocorrer que a utilidade adicional do primeiro cruzeiro gasto em jiló seja inferior à do último cruzeiro aplicado em feijão. Nesse caso, o consumo de jilós será igual a zero. A forma analiticamente correta de enfrentar esse problema consiste em substituir a equação (2.6) por:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i}{p_i} = u_R & se \quad q_i > 0 \\ \\ \dfrac{u_i}{p_i} \leqslant u_R & se \quad q_i = 0 \end{cases} \qquad (2.7)$$

q_i designando a quantidade consumida do i-ésimo bem, e u_R a chamada utilidade marginal da renda, isto é, a utilidade marginal de um cruzeiro aplicado em qualquer dos bens que são efetivamente consumidos.

Em terceiro lugar, das equações (2.6), ou da sua versão melhorada, (2.7), o que se pode esperar obter não são os preços dos diferentes produtos, mas apenas as expressões da demanda de cada bem em função dos diversos preços e da renda do consumidor. Para isso, diga-se de passagem, é preciso acrescentar a equação do orçamento:

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots\ldots\ldots p_nq_n = R \qquad (2.8)$$

a qual pressupõe que na listagem das n mercadorias se incluam a moeda e quaisquer outras aplicações para a poupança do indivíduo. Combinando a restrição orçamentária acima com as equações de proporcionalidade de utilidades marginais e preços, chega-se a expressões do tipo:

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots p_n, R) \\ q_2 &= f_2(p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots p_n, R) \qquad (2.9) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n &= f_n(p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots p_n, R) \end{aligned}$$

A única proposição geral que, a esta altura, podemos formular a respeito das funções acima é que elas são homogêneas de grau zero, isto é, que se multiplicarmos por um mesmo fator k todos os preços e a renda, as quantidades procuradas não se alteram. Isso decorre imediatamente da forma das equações (2.6) e da restrição orçamentária:

$$f_i\ (kp_1, kp_2, \ldots . kp_n, kR) = f_i(p_1, p_2, \ldots p_n, R) \qquad (2.10)$$

A título de exemplo, suponhamos que a função utilidade de um indivíduo se expresse por:

$$U = a_1 \log q_1 + a_2 \log q_2 + \ldots + a_n \log q_n, \quad \text{sendo } a_1 + a_2 + \ldots . a_n = 1$$

A equação (2.5) conduz, no caso, a:

$$\frac{a_1}{p_1 q_1} = \frac{a_2}{p_2 q_2} = \ldots . . = \frac{a_n}{p_n q_n}$$

Introduzindo-se a equação orçamentária, segue-se que:

$$q_i = a_i R / p_i \qquad (2.11)$$

o que significa que o consumidor sempre dispende com a i-ésima mercadoria uma fração a_i da sua renda.

Um quarto ponto a observar diz respeito à suficiência da condição de equilíbrio expressa na equação (2.5), ou na sua versão melhorada, (2.6). Independentemente da lei da utilidade marginal decrescente, pode-se concluir que se o consumidor, na sua posição de equilíbrio, adquire as mercadorias

A e B, então as utilidades marginais devem ser proporcionais aos respectivos preços; com efeito, se $u_A/p_A - u_B/p_B$ fosse diferente de zero, o consumidor poderia aumentar sua satisfação desviando um cruzeiro de A para B, ou vice-versa, e portanto não estaria em equilíbrio. Trata-se, porém, apenas de uma condição necessária, e que tanto se poderia aplicar ao indivíduo normal, que deseja maximizar sua satisfação, quanto ao consumidor masoquista, que pretendesse minimizar sua utilidade total. Para provar a suficiência da condição, o raciocínio tradicional apela para a lei da utilidade marginal decrescente. O ganho líqüido de utilidade quando se desvia um cruzeiro da compra de B para a de A é expresso por $u_A/p_A - u_B/p_B$; admite-se que, em virtude da lei da utilidade marginal decrescente, quanto maior a quantidade de A e menor a de B, menor esse ganho líquido, pois u_A diminui e u_B aumenta. Nesse caso, parece claro que, na posição em que as utilidades marginais são proporcionais aos preços, o consumidor efetivamente está maximizando sua satisfação. Com efeito, o indivíduo perderia em utilidade total, quer consumisse um pouco menos de A e um pouco mais de B, quer se desviasse no sentido oposto.

Está implícito nesse raciocínio que a utilidade marginal de um bem depende apenas da quantidade disponível desse bem, e não das quantidades compradas de outras mercadorias. A prova da suficiência da condição cairia inteiramente por terra, se aceitássemos a lei da utilidade marginal

decrescente, mas também admitíssemos que, aumentando a quantidade de A, diminuísse a utilidade marginal de B, e vice-versa. Chegaríamos, agora, à mais perfeita perplexidade quanto ao sentido da variação de $u_A/p_A - u_B/p_B$, quando se trocasse A por B, ou B por A.

Dizer que a utilidade marginal de uma mercadoria independe das quantidades das outras é o mesmo que afirmar que a utilidade total se exprime na forma aditiva:

$$U(q_1, q_2, \ldots q_n) = U(q_1) + U(q_2) + \ldots\ldots + U(q_n) \qquad (2.12)$$

isto é, que a utilidade proporcionada pela disponibilidade de vários bens é igual à soma das utilidades produzidas por cada bem, isoladamente.

Até que ponto se pode considerar plausível a hipótese de aditividade ? Marshall aceitou-a sem maiores restrições, enquanto Edgeworth a contestava. A discussão, com base em argumentos a priori, é puramente metafísica, pois ainda não se inventaram aparelhos para medir a utilidade (o que aliás, constitui o calcanhar de Aquiles de toda a teoria da utilidade marginal). Contudo, da hipótese de aditividade resulta uma conclusão que é desmentida pela experiência: se a renda do consumidor aumentar e os preços não mudarem, as quantidades consumidas de todos os bens devem aumentar. A demonstração é simples: pela equação do orçamento, se a renda aumenta e os preços não variam, a quantidade comprada de pelo me

nos um bem deve crescer; isso fará cair a sua utilidade marginal; mas, como as utilidades marginais da nova posição de equilíbrio devem continuar proporcionais aos preços, que não se modificaram, então as utilidades marginais de todos os outros bens devem cair. Isso só é possível, pela lei da utilidade marginal decrescente, se as quantidades consumidas de todos os bens se elevarem.

Pelo menos para os indivíduos não muito abastados essa conclusão não é válida. Existem os chamados bens inferiores, como a carne de segunda, cujo consumo cai quando os indivíduos enriquecem. Com efeito, com maior renda os consumidores tratam de substituir esses bens por outros de melhor qualidade, como o filet-mignon. Essa é uma razão empírica suficiente para que se rejeite a hipótese de aditividade.

Ocorre que, sem essa hipótese, a lei da utilidade marginal decrescente não basta para provar que o consumidor efetivamente maximiza sua satisfação quando as utilidades marginais são proporcionais aos preços. Era preciso,assim, reformular a teoria da utilidade marginal, de modo a obter uma teoria satisfatória da procura. Essa tarefa, iniciada por Pareto, foi completada por Hicks, que de uma cajadada matou dois coelhos: não apenas dispensou a hipótese da aditividade, mas a própria idéia de mensuração da utilidade, substituindo-a pela de simples ordenação das preferências.

2.3) *A teoria da produtividade marginal*

Os economistas clássicos geralmente supunham que o capital e o trabalho se combinassem em proporções fixas, embora, de tempos em tempos, o progresso tecnológico se encarregasse de modificar esse coeficiente de proporcionalidade (segundo Marx, para engrossar as fileiras do exército industrial de reserva). As funções de produção da teoria marginalista, ao contrário, são dotadas de extrema plasticidade. Os fatores de produção podem combinar-se em quaisquer proporções, e basta aumentar a quantidade de um qualquer deles para que o produto total cresça. Analiticamente, uma função de produção marginalista se exprime por:

$$q = f(s_1, s_2, \ldots\ldots s_n) \qquad (2.13)$$

sendo q a quantidade do produto obtida por unidade de tempo, $s_1, s_2, \ldots\ldots s_n$ as quantidades de fatores empregadas, por unidade de tempo. A função de produção presume-se diferenciável (o que, em alguns casos é uma hipótese palatável, em outros não; se o processo de produção correspondesse a uma reação química, onde os ingredientes só se combinam em proporções fixas, a hipótese de diferenciabilidade seria absurda).

A teoria da produtividade marginal supõe que uma empresa, cuja função de produção corresponda à equação

(2.13), opere num mercado de concorrência perfeita, onde o preço do produto seja igual a p e o dos fatores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A hipótese de concorrência perfeita significa que a empresa considera esses preços como dados, não tendo a mínima capacidade de os afetar pela sua decisão individual de produzir mais ou menos, ou de comprar maior ou menor quantidade de qualquer fator. Isso significa, numa palavra, que o mercado é suficientemente atomizado, e que não há nenhum tipo de coalizão entre os produtores.

Cabe uma observação importante a respeito das unidades em que se medem os preços dos fatores: tratando-se de matérias-primas ou de mão-de-obra, as unidades são as usuais (cruzeiros por quilo de algodão, cruzeiros por homem-hora); no caso das máquinas, todavia, as quantidades que se estão usando na função de produção não significam o uso da máquina durante toda a sua vida útil, mas apenas numa unidade de tempo; assim, o preço correspondente não é o de aquisição da máquina, mas o seu valor locativo por hora, mês ou qualquer outra unidade de tempo. Como o preço de aquisição e o valor locativo se correlacionam, é questão que discutiremos quando examinarmos a teoria do capital.

Voltemos à função de produção (2.13). A <u>produtividade marginal</u> f_i *do* <u>*iésimo*</u> fator é definida como sendo a derivada parcial , $\frac{\partial q}{\partial s_i}$ do produto q em relação à quanti

dade s_i do fator. Em linguagem corrente, a produtividade marginal se traduz como o acréscimo do produto quando se aumenta de uma unidade a quantidade empregada desse fator, sem se modificarem as quantidades dos demais fatores.

Vejamos, agora, o teorema da produtividade marginal. O lucro, que a empresa deseja maximizar, é a diferença entre a receita, $pq = pf(s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n)$ e o custo com a aquisição de fatores, $v_1 s_1 + v_2 s_2 + \ldots\ldots + v_n s_n$:

$$L = pf(s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n) - v_1 s_1 - v_2 s_2 - \ldots - v_n s_n \quad (2.14)$$

A condição de primeira ordem de maximização é que todas as derivadas parciais de L sejam nulas. Isso se traduz por:

$$v_i / p = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n) \qquad (2.15)$$

ou seja, a relação entre o preço de cada fator e o do produto deve ser igual à sua produtividade marginal.

É fácil chegar à equação (2.15), que sintetiza a chamada lei da produtividade marginal, em linguagem corrente. Empregando mais uma unidade do *iésimo* fator, a empresa obtém f_i unidades adicionais de produto, o que significa uma receita a mais pf_i versus um custo adicional v_i. Enquanto a receita superar o custo, vale a pena expandir o uso do fator. O ponto de equilíbrio se alcança, para cada fator, quando $pf_i = v_i$, ou, o que é o mesmo, quando $v_i / p = f_i$.

Faltam, naturalmente, as condições de segunda ordem. A primeira hipótese é a generalização da lei ricardiana dos rendimentos decrescentes: mantidas as quantidades dos demais fatores, a produtividade marginal de cada fator deve cair com o aumento da quantidade dele empregada. É preciso, todavia, supor algo mais. Cuidaremos desse assunto no próximo capítulo. Por enquanto, vale apenas ressaltar que os rendimentos decrescentes devem ser totais, isto é, duplicando-se as quantidades de todos os fatores, o produto não deve chegar ao dobro.

É importante, mais uma vez, saber exatamente o que se pode obter das equações (2.15), isto é, da lei da remuneração dos fatores pela produtividade marginal. Elas permitem que se determine a oferta q do produto e as quantidades procuradas $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n$ dos fatores em função dos preços $p, v_1, v_2, \ldots\ldots. v_n$. A título de exemplo, suponhamos que a função de produção se expresse por:

$$q = 5s_1^{0,3}\, s_2^{0,2}$$

É fácil concluir, com base nas equações (2.15), que nesse caso:

$$v_1/p = 1,5s_1^{-0,7}\, s_2^{0,2}$$

$$v_2/p = s_1^{0,3}\, s_2^{-0,8}$$

Daí se conclui, com alguns algebrismos, que a

procura dos fatores de produção é dada pelas expressões:

$$s_1 = \frac{1,5^{1,6}\, p^2}{v_1^{1,6}\, v_2^{0,4}}$$

$$s_2 = \frac{1,5^{0,6}\, p^2}{v_1^{0,6}\, v_2^{1,4}}$$

Entrando com a função de produção, obtém-se a equação de oferta:

$$q = \frac{5 \times 1,5^{0,6}\, p}{v_1^{0,6}\, v_2^{0,4}}$$

O exemplo acima sugere que as funções oferta e procura dos fatores de produção sejam homogêneas de grau zero, isto é, que as quantidades procuradas dos fatores e fabricadas do produto não se alterem se todos os preços, $p, v_1, \ldots, v_n$ forem multiplicados, simultâneamente, por um mesmo fator. Essa é uma proposição absolutamente geral, pois se todos os preços são multiplicados por k, para um mesmo conjunto de quantidades, os lucros são igualmente multiplicados por esse fator. A combinação de quantidades que maximiza o lucro é a mesma, num ou noutro caso.

No exemplo acima, a oferta do produto é função crescente do seu preço, e a procura de cada fator decresce com o seu valor. Essa é quase uma proposição geral. O que se

pode demonstrar é que em nenhum caso a oferta pode cair se o preço do produto aumentar; e que, em nenhuma hipótese a elevação do preço de um fator pode provocar o crescimento de sua demanda.

Com efeito, suponhamos que para um primeiro sistema de preços $p, v_1, v_2, \ldots, v_n$ a empresa maximize seu lucro produzindo q com a combinação de fatores $s_1, s_2, \ldots, s_n$; e que para um segundo sistema de preços $p', v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ as quantidades ótimas passem a ser $q', s'_1, s'_2, \ldots, s'_n$. Por hipótese, no primeiro sistema de preços o primeiro conjunto de quantidades é tanto ou mais lucrativo que o segundo. Isso permite escrever:

$$pq - v_1 s_1 - \ldots\ldots - v_n s_n \geqslant pq' - v_1 s'_1 - \ldots\ldots - v_n s'_n$$

Invertendo o raciocínio, no segundo sistema de preços o segundo conjunto de quantidades deve ser tanto ou mais lucrativo que o primeiro:

$$p'q' - v'_1 s'_1 - \ldots\ldots - v'_n s'_n \geqslant p'q - v'_1 s_1 - \ldots\ldots - v'_n s_n$$

Combinando as duas desigualdades, segue-se que:

$$(p'-p)(q'-q) - (v'_1 - v_1)(s'_1 - s_1) - \ldots\ldots - (v'_n - v_n)(s'_n - s_n) \geqslant 0 \quad (2.16)$$

Suponhamos inalterados os preços dos fatores. A desigualdade acima transforma-se em $(p'-p)(q'-q) \geq 0$, o que significa que, se o preço do produto subir, a quantidade também cresce, ou não se altera. Admitamos, agora, invariáveis todos os preços, exceto o do $i^{\text{ésimo}}$ fator. Teremos $(v_i' - v_i)(s_i' - s_i) \leq 0$, ou seja, aumentando o preço do fator, a quantidade comprada ou não se altera ou diminui.

A demonstração acima é particularmente interessante, pois muito pouca informação exige a respeito da função de produção. Ela não precisa ser diferenciável, como na teoria marginalista, e nem mesmo contínua. As únicas hipóteses usadas são, além da relativa à concorrência perfeita, que exista a função de produção, e que, dado um sistema de preços, exista uma combinação de quantidades (embora não necessariamente única) que maximize o lucro da empresa. Algumas conclusões importantes em teoria econômica podem ser obtidas por raciocínios semelhantes a esse. Quando isso é possível, é indesejável e deselegante recorrer a técnicas de cálculo diferencial, que não só complicam as demonstrações, como reduzem a sua generalidade.

2.4) *Máximos livres X Máximos condicionados - Os multiplicadores de Lagrange*

Os teoremas da utilidade marginal e da produtividade marginal foram obtidos, analiticamente, como proble -

mas de maximização. Uma diferença importante, no entanto, se pode identificar na solução dos dois problemas. Para deduzir o teorema da produtividade marginal, admitimos que a empresa tratasse de escolher as quantidades $s_1, s_2, \ldots, s_n$ dos fatores de modo a maximizar o seu lucro, expresso pela equação (2.14):

$$L = pf(s_1, s_2, \ldots, s_n) - v_1 s_1 - v_2 s_2 - \ldots - v_n s_n$$

No caso, supõe-se que as quantidades dos fatores possam ser escolhidas à vontade, o que significa que $s_1, s_2, \ldots, s_n$ são variáveis independentes. A técnica aplicável para se obterem as condições de primeira ordem de maximização consiste em calcular as n derivadas parciais do lucro em relação às quantidades dos fatores, e igualar a zero.

O teorema da utilidade marginal se apresenta numa moldura analítica diferente. O consumidor procura maximizar a sua utilidade $U(q_1, q_2, \ldots q_n)$ mas, agora, as quantidades consumidas não mais são variáveis independentes. De fato, elas se interligam pela restrição orçamentária:

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n = R$$

Problemas desse tipo são denominados de "*máximos condicionados*", cuja expressão geral é a seguinte:

" *Determinar o máximo da função* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *com as seguintes equações de ligação entre as variáveis:*

$$g_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_p(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \text{ "}$$

Uma técnica bastante usada para determinar as condições de primeira ordem de maximização condicionada é a dos multiplicadores de Lagrange. Constrói-se a função auxiliar:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) - \ldots - \lambda_p g_p(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \qquad (2.17)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ são os denominados multiplicadores de Lagrange. As condições de primeira ordem de maximização se obtêm igualando a zero todas as derivadas parciais da função auxiliar:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \ldots\ldots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial \lambda_p} = 0 \qquad (2.18)$$

A título de exemplo, tomemos o caso do consumidor que procure maximizar sua utilidade $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ com a restrição orçamentária $p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots\ldots + p_n q_n = R$. A função

auxiliar se exprimiria por $U(q_1,q_2, \ldots. q_n) - \lambda(p_1q_1+p_2q_2+\ldots+p_nq_n)$

Derivando parcialmente em relação a $q_1,q_2,\ldots,q_n$ e igualando a zero obtém-se

$$u_i = \lambda p_i \qquad (i = 1,2, \ldots\ldots, n)$$

o que indica que o multiplicador de Lagrange corresponde à utilidade marginal da renda, isto é, à relação comum entre utilidades marginais e preços. Igualando-se a zero a derivada parcial da função auxiliar em relação ao multplicador de Lagrange ,λ,obtém-se precisamente a equação do orçamento:

$$p_1q_1+p_2q_2 + \ldots\ldots + p_nq_n \; . = R$$

Obviamente,as condições de primeira ordem fornecem condições necessárias, mas não suficientes,de maximização. As condições de segunda ordem, que, quando verificadas , garantem que a posição encontrada realmente corresponde a um máximo, são bem mais complicadas. No caso de uma função $f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$, cujas variáveis sejam todas independentes, designemos por f_{ij} a derivada parcial de segunda ordem $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$, calculada num ponto onde as derivadas parciais de f se anulam. Para que o ponto em questão efetivamente corresponda a um máximo, é suficiente que os determinantes

$$\begin{vmatrix} f_{11} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} , \ldots\ldots\ldots , \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots, f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots f_{nn} \end{vmatrix}$$

sejam alternativamente negativos (os de ordem ímpar) e positivos(os de ordem par).

No caso de máximos condicionados, os determinantes que exprimem as condições de segunda ordem são ainda mais complicados, e não são os que corresponderiam à maximização da função auxiliar de Lagrange. Apenas para citar um exemplo, no problema específico da maximização da utilidade com a restrição orçamentária, essas condições seriam que os determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & u_{11} & u_{12} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}, \ldots\ldots\ldots, \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \cdots\cdots & p_n \\ p_1 & u_{11} & u_{12} \cdots\cdots & u_{1n} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} \cdots\cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & u_{n1} & u_{n2} \cdots\cdots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

fossem todos positivos *(u_{ij} designando as derivadas parciais de segunda ordem da função utilidade).*

A apresentação de todos esses determinantes num texto de economia não apenas é muito pouco elegante. A maior complicação está em descobrir alguma razão econômica plausível para que alguns desses determinantes sejam positivos, outros negativos. Por essa razão, a maioria dos chamados textos avançados sobre teoria marginalista que fazem uso do cálculo diferencial, limita-se a discutir as condições de primeira or

dem. Isso , todavia, é uma temeridade lógica, pois se fica sem saber se o resultado encontrado é um máximo, um mínimo ou nem uma coisa nem outra. E antecipa uma questão de que trataremos mais adiante, a das limitações do próprio cálculo diferencial como linguagem adequada à discussão dos problemas econômicos.

2.5) *As controvérsias sobre determinação*

O teorema da utilidade marginal foi descoberta muito importante para a análise econômica. Mas, não tão importante quanto presumiram os economistas austríacos, que admitiam que as utilidades marginais determinavam todos os preços. Gastou-se, assim, enorme quantidade de papel e tinta para saber se eram os custos que determinavam os preços, como haviam suposto os clássicos de Adam Smith até Marx, ou se a chave do enigma estava nas utilidades marginais. Os clássicos nunca conseguiram construir uma teoria satisfatória da procura, e por isso trataram de explicar todos os preços a partir das suas componentes de custo e lucro. Adam Smith, todavia, soube contornar o problema com bastante habilidade, ao introduzir a distinção entre preço natural e de mercado, e ao mostrar como este último se ajustaria ao natural. Menger, von Wieser, Böhm-Bawerk procuraram elaborar uma explicação totalmente de cima para baixo, admitindo que eram as utilidades

que determinavam os preços, e estes que acabavam definindo os custos. Obviamente,esta última conclusão parecia bastante a - gressiva ao bom senso.

A controvérsia,hoje,parece um tanto tola, pois não há a mínima dificuldade em admitir que tanto os custos de produção quanto as utilidades marginais participem, cada qual a seu modo, na formação dos preços. Os debates da época, no entanto, ressaltam dois aspectos importantes, um psicológico, outro lógico. O primeiro é que os economistas, como aliás todos os outros seres pensantes, costumam superestimar a importância das suas descobertas. Segundo, que é muito mais fácil cometer erros de lógica com a linguagem corrente do que com a matemática. Escrevendo analiticamente a lei da utilidade marginal, torna-se imediato que ela apenas fornece as equações da procura de cada consumidor,em função dos preços e da renda. Do mesmo modo, a lei da produtividade marginal só nos informa sobre a oferta do produto e a procura dos fatores de produção por cada empresa,em função dos respectivos preços. Sem o trabalho de dissecação analítica, todavia, poderíamos supor que essas leis pudessem determinar outras coisas.

Também é interessante observar que a linguagem corrente é capaz de traduzir com relativa simplicidade a solução de sistemas de equações triangulares do tipo:

$$f_1(x_1) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = 0$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 0$$

No caso, a linguagem corrente facilmente explica que a primeira lei $f(x_1) = 0$ determina a primeira variável x_1; conhecida esta última, a lei $f(x_1, x_2) = 0$ determina x_2, e assim por diante.

Mas a linguagem usual, que tão facilmente se adapta a esses sistemas triangulares, torna-se muito pouco adequada à descrição de como se determinam variáveis que são ligadas por equações que interligam simultaneamente todas as variáveis. É preciso fantásticas circunvoluções verbais para resolver sem matemática um sistema de equações do tipo

$$f(x, y) = 0$$
$$g(x, y) = 0,$$

como bem sabem os estudantes que descobrem na álgebra elementar o método simples de resolver problemas que lhes parecem charadas nas provas de aritmética.

O sistema de equações de determinação dos preços era precisamente dessa classe não-triangular, que dificilmente se traduz em linguagem corrente. Isso em grande parte

explica por que se gastou tanto tempo, no final do século passado, com essas controvérsias sobre determinação. Três caminhos foram encontrados para solucionar esses debates pouco elogiosos à História do Pensamento Econômico. Primeiro,o método do equilíbrio geral, devido a Walras. Segundo, o do equilíbrio parcial, devido a Marshall. Terceiro,o do equilíbrio agregativo, que teve muitos construtores mas que só se solidificou a partir de Keynes.

Tecnicamente, desses três métodos, o mais convincente é o de Walras, que, nos seus " Elementos de Economia Política Pura ",procurou explicar como se formam todos os preços,através de um vasto sistema de equações simultâneas . Após algumas considerações elementares sobre a hipótese de concorrência,que, entre outras coisas, concluem que, num mesmo mercado, uma mesma mercadoria só pode ter um único preço, Walras inicia seu formidável trabalho que, em linhas gerais,pode ser descrito nos termos que se seguem. Como ponto de partida para a análise econômica, devemos considerar uma economia onde existem indivíduos, empresas, fatores primários de produção e relações de propriedade. Cada indivíduo possui seus gostos, expressos pelas suas funções-utilidade. Os fatores primários de produção existem em quantidades determinadas num determinado instante, e são de propriedade dos diferentes indivíduos e empresas. Estas últimas também são possuídas por certas pessoas.

O encaminhamento das equações do equilíbrio geral pode ser sintetizado da seguinte forma: designemos por $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ os preços dos produtos finais, e por $v_1, v_2, \ldots\ldots v_p$ os dos fatores primários. Em função desses preços, é possível determinar, pela lei da produtividade marginal:

(*a*) a oferta dos vários produtos finais;

(*b*) a procura dos fatores primários de produção. A oferta de fatores de produção é dada. Igualando-a com a procura, temos p equações que permitem determinar os preços desses fatores em função dos preços $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ dos produtos.

Resolvida essa etapa, podemos exprimir, apenas em função de $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$, as quantidades oferecidas de cada produto final, as quantidades de fatores empregadas em cada empresa e a remuneração desses fatores, e o lucro das empresas. A renda de cada indivíduo é a remuneração dos fatores por ele possuídos, mais a quota-parte de lucros de sua propriedade. Temos, portanto, em função de $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$, todas as rendas individuais.

Entra, agora, em cena a teoria da utilidade marginal. Conhecidas as rendas individuais, podemos determinar, em função de $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$, a procura dos diferentes produtos finais. Confrontando com as equações de oferta e procu-

ra, temos <u>n</u> equações para determinar $p_1, p_2, \ldots . p_n$.

Walras introduz nesse ponto uma observação importante. O seu sistema contém uma equação redundante, isto é, que pode ser deduzida das demais. Após a identificação desse problema matemático, Walras logo descobre seu conteúdo econômico. As equações de equilíbrio geral não podem determinar os preços absolutos, mas apenas os preços relativos. Em outras palavras, se um sistema de preços equilibra a economia, é possível exprimir esse sistema em cruzeiros, milhares de cruzeiros, centavos ou qualquer outra unidade. Para levantar essa indeterminação,é preciso escolher uma mercadoria como <u>numerário</u>, isto é, definir como sendo igual a <u>um</u> o preço de determinado produto.

A descrição acima é apenas um resumo simplificado (na linha das construções modernas das equações de equilíbrio geral) da seqüência segundo a qual Walras monta seu sistema de equilíbrio. O mínimo que se pode dizer é que a maneira pela qual Walras chega às suas equações, embora essencialmente equivalente à acima apresentada, é muito complicada. Naturalmente,Walras antecipou-se à pergunta que lhe seria formulada por qualquer pessoa que lesse os Elementos de Economia Política Pura: como o sistema econômico resolveria essas equações tão complicadas ? A resposta de Walras era

que as equações se solucionariam pelo "tatonement", ou seja , por apalpadelas.

Os detratores de Walras costumavam criticá-lo por apenas ter contado equações e incógnitas, e se dado por satisfeito quando chegou à conclusão de que, após a introdução do numerário, havia tanto de umas quanto de outras. Há forte componente de injustiça, mas uma pitada de verdade, nessa caricatura. A injustiça é esquecer que Walras foi o primeiro economista a mostrar, numa linguagem razoavelmente precisa, como as diversas leis econômicas conhecidas na época se interrelacionavam, e como cada qual afetava o funcionamento dos mercados. Essa foi uma tarefa ciclópica,que não pode ser desprezada. O elemento de verdade reside no fato de que talvez não haja nenhum livro importante de economia tão árido quanto o de Walras. Para o leitor de poucas habilidades matemáticas, os Elementos de Economia Política Pura representam trabalho ilegível. Para os matemáticos, uma construção pouco elegante, por abusar dos algebrismos e não chegar a nenhum teorema esteticamente atrativo. Por outro lado, a linguagem matemática usada por Walras lhe permite chegar às equações do equilíbrio geral, mas, virtualmente não o leva a tirar nenhuma conclusão prática dessas equações. Talvez se possa afirmar que Walras merecia conhecer a matemática que não era a do seu tempo. Com a álgebra moderna, a topologia e a análise funcional, é possível apresentar o equilíbrio geral em termos muito mais simples e elegantes, e das equações de equilíbrio dedu

zir teoremas bastante importantes, o que parecia impraticável com a complicada simbologia dos Elementos de Economia Política Pura. Nesse sentido, Walras foi frustrado por seu próprio pioneirismo.

O método do equilíbrio parcial, introduzido por Marshall para solucionar a controvérsia entre as teorias do custo de produção e da utilidade marginal para a determinação dos preços, possui virtudes e defeitos opostos ao sistema de Walras. A análise do equilíbrio parcial é extremamente elegante e didática, prestando-se à obtenção de inúmeras leis e conclusões.

A técnica de Marshall dá por conhecidas *n-1* incógnitas do problema, e mostra como se determina a *n-ésima*. Suponhamos conhecidos os preços dos fatores de produção com os quais se fabricam determinado bem de consumo. Nessas condições, a quantidade oferecida do bem, de acordo com a teoria da produtividade marginal, é função crescente do seu preço (*curva SS na* FIGURA 2.2). Do mesmo modo, admitamos dados os preços dos demais bens de consumo e as rendas dos consumidores. A quantidade procurada do produto será então função decrescente (pelo menos em geral) do seu preço (*curva DD na* FIGURA), de acordo com a teoria da utilidade marginal. A quantidade negociada e o preço de equilíbrio se determinam pela

interseção das curvas de oferta e procura.

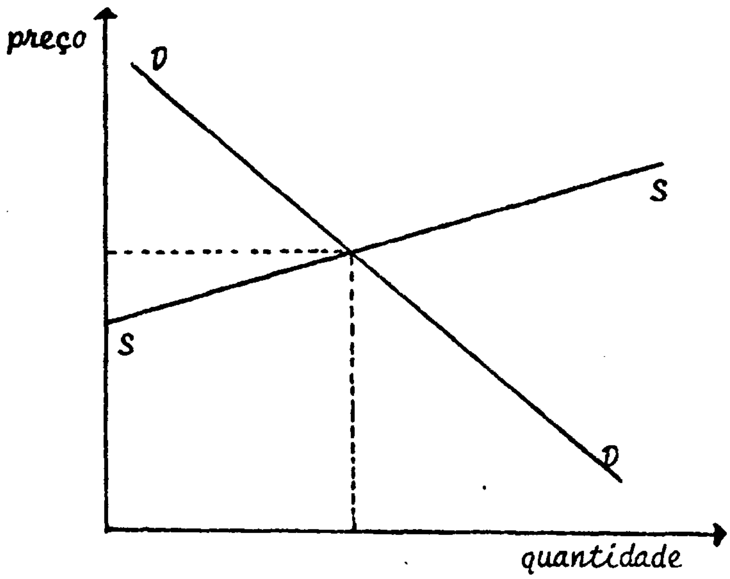


FIGURA 2.2

Assim, com grande habilidade, Marshall tenta transformar um sistema de muitas equações e incógnitas num outro muito simples, que tem como equações apenas a oferta e a procura, e como incógnitas a quantidade e o preço. Talvez se possa duvidar da seriedade do método, mas inegavelmente ele é muito didático. A controvérsia entre a determinação dos preços pela utilidade marginal ou pelos custos de produção ficava solucionada por um raciocínio muito menos preciso, mas muito mais compreensível que o de Walras: havia duas variáveis a determinar, o preço e a quantidade, e para isso eram necessárias duas curvas: a da oferta, ligada aos custos de produção,e a da procura, resultante das utilidades marginais. Em suma, para usar a imagem de Marshall, não se podia esquecer que a tesoura tinha duas pernas.

A metodologia do equilíbrio parcial habituou os economistas a condicionar suas afirmações ao "*coeteris paribus*", isto é, à hipótese de que não se alterem as variáveis do problema que deixam de ser levadas em consideração. Certamente, Marshall era muito bom economista para se limitar a traçar as curvas de oferta e procura e contentar-se em contemplar a sua interseção. A análise marshalliana admite deslocamento da curva de oferta como resultado de mudanças, ou na função de produção, ou nos preços dos fatores. E deslocamentos na curva da procura como reflexo ou da modificação dos hábitos dos consumidores, ou da sua renda, ou dos preços das demais mercadorias.

Esses deslocamentos permitiram que Marshall interpretasse em termos logicamente compreensíveis a velha lei da oferta e da procura, que de longa data corria em paralelo com a teoria econômica formal. Essa lei, em suas versões primitivas, afirmava que o preço de um produto era diretamente proporcional à procura e inversamente proporcional à oferta, o que, analiticamente se poderia traduzir por $p=kD/S$, sendo $\underline{k}$ uma constante, $\underline{S}$ a oferta, $\underline{D}$ a procura. Colocada nesses termos, a lei a nada poderia conduzir, pois o mercado deve-se encarregar de equilibrar a oferta e a procura, já que a quantidade vendida é fatalmente igual à comprada. Com $S=D$, a fórmula acima sempre levaria a um mesmo preço igual a $\underline{k}$, o que,

não apenas agrediria o bom senso, como as próprias intenções da lei da oferta e da procura. Poder-se-ia tentar melhorar a apresentação da lei abandonando as hipóteses de proporcionalidade direta e inversa e admitindo apenas que o preço fosse função crescente da demanda e decrescente da oferta, na forma $p=f(D,S)$, mas as objeções continuariam as mesmas.

Na interpretação de Marshall, dizer que a " *demanda aumenta* " significa afirmar que a curva correspondente se desloca para a direita, isto é, que a um mesmo preço os consumidores estarão dispostos a comprar mais. O mesmo sentido se pode dar à expressão "*a oferta aumenta*". Torna-se agora muito claro, como na FIGURA 2.3, que, desde que, como costuma ocorrer, a curva de oferta seja ascendente, e a de procura descendente, o preço aumentará sempre que a procura se deslocar para a direita, e sempre que a oferta se deslocar para a esquerda.

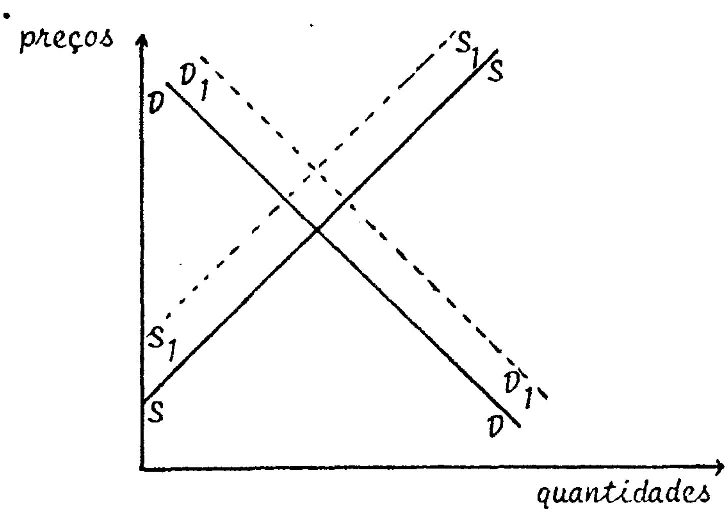


FIGURA 2.3

Poder-se-ia traduzir em linguagem matemática esse resultado voltando à expressão $p=f(D,S)$, mas com uma modificação sutil: as variáveis D e S da função f não seriam números, e sim curvas. Como bom didata que era, Marshall não recorreu a essa interpretação.

Além de bom professor, Marshall era um paciente conciliador. Assim, ao se meter na controvérsia sobre se eram as utilidades marginais ou os custos de produção que determinavam os preços, Marshall não se contentou em concluir que nenhuma das partes tinha razão, mas procurou examinar em que condições a razão pendia para um ou para outro lado. Esse trabalho é desenvolvido com muita lucidez na distinção marshalliana dos três períodos da oferta em regime de concorrência perfeita.

Marshall distingue três fases da oferta: a instantânea, a de curto prazo e a de longo prazo. A oferta instantânea é a dos bens que já estão produzidos; a de curto prazo, a dos bens que podem ser produzidos pelas empresas que operam no setor, sem modificar as suas instalações e equipamentos; a oferta de longo prazo é a que resulta da maior ou menor expansão das empresas existentes, bem como da entrada ou da saída de novas empresas no setor. Para tornar operativo o conceito de oferta de longo prazo, Marshall introduz o seu

conceito de "*lucro normal*". Esse seria o lucro capaz de manter em equilíbrio o número de empresas que concorrem no setor, não sendo suficientemente alto para provocar o ingresso de novos concorrentes, nem suficientemente baixo para levar as empresas existentes a fechar suas portas ou mudar de ramo de atividade.

No período instantâneo, como os bens já estão produzidos, a oferta é bastante rígida. O máximo que os produtores podem fazer, se os preços não lhes agradarem, é estocar a mercadoria, à espera de melhores preços futuros. Isso não apenas lhes acarreta custos de estocagem, mas pode até ser impossível, no caso dos produtos perecíveis. Nesse caso, praticamente se pode dizer que a oferta determina as quantidades, e a procura os preços (o que corresponderia, na FIGURA 2.2, a uma curva de oferta paralela ao eixo das ordenadas). Como a procura provém da utilidade marginal, esse é o caso em que os economistas austríacos pareciam aproximar-se da verdade.

Os preços do mercado instantâneo servem como um sinalizador para a oferta de curto prazo. Nessa fase, as empresas podem expandir ou contrair sua produção comprando mais ou menos matérias-primas, e aumentando ou diminuindo o emprego de mão-de-obra. Existe, porém, um elemento de rigidez. O número de empresas, de suas máquinas e o porte de suas instala -

ções é um dado do problema. A remuneração dos capitais investidos nesses fatores fixos é um resíduo (que Marshall denomina "quase-renda") que, comparado ao seu custo histórico, poderá ser maior, igual ou menor do que o lucro normal. No curto prazo, a oferta é mais flexível do que no período instantâneo, mas,naturalmente,menos elástica do que no longo prazo. Aí, a razão nem estava com os austríacos nem com os defensores da formação dos preços pelos custos de produção.

O confronto das quase-rendas com a taxa normal de lucro orienta a oferta de longo prazo. Se os ganhos sobre os capitais investidos no setor forem maiores do que o lucro normal, não apenas as empresas existentes tratarão de se expandir, como novos concorrentes serão atraídos pelo setor. Assim, a longo prazo, o preço de equilíbrio corresponderia aos custos de produção mais o lucro normal, tal como afirmavam os clássicos.

Os Princípios de Economia de Marshall são um livro extremamente imaginativo e didático, e de leitura bastante agradável. Comparativamente a Walras, Marshall conseguiu dois grandes triunfos. Primeiro, o de ser facilmente compreendido. Segundo, o de desenvolver um sistema de análise que se presta à obtenção de inúmeras conclusões práticas.

O defeito do método marshalliano do equilíbrio parcial está em facilitar tanto a obtenção de conclusões cer

tas quanto a de conclusões erradas. É preciso extremo cuidado e discernimento para saber quando se pode e quando deixa de ser tolerável apelar para o *coeteris paribus*. Um exemplo, citado por Keynes, diz respeito aos efeitos de uma baixa de salários nominais sobre as quantidades negociadas de um produto. É bastante claro que, como os salários representam importante parte dos custos, sua diminuição deve deslocar para baixo a curva da oferta. Supondo-se inalterada a curva da procura, conclui-se que o preço baixa,e a quantidade negociada aumenta.

Esse é o tipo de conclusão apressadamente tirada da análise do equilíbrio parcial. Realmente, se os salários baixarem apenas numa empresa, a conclusão é praticamente irrefutável. Mas, se a redução se verifica em toda a economia, não podemos esquecer que os salários são importante fonte de rendimentos, que afetam as curvas de procura. Em suma, a redução geral de salários também deve provocar o deslocamento para baixo da curva da demanda. Com mais forte razão, diminuem os preços. Mas,nada se pode afirmar a respeito das quantidades.

Vejamos,agora,algumas observações sobre o método do equilíbrio agregativo, comumente usado nos modelos de macroeconomia. A idéia está em conciliar o rigor walrasiano com a simplicidade marshalliana. Para isso,desenvolvem-se mo

delos de equilíbrio geral, mas admite-se que na economia só existam um ou dois produtos e um ou dois fatores. A moeda fiduciária também costuma entrar nos modelos, pois a política monetária costuma ter importantes reflexos macroeconômicos. Pode parecer estranho introduzir-se uma moeda fiduciária numa economia com apenas um ou dois produtos, mas essa é uma contingência inevitável nos modelos de equilíbrio agregativo.

O que se pode dizer desses modelos é que eles são úteis para descrever certas relações gerais no sistema econômico. E absolutamente incapazes de entrar nos pormenores setoriais que compõem o conjunto desse sistema. O método do equilíbrio geral procura, ao mesmo tempo, enxergar a floresta e cada árvore. Como isso é difícil para o olho humano, surgiram dois sistemas simplificadores: o equilíbrio parcial, que vê cada árvore mas não vê a floresta; e o equilíbrio agregativo, que vê a floresta sem distinguir nenhuma das suas árvores.

2.6) *A teoria do juro e do capital*

Reconstruir a teoria do capital e do juro foi das tarefas mais complexas enfrentadas pela escola marginalis

ta. De fato, havia no caso vários problemas a dissecar e in - terrelacionar.

O primeiro deles consistia em conceituar claramente o que era o capital de uma sociedade. A questão não parecia isenta de ambiguidades, pois o capital possui duas dimensões, uma física, outra financeira. Em termos físicos,bens de capital são aqueles que não têm utilidade direta para o consumo, mas que servem apenas para a produção de outros bens. São as máquinas, equipamentos, instalações e estoques. É importante conceituar esses estoques de forma bastante abrangente, de modo a também incluir os bens de consumo estocados nesse comércio. Deve-se entender que, nesse caso, os estoques não se destinam a atender as necessidades de consumo dos comerciantes, mas sim a lhes permitir a prática das suas atividades. Em termos físicos, o capital de uma sociedade corresponde ao conjunto de bens de capital existente em determinada data. Como tal, representa o conjunto de bens produzidos e não consumidos ou desgastados até essa data. Como os fatores originais de produção são o trabalho e os recursos da natureza , o capital físico pode assim ser entendido com *"terra e trabalho acumulados"*.

Ao lado dessa dimensão física, todavia, o capital possui uma dimensão financeira. O capital de uma socieda-

de se forma, no tempo, pela acumulação de rendimentos que não são gastos em consumo, isto é, pela poupança. Nessa dimensão financeira o capital circula de um lado para outro, à busca de quem lhe pague maior juro dentro de limites aceitáveis de risco.

Nenhuma dessas idéias era desconhecida quando surgiu a escola marginalista, mas freqüentemente a sua apresentação era confusa. Nem sempre se distinguiam claramente as dimensões física e financeira do capital. Embora as definições usuais levassem à conceituação de capital como estoque (quantidades ou valores, em determinada data), em muitos casos, como na versão original da teoria do fundo de salários e em toda a análise marxista, ele era tratado como fluxo (quantidades ou valores por unidade de tempo). Também, antes da escola marginalista não se conseguiu desenvolver uma teoria que separasse o juro do lucro. Em geral, os dois conceitos se misturavam numa mesma embalagem, embora freqüentemente se observasse que devia existir alguma correlação entre as taxas de juro e de lucro. Mais ainda, os modelos abrangentes, que chegavam efetivamente a uma teoria de distribuição do produto entre os fatores de produção, como os de Ricardo e Marx, sempre equacionavam o lucro (dentro do qual estava embutido o juro) como resíduo. A tentativa de Nassau Senior de conceituar o juro como o preço da abstinência foi mais uma observação tópica do que um esforço de construção teórica.

Um segundo problema resulta do fato de as máquinas, equipamentos e instalações, contrariamente aos estoques, serem duráveis. Isso levou Ricardo a distinguir o capital fixo (durável), do circulante(não-durável). Com mais precisão, se poderia dizer que o capital circulante é aquele que só pode ser usado uma vez na produção, enquanto o capital fixo pode ser usado por diversas vezes. A maneira correta de tratar dos bens duráveis de capital não foi percebida pelos clássicos, e apenas vagamente pela escola marginalista. É preciso distinguir dois valores para as máquinas, equipamentos e instalações: o preço de compra, pelo qual se pode adquirir a máquina. E o valor locativo, pelo qual se alugaria uma hora (ou qualquer outra unidade de tempo) de serviços da máquina.

Ainda em relação aos bens de capital fixo, há outro problema a considerar. As máquinas existentes não só se desgastam com o uso e o tempo, como também podem ser suplantadas pelo progresso tecnológico. Por essa razão, deve haver uma diferença entre as leis que determinam o seu valor de venda e as que regulam o preço de aquisição de uma nova máquina. Esse problema suscita um outro: a teoria deve explicar não apenas como se utiliza e como se avalia o capital já existente numa sociedade (teoria estática do capital), mas também como se forma o novo capital, nas dimensões física e financeira (teoria do investimento).

Para completar o quadro, existe a figura do empresário. Este toma ou cede dinheiro emprestado, compra ou aluga máquinas, emprega matérias-primas e mão-de-obra para produzir e vender bens e serviços, com o objetivo de maximizar seu lucro.

Identificar esses problemas, descobrir as relações entre eles existentes, e chegar a uma teoria que explicasse a determinação da taxa de juros não era, nem é, empreendimento dos mais simples. Do ponto de vista didático, para bem compreender a teoria do capital é importante isolar quatro personagens: o capitalista, que apenas empresta dinheiro para receber juros; a empresa locadora, que toma dinheiro emprestado para comprar máquinas e bens duráveis de produção, com o objetivo de alugá-los; o empresário que, com coragem e imaginação, mas sem recursos próprios nem trabalho, toma dinheiro emprestado, aluga máquinas e instalações (embora nunca as compre), adquire matérias-primas, emprega mão-de-obra para produzir bens e serviços e vendê-los com lucro; e o administrador que, em troca de um salário, mas sem correr riscos, trabalha muitas horas por dia para executar as ordens do empresário.

É claro que, no mundo real, o mesmo ator costuma representar simultâneamente vários desses papéis. O dono da empresa, após reunir-se com seus auxiliares, freqüentemente

se decide a reinvestir o lucro disponível na aquisição de determinadas máquinas e instalações. É conveniente, todavia, desdobrar essa operação em quatro partes, para não nos arriscarmos a cair num labirinto de confusões:

(*a*) o dono da empresa emprega a si próprio como administrador, em troca de um salário como trabalhador (supostamente qualificado);

(*b*) a empresa, como capitalista, empresta o dinheiro a si própria em troca do juro de mercado ;

(*c*) com o empréstimo, a empresa atua como locadora, adquirindo máquinas e instalações para serem alugadas; e

(*d*) a empresa aluga as máquinas a si própria.

Esse tipo de análise leva a uma distinção entre juro e lucro que, antes da teoria marginalista, não havia sido estabelecida em teoria econômica. O juro propriamente dito é a remuneração do capital, na ausência de risco. O lucro puro é o que sobra da receita da empresa, após o pagamento dos diversos fatores, inclusive os juros sobre o capital próprio. Na contabilidade quotidiana, os conceitos freqüentemente se misturam. Numa operação financeira, sempre costuma haver certa margem de risco, que é remunerada com um adicional de lucro sobre o juro puro. Da mesma forma, o lucro de balanço de uma empresa costuma englobar três componentes conceitualmente distintas: o salário do empresário como administrador profissional, o juro sobre o capital próprio e o resíduo, que efetivamente corresponde ao lucro puro.

Böhm-Bawerk é geralmente considerado o fundador da teoria moderna, a qual se assenta em três observações:

(a) existem processos indiretos de produção superiores aos diretos;

(b) a diferença entre os processos indiretos e os diretos está em que os primeiros exigem maior tempo para a obtenção dos bens de consumo final; e

(c) os bens presentes são, de um modo geral, mais valiosos do que os bens futuros de igual tipo e quantidade.

As duas primeiras observações são de natureza técnica, a terceira deordem psicológica. Processos diretos de produção são aqueles em que apenas o trabalho humano é usado para a exploração dos recursos da natureza; processos indiretos, aqueles que combinam o trabalho humano com bens de capital, isto é, com bens destinados apenas à produção de outros. O exemplo clássico com o qual Böhm-Bawerk mostra a superioridade dos processos indiretos sobre os diretos é o do lavrador que deseja saciar sua sede, e que mora numa choupana não muito próxima à fonte. O processo direto de produção consistiria em, cada vez que sentisse sede, deslocar-se o trabalhador até a fonte. Um primeiro grau de processo indireto seria, para o trabalhador, construir um balde e enchê-lo uma vez por dia. Um segundo grau de processo indireto consis

tiria em juntar uma série de troncos ocos articulados,de modo a construir uma canalização da fonte à choupana.Quanto mais indireto fosse o processo, mais tempo precisaria trabalhar o lavrador,até obter o resultado desejado. Em compensação, menor seria o tempo de trabalho futuro necessário ao seu suprimento de água. Generalizando, Böhm-Bawerk conclui que os métodos indiretos de produção são superiores aos diretos,por duas razões: por aumentarem a produtividade do trabalho, e por permitirem a fabricação de produtos que jamais poderiam obter-se por processos diretos. É de se entender que existem processos indiretos superiores aos diretos, embora não se deva concluir que, quanto mais capital se empregue num método de produção, tanto melhor será esse método.

Na angulação técnica, o aspecto mais importante da contribuição de Böhm-Bawerk não reside nessa observação quanto à superioridade dos processos indiretos. Até aí se tratava apenas de apresentar idéias antigas com palavras novas.

A grande novidade é a identificação do tempo de espera como o distintivo característico dos processos indiretos de produção. Há exemplos clássicos, como o do crescimento de árvores ou o do envelhecimento do vinho,que mostram com muita nitidez como se pode aumentar a produtividade pela simples espera. Alguns discípulos de Böhm-Bawerk tentaram, in

frutiferamente, generalizar esses exemplos,de modo a construir toda a teoria do capital e do juro em função de um único parâmetro, o período de produção. Muito papel e tinta se gastou nessa controvérsia que, metodologicamente,equivalia à tentativa marxista de reduzir o valor também a um único parâmetro. Demonstrou-se mais tarde que essa unificação era impossível, pois um processo indireto pode envolver diferentes períodos de produção,que não podem ser caracterizados apenas por um valor médio. O fator tempo, todavia, quer se possa exprimir num único período, quer se descreva como uma multiplicidade de períodos distintos, diferencia os processos capitalistas dos métodos diretos de produção.

A observação de que os processos indiretos de produção exigem tempo para a obtenção dos produtos explica por que os empresários que exploram os métodos capitalistas de produção precisam tomar dinheiro emprestado (nem que seja emprestado a si próprios); a observação de que os métodos indiretos são mais produtivos do que os diretos justifica por que os empresários que tomam empréstimos se dispõem a pagar juros. Para completar o circuito,é necessário explicar por que as pessoas que emprestam dinheiro costumam cobrar juros.A resposta encontrada por Böhm-Bawerk é a da superioridade dos bens presentes sobre os bens futuros. Assim, para renunciar à disponibilidade presente, os indivíduos exigirão um ágio na sua retribuição futura. Esse ágio é o juro.

Seria de se esperar que Böhm-Bawerk construísse a sua teoria do juro com base nesse conjunto de observações. Contudo, como bom austríaco da época, as suas formulações eram todas de cima para baixo, partindo da utilidade para chegar a tudo o mais. Assim, Böhm-Bawerk rejeita a idéia de von Thünen, de que o juro era a produtividade marginal do capital, para se deter apenas na sua consideração psicológica, a de que os indivíduos preferem os bens presentes aos bens futuros, e que por isso é necessário compensar os emprestadores com um ágio.

A consideração do juro como ágio é muito mais uma definição do que uma teoria de determinação. Na realidade, Böhm-Bawerk iniciou uma teoria do capital e do juro, mas não conseguiu terminá-la. Essa tarefa seria composta a muitas mãos, devendo-se destacar, pelo menos, as contribuições de Wicksell, Fisher, Hayek e Keynes. Vejamos, em síntese, o que se pode extrair da teoria marginalista, nesse sentido.

A observação de que os bens presentes valem mais do que os futuros de igual tipo e quantidade leva à conclusão de que o mercado deve estabelecer uma função desconto, que designaremos por $v(t)$. Essa função indica quanto vale, no presente, uma promessa segura de recebimento de <u>um</u> cruzeiro no instante futuro t. Naturalmente, $v(0)=1$, e $v(t)$ é função decrescente de t. A promessa de recebimento de P_1 cruzeiros no ins -

tante 1, P_2 cruzeiros no instante 2, ..., P_n cruzeiros no instante n , vale no presente:

$$V_0 = P_1 v(1) + P_2 v(2) + \ldots\ldots + P_n v(n) \qquad (2.19)$$

Daí se segue que quem emprestar um cruzeiro no presente para obter seu retorno no período 1 deve receber de volta uma quantia $1+i_1$, sendo i_1 a taxa de juros por um período tal que:

$$1 = (1+i_1)v(1)$$

Donde se conclui que a taxa de juros se relaciona com a função desconto pela expressão:

$$i_1 = \frac{1}{v(1)} - 1$$

Vejamos, agora, as relações entre taxa de juros e produtividade do capital. É tentador afirmar, com o von Thünen, que assim como o salário é o produto marginal do trabalho (isto é, a produtividade marginal vezes o valor do produto), a taxa de juros deve ser igual à produtividade marginal do capital. Essa analogia, no entanto, incide no pecado de esquecer que quem entra nas funções de produção não é o capital financeiro, mas o capital físico representado por máquinas, instalações e estoques. O verdadeiro análogo do salário não é o juro, mas o valor locativo do capital fixo. Pode-se, realmen

te afirmar que esse valor locativo deve ser igual à produtividade marginal da máquina.

A função desconto estabelece a relação entre o valor locativo e o preço de aquisição de um bem de capital fixo. Se determinada máquina fornece rendimentos de aluguel P_1 no instante 1, P_2 no instante 2, ...P_n no instante n, o seu preço de procura pode ser determinado pela equação (2.19). Para uma máquina nova, o preço de procura deve equilibrar-se com o preço de oferta e, nesse sentido, não há maior diferença entre a oferta de um bem durável e a de um bem de consumo. Para as máquinas usadas, a oferta é absolutamente rígida, e o seu valor residual determina-se apenas pelo valor presente dos seus rendimentos futuros de locação. Em determinado momento, esse valor acabará sendo tão baixo que o melhor que então se poderá fazer será vender a máquina como sucata.

O objetivo da empresa, dentro da teoria do capital, continua sendo o de maximizar o lucro. O fator tempo , todavia, tem que ser considerado, e o lucro é definido, agora, como o valor atual do saldo das receitas sobre as despesas presentes e futuras.

Essas observações ajudam a construir uma teoria do juro, mas não são suficientes para completá-la. Para tanto, é preciso dispor de informações sobre o fornecimento de recursos para financiar a formação de capital. Nesse sentido,

pode-se considerar a poupança total como função da taxa de juros, à moda de Wicksell, ou a própria procura de moeda dependente dessa taxa, na linha de Keynes. Para chegar a uma explicação sobre como se forma a função desconto e seu subproduto, a taxa de juros, é necessário construir um modelo de equilíbrio geral ou agregativo,que leve em conta todas essas relações. Isso era pedir demais a Böhm-Bawerk e seus contemporâneos. A teoria estática do equilíbrio geral, formulada por Walras, já era bastante complicada para a época. Para explicar convenientemente a formação da taxa de juros,seria necessário recorrer a um modelo dinâmico incrivelmente mais complexo, pelo menos para a linguagem matemática da época.

Algumas observações finais sobre a teoria do lucro puro. Por que,após a remuneração do capital e do trabalho, a empresa ainda fica com um excedente? Numa economia em concorrência perfeita, e onde os empresários pudessem ler o futuro na palma da mão, o que se pode dizer do lucro puro é que êle se reduziria a zero. Na realidade,é nessa hipótese teórica que se costumam construir os modelos de equilíbrio geral,em concorrência perfeita.

O lucro puro existe porque o mundo real é diferente do descrito nesses modelos. Em primeiro lugar,nem sempre a concorrência é perfeita. Existem monopólios e oligopólios que podem manter, permanentemente, um excedente de remu-

neração,em seu benefício. Em segundo lugar, mesmo quando a concorrência é ampla, o mundo não é estático. Alguns empresários inovadores conseguem introduzir no mercado novos produtos, novas técnicas de produção, e, até que os concorrentes os imitem, desfrutar dos excedentes de um monopólio transitório. (Essa é, nas linhas mestras, a teoria de Schumpeter do lucro como remuneração do empresário). Em terceiro lugar, os empresários, por mais hábeis que sejam, não possuem dons divinatórios infalíveis. Assim, a produção capitalista, dependendo de previsões para o futuro, envolve riscos e incertezas. A explicação do lucro puro como remuneração da incerteza é devida a Frank Knight.

2.7) *Os limites da linguagem marginalista*

Indiscutivelmente, a teoria econômica, ao servir-se do cálculo diferencial, conseguiu progredir num grande salto. O enigma da relação entre valor de uso e valor de troca foi solucionado. A descoberta de que os fatores de produção eram remunerados pela sua produtividade marginal fornecia informação muito mais lógica e precisa do que antigas teorias, como a do fundo de salários. O processo de produção capitalista e o juro tornaram-se, senão inteiramente explicados, pelos menos muito menos incompreendidos. Por certo, alguns margina -

listas,especificamente os da escola austríaca, de tal forma se entusiasmaram com os novos teoremas que quiseram construir uma teoria econômica inteiramente subjetiva, na qual tudo se determinava de cima para baixo,a partir da utilidade marginal. Mas,não foi difícil reconciliar as antigas teorias com as novas, pelo menos no que cada qual parecia ter de válido , depois das sínteses desenvolvidas por Walras, Marshall e Pareto.

No plano ideológico, a teoria marginalista reforçou bastante a fé nos méritos do regime capitalista (o que não impediu, todavia, que Walras pregasse um socialismo à sua moda). Se os salários eram determinados pela produtividade marginal do trabalho, não havia por que condená-los ao mínimo de subsistência. Com efeito, a acumulação de capital e o progresso tecnológico deveriam, com o tempo, elevar essa produtividade marginal. O juro adquiriu a necessária base de moralidade teórica, e os marginalistas não encontraram maior dificuldade em identificar a pobreza da teoria econômica de Marx. Além do mais, a partir de Pareto conseguiu-se demonstrar que, pelo menos em concorrência perfeita, os preços de mercado serviam para orientar de forma eficiente o uso dos fatores escassos. Com isso;a teoria marginalista conseguiu restaurar um clima de otimismo, bem característico do final do século passado e da"Belle Époque" que havia saído de cena desde Malthus

e Ricardo.

É importante notar que os progressos conseguidos pela teoria marginalista foram muito mais devidos ao uso de uma nova linguagem, a do cálculo diferencial (em símbolos ou em palavras),do que à descoberta de novas leis técnicas ou psicológicas. As hipóteses, bastante simples, são a do consumidor desejando maximizar a sua satisfação, um subproduto da filosofia utilitária de Bentham; e a empresa ou o capitalista procurando maximizar seus lucros, o que já se admitia explicitamente em toda a teoria clássica inglesa. Talvez as únicas grandes novidades não decorrentes da nova linguagem empregada tenham sido duas das observações de Böhm-Bawerk: o papel do tempo nos processos indiretos de produção, e a preferência aos bens presentes em relação aos futuros.

Coloca-se,agora,uma questão técnica: até que ponto a linguagem do cálculo diferencial era a mais adequada para descrever os problemas que a teoria marginalista procurava resolver?

As objeções são muitas, ainda que se possam considerar bastante sutís.

Em primeiro lugar, o alicerce da teoria marginalista era o conceito de utilidade, do qual resultava o de

utilidade marginal. Sucede que uma ciência que se preze, deve lidar com variáveis suscaptíveis de mensuração, e até hoje ninguém inventou aparelhos para a medição de utilidades. Pareto percebeu, e Hicks demonstrou, que todos os teoremas relevantes da teoria da utilidade marginal podiam ser reconstruídos sem que fosse necessário acreditar na medição das utilidades. Bastava admitir que existissem preferências de uma situação em relação a outra, ordenáveis de acordo com certo conjunto de hipóteses. Esse é o fundamento da chamada "teoria ordinal do comportamento do consumidor". Acontece que, para o tratamento dessa teoria ordinal, a melhor linguagem não é a do cálculo diferencial.

Em segundo lugar, as funções de produção nem sempre se podem considerar diferenciáveis, como supõe a teoria marginalista. Às vezes, é possível substituir um fator por outro, mas às vezes não. Se a função de produção pretende descrever uma reação química, como tantas vezes acontece na indústria, a hipótese de substitutibilidade constitui uma agressão à lei de Prout, segundo a qual os ingredientes químicos só se combinam em proporções fixas. Uma teoria satisfatória da produção deve admitir que os fatores ora possam ser substituíveis, ora não. Isso é incompatível com o tratamento das funções de produção pelo cálculo diferencial.

Em terceiro lugar, entre a linguagem formal e o pensamento econômico deve haver estreita sintonia. Em ou-

tras palavras, as expressões matemáticas que acompanham o desenvolvimento de um modelo econômico não devem ser lançadas como objetos soltos no espaço, mas precisam sempre encontrar algum paralelismo técnico, ou psicológico. Vimos na seção 2.5 que esse paralelismo se estabelece com muita facilidade para as condições de primeira ordem de maximização. Mas, não para as condições de segunda ordem, representadas pelos sinais de complicados determinantes que, pelo menos à primeira vista, não têm nenhum sentido econômico.

Em quarto lugar, há uma diferença entre os processos de maximização fornecidos pelo cálculo diferencial e os que se buscam na solução de problemas econômicos. O cálculo diferencial fornece uma técnica para a determinação de máximos locais. Por exemplo, se tomarmos uma função $y=f(x)$ de uma variável real e descobrirmos que, em determinado ponto x_0, a derivada primeira se anula e a derivada segunda é negativa, poderemos afirmar que essa função passa em, x_0, por um máximo local. Isso significa que, numa vizinhança de x_0, $f(x_0)$ é o maior valor assumido pela função. Mas não que esse seja o máximo da função em todo o seu campo de definição. Assim, por exemplo, na FIGURA 2.4 os pontos A, B, C correspondem a máximos locais, indistingüíveis pelas técnicas do cálculo diferencial. Ocorre que, em economia, o que interessa são os máximos globais (na figura, o ponto B), e não os locais.

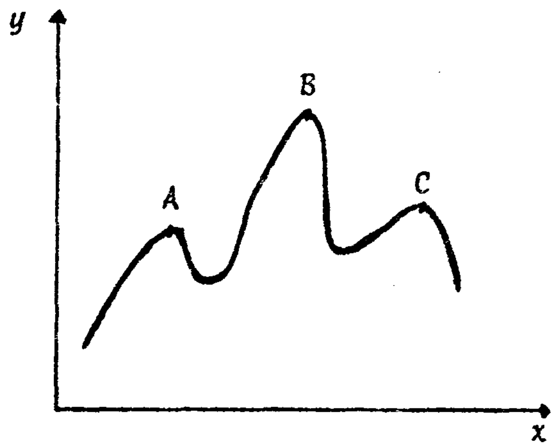


FIGURA 2.4

Em quinto lugar, pela técnica dos multiplicadores de Lagrange, o cálculo diferencial nos ensina a encontrar máximos de funções condicionadas por equações de restrição. Ocorre que, em economia, as restrições não se costumam representar por equações,mas por desigualdades. Para citar um exemplo, quando se estuda o problema do equilíbrio do consumidor, que procura maximizar a sua utilidade com a condição da restrição orçamentária, mais próprio do que exprimir essa restrição sob forma de uma equação $p_1q_1+ p_2q_2+ \ldots\ldots+p_nq_n = R$ seria enunciá-la como desigualdade, $p_1q_1+p_2q_2+ \ldots\ldots+p_nq_n \leqslant R$. Isso abriria mais uma hipótese, a do consumidor jogar fora parte de sua renda. Pode-se afirmar que, no caso, a distinção é absolutamente inútil,pois, como todas as utilidades marginais se supõem positivas, só os loucos rasgam dinheiro. Há outros casos, no entanto, em que a presença das desigualdades não pode ser desprezada. No problema do consumidor, por exemplo,é necessário deixar claro que as quantidades compradas dos dife

rentes bens não podem ser negativas. Isso corresponde a uma restrição por desigualdades do tipo $q_i \geq 0$, o que muda a regra clássica de que nos pontos de máximo as derivadas devem se anular. Esse aspecto foi visto quando passamos da equação (2.6) para a expressão (2.7): se o consumidor nada compra de certa mercadoria, é porque sua utilidade marginal, dividida pelo preço é menor, ou igual (e não mais necessariamente igual), à utilidade marginal da renda. O fato de as restrições econômicas serem usualmente expressas por desigualdades, e não por equações, não chega a constituir um golpe de morte no uso do cálculo diferencial. Mas, exige que se modifiquem significativamente os enunciados dos teoremas de maximização.

Por último, vimos que a linguagem tradicional do cálculo diferencial levou Walras a um sistema de equações de equilíbrio geral muito pouco manobrável, do ponto de vista prático. A teoria do equilíbrio geral é suficientemente importante para que dela se tente extrair alguma conclusão, além de que há tantas equações quanto incógnitas.

Essas objeções levaram os economistas a substituir gradualmente a linguagem do cálculo diferencial pela da matemática moderna, sobretudo a partir da década de 1950. O que se conclui é que os teoremas mais importantes da teoria marginalista podem ser obtidos sem tantas hipóteses restriti-

vas quanto às funções de utilidade e de produção. E que, não só é possível deduzir esses teoremas em condições muito mais gerais, como se torna muito mais cristalino o seu conteúdo e conômico. A linguagem do cálculo diferencial não é de todo abandonada, mas só entra em cena quando se torna absolutamente necessária. Do ponto de vista lógico se trata de um método um pouco mais indireto de produção do que a teoria marginalista. O leitor é obrigado a investir mais tempo na apreensão de certos conceitos da matemática moderna. Em compensação, os resultados se tornam bem mais produtivos em generalidade e clareza.

CAPÍTULO III

A INVASÃO TOPOLÓGICA(*)

3.1) *A geometria analítica a n dimensões*

Escolhida uma origem O e um sistema de eixos cartesianos retangulares, um ponto P do plano se define por um par ordenado (x_1, x_2) de números reais, um ponto P do espaço tridimensional por um terno (x_1, x_2, x_3) de coordenadas. As coordenadas tanto podem representar um ponto geométrico quanto o vetor OP partindo da origem e com extremidade em P. Por extensão natural, define-se ponto ou vetor a n dimensões como sendo uma *n-upla* ordenada $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ de números reais. O espaço euclidiano a n dimensões R^n é o conjunto dos pontos a n dimensões. Assim, $R = R^1$ corresponde geometricamente à linha reta, R^2 ao plano, R^3 ao espaço tridimensional. O bom senso recomenda que não tentemos visualizar, no espaço físico, vetores a mais de três dimensões. A idéia abstrata, todavia, é bastante simples, e é de se presumir que muitas das propriedades válidas para vetores bi ou tri-dimensionais também sejam válidas no R^n. Obviamente, os métodos de demonstração para o R^n são necessariamente algébricos.

(*) As demonstrações dos vários teoremas citados neste capítulo se encontram nos Apêndices.

As operações básicas com vetores a n dimensões são três: adição, produto por um número real e produto escalar. A definição dessas operações estende certas propriedades dos vetores a duas e três dimensões.

No plano e no espaço, sabemos que para somar dois vetores basta adicionar as respectivas componentes. Por essa motivação, se $x=(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ e $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ são dois vetores do R^n, define-se sua soma $x+y$ pela adição das respectivas componentes, isto é, $x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$. O vetor nulo é, por definição, aquele cujas componentes são todas iguais a zero, isto é, $0=(0,0,\ldots,0)$. A subtração define-se como operação inversa da soma, isto é, $x-y = (x_1-y_1, \ldots, x_n-y_n)$.

Diz-se que um vetor $x \geqslant y$ quando cada componente de $\underline{x}$ for maior ou igual à correspondente em $\underline{y}$, isto é, quando $x_1 \geqslant y_1$, $x_2 \geqslant y_2$, ..., $x_n \geqslant y_n$. Na mesma linha de comparar as componentes, definem-se as desigualdades $x > y$, $x \leqslant y$ e $x < y$.

O produto de um número real α por um vetor $\underline{x}$ obtém-se multiplicando por α cada uma das componentes de x, isto é, $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$. Essa é também uma extensão natural da definição a duas e três dimensões.

No plano e no espaço tridimensional, o produto escalar $[x,y]$ de dois vetores é o número real que se obtém multiplicando o comprimento dos dois vetores pelo coseno do ângulo por eles formado. Demonstra-se que esse produto escalar é a soma dos produtos das componentes respectivas. Essa propriedade serve de base à definição do produto escalar de dois vetores a n dimensões:

$$[x,y] = x_1y_1+x_2y_2+ \ldots\ldots + x_ny_n \qquad (3.1)$$

Verifica-se imediatamente que o produto escalar obedece às seguintes propriedades:

(*i*) $[x,x] \geq 0$

(*ii*) $[x,x] = 0$ *se e somente se* $x=0$

(*iii*) $[x,y] = [y,x]$, *isto é, o produto escalar é comutativo;*

(*iv*) $[\alpha x + \beta y,\ z] = \alpha[x,z] + \beta[y,z]$.

O comprimento $|x|$ (também denominado módulo ou norma) de um vetor é definido pela regra pitagoreana aplicável a duas e três dimensões: a raiz quadrada da soma dos quadrados de suas componentes, isto é:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots x_n^2} \qquad (3.2)$$

ou seja, a raiz quadrada do seu produto escalar por si pró -

prio:

$$|\ x\ | = \sqrt{x,x} \qquad (3.3)$$

A duas e três dimensões, dois vetores são ortogonais, se, e somente se, o seu produto escalar for igual a zero. Essa propriedade inspira a definição de ortogonalidade no espaço R^n; x e y dizem-se perpendiculares (ou ortogonais) se $\left[x,y\right] = 0$. Partindo da igualdade:

$$\left[\ x+y,\ x+y\ \right] = \left[x,x\right] + 2\left[x,y\right] + \left[y,y\right]$$

conclui-se que, se x e y são ortogonais:

$$|\ x+y\ |^2 = |x|^2 + |y|^2 \qquad (3.4)$$

que é o teorema de Pitágoras para o espaço a $\underline{n}$ dimensões.

Uma relação importante entre produto escalar e comprimentos é dada pela desigualdade de Schwarz:

$$\left|\left[x,y\right]\right| \leq |x|\ |y| \qquad (3.5)$$

A duas ou três dimensões, essa desigualdade corresponde ao fato de que o cosseno de um ângulo está compreendido entre -1 e $+1$. A $\underline{n}$ dimensões, a desigualdade se prova observando que

$$\left[x - \lambda y, x - \lambda y \right] = \left|x\right|^2 - 2\lambda\left[x,y\right] + \lambda^2 |y|^2 \geq 0$$

para todo número real λ, e lembrando que o trinômio $\lambda^2 + b\lambda + c$ só é maior ou igual a zero, para todo λ, se $b^2 - 4ac \geq 0$.

Da desigualdade de Schwarz se conclui que o comprimento da soma de dois vetores é menor ou igual à soma do comprimento de cada um desses vetores:

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

desigualdade correspondente à conhecida proposição geométrica de que, num triângulo, qualquer lado é inferior à soma dos outros dois. (A maneira de demonstrar o teorema consiste em provar, com auxílio da desigualdade de Schwarz, que o quadrado do primeiro membro é menor ou igual ao quadrado do segundo).

A distância $d(x,y)$ entre dois pontos do R^n é definida como o comprimento de sua diferença:

$$d(x,y) = |x-y| \qquad (3.6)$$

ou seja, a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das componentes dos dois vetores (tal como na geometria analítica a duas e três dimensões):

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots\ldots + (x_n-y_n)^2}$$

A relação distância obedece às seguintes propriedades:

$$(i)\ d(x,y) \geq 0$$

$$(ii)\ d(x,y) = 0 \text{ se e somente se } x=y$$

$$(iii)\ d(x,y) = d(y,x)$$

$$(iv)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Traduzamos agora para o R^n três conceitos geométricos importantes, o de segmento, o de reta e o de hiperplano.

No espaço a duas ou três dimensões, dados dois pontos x e y, qualquer ponto do segmento que une x a y tem por coordenadas uma média ponderada das coordenadas dos extremos. Essa propriedade serve para definir, no R^n, o segmento que une x a y. Esse segmento $s(x,y)$ é definido como o conjunto dos pontos da forma

$$z = (1 - \alpha)x + \alpha y \qquad (3.7)$$

sendo $0 \leq \alpha \leq 1$.

Supondo x diferente de y, e eliminando a restrição de que $0 \leq \alpha \leq 1$, obtemos a reta que passa por x e y, a qual é o conjunto dos pontos

$$z = (1 - \alpha)\ x + \alpha y \qquad (3.8)$$

para todos os valores reais de α.

Na geometria analítica a três dimensões, um plano representa-se por uma equação linear:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = c$$

a_1,a_2,a_3 e c designando quatro constantes. Supõe-se que algum dos a_i seja diferente de zero. Em notação vetorial, essa equação pode ser expressa por

$$[a,x] = c$$

onde $a=(a_1,a_2,a_3)$ e $x=(x_1,x_2,x_3)$. Se x_0 representa um ponto do plano, isto é, um vetor tal que $[a,x_0] = c$, a equação acima equivale a

$$[a,x-x_0] = 0 \qquad (3.9)$$

que descreve o plano como o lugar geométrico dos vetores x tais que $x-x_0$ seja perpendicular ao vetor a.

Essa definição é a que se usa no R^n para o hiperplano passando por x_0 e normal ao vetor a: o conjunto dos pontos tais que $[x-x_0, a] = 0$. No espaço a três dimensões, os hiperplanos correspondem aos planos usuais da geometria euclidiana. No espaço R^2, os hiperplanos se reduzem a linhas retas. No espaço unidimensional, os hiperplanos seriam

pontos.

Um hiperplano divide o espaço R^n em semi-espaços, que podem ou não incluir o próprio hiperplano, de acordo com as desigualdades $[x-x_0,a] \geq 0$, $[x-x_0,a] \leq 0$, $[x-x_0,a] > 0$ e $[x-x_0,a] < 0$.

Os vetores $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0)$, ... $e_n = (0,0,\ldots,1)$, com uma das componentes igual a um e as demais iguais a zero, formam a chamada "base natural" do R^n. É imediato que, se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, então $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.

Embora levemente abstratos, os conceitos da geometria analítica a n dimensões são extensões muito simples e naturais dos tratados nos espaços bi e tridimensionais. A vantagem que se obtém é uma formidável economia de notação. A título de exemplo, consideremos um sistema de funções reais de variáveis reais:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n).$$

Com o conceito de espaço euclidiano a várias dimensões, esse sistema pode ser simplesmente descrita como uma função $y=f(x)$, definida no R^n e com valores no R^m.

Ou consideremos o problema clássico do consumidor, que deseja maximizar a sua utilidade $U(q_1,q_2,\ldots\ldots,q_n)$, onde $q_1,q_2,\ldots.q_n$ são as quantidades consumidas por unidade de tempo, dentro da sua limitação orçamentária $p_1q_1+p_2q_2+\ldots.+p_nq_n \leq R$, onde os p_i designam os preços e R a renda do consumidor. Há ainda a considerar o fato de que as quantidades não podem ser negativas. Em linguagem geométrica a n dimensões esse problema se enuncia sinteticamente sob a forma:

maximizar $U(q)$

com as restrições

$[p,q] \leq R$

$q \geq 0$

3.2) <u>*Estruturas topológicas*</u>

Entremos agora nos primeiros conceitos de topologia do R^n. Uma bola aberta, com centro em $x_0 \varepsilon R^n$ e com raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos y do R^n . tais que $d(x,y) < r$. No plano, a bola aberta corresponde ao interior do círculo de centro em x_0 e raio r ; no espaço tridimensional ao interior da esfera de centro em x_0e raio r;

Seja C um subconjunto do R^n. Diz-se que um pon

to $x_0 \in C$ é ponto interno a C quando é possível encontrar $r > 0$ tal que a bola aberta de centro em x_0 e raio r esteja inteiramente contida em C. É fácil verificar, a título de exemplo, que, se $a \neq 0$ e C é o semi-espaço formado pelos pontos x tais que $[x-x_0, a] \geqslant 0$, então os pontos internos de C são aqueles para os quais $[x-x_0, a] > 0$.

Diz-se que um subconjunto C do R^n é <u>aberto</u> quando todos os seus pontos são internos (ou seja, quando qualquer dos seus pontos for o centro de uma bola aberta inteiramente contida em C), ou quando C é vazio. Daí resultam as famosas propriedades dos conjuntos abertos:

(*a*) o conjunto vazio e o espaço R^n são abertos;

(*b*) a união de uma família qualquer de conjuntos abertos é aberta;

(*c*) a intersecção de uma coleção finita de conjuntos abertos é aberta.

Note-se que a intersecção de uma coleção infinita de conjuntos abertos pode não ser aberta. Por exemplo, no espaço R^1, a intersecção dos intervalos abertos $(-1/n, 1+1/n)$, sendo $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$, é o intervalo fechado $[0, 1]$.

Um subconjunto C do R^n diz-se <u>fechado</u> quando seu complemento é aberto. Daí resultam as propriedades corres

pondentes:

(a) o conjunto vazio e o espaço R^n são fechados;

(b) a união de uma coleção finita de conjuntos fechados é fechada;

(c) a intersecção de uma família qualquer de conjuntos fechados é fechada. É fácil verificar, a título de exemplo, que todo conjunto finito de pontos do R^n é fechado.

Seja C um subconjunto do R^n. Um ponto x_0 (não necessariamente pertencente a C) é dito <u>ponto de acumulação</u> de C quando toda bola aberta com centro em x_0 contiver pelo menos um elemento de C diferente de x_0. Daí se conclui que, se x_0 é ponto de acumulação de C, qualquer bola aberta com centro em x_0 conterá uma infinidade de elementos de C. (Se uma bola aberta apenas contivesse um número finito de pontos de C, um deles estaria à menor distância r_0 de x_0; uma bola aberta de raio inferior a r_0 não conteria nenhum outro ponto de C distinto de x_0). Verifica-se facilmente que um conjunto é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.

O <u>interior</u> de um subconjunto C do R^n é definido como a união de todos os conjuntos abertos contidos em C. Os pontos do interior de C são os já definidos pontos in -

ternos de C. O <u>fecho</u> de C é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm C. É fácil demonstrar que o fecho de C obtém-se acrescentando aos pontos de C todos os seus pontos de acumulação. É imediato que um conjunto aberto é igual ao seu interior, e que um conjunto fechado coincide com seu fecho.

A <u>fronteira</u> de um conjunto C é definida como o conjunto dos pontos do R^n que pertencem a seu fecho, mas não a seu interior. Para que x_0 pertença à fronteira de C, é necessário e suficiente que toda bola aberta com centro em x_0 contenha algum elemento de C (que pode ser o próprio x_0) e algum elemento do complemento de C.

Um subconjunto C do R^n diz-se <u>limitado</u> quando existir algum número real M tal que, para todo x pertencente a C, se tenha $|x| < M$. Denomina-se <u>compacto</u> um subconjunto que seja ao mesmo tempo fechado e limitado (essa é uma definição que, em topologia, serve exclusivamente ao R^n).

Os conjuntos compactos gozam de algumas propriedades muito especiais, que derivam do famoso teorema de Bolzano-Weierstrass: <u>*toda coleção infinita de elementos de um conjunto compacto C possui pelo menos um ponto de acumulação pertencente a C*</u>. É fácil verificar, com contra-exemplos, que

o teorema não é necessariamente válido para fechados não limitados. No conjunto dos reais, que é fechado, o subconjunto formado pelos inteiros é infinito, mas não possui nenhum ponto de acumulação. O teorema também não é válido para conjuntos limitados que não sejam fechados. Por exemplo, no intervalo aberto $(0,1)$ da linha reta, a sucessão $\{1-1/n\}$(n *inteiro*) não possui nenhum ponto de acumulação pertencente ao intervalo. (O ponto de acumulação, igual a 1, está fora do intervalo).

Uma propriedade bastante importante dos compactos é o chamado <u>teorema dos pontos à mínima distância</u>. Sejam C_1, compacto , e C_2, fechado; então, existem dois pontos, x_1 pertencente a C_1 e x_2 pertencente a C_2, tais que, para todos $y_1 \in C_1$, e $y_2 \in C_2$, se tenha $d(x_1,x_2) \leq d(y_1,y_2)$. A existência de pontos à mínima distância pertencentes aos conjuntos não pode ser garantida em outras condições. Assim, por exemplo, na linha reta os intervalos abertos $(0,1)$ e $(2,3)$ não possuem pontos à mínima distância que lhes pertençam.

Introduzamos finalmente a noção, bastante importante em análise econômica, de conjunto convexo. Um subconjunto C do R^n diz-se <u>convexo</u> quando, se x e y forem dois pontos quaisuqer de C , o segmento $\delta(x,y)$, de extremidades x e y , estiver inteiramente contido em C. A FIGURA 3.1.A exemplifica um conjunto convexo, a 3.1.B, um não-convexo.

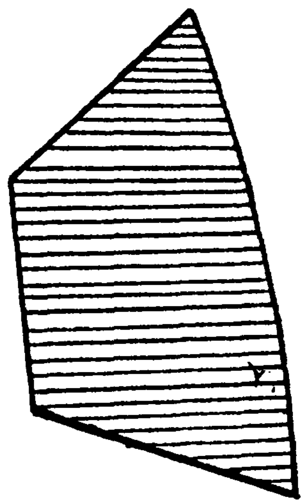


FIGURA 3.1.A
CONJUNTO CONVEXO

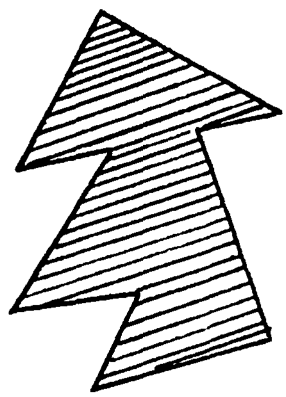


FIGURA 3.1.B
CONJUNTO NÃO-CONVEXO

Consideram-se também convexos os conjuntos formados por um único ponto do R^n e o conjunto vazio. Com essa extensão, torna-se imediato que a intersecção de uma coleção qualquer de conjuntos convexos também é convexa. Demonstra-se também facilmente que o fecho e o interior de um conjunto convexo são ambos convexos.

Os exemplos de conjuntos convexos são inúmeros: o espaço R^n, as bolas abertas, os hiperplanos, as retas, os semi-espaços abertos e fechados delimitados pelos hiperplanos, e, por conseqüência, qualquer intersecção desses conjuntos.

Dois teoremas da maior importância a respeito de conjuntos convexos são os chamados teoremas de separação, ilustrados na FIGURA 3.2. O primeiro desses teoremas afirma que, dado um ponto x_0 não pertencente ao convexo C ou situado na sua fronteira, existe um hiperplano passando por x_0 que deixe C inteiramente num dos seus semi-espaços. Analiticamente, esses teoremas se anuncia da seguinte forma: " *Seja C um conjunto convexo, e x_0 um ponto do R^n situado fora de C ou na fronteira de C. Então, existe $u \neq 0$, tal que para todo $\underline{x}$ pertencente a C se tenha $[x-x_0,u] \geq 0$*".

O segundo teorema afirma que, se C_1 e C_2 são dois conjuntos convexos disjuntos, existe um hiperplano que os separa. Analiticamente, se C_1 e C_2 são convexos e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, existem x_0 e u pertencentes a R_n, sendo $u \neq 0$, tais que $[x-x_0,u] \leq 0$, para todo $x \in C_1$, e $[y-x_0, u] \geq 0$, para todo $y \in C_2$.

No plano e, possivelmente, no espaço tridimensional, esses teoremas de separação são geometricamente intuitivos. A demonstração rigorosa para o R^n é algo trabalhosa, encontrando-se nos Apêndices. Esses teoremas encontram fecundas aplicações na teoria dos preços.

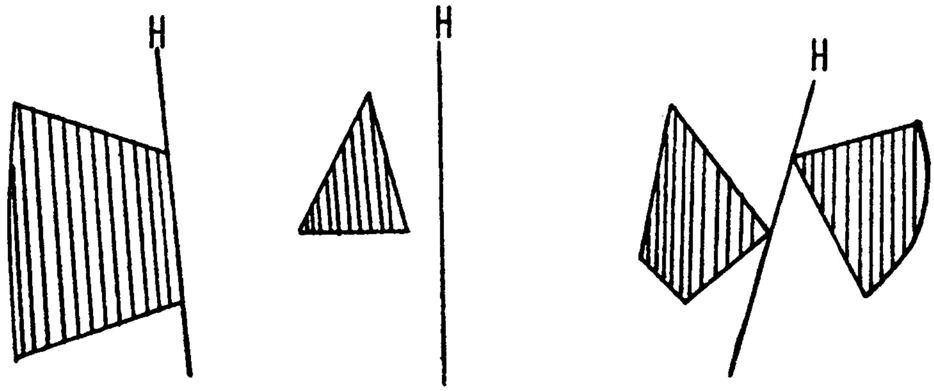


FIGURA 3.2
TEOREMAS DE SEPARAÇÃO

3.3) *A álgebra linear*

O tipo mais simples de função definida no R_n e com valores no R^m é a função linear, analiticamente des - crita pelo sistema:

$$y_1 = a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \ldots\ldots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \ldots\ldots + a_{2n}x_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_m = a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ \ldots\ldots + a_{mn}x_n$$

Onde $x-(x_1,x_2, \ldots.x_n)$ representa a variável independente, e $y=(y_1,y_2, \ldots.y_m)$, a dependente.

Se designarmos, sinteticamente, essa função sob a forma $y=Ax$, veremos que ela atende às duas propriedades

características das chamadas transformações lineares:

(*i*) $A(x_1+x_2)= Ax_1+Ax_2$, *para quaisquer* x_1 e x_2 *pertencentes ao* R^n;

(*ii*) $A(\lambda x)=\lambda Ax$,*qualquer que seja o número real* λ *e* $x\in R^n$.

A transformação linear acima fica perfeitamente especificada pela matriz de m linhas por n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde se verifica que os vetores-coluna representam as trans - formadas $Ae_1=(a_{11},a_{21},\ldots\ldots,a_{m1})$, $Ae_2=(a_{12},a_{22},\ldots\ldots,a_{m2}),\ldots$ $Ae_n=(a_{1n},a_{2n},\ \ldots\ldots a_{mn})$ da base natural $e_1,e_2,\ldots\ldots,e_n$.

As operações com matrizes são definidas de modo a guardar correspondência com as operações sobre as transformações lineares que elas especificam. Assim, sejam A e B suas transformações lineares, definidas no R^n e com valores no R^m , representadas pelas matrizes$[a_{ij}]$ e $[b_{ij}]$,respectivamente. A soma $A+B$ das duas transformações lineares é definida como a função que a cada x pertencente a R^n associa, em R^m, o vetor $Ax+Bx$, isto é:

$$(A+B)x = Ax + Bx$$

É fácil verificar que essa função é também uma transformação linear, cuja matriz se obtém somando os elementos correspondentes de $[a_{ij}]$ e $[b_{ij}]$, isto é, a matriz $[a_{ij}+b_{ij}]$. Dentro do citado princípio de correspondência, a soma de duas matrizes é definida como a matriz que se obtém somando os termos correspondentes.

Se λ é um número real e A uma transformação linear de R^n em R^m, define-se o produto de λ por A como sendo a função que, a cada x do R^n, associa λAx em R^m. Verifica-se imediatamente que a função assim definida é linear, e que a sua matriz se obtém multiplicando por λ todos os elementos da matriz a_{ij}. Define-se, por isso, o produto de uma matriz por um número real pela regra:

$$\lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}]$$

Vejamos agora o conceito de produto de matrizes. Sejam B e A duas transformações lineares, a primeira definida em R^n e com valores em R^p, a segunda definida em R^p e com valores em R^m. A será especificada por uma matriz com m linhas e p colunas $[a_{ij}]$, e B por uma matriz $[b_{ij}]$ com p linhas e n colunas. A transformação produto AB é

a função , definida no R^n e com valores no R^m, que se obtém aplicando-se em primeiro lugar B, em seguida A, isto é:

$$(AB)x = A(Bx)$$

Verifica-se mais uma vez que AB, assim definida, é uma transformação linear. Com alguns algebrismos conclui-se que a matriz correspondente tem seu elemento genérico c_{ij} definido pela regra:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots + a_{ip}b_{pj}$$

o que significa que o elemento da iésima linha e jésima coluna da matriz AB é o produto escalar da iésima linha da matriz A pela jésima coluna da matriz B. A título de exemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5x3 - 1x2 + 3x1 + 4x4 & 5x1 - 1x0 + 3x1 + 4x0 \\ 2x3 + 8x2 + 0x1 - 1x4 & 2x1 + 8x0 + 0x1 - 1x0 \\ 1x3 + 3x2 + 2x1 + 8x4 & 1x1 + 3x0 + 2x1 + 8x0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 8 \\ 18 & 2 \\ 43 & 3 \end{bmatrix}$$

Note-se que o produto de duas matrizes só é definido quando o número de colunas da primeira coincide com o número de linhas da segunda. Essa restrição é natural, tendo

em vista que, só nesse caso, se podem aplicar sucessivamente as transformações B e A para obter a função AB.

O produto de matrizes é associativo, isto é $(AB)C=A(BC)$, o que nos dispensa da colocação de parênteses, escrevendo-o sob a forma ABC. Mas não é necessariamente comutativo, ainda que se trate de matrizes quadradas (isto é, de igual número de linhas e colunas). Assim, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 26 & 17 \end{bmatrix}$$

Uma transformação linear definida no R^n e com valores em R^n é representada por uma matriz quadrada, de n linhas por n colunas. Uma transformação básica é a transformação identidade I, que a cada x associa o próprio x, de acordo com a equação:

$$Ix = x$$

A matriz identidade possui os elementos da diagonal principal iguais a 1, e os demais iguais a zero. As

sim, por exemplo, no R^4, a matriz identidade é:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Certas operações usuais da álgebra linear podem ser facilmente expressas sob a forma de produtos matriciais. Assim, por exemplo, a aplicação $y=Ax$ pode ser representada por:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

desde que se especifiquem os vetores x e y como matrizes de uma única coluna.

Do mesmo modo, o produto escalar $[x,y]$ de dois vetores pode ser obtido multiplicando-se a matriz-linha x pela matriz-coluna y:

$$[x,y] = [x_1, x_2 \cdots\cdots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Se A é uma matriz de m linhas por n colunas (representando uma transformação de R^n em R^m, a sua transposta A' é definida como a matriz que se obtém transformando as linhas em colunas e vice-versa. Sinteticamente, se $A=a_{ij}$, $A'=a_{ji}$

A título de exemplo, *a transposta de* $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

é a matriz $A' = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

A matriz transposta deve, naturalmente corresponder a uma transformação linear definida, agora, no R^m, e com valores no R^n. Pode-se demonstrar que essa transformação linear é caracterizada pela propriedade:

$$[A'y, x] = [y, Ax]$$

Isto é, quaisquer que sejam x, pertencente a R^n, e y, a R^m, o produto escalar de y por Ax é igual ao produto escalar de $A'y$ por x.

Algumas propriedades da operação transposição são enunciadas a seguir:

(i) $(A+B)' = A'+B'$

(ii) $(\lambda A)' = \lambda A'$, *qualquer que seja o número real* λ

(iii) $(A')' = A$

(iv) $(AB)' = B'A'$

A última propriedade é bastante curiosa: a transposta do produto é o produto das transpostas em ordem invertida.

Uma matriz quadrada A é dita inversível quando existe uma outra matriz quadrada A^{-1} tal que $A^{-1}A=AA^{-1}=I$, I designando a matriz identidade. Demonstra-se que, para que A seja inversível, é necessário e suficiente que seu determinante seja diferente de zero. A título de exemplo, pode-se verificar que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

tem por inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,6 & 1 \\ -1,4 & 1 \end{bmatrix}$$

É imediato que a inversa da inversa é a matriz original, isto é, que $(A^{-1})^{-1} = A$. Verifica-se, também, que se A é inversível, sua transposta também o é, e que a inversa da transposta é a transposta da inversa, ou seja:

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

Se A e B são duas matrizes inversíveis de n linhas por n colunas, seu produto AB também o é. A inversa do produto é o produto das inversas com a ordem trocada, isto é:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3.4) *Limites, continuidade, diferenciabilidade*

Até meados do século passado, as noções de limite, continuidade e diferenciabilidade se desenvolveram em meio a apreciável confusão filosófica. Nenhum matemático tinha dúvidas de que a sucessão $1, 3/2, 7/4, 15/8, \ldots\ldots,$ de termo genérico $2 - 2^{-n+1}$ tendia para o limite 2, ou que a derivada de $\operatorname{sen} x + x^4$ era igual a $\cos x + 4x^3$. Mas os fundamentos das noções de limite e, por conseguinte, de derivada, eram bastante frágeis.

Descartes, por exemplo, havia definido continuidade pela sentença: "*uma curva é contínua quando pode ser desenhada sem se levantar o lápis do papel*". Essa proposição realmente dá a idéia do que seja uma curva contínua, mas não pode ser aceita como uma definição, já que "*desenhar*", "*lápis*" e "*papel*" não chegam a ser conceitos matemáticos. Além do mais, ela não seria extensível para funções de mais de uma variável real, que não têm como se representar por curvas.

Leibniz, para desenvolver o cálculo diferencial, introduziu um conceito altamente místico, embora praticamente muito cômodo, pelo menos até certa etapa do desenvolvimento da matemática: o de infinitésimo. Um infinitésimo era

concebido como uma grandeza maior do que zero, mas inferior a qualquer número real existente. Os infinitésimos, por sua vez obedeciam a rigorosa hierarquia disciplinar: o quadrado de um infinitésimo de primeira ordem era um de segunda ordem,o cubo, um de terceira ordem, e assim por diante. Um infinitésimo de segunda ordem era desprezível diante de um de primeira, e assim por diante.

Na linguagem dos infinitésimos, uma função era contínua quando, ao se acrescer de um infinitésimo a variável independente, o acréscimo da variável dependente também fosse infinitesimal. A derivada de uma função $y=f(x)$ era definida como a relação dy/dx entre os acréscimos infinitesimais correspondentes da variável dependente e independente.

O problema conceitual é que jamais se viu uma grandeza que fosse maior do que zero, mas inferior a todo número real conhecido. No século passado,Weierstrass mostrou que a teoria das funções e o cálculo diferencial podiam ser desenvolvidos sem que se precisasse recorrer à noção do infinitésimo. Isso deu origem às noções fundamentais de topologia, tornando talvez um pouco mais trabalhoso o estudo da matemática, mas expurgando-a de um formidável elemento de confusão.

Comecemos,pois,definindo o que seja limite de uma sucessão $q_1, q_2, \ldots q_p, \ldots$ de elementos do R^n. (Uma su

cessão pode ser rigorosamente entendida como uma função definida no conjunto dos inteiros naturais $(1, 2, 3, \ldots\ldots, p, \ldots)$. Que pretendemos dizer ao afirmar que essa sucessão converge para q ? Sem apelar para os infinitesimais devidamente sepultados por Weirstrass, basta-nos entender que, a partir de uma ordem conveniente, os termos da sucessão se tornam tão próximos de q quanto se deseje. A maneira formal de expressar essa idéia consiste na seguinte definição:

"Diz-se que uma sucessão q_p *de pontos do* R^n *tende para o limite* $\underline{q}$ *quando, para todo* $\epsilon > 0$, *for possível encontrar um inteiro* $N = N(\epsilon)$, *tal que para todo* $p > N$ *se tenha* $d(q_p, q) < \epsilon$ ". Nas versões mais antigas dessa definição, os matemáticos usavam a expressão " *para todo* $\epsilon > 0$ *arbitrariamente pequeno*", *etc*. Como em matemática não se distinguem números grandes e pequenos, e como essa qualificação era perfeitamente dispensável, aboliu-se o termo "*arbitrariamente pequeno*".

A partir da noção de limite de uma sucessão, pode-se estabelecer a de <u>limite de uma função</u>. Seja $y = f(x)$ uma função definida num subconjunto C do R^n e com valores em R^m. Seja x_0 um ponto de acumulação em C. Diz-se que $f(x)$ tende para y_0 quando x tende para x_0, ou, simbolicamente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

quando, para <u>toda</u> sucessão $\{x_n\}$ convergindo para x_0, sendo $x_n \neq x_0$, se tiver:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Uma outra maneira, equivalente, de definir limite é a seguinte: "desde que x se mantenha suficientemente próximo, embora diferente de x_0, $f(x)$ ficará tão próximo de y_0 quanto se queira. Formalmente, isso se exprime na definição:

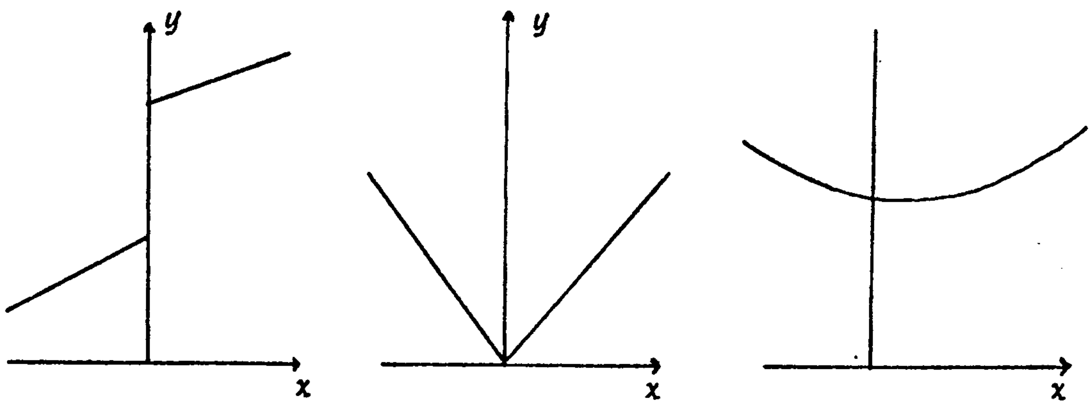
"Diz-se que $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ quando, para todo $\epsilon > 0$, for possível encontrar $\delta>0$ (sendo δ função de ϵ) tal que $0 < dist(x,x_0) < \delta$ implique $dist(f(x),y_0) < \epsilon$."

Uma função é dita contínua, num ponto de acumulação x_0 do seu campo de definição, quando o seu limite existir e coincidir com o valor da função no ponto, isto é, quando $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Em outras palavras, quando a todo $\epsilon>0$ corresponder um $\delta>0$ tal que $dist(x,x_0) < \delta$ implique $dist(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Uma função é descontínua num ponto se o limite nesse ponto não existir, tal como na função real de uma variável real $y = sen\ 1/x$, para $x=0$, ou se o limite existir, mas for diferente do valor da função no ponto (como na função real de uma variável real $f(x) = x+3$, para $x \neq 0$ e $f(0) = 1$).

A definição clássica de derivada para funções reais de uma variável real é bastante conhecida. Se $y=f(x)$, diz-se que a derivada da função no ponto x_0 é igual a $f'(x_0)$ quando:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Para usar uma imagem semelhante à de Descartes, uma curva é derivável num ponto quando admitir uma tangente nesse ponto, isto é, quando não tiver um "bico", nesse ponto. Toda função derivável é contínua, mas a recíproca não é verdadeira. A função $y = |x|$, por exemplo, é contínua, mas não derivável para $x=0$. A FIGURA 3.3 ilustra a diferença entre uma função descontínua, uma contínua mas não derivável e uma derivável.



descontínua na origem — FIGURA 3.3.A

contínua, mas não derivável na origem — FIGURA 3.3.B

derivável — FIGURA 3.3.C

A definição de derivada, acima apresentada para uma função real de uma variável real, é extensível ao caso em que o conjunto de valores é o espaço euclidiano a m dimensões R^m, desde que o campo de definição continue limitado a um subconjunto dos números reais. Se quisermos estender a idéia para o caso em que o campo de definição é um subconjunto do R^n, isto é, se quisermos trabalhar com funções não apenas de uma, mas de várias variáveis reais, temos que introduzir uma adaptação de conceitos, a qual, diga-se de passagem, lança alguma luz adicional sobre a idéia de derivada.

Com uma simples transposição de termos, o conceito de derivada para uma função definida no conjunto dos reais (e com valores no R^m) pode ser expresso por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - h\, f'(x_0)}{h} = 0$$

Essa mudança de termos aparentemente ingênua nos dá a chave para o conceito de diferencial (expurgado dos infinitésimos de Leibniz): $f(x_0+h) - f(x_0)$ representa o acréscimo da função; $hf'(x_0)$ representa a aproximação linear do acréscimo. O que caracteriza a diferenciabilidade é o fato de a diferença entre o acréscimo e a sua aproximação linear $f(x_0+h)-f(x_0) - hf'(x_0)$ ser de ordem de grandeza inferior

a h, isto é, o limite do seu quociente por h ser igual a zero.

Se designarmos a função por $y=f(x)$, o acréscimo da função será, a partir do ponto x_0, $\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0)$; a diferencial da função é definida como sendo a aproximação linear desse acréscimo, $dy=f'(x_0)h$.

Esse conceito de diferencial como aproximação linear é perfeitamente extensível às funções definidas no R^n (isto é, às funções de várias variáveis reais). Seja $y=f(x)$ uma função definida num subconjunto C do R^n e com valores no R^m. Diz-se que $f(x)$ é diferenciável no ponto x_0 quando existir uma transformação linear A (para esse ponto x_0) tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{|h|} = 0.$$

Note-se que agora h é um vetor do R^n. A matriz A é a chamada <u>matriz diferencial</u> (ou matriz jacobiana) da função $f(x)$ no ponto x_0. Se a função se desdobra analiticamente em

$$\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\
y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)
\end{aligned}$$

a matriz diferencial tem por elementos as derivadas parciais calculadas no ponto x_0:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

Um caso particular importante é aquele em que o campo de definição é um subconjunto do R^n mas o conjunto de valores é o dos números reais, isto é, de uma função real de várias variáveis reais, do tipo $y=f(x_1,x_2, \ldots\ldots, x_n)$. Nesse caso, A se reduz a uma matriz-linha, cujos termos constituem o chamado <u>gradiente</u> de $f(x)$ no ponto x_0:

$$grad\ f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \qquad (3.11)$$

a expressão Ah para a diferencial da função podendo exprimir-se como o produto escalar

$$dy = Ah = \left[grad f(x_0), h\right] \qquad (3.12)$$

3.5) *Máximos e mínimos, funções côncavas e convexas*

Seja $f(x)$ uma função real de uma ou mais variá veis reais, isto é, uma função definida num subconjunto C do R^n e com valores em R. Diz-se que $f(x)$ passa por um máximo em C no ponto x_0, quando para todo x pertencente a C, se tem $f(x) \geqslant f(x_0)$. A definição de mínimo se obtém invertendo o si nal da desigualdade, ou associando o mínimo de $f(x)$ ao máximo de $-f(x)$.

A definição acima é a de máximos e mínimos absolutos, isto é, em todo o campo de definição da função. Podem-se estabelecer os conceitos de máximos e mínimos locais, restritos a uma vizinhança de x_0. O cálculo diferencial é um formidável instrumento para a determinação de máximos e mínimos locais. Mas, nos problemas econômicos, a pesquisa que interessa é a dos máximos absolutos.

Um primeiro problema é o da existência de máximos ou mínimos. Há inúmeras funções que não possuem máximos nem mínimos, como a função $y=x+1$, definida em todo o conjunto dos reais x. Um teorema tranqüilizador e de inúmeras aplicações em teoria econômica se refere às funções contínuas definidas em conjuntos compactos: "*Seja $f(x)$ uma função contí*

nua definida num subconjunto compacto C do R^n e com valores no conjunto dos reais. Então, $f(x)$ admite um máximo e um mínimo em C "

Um tipo particular de função, freqüentemente encontrado em economia, se mostra muito bem comportado em relação aos máximos: as chamadas funções côncavas. Uma curva $y=f(x)$ diz-se côncava quando o segmento que unir dois quaisquer de seus pontos se encontrar abaixo, ou coincidir com a curva, tal como na FIGURA 3.4.

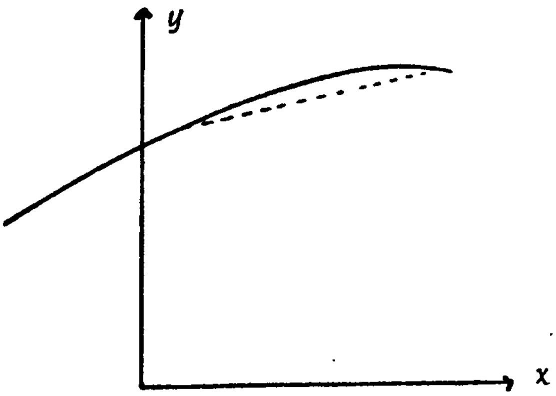


FIGURA 3.4.A

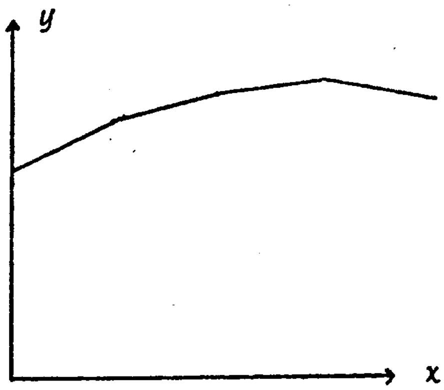


FIGURA 3.4.B

Analiticamente, a maneira de exprimir que a curva está acima, ou coincide com o segmento que une dois quaisquer de seus pontos, é a seguinte:

" Seja $f(x)$ uma função real definida num sub-conjunto convexo C do R^n. Diz-se que $f(x)$ é côncava quando,

para quaisquer x_1 *e* x_2 *pertencentes a C, e para qualquer número real* α *tal que* $0 \leq \alpha \leq 1$*, se tiver:*

$$f(\,(1-\alpha)x_1 + \alpha\, x_2) \geq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) \text{ ''.}$$

A definição acima abrange como côncavas as funções lineares, ou compostas de trechos lineares, como na FIGURA 3.4.B. As funções inteiramente situadas acima do segmento que une dois dos seus pontos, como na FIGURA 3.4.A, são denominadas <u>estritamente côncavas</u>, e obedecem à desigualdade:

$$f(\,(1-\alpha)x_1 + \alpha\, x_2) > (1-\alpha)f(x_1) + \alpha\, f(x_2),$$

quaisquer que sejam x_1 e x_2 em C, e $0 < \alpha < 1$.

As funções côncavas gozam de algumas propriedades extremamente importantes, como as que se enunciam a seguir:

(*a*) se $f(x)$ passa em x_0 por um máximo local, x_0 também é ponto de máximo absoluto (nesse sentido é que as funções côncavas se consideram bem comportadas em relação aos máximos);

(*b*) a soma de duas ou mais funções côncavas é uma função côncava;

(*c*) o produto de uma função côncava por um real <u>positivo</u> é uma função côncava;

(d) se $f(x)$ é côncava definida no convexo C, e se α é um número real qualquer, então o conjunto formado pelos pontos x de C tais que $f(x) \geqslant \alpha$ é convexo;

(e) toda função côncava definida num subconjunto convexo <u>aberto</u> C do R^n é contínua;

(f) se $f(x)$ é côncava e diferenciável; $f(x) - f(x_0) \leqslant [grad\ f(x_0),\ x-x_0]$ (essa desigualdade corresponde ao fato de que uma curva côncava situa-se abaixo da tangente traçada em qualquer dos seus pontos);

(g) se $grad\ f(x_0)=0$, $f(x)$ passa por um máximo absoluto em x_0.

Esta última propriedade, facilmente dedutível da penúltima, mostra que as funções côncavas, além de bem comportadas, prestam-se comodamente ao cálculo dos máximos. Desde que se saiba que num certo ponto todas as derivadas parciais da função se anulam, e desde que se saiba a priori que a função é côncava, pode-se assegurar que, nesse ponto, a função passa por um máximo absoluto, independentemente de qualquer exame de condições de segunda ordem (sempre expressas por sinais de complicados determinantes).

Na realidade, pela propriedade (f) anteriormente apresentada, para que a função côncava e diferenciável $f(x)$ passe por um máximo no ponto x_0 é necessário e suficiente que, para todo ponto x do seu campo de definição C, se tenha:

$$[x-x_0,\ grad\ f(x_0)] \leq 0$$

Quando o campo de definição é aberto, essa desigualdade leva à exigência de que $grad\ f(x_0)=0$, no ponto de máximo. Se o campo de definição não for aberto, o máximo pode ocorrer num ponto em que o *gradiente de* $f(x)$ seja diferente de zero. Um caso muito comum em economia é aquele em que a função côncava e diferenciável é definida apenas para valores de $x \geq 0$. (Essa condição corresponde ao fato evidente de que não podem existir quantidades negativas, preços negativos, etc). No caso em questão, designando por $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base natural do R^n, a condição necessária e suficiente para que a função passe por um máximo no ponto x_0 se expressa por:

$$[grad\ f(x_0),\ e_i] = 0 \quad se \quad [x_0, e_i] > 0$$

$$[grad\ f(x_0),\ e_i] \leq 0 \quad se \quad [x_0, e_i] = 0$$

Isso é o mesmo que dizer que, para que $f(x)$ passe por um máximo absoluto em x_0, é necessário e suficiente (desde que $f(x)$ só seja definida para $x \geq 0$):

(*i*) *que as derivadas parciais correspondentes às componentes positivas de* x_0 *sejam nulas;*

(*ii*) *que as derivadas parciais correspondentes às componentes nulas de* x_0 *sejam menores ou iguais a zero.*

A FIGURA 3.5 ilustra o problema para o caso de uma função côncava de uma única variável real x, definida apenas para valores de $x \geqslant 0$. Se o máximo ocorrer para um valor positivo de x (FIGURA 3.5.A), nesse ponto a derivada deve anular-se. Mas, se o máximo ocorrer para $x_0=0$, como na FIGURA 3.5.B, a derivada da função tanto pode ser nula quanto negativa.

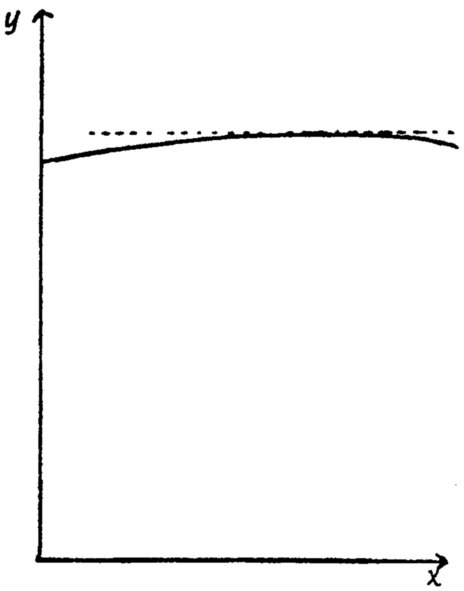


FIGURA 3.5.A

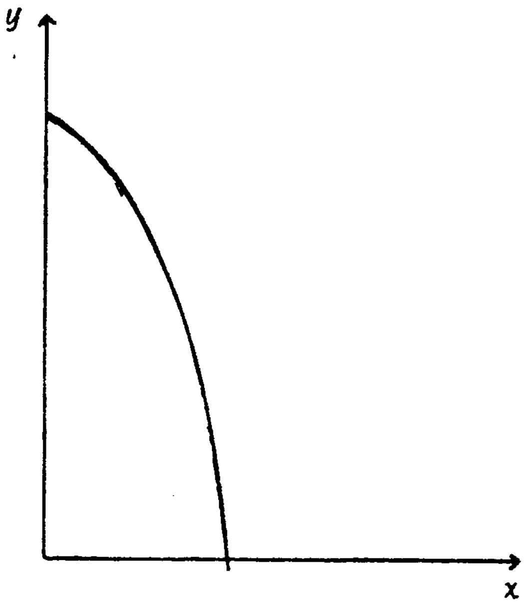


FIGURA 3.5.B

Uma função $f(x)$ diz-se convexa quando $-f(x)$ for côncava (FIGURA 3.6). As propriedades das funções convexas são análogas às das funções côncavas, feitas as devidas trocas de sinais. Naturalmente, essas funções são bem comportadas não em relação aos máximos, mas em relação aos mínimos.

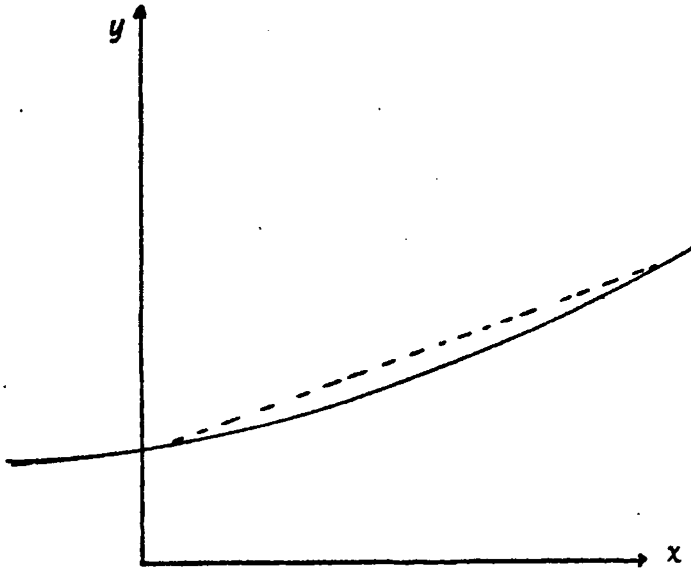


FIGURA 3.6

Entremos agora numa técnica extremamente fecunda em análise econômica, a da programação convexa. Um grande número de problemas econômicos se pode enunciar como correspondendo à maximização de uma função côncava restringida por desigualdades convexas:

" maximizar a função côncava $f(x)$

definida num subconjunto convexo C do R^n, sendo a variável **x** *sujeita às desigualdades de restrição:*

$$\begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \dots\dots\dots \\ g_p(x) \leq 0 \end{cases}$$

onde $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_p(x)$ são funções convexas também definidas em C".

Esse é o chamado problema fundamental da programação convexa, que abrange como caso particular, quando as funções são lineares, a popularizada programação linear. Vejamos alguns elementos básicos do jargão da programação convexa:

a) a função a maximizar $f(x)$ é denominada "*função-objetivo*";

b) o subconjunto C_0 dos pontos x de C que satisfaçam simultaneamente às desigualdades $g_1(x)\leq 0$, $g_2(x)\leq 0, \ldots,$ $g_p(x)\leq 0$ é denominado conjunto das soluções possíveis;

c) o conjunto C_0 das soluções possíveis é dito regular quando:

(i) é compacto;

(ii) contém algum ponto x tal que
$f_1(x) < 0$, $f_2(x)<0, \ldots\ldots, f_p(x)<0$.

(d) um ponto x_0 de C_0 é denominado solução ótima, quando maximiza a função objetivo $f(x)$ em C_0;

(e) a função $F(x) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \lambda_2 g_2(x) - \ldots - \lambda_p g_p(x)$, construída tal como na técnica dos multiplicadores de Lagrange, é a denominada "*função auxiliar*";

(f) uma restrição diz-se supérflua no ponto x_0 quando $g_i(x_0) < 0$.

O teorema fundamental da programação convexa, que é uma extensão da técnica dos multiplicadores de Lagrange, tem o seguinte enunciado:

"*Seja* C_0 um conjunto regular de soluções possíveis, definido pelo sistema de desigualdades $g_1(x) \leq 0$; $g_2(x) \leq 0$; .....$g_p(x) \leq 0$, sendo essas funções contínuas, convexas, e definidas no subconjunto convexo C do R^n; seja $f(x)$ uma função côncava, contínua e definida no mesmo conjunto C. Então:

(*i*) *existe em* C_0 *pelo menos uma solução ótima,* x_0;

(*ii*) *para que* x_0 *seja solução ótima, é necessário e suficiente que existam multiplicadores de Lagrange não-negativos* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *tais que, para esses valores, a função auxiliar passe por um máximo absoluto em todo* C *no ponto* x_0, *isto é,* $F(x_0) \geq F(x)$, *para todo* x *pertencente a* C;

(*iii*) *se a* *<u>iésima</u>* *restrição for supérflua no ponto* x_0, *isto é, se* $g_i(x_0) < 0$, *o multiplicador de Lagrange correspondente é igual a zero* ($\lambda_i = 0$)."

Denominam-se <u>preços-sombra</u> os multiplicadores de Lagrange correspondentes à solução ótima x_0. (Uma mesma solução ótima pode admitir mais de um conjunto de preços-som-

bra. Soluções ótimas diferentes, se existirem, também podem admitir preços-sombra distintos).

Pelo teorema acima, os preços-sombra são tais que, para a solução ótima x_0 (cuja existência é garantida pelo fato de se estar maximizando uma função contínua num conjunto compacto), se tem $\lambda_1 g_1(x_0) = \lambda_2 g_2(x_0) = \ldots = \lambda_p g_p(x_0) = 0$. Daí se segue que $F(x_0) = f(x_0)$, isto é, que no ponto ótimo a função auxiliar assume igual valor à função-objetivo. Se $F(x)$ passa por um máximo absoluto em x_0, segue-se que, para toda solução possível x, $f(x_0) = F(x_0) \geq F(x) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \ldots - \lambda_p g_p(x)$ Como os preços-sombra são maiores ou iguais a zero, e como para toda solução possível $g_1(x) \leq 0, \ldots, g_p(x) \leq 0$, $F(x) \geq f(x)$. Segue-se que $f(x_0) \geq f(x)$, para todo x pertencente a C_0, o que prova que as condições do teorema são suficientes. A demonstração de que a condição é necessária é bem mais complicada, encontrando-se em Apêndice.

Há razoável semelhança entre o teorema fundamental da programação convexa e a técnica dos multiplicadores de Lagrange do cálculo diferencial. Há, todavia, diferentes aspectos conceituais a serem sublinhados:

(*a*) a técnica usual dos multiplicadores de Lagrange destina-se a fornecer condições de máximos ou mínimos locais de funções cujas variáveis são restringidas por equa -

ções; na programação convexa as restrições se exprimem por desigualdades, e não por equações; e o que se determina é o máximo absoluto da função dentro do conjunto de soluções possíveis, e não apenas condições de primeira ordem que podem corresponder a um máximo local, a um mínimo local ou a nem uma coisa nem outra;

(*b*) a conclusão muito mais positiva do teorema fundamental da programação convexa é obtida à custa de hipóteses bem mais restritivas do que as usadas no cálculo diferencial: a função a maximizar $f(x)$ é contínua e côncava; desigualdades de restrição devem ser contínuas e convexas; e o conjunto das soluções possíveis deve ser regular, no sentido já definido;

(*c*) não se exige na programação convexa que as funções envolvidas sejam diferenciáveis, mas apenas que sejam contínuas;

(*d*) os multiplicadores de Lagrange associados a uma solução ótima do problema fundamental da programação convexa não apenas existem, mas devem ser não-negativos. Às restrições supérfluas correspondem preços-sombra nulos.

3.6) *O método topológico em análise econômica* (*)

Como assinalamos no final do Capítulo II, o desenvolvimento da teoria dos preços pelo instrumental topológico, em substituição à análise marginalista convencional, é um exemplo de método indireto de produção. Investe-se na apreensão de certos conceitos matemáticos para, em troca, obter demonstrações bem mais gerais, simples e elegantes. O presente livro apelará amplamente para o método topológico, permitindo que o leitor compreenda, passo a passo, o seu alcance. É interessante, todavia, antecipar desde já algumas demonstrações que podem ser obtidas com esse instrumental.

Como primeiro exemplo, vejamos o problema fundamental da teoria cardinal do equilíbrio do consumidor. Representa-se por $q=(q_1,q_2,\ldots\ldots,q_n)$ uma cesta genérica de mercadorias adquirida por unidade de tempo. Admite-se que o vetor-preço $p=(p_1,p_2,\ldots\ldots,p_n)$ seja um dado para o consumidor, assim como a sua renda nominal, R. O consumidor está, assim, sujeito à restrição orçamentária $[p,q]\leq R$. Supõe-se conhecida a função utilidade do consumidor, $U(q)$, a qual deve ser:

(i) diferenciável, com utilidades marginais sempre positivas, isto é grad $U(q)>0$, para todo q;

(*) Os exemplos apresentados nesta seção destinam-se apenas a mostrar o poder analítico do método topológico. Todos eles serão reexaminados em pormenores no texto. Assim, a leitura desta seção, que pressupõe alguma familiaridade com a microeconomia, não é necessária à compreensão dos demais capítulos deste livro.

(*ii*) *estritamente côncava, como generalização da lei da utilidade marginal decrescente.*

O problema do equilíbrio do consumidor se enuncia nos seguintes termos:

" *maximizar a função* $U(q)$, *definida para* $q \geq 0$, *com a restrição orçamentária* $[p,q] \leq R$".

O conjunto das soluções possíveis é o conjunto dos vetores q tais que $q \geq 0$ e $[p,q] \leq R$. Sendo $p > 0$, esse conjunto, representado pela área hachureada da FIGURA 3.7, é convexo, compacto e regular. Assim, de acordo com o teorema fundamental da programação convexa, construamos a função auxiliar:

$$F(q) = U(q) - \lambda([p,q] - R)$$

a qual tem como gradiente:

$$grad\ F(q) = grad\ U(q) - \lambda\ p$$

O ponto de equilíbrio do consumidor será aquele que maximizar $F(q)$ no conjunto $q \geq 0$. Pelo que foi visto anteriormente, isso envolve, como condição necessária e suficiente, que as derivadas parciais de $F(q)$ correspondentes às coordenadas positivas de q sejam nulas; e que as relati-

vas às coordenadas nulas de q sejam menores,ou iguais a zero. Designando por $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ às utilidades marginais no ponto de equilíbrio q_0, isto é, o vetor $grad\ U(q_0)$, as condições de equilíbrio se exprimem por:

$$u_i = \lambda\ p_i \quad , se\ q_i > 0$$

$$u_i \leq \lambda\ p_i \quad , se\ q_i = 0 \ ;$$

sendo q_i a iésima componente do ponto de equilíbrio, q_0.

Essa conclusão é rigorosamente equivalente às relações (2.7) do Capítulo II. O preço-sombra λ correspondente à restrição orçamentária é a utilidade marginal da renda, u_R, isto é, a relação comum entre as utilidades marginais dos bens efetivamente consumidos e os respectivos preços. Como, por hipótese, todas as utilidades marginais se supõem positivas, a utilidade marginal da renda, isto é, o preço-sombra λ, deve ser maior do que zero. Assim, a restrição orçamentária $[p, q] \leq R$ não pode ser supérflua. Isso significa que, no equilíbrio, toda a renda do consumidor deve ser aplicada, ou seja, $[p, q_0] = R$

Podemos agora abrandar as exigências quanto à função utilidade. Ao invés de exigirmos que ela seja estritamente côncava e diferenciável, admitiremos apenas que:

(i) $U(q)$ seja contínua

(ii) se $q_1 > q_2$ então $U(q_1) > U(q_2)$, e se $q_1 \geqslant q_2$, $U(q_1) \geqslant U(q_2)$.

(iii) se $U(q_1) = U(q_2)$ e se $q = (1-\alpha)q_1 + \alpha\, q_2$, sendo $0 < \alpha < 1$, então $U(q) > U(q_2)$.

Esse tipo de função-utilidade é o que se pode construir na teoria ordinal do comportamento do consumidor. Obviamente, esses requisitos são todos preenchidos nas funções utilidade da teoria cardinal. A segunda hipótese é uma versão abrandada da exigência de que as utilidades marginais sejam positivas. A terceira, o princípio da preferência pela diversificação, que substitui a lei da utilidade marginal decrescente.

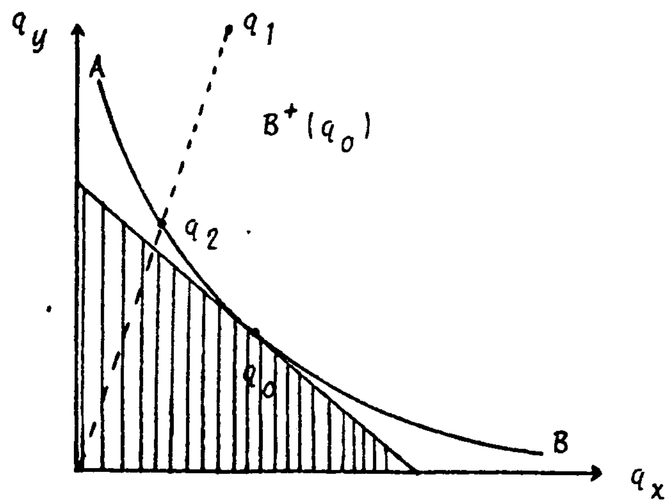


FIGURA 3.7

Pelas hipóteses acima, é fácil concluir que, se $U(q_1) > U(q_0)$, então existe um número real λ tal que $0<\lambda< 1$

e $U(\lambda q_1) = U(q_0)$. Com efeito, se $U(q_0) = U(0)$, basta tomar $\lambda = 0$. Se $U(0) < U(q_0) < U(q_1)$, então a função $U(\lambda q_1)$, que é contínua em λ, passa por um valor inferior a $U(q_0)$ *para* $\lambda = 0$, e por um valor superior a $U(q_0)$ *para* $\lambda = 1$. Deve, portanto, existir um valor intermediário $0 < \lambda < 1$ tal que $U(\lambda q_1) = U(q_0)$. O ponto $q_2 = \lambda q_1$ é mostrado na FIGURA 3.7.

Designemos, agora, por $B^+(q_0)$ o conjunto formado pelas cestas de mercadoria preferíveis a q_0, isto é, tais que $U(q) > U(q_0)$. Podemos demonstrar facilmente que $B^+(q_0)$ é convexo. Com efeito, sejam q_1 e q_2, dois elementos quaisquer de $B^+(q_0)$ e $\bar{q} = (1-\alpha)q_1 + \alpha q_2$ sendo $0 < \alpha < 1$. Basta-nos provar que $\bar{q}$ também pertence a $B^+(q_0)$. Com efeito, pelo teorema anterior, existirão $\lambda_1 < 1$ e $\lambda_2 < 1$ tais que

$U(\lambda_1 q_1) = U(\lambda_1 q_2) = U(q_0)$. Pela terceira hipótese formulada quanto à função-utilidade, $(1-\alpha)\lambda_1 q_1 + \alpha\lambda_2 q_2$ pertencerá a $B^+(q_0)$. Como $(1-\alpha)\lambda_1 q_1 + \alpha\lambda_2 q_2 \lesssim \bar{q}$, segue-se, pela segunda hipótese quanto à função utilidade, que $\bar{q}$ pertencerá a $B^+(q_0)$.

O teorema acima representa uma das proposições fundamentais da teoria do consumidor: "*para qualquer cesta de mercadorias* q_0, *o conjunto* $B^+(q_0)$ *das cestas de utilidade superior a* q_0 *é convexo*". Essa proposição também se encontra ilustrada na FIGURA 3.7, onde $B^+(q_0)$ é a área à direita da curva de indiferença AB.

Consideremos ,agora ,o conjunto $B^{\pm}(q_0)$ formado pelas cestas de mercadorias de utilidade $U(q) \geqslant U(q_0)$, isto é, as cestas preferíveis ou indiferentes a q_0. Como a função $U(q)$ é contínua, é fácil concluir que $B^{\pm}(q_0)$ é o <u>fecho</u> de de $B^{+}(q_0)$. Como o fecho de um conjunto convexo também é convexo, $B^{\pm}(q_0)$ também será convexo — outro teorema fundamental sobre o comportamento do consumidor.

Vejamos ,agora ,as funções de demanda utilizadas na teoria do consumidor.

A primeira dessas funções corresponde ao equilíbrio do consumidor, dado o vetor-preço p e a renda nominal, R, ou seja, à posição de máxima utilidade no conjunto $[p,q] \leqslant R$ correspondente à limitação orçamentária. Como não exigimos que a função-utilidade seja diferenciável, não devemos esperar qualquer conclusão envolvendo utilidades marginais. Contudo, podemos obter vários resultados importantes:

(*i*) *a posição de equilíbrio existe; com efeito, as cestas de mercadorias compráveis dentro das restrições orçamentárias são aquelas pertencentes ao conjunto definido pelas desigualdades* $[p/R,q] \leqslant 1$ e $q \geqslant 0$; *esse conjunto é compacto e, portanto, nele a função-utilidade, que se supõe contínua, deve passar por um máximo;*

(ii) a posição de equilíbrio é única. Com efeito, suponhamos que existissem duas posições de equilíbrio distintas, q_1 e q_2. Deveríamos ter $[p/R, q_1] \leq 1$ e $[p/R, q_2] \leq 1$ e, por conseguinte, $[p/R, 1/2(q_1+q_2)] \leq 1$. Logo, $1/2(q_1+q_2)$ seria comprável dentro das restrições orçamentárias. Pela terceira hipótese quanto à função-utilidade, $1/2(q_1+q_2)$ teria utilidade superior a q_1 e q_2. Mas isso contradiria a hipótese de q_1 e q_2 serem posições de equilíbrio, dentro das restrições orçamentárias;

(iii) existindo e sendo única a posição de equilíbrio, podemos definir a função demanda usual, $q = g(p/R)$;

(iv) $[p, g(p/R)] = 1$, isto é, na posição de equilíbrio o consumidor aplica toda sua renda. Com efeito, suponhamos que se tivesse $[p, g(p/R)] < 1$; existiria, então, $\Delta q > 0$ tal que $[p, g(p/R) + \Delta q] \leq 1$, isto é, tal que $g(p/R) + \Delta q$ fosse acessível ao orçamento do consumidor. Pela segunda hipótese quanto à função-utilidade, $g(p/R) + \Delta q$ seria preferível a $g(p/R)$, contradizendo a hipótese de que, aos preços p e à renda nominal R, o consumidor maximizasse a sua uti-

lidade comprando a cesta $q=g(p/R)$;

(v) *seja* $q_0 = g(p_0/R_0)$ *a posição de equilíbrio do consumidor, com preços* p_0 *e renda nominal* R_0. *Como a posição de equilíbrio é única, qualquer outra cesta de mercadorias pertencente a* $B^{\pm}(q_0)$ *deve ser inacessível ao orçamento do consumidor. Assim, se* $q \neq q_0$ *e* $q \in B^{\pm}(q_0)$, $[p_0, q] > [p_0, q_0]$. *Isso implica que, para todo* q *pertencente a* $B^{\pm}(q_0)$, $[p_0, q-q_0]>0$, *ou seja, que o hiperplano passando por* q_0 *e normal a* p *separa o conjunto convexo* $B^{\pm}(q_0)$, *tal como na* FIGURA 3.7;

(vi) *suponhamos que* $q_0=g(p_0/R_0)$, $g_1=g(p_1/R_1)$, *sendo* $U(q_0)=U(q_1)$ *e* $q_0 \neq q_1$. *Pelo teorema anterior, como* q_1 *pertence a* $B^{\pm}(q_0)$, *devemos ter* $[p_0, q_1-q_0]>0$. *Na mesma linha, como* q_0 *pertence a* $B^{\pm}(q_1)$, $[p_1, q_0-q_1]>0$. *Combinando as duas desigualdades, resulta:*

$$[p_1-p_0, \ q_1-q_0] < 0.$$

Esta é a forma geral do famoso <u>teorema da substituição</u>, da teoria do consumidor. Admitamos que, com os preços em p_0 e a renda em R_0, o consumidor se equilibre em q_0. Suponhamos que se dê um acréscimo Δp nos preços e que, ao mesmo tempo, se assegure uma variação compensatória na renda do consumidor, de modo a que ele continue se equilibrando

no mesmo nível de utilidade. Admitamos, ainda, que o consumidor mude de posição, isto é, que Δq seja diferente de zero. Então, $[\Delta p, \Delta q] < 0$.

Em particular, se variarmos apenas uma das componentes do vetor-preço, a componente correspondente do vetor quantidade evoluirá no sentido oposto, ou seja, $\Delta p_i \, \Delta q_i < 0$.

Isso significa que a demanda de um produto, com a renda do consumidor compensada de modo a mantê-lo no mesmo nível de utilidade, é função decrescente do preço do produto, desde que não variem os preços das demais mercadorias. Esse é um dos mais importantes teoremas demonstrados por Hicks na teoria ordinal do consumidor.

Vejamos, agora, um outro tipo de função demanda também utilizado na teoria do consumidor, a função procura à Slutsky. Admitamos que o consumidor, ao invés de receber uma renda nominal fixa, produza uma quantidade de mercadorias representada pelo vetor q_0', as quais possam ser trocadas no mercado por um preço p; admitiremos que o mercado opere em concorrência perfeita, de modo que o consumidor é incapaz, individualmente, de influir sobre o vetor-preço. A restrição orçamentária, no caso, se expressa pela condição de que o valor dos produtos comprados seja menor ou igual ao dos vendidos, ou seja, por

$$[p, q] \leq [p, q_0']$$

Como no caso da função demanda com renda nominal constante, o conjunto das possibilidades orçamentárias, descrito pela desigualdade acima, é compacto e convexo. Daí se conclui que existe uma única posição, $q = f(p, q_0')$ que maximiza a utilidade do consumidor dentro das suas restrições orçamentárias. Essa função $q = f(p, q_0')$ é a denominada da função demanda à Slutsky. Entre suas propriedades, vale destacar as seguintes:

(i) $f(p, q_0') = f(\lambda p, q_0')$, para todo $\lambda > 0$; com efeito, as possibilidades orçamentárias, no caso, são idênticas, quer o vetor-preço seja igual a p, que igual a λp, sendo $\lambda > 0$;

(ii) na posição de equilíbrio, o consumidor aplica toda sua renda, isto é, se $q = f(p, q_0')$, então $[p, q] = [p, q_0']$;

(iii) se $q = f(p, q_0')$, e se $U(\bar{q}) \geq U(q)$, sendo $\bar{q}$ diferente de q, então $\bar{q}$ deve ser inacessível ao orçamento do consumidor, isto é, $[p, \bar{q}] > [p, q] = [p, q_0']$.

A função demanda à Slutsky presta-se especialmente à descrição do equilíbrio do consumidor, numa economia de trocas. Admitamos uma economia onde um grande número n de consumidores, nenhum deles sendo capaz de influir individualmente sobre os preços, traga ao mercado certas quantidades de mercadorias por eles fabricadas, dispostos a trocá-las com a finalidade de aumentar a sua utilidade. Especificamente, suponhamos que as quantidades produzidas pelos indivíduos se

jam (em termos de vetores) $q'_1, q'_2, \ldots\ldots, q'_n$. Cada um desses indivíduos orientará as suas trocas de acordo com a sua função demanda à Slutsky, comprando a quantidade $q_i = f(p, q'_i)$

Vejamos, agora, como se equilibra o mercado. Para cada sistema de preços p, a procura total será expressa pelo vetor:

$$D(p) = f(p, q'_1) + f(p, q'_2) + \ldots\ldots + f(p, q'_n),$$

e a oferta total por

$$q' = q'_1 + q'_2 + \ldots\ldots + q'_n$$

O sistema de preços deve ser tal que equilibre a oferta e a procura, isto é:

$$D(p) = q'$$

Admitamos como pacífica a existência de um sistema de preços que equilibra oferta e procura. (A demonstração, que será vista posteriormente, está longe de ser simples). O que vale notar é que, como $D(\lambda p) = D(p)$ para todo real $\lambda > 0$, se um sistema de preços p equilibra a oferta e a procura, o mesmo ocorrerá para o sistema λp. Assim, a equação $D(p) = q'$ pode, na melhor das hipóteses, determinar os preços relativos, mas nunca os absolutos. Para determinar estes últimos, é necessário eleger determinada mercadoria como numerário, definindo seu preço como igual a 1 (um).

O equilíbrio em concorrência perfeita distribui a oferta total entre os indivíduos de modo que o iésimo indivíduo fique com quantidades finais expressas por $q_i = f(p, q_i')$. Seria possível encontrar uma outra distribuição de q' entre os consumidores de modo a aumentar a utilidade de pelo menos um sem diminuir a dos demais? A resposta é negativa. Com efeito, seja $\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \ldots\ldots + \bar{q}_n = q'$ uma distribuição da oferta, de modo que $U(\bar{q}_i) \geqslant U(q_i)$, para todos os consumidores, sendo $U(\bar{q}_j) > U(q_j)$ para, pelo menos, um deles. Pela terceira propriedade das funções demanda à Slutsky, $[p, \bar{q}_i] > [p, q_i']$ para todos os indivíduos, sendo $[p, \bar{q}_j] > [p, q_j']$ para pelo menos um deles. Somando-se, resultaria $[p, q'] > [p, q']$, o que é obviamente impossível. O equilíbrio em concorrência perfeita conduz, assim, a uma distribuição da oferta <u>eficiente, no sentido de Pareto</u>: torna-se impossível melhorar a posição de um indivíduo sem piorar a de algum outro.

Os exemplos acima mostram como é possível utilizar o método topológico na teoria do consumidor. Vejamos, agora, algumas aplicações à teoria da produção.

Uma função de produção simples é uma relação técnica que especifica a quantidade máxima z de um produto que se pode obter por unidade de tempo quando se combinam, por unidade de tempo, as quantidades $(s_1, s_2, \ldots\ldots, s_m)$ de fatores de produção. Designando por $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ o vetor

correspondente às quantidades dos fatores; $z = f(s)$

Note-se, que no caso, como estamos cuidando de um único produto, z é um número real (exprimindo uma quantidade por unidade de tempo) e s um vetor do R^m.

Se os fatores de produção forem divisíveis e se a função enumerar todos os fatores efetivamente envolvidos na produção, é de se esperar que essa função seja homogênea do primeiro grau, isto é, que $f(\lambda s) = \lambda f(s)$ para todo número real λ. Isso, simplesmente, corresponde à idéia de que a repetição de um mesmo processo deve dar o mesmo resultado em igualdade de condições e que, portanto, se se dobram as quantidades de <u>todos</u> os fatores, deve dobrar a quantidade do produto. A hipótese de divisibilidade é essencial à validade do princípio da homogeneidade, pois se deve admitir que a experiência de produção possa ser repetida, não apenas multiplicando, mas também dividindo as quantidades dos fatores.

É de se presumir, por outro lado, que, se conseguimos produzir z_1 com uma quantidade s_1 de fatores, e z_2 com uma quantidade s_2, então, quando empregarmos, por unidade de tempo, $s_1 + s_2$, obtenhamos pelo menos $z_1 + z_2$. Isso equivale, analiticamente, a $f(s_1 + s_2) \geq f(s_1) + f(s_2)$.

Combinando esse resultado com o princípio da homogeneidade, obtém-se:

$$f(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) > \lambda_1 f(s_1) + \lambda_2 f(s_2).$$

Tomando-se, em particular, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, conclui-se que a função de produção é côncava.

Na prática, certos fatores envolvidos na produção são fixos, do ponto de vista da empresa (por exemplo, a capacidade empresarial), não podendo ser multiplicados ou divididos. Isso pode fazer com que a função de produção que especifique apenas os fatores variáveis não mais seja homogênea do primeiro grau. Mas, a concavidade permanece, pois uma função côncava de várias variáveis reais continua com essa propriedade, quando se fixam os valores de algumas dessas variáveis.

Se designarmos por p o preço do produto e por w(pertencente a R^m) o vetor representativo do preço dos fatores, o lucro da empresa será expresso por:

$$L = f(s) - [w, s]$$

Suponhamos que a empresa opere num mercado de concorrência perfeita e que, por isso, não seja individualmente capaz de afetar nem p nem w ; o lucro L , no caso, será uma função côncava de s ; no caso em que a função de produção for diferenciável, teremos:

$$\text{grad } L(s) = \text{grad } f(s) - w$$

Sendo a função definida apenas para $s \geq 0$, a condição de lucro máximo no ponto s_0 é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = \frac{w_i}{p}, \quad se \quad s_i > 0, \quad e$$

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} < \frac{w_i}{p}, \quad se \quad s_i = 0,$$

isto é, a produtividade marginal dos fatores efetivamente empregados, $(s_i > 0)$, deve ser igual à relação entre os respectivos preços e o preço do produto; e a dos fatores não utilizados, $(s_i = 0)$, menor ou igual à relação respectiva.

O conceito de função de produção simples, tal como acima apresentado, embora muito popular nos textos de economia, não se presta à descrição de certas técnicas. Em muitas indústrias químicas, o emprego de fatores dá origem, simultâneamente, a mais de um produto. Por outro lado, em muitos casos os produtos de uma indústria são matérias-primas para outras. Sem maiores complicações, pode-se enquadrar esse tipo de problema com o conceito de função de produção generalizada. Designemos por R^n o universo dos produtos (inclusive aqueles que são matérias-primas para algumas indústrias), e por R^m o dos fatores de produção. Uma função generalizada de produção descreve-se como uma relação:

$$x = F(s),$$

onde, agora, x é um vetor do R^n. Os processos de produção simples são facilmente abrangidos por essa descrição: basta tomar como positiva apenas uma das componentes de x (a relativa ao produto objeto da fabricação), e as demais iguais a zero. Tratando-se de produção múltipla, o vetor x terá mais de uma componente positiva. Se o processo de produção misturar a fabricação de alguns produtos com o consumo de outros, basta imputar valores negativos às coordenadas relativas às matérias-primas, e positivos para os produtos finais. Finalmente, se alguns fatores de produção não são utilizados, é suficiente supor que o valor da função de produção não seja afetado pela quantidade empregada desses fatores, o que fará com que, economicamente, qualquer empresário prefira empregá-los em quantidades iguais a zero.

Continua-se supondo côncava a função de produção generalizada. Já que os valores de $F(s)$ são vetores, isso significa que cada componente de $F(s)$ é uma função côncava.

Seja, agora, p (pertencente a R^n) o vetor representativo dos preços dos produtos, e w o dos fatores. O lucro da empresa será expresso por: $L(s) = [p, F(s)] - [w, s]$.

Supondo que a empresa opere em concorrência perfeita e tomando p e w como dados, a maximização do lucro se conseguirá empregando, por unidade de tempo, uma quantidade s_0 de fatores tal que

$$[p, F(s_0)] - [w, s_0] \geq [p, F(s)] - [w, s], \text{para todo } s \geq 0.$$

Vejamos, agora, o problema do equilíbrio geral da produção em concorrência perfeita. Suponhamos que:

(*a*) a produção dos diversos produtos na economia se faça por um grande número de empresas, operando com as funções de produção generalizadas $F_1(s_1)$, $F_2(s_2)$,........, $F_h(s_h)$, s_1, s_2, s_h representando os vetores do R^m correspondentes à utilização de fatores por cada empresa;

(*b*) a economia transacione livremente seus produtos com o resto do mundo, de modo a que o vetor p correspondente aos preços dos produtos seja um dado;

(*c*) os fatores de produção não possam ser exportados nem importados, sendo a sua disponibilidade total limitada em $\bar{s}$; assim, o mercado deve determinar os preços dos fatores w, e obedecer à condição $s_1 + s_2 + \ldots + s_h < \bar{s}$;

(*d*) cada empresa, pelo regime de concorrência perfeita, procure maximizar seu lucro, tomando não apenas p, mas também w, como dados.

Como se alocam os fatores entre as empresas, e como se determinam os preços dos fatores? Três regras podem ser especificadas:

(i) cada empresa deve estar maximizando seu lucro. Portanto, se a iésima empresa emprega s_i de fatores,

$$[\,p, F_i(s_i)\,] - [\,w, s_i\,] \geq [\,p, F(s_i')\,] - [\,w, s_i'\,],$$ para todo $s_i' \geq 0$;

(ii) se o jésimo fator de produção não for empregado no nível de sua disponibilidade, isto é, se a jésima componente de $s_1+s_2+ \ldots . s_r$ for inferior a jésima componente de $\bar{s}$, o preço correspondente (isto é, a jésima componente de w) deve cair a zero;

(iii) genericamente, $w \geq 0$.

Como assegurar a existência de preços de fatores que atendam a esses requisitos? O teorema fundamental da programação convexa nos dá a resposta. Consideremos o problema:

" maximizar a função côncava

$$\left[p,\ F_1(s_1) + F_2(s_2) + \ldots\ldots + F_r(s_r)\right],$$

definida para $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, ..., $s_r \geq 0$,

com a restrição:

$$s_1+s_2+ \ldots\ldots + s_r - \bar{s} \leq 0"$$

A restrição, no caso, corresponde a m desigualdades lineares, já que os vetores s_i pertencem ao R^m. Designando por v o vetor correspondente aos multiplicadores de Lagrange, a função auxiliar se expressa por:

$$\left[p, F_1(s_1) + \ldots\ldots F_r(s_r) \right] - \left[v, s_1 + s_2 + \ldots\ldots + s_r - \bar{s} \right]$$

As condições de maximização dessa função auxiliar são exatamente as do equilíbrio em concorrência perfeita, desde que se tome $v=w$. Assim, de uma cajadada matamos vários coelhos. Demonstramos, primeiro, que existe um sistema de preços de fatores que equilibra o sistema (a unicidade não pode ser genericamente garantida); provamos, em segundo lugar, que os preços dos fatores são os preços-sombra resultantes da sua disponibilidade limitada; e ainda mostramos que o equilíbrio da produção em concorrência perfeita maximiza o valor do produto $\left[p, F_1(s_1) + F_2(s_2) + \ldots\ldots + F_r(s_r)\right]$. Como o vetor preço é positivo, esta última conclusão nos assegura que o equilíbrio competitivo da produção é eficiente no sentido de Pareto: dentro da disponibilidade de fatores, não é possível aumentar a quantidade de um produto sem diminuir a de algum outro.

GMF/mp.

000011490