

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

LEONARDO HERZ MONTEIRO

**CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES DE VOLATILIDADE
A PARTIR DA CALIBRAÇÃO DO MODELO
GARCH-SVNIG**

SÃO PAULO

2021

LEONARDO HERZ MONTEIRO

**CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES DE VOLATILIDADE
A PARTIR DA CALIBRAÇÃO DO MODELO
GARCH-SVNIG**

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional da Escola de Economia
de São Paulo da Fundação Getulio Vargas,
como requisito para a obtenção do título de
Mestre em Economia.

Área de concentração:
Engenharia Financeira.

Orientador:
Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto
Coorientador:
Prof. Dr. Luiz Henrique Moraes da Silva

SÃO PAULO

2021

Monteiro, Leonardo Herz.

Construção de superfícies de volatilidade a partir da calibração do Modelo GARCH-SVNIG / Leonardo Herz Monteiro. - 2021.

84 f.

Orientador: Afonso de Campos Pinto.

Coorientador: Luiz Henrique Moraes da Silva.

Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Fundação Getulio Vargas, Escola de Economia de São Paulo.

1. Mercado financeiro. 2. Derivativos (Finanças) - Preços. 3. Volatilidade (Finanças). 4. Processo estocástico. I. Pinto, Afonso de Campos. II. Silva, Luiz Henrique Moraes da. III. Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Escola de Economia de São Paulo. IV. Fundação Getulio Vargas. V. Título.

CDU 336.76

Ficha Catalográfica elaborada por: Isabele Oliveira dos Santos Garcia CRB SP-010191/O

Biblioteca Karl A. Boedecker da Fundação Getulio Vargas - SP

LEONARDO HERZ MONTEIRO

CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES DE VOLATILIDADE A PARTIR DA CALIBRAÇÃO DO MODELO GARCH-SVNIG

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração:
Engenharia Financeira.

Data da Aprovação: 03 / 06 / 2021

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto
(Orientador)
EESP-FGV

Prof. Dr. Luiz Henrique Moraes da Silva
(Coorientador)
EAESP-FGV

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa
Escola Politécnica-USP

*Para todos aqueles que acreditaram no meu potencial de concluir esta importante etapa da
minha carreira acadêmica.*

AGRADECIMENTOS

Utilizo este espaço para agradecer a todos que tiveram um papel importante na conclusão deste projeto:

Agradeço a Deus e todas as entidades do bem, pela proteção e pela força para vencer todos os desafios e obstáculos.

Agradeço aos membros da minha família, pelo apoio emocional e por aceitar minha ausência e indisponibilidade nos momentos de dedicação.

Agradeço ao professor, Luiz Henrique Moraes da Silva, pela paciência e atenção, manifestadas tanto nas aulas do curso quanto na elaboração desta dissertação.

Agradeço ao Modalmais e seus integrantes, por terem acreditado no meu potencial de aprendizado e pela oportunidade de desenvolver e aplicar este projeto na prática.

Agradeço aos meus colegas de turma que tornaram toda esta trajetória mais agradável através de suas respectivas companhias.

RESUMO

A precificação de opções é um constante desafio enfrentado pelo mercado financeiro, devido à dificuldade de modelar adequadamente a dinâmica dos preços dos ativos financeiros. Atualmente, os participantes do mercado utilizam a volatilidade implícita, oriunda do modelo Black-Scholes, como método para visualizar os prêmios de risco associados à diferentes prazos e strikes, dando origem às superfícies de volatilidade. O presente trabalho tem por objetivo propor a utilização de um processo estocástico avançado que seja flexível o suficiente para calibrar, de maneira equilibrada, os pontos amostrais de volatilidade implícita observados no mercado, independente da diversidade dos vértices disponíveis. O modelo proposto é testado com dados artificiais e reais, e o principal resultado observado é a possibilidade de construir de superfícies suaves e completas a partir da generalização do processo calibrado.

Palavras-chave: Mercado Financeiro. Precificação de Derivativos. Opções Europeias. Modelo Black-Scholes. Volatilidade Implícita. Superfície de Volatilidade. Processos Estocásticos. Calibração de Modelos. Volatilidade Estocástica com Expoente Não-afim. Saltos Normal Inverse Gaussian (NIG). Saltos de Levy com Atividade Infinita e Variação Infinita. Simulação de Monte Carlo. Computação paralela. Sequências de Baixa Discrepância. Covariance Matrix Adaptation Evolution Estrategy (CMA-ES).

ABSTRACT

Option pricing is a constant challenge faced by the financial market, due to the difficulty of modeling the price dynamics of financial assets. Currently, market participants use the implied volatility, derived from the Black-Scholes model, as a method to visualize the risk premiums associated with different expiries and strikes, giving rise to the volatility surfaces. The present work aims to propose the use of an advanced stochastic process that is flexible enough to calibrate, in a balanced way, the sample points of implicit volatility observed in the market, regardless of the diversity of the available vertices. The proposed model is tested with artificial and real data, and the main result observed is the possibility of building smooth and complete surfaces from the generalization of the calibrated process.

Keywords:

Financial Markets. Derivatives Pricing. European Options. Black-Scholes Model. Implied Volatility. Volatility Surface. Stochastic Process. Model Calibration. Non-affine Stochastic Volatility. Normal Inverse Gaussian Jumps (NIG). Infinite Activity and Infinite Variation Levy Jumps. Monte Carlo Simulation. Parallel Computing. Low Discrepancy Sequence. Covariance Matrix Adaptation Evolution Estrategy (CMA-ES).

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 11 |
| 2 | Revisão Teórica - Origem do Problema | 14 |
| 2.1 | Conceitos Básicos sobre Derivativos | 14 |
| 2.1.1 | Definição Formal | 14 |
| 2.1.2 | Ativos Objeto | 14 |
| 2.1.3 | Regras de Funcionamento | 15 |
| 2.1.4 | Ambientes de Negociação | 16 |
| 2.1.5 | O Mercado de Opções | 16 |
| 2.2 | Precificação de Derivativos | 16 |
| 2.2.1 | Modelagem de Dinâmicas Aleatórias | 17 |
| 2.2.2 | Medida Neutra ao Risco | 17 |
| 2.2.3 | Abordagens de Precificação | 18 |
| 2.3 | O Modelo de Black-Scholes | 18 |
| 2.3.1 | Premissas e Equação Fundamental | 18 |
| 2.3.2 | Solução da EDP para <i>Calls</i> e <i>Puts</i> | 19 |
| 2.3.3 | Volatilidade Implícita | 21 |
| 3 | Revisão Teórica - Modelo Proposto | 22 |
| 3.1 | Construção da Superfície por Generalização | 22 |
| 3.1.1 | Extração de Dados | 22 |
| 3.1.2 | Processo de Calibração | 22 |
| 3.1.3 | Geração de Vértices | 23 |
| 3.1.4 | Desafios | 24 |
| 3.2 | Elementos Avançados de Processos Estocásticos | 24 |
| 3.2.1 | Volatilidade Estocástica | 25 |
| 3.2.2 | Salto de Lévy | 27 |
| 3.2.3 | Tempo Estocástico e Subordinação | 28 |
| 3.3 | O Modelo GARCH-SVNIG | 29 |
| 3.3.1 | Equações do Modelo | 30 |
| 3.3.2 | Discretização do Modelo | 30 |
| 3.4 | Simulação de Monte Carlo | 32 |
| 3.4.1 | Princípios Fundamentais | 32 |
| 3.4.2 | Aceleração da Convergência | 34 |
| 3.5 | Otimização com o Método CMA-ES | 34 |
| 3.5.1 | Problemas de Otimização Difíceis | 34 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.5.2 | Princípios do Método CMA-ES | 35 |
| 3.6 | Consolidação da Metodologia | 37 |
| 3.6.1 | Etapa 1: Preparação | 37 |
| 3.6.2 | Etapa 2: Extração | 38 |
| 3.6.3 | Etapa 3: Calibração | 38 |
| 3.6.4 | Etapa 4: Generalização | 39 |
| 4 | Validação e Infraestrutura da Execução | 40 |
| 4.1 | Validações Preliminares | 40 |
| 4.1.1 | Amostragem Individual Exploratória | 40 |
| 4.1.2 | Verificação da Medida Martingal | 40 |
| 4.1.3 | Convergência da Simulação de Monte Carlo | 41 |
| 4.1.4 | Eficiência do Método de Otimização CMA-ES | 41 |
| 4.1.5 | Velocidade de Execução do Script | 42 |
| 4.2 | Configurações de Execução | 43 |
| 4.3 | Amostras Utilizadas | 44 |
| 4.3.1 | Dados Artificiais | 44 |
| 4.3.2 | Dados Reais | 47 |
| 5 | Análise dos Resultados Obtidos | 50 |
| 5.1 | Dados Artificiais | 50 |
| 5.1.1 | Apresentação | 50 |
| 5.1.2 | Análise | 51 |
| 5.2 | Dados Reais | 52 |
| 5.2.1 | Apresentação | 52 |
| 5.2.2 | Análise | 55 |
| 5.3 | Conclusões | 56 |
| 5.4 | Trabalhos Futuros | 57 |
| | Referências | 59 |
| | Apêndices | 61 |
| | APÊNDICE A Tabelas e Figuras | 62 |
| A.1 | Dados Artificiais | 62 |
| A.1.1 | Formato de risco tipo A observado num prazo de 18 dias | 63 |
| A.1.2 | Formato de risco tipo A observado num prazo de 90 dias | 64 |
| A.1.3 | Formato de risco tipo A observado num prazo de 180 dias | 65 |
| A.1.4 | Formato de risco tipo B observado num prazo de 18 dias | 66 |
| A.1.5 | Formato de risco tipo B observado num prazo de 90 dias | 67 |
| A.1.6 | Formato de risco tipo B observado num prazo de 180 dias | 68 |

| | | |
|--------|---|----|
| A.1.7 | Formato de risco tipo C observado num prazo de 18 dias | 69 |
| A.1.8 | Formato de risco tipo C observado num prazo de 90 dias | 70 |
| A.1.9 | Formato de risco tipo C observado num prazo de 180 dias | 71 |
| A.1.10 | Formato de risco tipo D observado num prazo de 18 dias | 72 |
| A.1.11 | Formato de risco tipo D observado num prazo de 90 dias | 73 |
| A.1.12 | Formato de risco tipo D observado num prazo de 180 dias | 74 |
| A.1.13 | Formato de risco tipo E observado num prazo de 18 dias | 75 |
| A.1.14 | Formato de risco tipo E observado num prazo de 90 dias | 76 |
| A.1.15 | Formato de risco tipo E observado num prazo de 180 dias | 77 |
| A.2 | Dados Reais | 78 |

1 Introdução

Um dos grandes desafios do mercado financeiro é precificar corretamente instrumentos derivativos. O modelo mais popular utilizado para este objetivo é o de Black-Scholes, que assume que a dinâmica de preço dos ativos segue um processo de movimento browniano geométrico (GBM), onde a volatilidade e o *drift* possuem valor constante. A sua grande popularidade pode ser explicada por uma série de fatores, entre eles a existência de uma fórmula analítica simples e compacta para precificar os dois principais tipos de derivativo não lineares do mercado: opções de compra (*call*) e opções de venda (*put*).

Na época em que este modelo surgiu, os recursos e capacidades computacionais eram muito limitados, e com isso, a simplicidade e velocidade da fórmula analítica foram extremamente valorizadas pelos participantes do mercado. Ao longo das décadas seguintes, inúmeras evidências empíricas apontaram que apesar de seu grande valor, o modelo Black-Scholes apresenta algumas deficiências críticas, causadas por algumas de suas premissas, que o impedem de representar corretamente a dinâmica de preço que é observado no mercado.

Uma das evidências mais famosas é o fenômeno do *smile* de volatilidade. Quando observamos os preços das opções negociadas, chamamos de volatilidade implícita o valor da volatilidade que deve ser inserida no modelo (junto com os outros parâmetros, que são observáveis) para obter aquele preço de mercado. Considerando um prazo de vencimento fixo, para diferentes preços de exercício (*strikes*), as volatilidades implícitas, ao invés de se manifestarem como uma reta horizontal, conforme determina o modelo Black-Scholes, se manifestam como uma curva, que pode assumir diferentes formatos. Considerando também o fato de que, para cada *strike*, podem existir diferentes prazos associados, ficamos com diversas combinações de pares ordenados (*strike*, prazo). Com isso, o fenômeno do *smile* passa a ser observado como uma superfície tridimensional ao invés de uma curva bidimensional.

Esse fenômeno pode ser explicado como um prêmio que o mercado adiciona no preço para compensar o risco de cenários de maior volatilidade e movimentos extremos. Em outras palavras, os participantes do mercado entendem que os preços dos ativos não seguem uma dinâmica tão simples quanto GBM, que é incapaz de capturar esses eventos. Apesar disso, o modelo Black-Scholes continua sendo extremamente importante, pois as volatilidades implícitas, mesmo representando uma distorção do modelo, acabam sendo utilizadas como forma de linguagem entre os *traders* de opções para representar o nível deste prêmio de risco.

Toda esta discussão leva a uma pergunta importante: qual é a melhor maneira de

modelar e capturar a dinâmica de preços que o mercado está associando a um determinado grupo de opções, para que com isso, possamos determinar o preço de qualquer opção, independentemente de seu *strike* e prazo, mesmo que não existam ofertas de compra e venda ?

Diversos tipos de modelo foram propostos com o objetivo de tentar capturar com maior precisão a dinâmica real que o preço dos ativos possui, e com isso justificar o fenômeno do *smile*. Estes modelos adicionam elementos, como volatilidade estocástica e salto nos retornos dos preços e/ou volatilidade, que preservam a neutralidade ao risco e aumentam a flexibilidade da dinâmica, mas ao mesmo tempo aumentam também sua complexidade. Os parâmetros que representam estes elementos não são conhecidos a priori, e para encontrá-los, é necessário realizar um processo de calibração. Após essa etapa, os parâmetros encontrados podem ser utilizados para precificar as opções em qualquer *strike* e vencimento desejado.

Antes de realizar o processo de calibração, é necessário primeiramente identificar em qual dos dois cenários de liquidez de mercado as opções do ativo objeto se enquadram:

- Alta liquidez: o processo de calibração segue o mesmo princípio da volatilidade implícita, só que em dimensões maiores, em função da quantidade de parâmetros presentes no modelo. Este processo pode ser encarado como um problema de otimização, que por sua vez, possui uma resolução extremamente difícil, devido a diversas características da função objetivo, como descontinuidades no domínio, multimodalidade (muitos mínimos locais) e superfície rugosa.

- Baixa liquidez: o processo de calibração através dos preços torna-se impraticável devido à carência dos dados necessários e também aos níveis de *spread* empregados pelos participantes nos poucos vértices aonde negócios podem ser observados. Por esse motivo, outras metodologias precisam ser empregadas. Nestes casos, a abordagem mais comum é utilizar as séries temporais de preço do ativo objeto para estimar a forma da superfície de volatilidade, que não necessariamente envolvem a calibração de processos estocásticos.

O objetivo deste projeto é abordar o problema da busca por uma dinâmica de preço adequada para os ativos financeiros, considerando o cenário no qual as opções apresentam alta liquidez de mercado. Ao longo do texto, serão explorados:

- A utilização de um processo estocástico avançado que seja flexível o suficiente para calibrar de maneira equilibrada os pontos amostrais de volatilidade implícita observados no mercado, independente da diversidade dos vértices (*strike*, prazo) disponíveis.

- A construção e interpolação de superfícies de volatilidade completas e suaves a partir dos resultados obtidos na calibração do modelo.
- A aplicação de técnicas de otimização e simulação eficientes para garantir que a calibração do processo estocástico escolhido aconteça de forma precisa e num tempo factível.

O texto está estruturado em 5 capítulos e 1 apêndice. O capítulo 2 apresenta todos os aspectos teóricos necessários para fundamentar em detalhes a origem e a motivação do problema da dinâmica de preço adequada para os ativos financeiros. Em seguida, o capítulo 3 apresenta todos os aspectos teóricos necessários para fundamentar o processo estocástico escolhido e as técnicas de otimização e simulação que serão utilizadas para calibrá-lo. Na sequência, o capítulo 4 apresenta validações práticas importantes e toda infraestrutura criada para realizar os testes do modelo através de dados artificiais e reais. Por fim, o capítulo 5 apresenta os resultados e as principais conclusões obtidas. Adicionalmente, o apêndice A apresenta as tabelas e as figuras dos resultados obtidos que não foram explicitamente exibidas no capítulo 5.

2 Revisão Teórica - Origem do Problema

2.1 Conceitos Básicos sobre Derivativos

Nesta seção, serão abordados conceitos básicos sobre derivativos e como eles estão inseridos no contexto do mercado financeiro moderno.

2.1.1 Definição Formal

Um derivativo é um instrumento financeiro cujo valor depende de um outro instrumento financeiro, geralmente chamado de ativo objeto ou ativo subjacente. Eles foram criados com o intuito de viabilizar mecanismos de proteção (*hedge*) entre os participantes do mercado financeiro, porém, eles também são amplamente utilizados para estratégias direcionais e especulativas.

Em geral, os derivativos são negociados na forma de contratos de duração finita, com regras de funcionamento aplicáveis a qualquer instância registrada. Cada instância, por sua vez, deve possuir valores bem definidos para os parâmetros especificados nestas regras.

2.1.2 Ativos Objeto

Essencialmente, qualquer tipo de ativo negociável ou indicador financeiro pode ser escolhido como objeto de referência de um derivativo. Entre os mais comuns, temos: ações, índices, commodities, moedas estrangeiras (ou suas taxas de câmbio), taxas de juros (ou seus fatores acumulados), títulos de dívida, criptomoedas, entre outros.

Além disso, até mesmo derivativos podem ser escolhidos como ativo objeto, desde que, obviamente, a referência encadeada termine num objeto simples que não seja um derivativo. Por fim, vale destacar que um derivativo pode estar vinculado a mais de um ativo objeto, ou então a uma combinação ponderada de vários ativos objetos (como uma cesta ou índice).

2.1.3 Regras de Funcionamento

Cada tipo de derivativo possui suas próprias regras de funcionamento, que por sua vez, provocam um impacto direto na complexidade dos modelos de precificação. A seguir, são apresentadas os principais tipos de regra que são encontradas nas definições dos derivativos:

- Ativos objetos vinculados: determina quantos e quais ativos objetos estão vinculados ao derivativo, assim como eventuais pesos que devem ser utilizadas na ponderação entre os mesmos.
- Parâmetros de cálculo: determina quais parâmetros são necessários para calcular o resultado final do derivativo. Devem possuir alguma relação com o ativo objeto, como por exemplo, preços na largada ou no vencimento da operação, preços mínimo, máximo ou médio observados num intervalo de tempo, entre outros.
- Metodologia de resultado ou *payoff*: determina como o resultado final do derivativo (ou seja, lucro ou prejuízo) deve ser calculado. Nos derivativos simples, é apenas uma fórmula matemática, enquanto nos derivativos mais complexos, costuma ser um algoritmo que avalia uma série de condições especiais, que podem se manifestar antes do vencimento da operação.
- Modalidade de exercício: determina em quais instantes de tempo a metodologia de resultado pode ser acionada. As modalidades mais comuns são a europeia (apenas no vencimento), a bermudiana (em algumas datas específicas) e a americana (em qualquer data).
- Existência de barreiras: determina se existem níveis de preço do ativo objeto que, quando ultrapassados, provocam a ativação (*knock-in*) ou desativação (*knock-out*) do derivativo. Neste caso, os preços que correspondem ao níveis de ativação destas barreiras se tornam parâmetros de cálculo obrigatórios.
- Frequências de apuração: determina com qual frequência os parâmetros de cálculo são apurados a partir dos dados de mercado. As frequências mais comuns são a diária (geralmente o preço de fechamento) e a contínua (qualquer preço registrado num instante de tempo).

2.1.4 Ambientes de Negociação

Os derivativos com regras de funcionamento simples e características padronizadas costumam ser mais populares e líquidos entre os participantes do mercado, justamente por terem um modelo de precificação mais fácil e prático. Por esse motivo, são negociados de forma ampla e fungível em ambiente de bolsa com contraparte central qualificada.

Por outro lado, derivativos com regras de funcionamento complexas e características flexíveis costumam ser negociados em ambiente de balcão (OTC - *Over the Counter*) diretamente entre as duas partes interessadas, que assumem o risco de crédito uma da outra.

2.1.5 O Mercado de Opções

Neste projeto em particular, estamos interessados num tipo particular de derivativo, chamado de opção. No caso, opções de compra e opções de venda, também conhecidas pelos nomes *call* e *put*, respectivamente, são os derivativos com *payoff* não linear mais comuns no mercado. Elas conferem ao seu portador o direito (ou seja, não há obrigação) de comprar ou vender o ativo objeto por um preço de referência fixo, denominado preço de exercício ou *strike*.

Alternativamente, o *strike* também pode ser expresso como um valor percentual do preço atual (*spot*) do ativo objeto, recebendo o nome de *moneyness*.

As opções podem ser negociadas em várias modalidades de exercício, embora a única que vamos abordar neste projeto seja a europeia, ou seja, o direito do portador só pode ser exercido na data vencimento.

2.2 Precificação de Derivativos

Para um grupo bem pequeno de derivativos com *payoff* linear, composto essencialmente por futuros e *swaps*, a precificação é uma tarefa relativamente simples. Por outro lado, para a grande maioria dos derivativos restantes, entre eles as opções europeias, o processo de precificação é muito mais complexo e até mesmo subjetivo, no sentido em que os participantes podem escolher modelos diferentes para utilizar, desde que os mesmos respeitem as regras fundamentais de precificação.

Nesta seção, serão introduzidos conceitos teóricos importantes para embasar os princípios básicos da precificação de derivativos e para elucidar os motivos dessa complexidade e subjetividade.

2.2.1 Modelagem de Dinâmicas Aleatórias

Já que o valor de um derivativo depende do ativo objeto ao qual ele está vinculado, o primeiro passo para precificá-lo corretamente é justamente tentar modelar a dinâmica aleatória da evolução do preço do ativo objeto ao longo do tempo.

As ferramentas matemáticas utilizada para este tipo de tarefa são as equações diferenciais estocásticas. Através delas, é possível descrever componentes determinísticas e probabilísticas que governam a dinâmica proposta.

O aspecto subjetivo da precificação de derivativos reside no fato de que não existe uma dinâmica universalmente aceita como correta para modelar o preço dos ativos. Muitos modelos já foram propostos, e até o momento, não foi possível provar que algum deles explique com absoluta perfeição o comportamento observado nos mercados.

Por essa razão, cada participante precisa decidir qual dinâmica considera mais adequada para ser utilizada no processo de precificação, analisando suas respectivas vantagens e desvantagens.

2.2.2 Medida Neutra ao Risco

Um aspecto muito importante da precificação derivativos é o conceito de medida de probabilidade neutra ao risco ou medida martingal equivalente. Nesta medida, o preço esperado de qualquer ativo do mercado, numa data futura, é igual ao preço deste ativo no instante atual, multiplicado por um fator de correção equivalente à rentabilidade proporcionada pela taxa de juros livre risco no período de tempo em questão. Ou seja, não existe qualquer viés ou expectativa de que o ativo apresentará um resultado positivo ou negativo no período.

A existência desta medida só é válida a partir do pressuposto de que o mercado é livre de arbitragem, ou seja, nenhum investidor consegue realizar uma operação na qual os únicos resultados possíveis sejam ganhos positivos ou nulos.

Independente da dinâmica de preço proposta, as equações diferenciais estocásticas devem resultar num processo que atenda essa propriedade fundamental, pois caso não seja, o valor encontrado será enviesado para um cenário que não corresponde à neutralidade. Este é o aspecto fundamental da precificação de derivativos.

2.2.3 Abordagens de Precificação

A partir da premissa de que existe uma medida neutra ao risco, duas abordagens podem ser utilizadas para tratar o problema da precificação de derivativos. Elas são apresentadas a seguir:

- **Portfólio replicante** - esta abordagem afirma que o preço justo de um derivativo pode ser calculado a partir do valor de um portfólio de investimentos que consiga replicar perfeitamente o seu comportamento. Este portfólio deve ser composto por ativos mais simples, cujos preços possam ser facilmente determinados.
- **Valor esperado** - esta abordagem afirma que o preço justo de um derivativo pode ser calculado como o valor esperado (na medida neutra ao risco) do *payoff*, trazido a valor presente pela taxa de juros livre risco.

É possível provar que, respeitando certas condições fundamentais, ambas as abordagens são equivalentes e chegam ao mesmo resultado. Apesar disso, dependendo do derivativo em questão, uma abordagem pode acabar sendo mais fácil e prática do que outra.

2.3 O Modelo de Black-Scholes

Conforme mencionado na introdução, [Black e Scholes \(1973\)](#) criaram um modelo extremamente importante para a área de precificação de derivativos, que consegue entregar bons resultados mesmo com sua simplicidade. Nesta seção, será feita uma breve revisão do modelo e sua relevância dentro do problema proposto.

2.3.1 Premissas e Equação Fundamental

Primeiramente, vamos introduzir as variáveis fundamentais do modelo seus respectivos significados e premissas:

- t : indexação do tempo contínuo
- T : instante de tempo do vencimento
- τ : total de tempo restante até o vencimento ($T - t$)

- $P | P_t$: preço do derivativo no instante t
- $S | S_t$: preço do ativo objeto no instante t
- r : taxa de juros livre de risco (constante)
- σ : volatilidade do ativo objeto (constante)

Além disso, o modelo também afirma que não existem oportunidades de arbitragem e que os custos de transição são desprezíveis.

O modelo assume que o preço do ativo objeto segue a dinâmica de um movimento browniano geométrico (GBM) na medida neutra ao risco Q , descrita pela equação diferencial estocástica a seguir:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \quad S_t(t=0) = S_0 \quad (2.1)$$

A partir da abordagem do portfólio replicante, e também das técnicas oferecidas pela teoria do cálculo estocástico, é possível chegar na equação diferencial parcial (EDP) que governa o modelo:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \quad (2.2)$$

Esta EDP se encaixa no modelo da equação de difusão (após a aplicação de uma mudança de variável), cuja metodologia de solução matemática está bem definida. Ela pode ser utilizada como ponto de partida para precificar qualquer derivativo que tenha um único ativo objeto, exercício europeu e um *payoff* sem dependência em relação à trajetória histórica do preço do ativo objeto.

Para que isso seja possível, é necessário embutir o *payoff* do derivativo como condições de contorno da solução da EDP, onde cada caso tem suas próprias particularidades.

[Aiube \(2012\)](#) disponibiliza uma demonstração completa de como a equação pode ser obtida e solucionada usando as técnicas matemáticas pertinentes.

2.3.2 Solução da EDP para *Calls* e *Puts*

Para todas as fórmulas e expressões a seguir, vamos usar a seguinte variável auxiliar que tem seu valor definido a partir do tipo da opção:

$$a = \begin{cases} +1 & \text{se a opção for uma } Call \\ -1 & \text{se a opção for uma } Put \end{cases}$$

A fórmula de *payoff* das opções europeias na data de vencimento é apresentada a seguir, onde K representa o *strike* da opção, e a função Max retorna o maior valor entre os argumentos de entrada:

$$P_t(t = T) = Max(a(S_t - K), 0) \quad (2.3)$$

Nesta expressão, fica claro o conceito relacionada ao direito (e não a obrigação) de exercer a opção no vencimento, pois o investidor racional jamais exercerá a opção para ter um prejuízo. Assim seu pior resultado possível será apenas o custo pago para adquirir a opção, pois a parte variável do resultado está sempre limitada inferiormente por zero.

A partir desta fórmula do *payoff*, é possível estabelecer respectivas condições de contorno do plano $S \times t$:

$$S \rightarrow 0 \qquad S \rightarrow \infty \qquad t \rightarrow 0 \qquad t \rightarrow \infty$$

A solução da EDP sob estas condições resulta na famosa fórmula do modelo Black-Scholes para opções que possuem ativo objeto com preço *spot*, apresentada a seguir:

$$P(S, t) = aSN(ad_1) - aKe^{-r\tau}N(ad_2) \quad (2.4)$$

Onde os termos d_1 e d_2 são calculados a partir das seguintes fórmulas e N representa a função de distribuição acumulada da distribuição Normal:

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \tau\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \right] \qquad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \tau\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right] \quad (2.5)$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (2.6)$$

Se o ativo objeto for um contrato futuro, algo que é muito comum no mercado atualmente, a fórmula sofre algumas alterações:

$$P(S, t) = e^{-r\tau} [aSN(ad_1) - aKN(ad_2)] \quad (2.7)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \tau\left(0 + \frac{\sigma^2}{2}\right) \right] \quad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \tau\left(0 - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right] \quad (2.8)$$

Esta fórmula considera que a opção e o ativo objeto futuro possuem a mesma data de vencimento. Caso esta condição não seja atendida, é necessário fazer um pequeno ajuste no valor de S para recalibrá-lo temporalmente com o instante de vencimento T da opção.

2.3.3 Volatilidade Implícita

Os conceitos de volatilidade implícita e superfície de volatilidade, no âmbito do modelo Black-Scholes, foram apresentados na introdução deste texto.

Existem diversos métodos para encontrar o valor da volatilidade implícita para um determinado conjunto de parâmetros de entrada. Neste projeto, utilizamos o método numérico iterativo de Newton-Raphson:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - (P_{BS}(\sigma_n) - P_{Mercado}) \cdot \left(\frac{dP_{BS}}{d\sigma}(\sigma_n) \right)^{-1} \quad (2.9)$$

Este método é bastante popular devido a sua simplicidade de implementação computacional e convergência extremamente rápida.

3 Revisão Teórica - Modelo Proposto

3.1 Construção da Superfície por Generalização

O objetivo deste projeto é propor uma metodologia que seja capaz de construir superfícies de volatilidade completas e consistentes a partir da calibração de processos estocásticos. Nesta seção, vamos apresentar as três etapas fundamentais desta metodologia que precisam realizadas sequencialmente para produzir o resultado esperado.

3.1.1 Extração de Dados

O passo inicial da metodologia é realizar a extração de dados do mercado. Tendo em mente o ativo objeto que será analisado, buscamos, através de algum provedor de dados, os preços de todas as opções disponíveis.

Apesar de existir uma variedade muito grande de opções disponíveis, as negociações costumam se concentrar num grupo pequenas delas. Por esse motivo, é muito comum que diversos vértices apresentem problemas como ausência completa de ofertas de compra ou venda (*Bid/Ask*), ou então um intervalo de valor (*spread*) muito grande entre ambas. Na composição da figura do *smile* para um determinado vencimento, também é possível observar pontos *outliers*, que podem ou não representar uma distorção forçada de preço naquele vértice.

Fica a critério do usuário final definir quais filtros devem ser aplicados nos dados coletados para excluir pontos amostrais que ele considere inadequados para serem inseridos na etapa seguinte. Em alguns mercados muito líquidos, também é possível fazer uma seleção mais criteriosa para excluir pontos que são muito próximos e parecidos em relação a outros que já forem selecionados, diminuindo o volume total que precisa ser analisado.

3.1.2 Processo de Calibração

Em posse dos dados coletados e tratados, a próxima etapa da metodologia é o processo de calibração. Esta etapa consiste em determinar os valores dos parâmetros do processo estocástico escolhido que, quando utilizados para precificar os mesmos vértices dos pontos amostrais coletados, produz o menor erro total em relação à diferença entre preço calculado e o preço real de mercado. Isso pode ser entendido como um problema de

otimização da natureza *curve fitting*, que já foi amplamente estudado na literatura.

Conforme mencionado anteriormente, o fato destes processos serem mais gerais que o GBM permitem que os modelos associados consigam reproduzir efeitos específicos que o modelo de Black-Scholes não consegue devido a sua simplicidade.

Em relação à relevância dos pontos amostrais, a calibração pode ser configurada de duas maneiras:

- Pesos iguais: todos os pontos amostrais possuem a mesma relevância. Esta configuração é livre de tendências específicas, mas ao mesmo tempo pode apresentar resultados inconsistentes se os *outliers* não forem devidamente filtrados da amostra.

- Pesos ponderados: alguns pontos amostrais possuem maior relevância do que outros, e por esse motivo, o erro individual deles deve ser menor. A definição e distribuição dos pesos deve ser feita pelo usuário a partir de algum critério de sua escolha.

Em relação ao erro total a ser minimizado, diferentes critérios podem ser utilizados, entre eles:

- Erro absoluto médio da amostra: calculamos os valores absolutos dos erros em relação aos pontos da amostra. Em seguida, somamos todos os erros individuais e dividimos pelo total de pontos para encontrar o valor médio.

- Erro absoluto máximo individual: calculamos os valores absolutos dos erros em relação aos pontos da amostra. Em seguida, identificamos o erro de maior valor entre todos os calculados.

Por fim, o usuário precisa definir ainda um critério de parada para o algoritmo de otimização, com base na quantidade de iterações e no nível de tolerância do erro absoluto.

3.1.3 Geração de Vértices

Uma vez que o processo estocástico esteja calibrado com os parâmetros que minimizam o erro, pode-se dizer que a dinâmica neutra ao risco do ativo em questão, sob a ótica dos participantes do mercado, foi devidamente capturada. Com isso, a partir da metodologia de cálculo adotada, é possível obter o preço das opções para qualquer vértice de *strike* e prazo desejado.

Conforme dito anteriormente, o modelo Black-Scholes preserva até hoje a sua popularidade devido a sua capacidade de reproduzir, através de um único elemento (volatilidade implícita), as expectativas de risco que o mercado observa no ativo objeto, por mais que essa característica represente uma inconsistência do modelo. Sendo assim, a construção da superfície final consiste em converter todos os preços obtidos através do modelo calibrado para a volatilidade implícita equivalente do modelo Black-Scholes, de tal maneira que os *traders* consigam visualizar facilmente o mapa de risco para qualquer ponto do grid $K \times T$, com o nível de discretização que desejarem.

Adicionalmente, uma outra vantagem direta é a possibilidade de precificar outros tipos de derivativos com dependência de trajetória, usando uma dinâmica muito mais adequada.

3.1.4 Desafios

A metodologia de construção da superfície foi apresentada, porém, duas questões importantes ainda precisam ser respondidas:

- Quais elementos podem ser incorporados aos processos estocásticos para possibilitar que a calibração apresente erros baixos de maneira distribuída e equilibrada entre os vértices analisados ?
- Como garantir que a etapa de calibração do processo estocástico ocorra de maneira rápida e consistente ?

As próximas seções são dedicadas a apresentar todos os conceitos e ferramentas necessários para responder estas duas questões.

3.2 Elementos Avançados de Processos Estocásticos

Conforme explicado ao longo do texto, as inconsistências do modelo Black-Scholes, observadas empiricamente através da superfície de volatilidade, podem ser explicadas em grande parte pela simplicidade do processo GBM, que não consegue capturar de maneira adequada a dinâmica do preços dos ativos financeiros.

Para tentar contornar essa deficiência, é necessário introduzir elementos adicionais na dinâmica dos preços, construindo processos estocásticos mais avançados e flexíveis.

Existem dois elementos importantes, amplamente explorados pela literatura, que podem ser utilizados para esse objetivo:

- Volatilidade estocástica: quando este elemento é introduzido, a volatilidade do processo de preço deixa de ser um valor constante e se transforma numa variável aleatória, governada por um processo estocástico separado. A principal vantagem da volatilidade estocástica é permitir a existência de mudanças dos níveis de volatilidade ao longo do tempo.

- Saltos de Lévy: quando este elemento é introduzido, os processos estocásticos passam a admitir a possibilidade de variações abruptas e descontínuas nos seus valores, que rompem a continuidade oferecida pelo movimento browniano puro. Existem diferentes tipos de salto, e cada um deles apresenta características distintas em relação a frequência e amplitude dos impactos observados. A principal vantagem dos saltos é permitir a existência de eventos extremos que causam grande movimentação no mercado.

Ao longo das próximas seções, vamos abordar com um pouco mais de detalhes cada um desses elementos, para que, na sequência, seja possível consolidar formalmente o modelo do processo estocástico final que foi escolhido para realizar o estudo deste projeto.

3.2.1 Volatilidade Estocástica

Diversos estudos presentes na literatura mostraram que, diferente do processo de preço, o processo da volatilidade possui uma forte característica de reversão à média, ou seja, o valor da variável aleatória tende a se concentrar numa determinado nível de referência, e qualquer perturbação que faça o valor se desviar deste nível é revertido aos poucos ao patamar de equilíbrio.

Para incorporar a volatilidade estocástica com reversão à média ao modelo, é necessário introduzir uma nova equação diferencial estocástica que governará este processo. A nova equação possui seu próprio movimento browniano, que por sua vez, está correlacionado com o movimento browniano da equação de preços através de um coeficiente de correlação. Os modelos desta natureza podem ser construídos em função da variância V_t , ou seja, o quadrado da volatilidade, ou então da própria volatilidade diretamente σ_t .

As equações do modelo básico propostas por [Heston \(1993\)](#) são apresentadas a seguir:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t}S_t dW_t^{S_t|Q} \quad dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \zeta\sqrt{V_t}dW_t^{V_t|Q} \quad (3.1)$$

$$\rho = dW_t^{S_t|Q} dW_t^{V_t|Q} \quad S_t(t=0) = S_0 \quad V_t(t=0) = V_0$$

É possível reescrever a mesma equação de dV_t incorporando o coeficiente de correlação diretamente:

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \zeta\sqrt{V_t}(\rho dW_t^{S_t|Q} + \sqrt{1 - \rho^2}dW_t^{V_t|Q}) \quad (3.2)$$

As descrições dos termos inéditos que aparecem nestas novas equações são apresentadas a seguir:

- S_0 : preço inicial
- V_0 : variância inicial
- κ : taxa de reversão à média
- θ : variância de equilíbrio
- ζ : volatilidade da variância
- ρ : coeficiente de correlação entre os movimentos brownianos
- $dW_t^{S_t|Q}$: movimentos browniano associado ao preço, na medida neutra ao risco
- $dW_t^{V_t|Q}$: movimentos browniano associado à variância, na medida neutra ao risco

Além do modelo tradicional, outros modelos alternativos foram propostos na literatura. Para analisá-los melhor, vamos reescrever a equação de dV_t de uma forma mais generalizada, inserindo um novo termo V_t elevado a um expoente χ e substituindo o termo $\sqrt{V_t}$ por outro elevado a um expoente γ :

$$dV_t = V_t^\chi \kappa(\theta - V_t)dt + \zeta V_t^\gamma (\rho dW_t^{S_t|Q} + \sqrt{1 - \rho^2}dW_t^{V_t|Q}) \quad (3.3)$$

A Tabela 1 apresenta diversos modelos já estudados na literatura e suas diferentes configurações de variável base e expoentes:

| Nome do Modelo | Variável Base | Expoente χ | Expoente γ | Afim ? |
|----------------|---------------|-----------------|-------------------|--------|
| Heston | V | 0 | $\frac{1}{2}$ | sim |
| GARCH | V | 0 | 1 | não |
| 3/2 | V | 1 | $\frac{3}{2}$ | não |
| ACE-X1 | V | $\frac{1}{2}$ | 1 | não |
| Inverse Gamma | σ | 0 | 1 | não |
| XGBM | σ | 1 | 1 | não |

Tabela 1 – Modelos de volatilidade estocástica não-afim

Dependendo dos valores escolhidos para os expoentes χ e γ , a dinâmica do processo se torna muito mais flexível, permitindo um melhor *fit* na calibração. Além dos modelos, existem ainda outros que transformam um destes expoentes, ou até mesmo ambos, em parâmetros ajustáveis do modelo, de tal maneira que o processo fica ainda mais flexível.

Por outro lado, a flexibilização destes expoentes, seja para o caso constante ou para o caso de livre variação, faz com que a dinâmica deixe de ser afim e se torne não-afim. A principal consequência deste fato é que alguns métodos importantes de precificação (por exemplo, a utilização da função característica atrelada à transformada rápida de Fourier), especialmente úteis para lidar com processos avançados, não podem ser utilizados devido à ausência de expressões analíticas que caracterizem adequadamente o processo.

Apesar de sua importância, modelos de volatilidade estocástica não-afim foram pouco explorados na literatura, justamente pela dificuldade prática mencionada anteriormente, que os torna menos atrativos. Mais detalhes e fundamentos sobre estes modelos podem ser encontrados nos trabalhos de [Papadopoulos \(2018\)](#) , [Papadopoulos e Lewis \(2018\)](#) , [Ignatieva, Rodrigues e Seeger \(2011\)](#) , [Langrené, Lee e Zhu \(2016\)](#) e [Yang \(2015\)](#).

3.2.2 Saltos de Lévy

A inclusão de saltos nos modelos pode ser feita através de processos de Lévy, que representam uma família mais geral de processos. Alguns processos mais simples, como o próprio movimento browniano, são na verdade casos particulares desta formulação mais geral. Este tópico é extremamente amplo e complexo do ponto de vista matemático, e por esse motivo, nosso esforço ficará concentrado em apresentar os conceitos fundamentais que nos permitam interpretar de maneira mais qualitativa as propriedades e os mecanismos destes processos.

Um processo de Lévy é totalmente caracterizado por um conjunto de elementos conhecidos como trio de Lévy, cujos três membros são:

- b : coeficiente de drift
- c : coeficiente de difusão
- m : medida de Lévy

Em particular, a medida de Lévy é o termo que constitui o comportamento dos saltos. A partir dela, é possível extrair informações a respeito da finitude (ou seja, finito ou infinito) de duas propriedades importantes, definidas a seguir:

- Nível de atividade: incidência dos saltos em intervalos compactos
- Nível de variação: variação dos saltos em intervalos compactos

Sendo assim, existem três tipos de processos possíveis em relação a este par de características. A seguir, apresentamos um exemplo de cada um deles:

- Poisson: atividade finita e variação finita
- Variance Gamma (VG): atividade infinita e variação finita
- Normal Inverse Gaussian (NIG): atividade infinita e variação infinita

Um aspecto importante dos saltos de Lévy é que, para preservar a convergência e a propriedade martingal do processo, é necessário adicionar um termo extra conhecido como compensador de saltos, baseado na função característica do processo:

$$\phi_J^Q = -\log \Phi_J^Q(-i) \quad (3.4)$$

Este termo é incorporado diretamente no *drift* e possui valor constante, embora seja calculado em função dos parâmetros que compõe o modelo. [Schoutens \(2004\)](#) disponibiliza um conteúdo extremamente amplo e detalhado sobre processos de Lévy.

3.2.3 Tempo Estocástico e Subordinação

Até o momento, todos os conceitos foram desenvolvidos e apresentados com a premissa básica de que a medida do tempo é absolutamente linear e bem comportada. Porém, existe uma abordagem alternativa que permite realizar uma quebra de paradigma, e transformar o próprio tempo num processo estocástico.

Na prática isso significa que, nesta abordagem, o tempo transcorrido estará associado a um fator aleatório que controla sua velocidade, e com isso, ele poderá passar de maneira mais rápida ou lenta em alguns momentos. Pensando no âmbito do mercado financeiro, seria a mesma coisa que forçar um ativo a entregar o retorno natural obtido ao longo de um ano em apenas um único dia, por exemplo.

A verdadeira utilidade desta abordagem é sua capacidade de representar a volatilidade estocástica e os saltos de Lévy de uma maneira mais simples e tratável.

A forma geral desta representação é exibida a seguir, onde D_t é uma variável aleatória não negativa que segue uma distribuição específica:

$$J_t(\mu, \sigma) = \mu D_t + \sigma W_{D_t} \quad (3.5)$$

A distribuição D_t , assim como os parâmetros μ e σ , são determinados a partir de fórmulas de relacionamento com as expressões do processo original. [Geman \(2009\)](#) apresenta mais detalhes e fundamentos matemáticos sobre este assunto.

3.3 O Modelo GARCH-SVNIG

Agora que os principais elementos avançados de processos estocásticos foram apresentados, é possível construir conceitualmente o modelo escolhido para realizar os estudos do projeto, que será designado pelo nome GARCH-SVNIG devido aos elementos que o compõe.

Em seu trabalho, [Yang \(2015\)](#) realiza uma análise extensa de vários modelos e, em particular, o modelo GARCH-SVNIG apresentou uma performance de calibração bastante satisfatória com uma quantidade razoável de parâmetros não observáveis.

O modelo GARCH-SVNIG possui dois elementos apresentados anteriormente que proporcionam, simultaneamente, aumento de flexibilidade e complexidade:

- Volatilidade estocástica com expoentes não-afim seguindo o modelo GARCH.
- Saltos de Lévy do tipo NIG presentes no processo do retorno do preço.

Vamos agora apresentar sua definição formal através das equações que regem sua dinâmica.

3.3.1 Equações do Modelo

O conjunto de equações que estruturam o modelo é apresentado a seguir, onde Y_t representa o log retorno acumulado do ativo objeto cujo preço ao longo do tempo é S_t . Note que é necessário ajustar a equação de Y_t incorporando do termo $\frac{1}{2}V_t$ no *drift* por conta da regra de Itô.

$$S_t = S_0 e^{Y_t}$$

$$Y_t = \log S_t - \log S_0$$

$$dY_t = \left(r_t - \frac{1}{2}V_t + \phi_J^Q \right) dt + \sqrt{V_t} dW_t^{S_t|Q} + dJ_t$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \zeta V_t(\rho dW_t^{S_t|Q} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{V_t|Q}) \quad (3.6)$$

$$J_t(\alpha, \beta, \delta) = \beta^2 \delta D_t + \delta W_{D_t}$$

$$\phi_J^Q = -\log \Phi_J^Q(-i)$$

$$\Phi_J^Q(u) = e^{-\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

No total, este modelo possui 8 parâmetros não observáveis, sendo 7 deles relacionados à característica de funcionamento $(\theta, \kappa, \zeta, \rho, \alpha, \beta, \delta)$ e 1 relacionado ao estado inicial da volatilidade estocástica (V_0) .

No caso particular dos saltos NIG, a distribuição D_t do movimento browniano subordinado é *Inverse Gaussian*.

3.3.2 Discretização do Modelo

Em particular, o modelo de volatilidade estocástica GARCH se enquadra na categoria de expoente não-afim, e conforme mencionado anteriormente, não é possível utilizar o métodos envolvendo a função característica para precificar opções. Para contornar

este problema, faremos uso da simulação de Monte Carlo, que será detalhado na próxima seção.

Papadopoulos e Lewis (2018) mostram que também é possível utilizar outras abordagens, como solução numérica da EDP, para lidar com modelos de volatilidade estocástica não-afim. Também vale mencionar que Carr et al. (2005) e Li, Wells e Yu (2008) apresentam o detalhamento de modelos que unem saltos de Lévy e volatilidade estocástica afim, que conforme mencionado, podem ser tratados pelo método da FFT, e com isso evitar a necessidade de utilizar o método de Monte Carlo.

Para que seja possível utilizá-lo, é necessário realizar o processo de discretização do modelo através de alguma técnica específica, como por exemplo, o método Euler-Maruyama. As equações principais do modelo são modificadas para representar uma evolução baseada num intervalo de fixo Δ , e a simulação da trajetória de cada estado real ou latente é obtida a partir de uma atualização sequencial e iterativa entre os termos dependentes.

As equações do modelo discretizado pelo método mencionado são apresentadas a seguir:

$$Y_{t+1} = Y_t + \left(r_t - \frac{1}{2}V_t + \phi_J^Q \right) \Delta + \sqrt{V_t \Delta} \epsilon_Y + J_{t+1}$$

$$V_{t+1} = V_t + \kappa(\theta - V_t)\Delta + \zeta V_t \sqrt{\Delta} (\rho \epsilon_Y + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_V)$$

$$J_t = \beta^2 \delta D + \delta \sqrt{D} \epsilon_J$$

$$D \sim IG(\Delta, b) \tag{3.7}$$

$$b = \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\phi_J^Q = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$$

$$\epsilon_Y \sim N(0, 1) \quad \epsilon_V \sim N(0, 1) \quad \epsilon_J \sim N(0, 1)$$

É importante ressaltar que o termo ϕ_J força uma restrição nos parâmetros α e β , pois os valores das expressões dentro da raiz quadrada não podem ser negativos:

$$-\alpha < \beta < \alpha \quad -\alpha - 1 < \beta < \alpha - 1$$

Esta restrição deve ser incorporada ao problema otimização que será resolvido na etapa de calibração.

Conforme mencionado, os saltos do tipo NIG podem ser simulados com facilidade graças à equivalência que existe entre o processo na forma natural e o processo na forma de relógio estocástico. Sendo assim, basta simular uma variável aleatória que segue uma distribuição IG (*Inverse Gaussian*) com os parâmetros indicados para reproduzir o desejado.

[Bergstrom \(2015\)](#) apresenta uma metodologia para simular a distribuição $IG(a, b)$. Devemos gerar um número aleatório z com distribuição normal $N(0, 1)$ e um número aleatório u com distribuição uniforme $U(0, 1)$, para em seguida definir os seguintes números auxiliares:

$$y = z^2, \quad x = \frac{a}{b} + \frac{y}{2b^2} - \frac{\sqrt{4aby + y^2}}{2b^2}, \quad k = \frac{a}{a + bx}, \quad w = \frac{a^2}{b^2x} \quad (3.8)$$

Com base nesses resultados, se $u \leq k$, então retornar o valor de x , caso contrário retornar o valor de w .

No total, cada passo discreto da simulação exige a geração de 5 números aleatórios $(\epsilon_Y, \epsilon_V, \epsilon_J, z, u)$, de tal maneira que dimensão do problema do ponto de vista matemático é $D = 5N$.

3.4 Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é uma técnica numérica utilizada para calcular o valor esperado de certas expressões matemáticas de forma simples e prática. Nesta seção, serão abordados os pontos de maior relevância sobre o método e sua utilização neste projeto. [Glasserman \(2004\)](#) desenvolve estes mesmos tópicos de maneira muito mais detalhada e rigorosa.

3.4.1 Princípios Fundamentais

O princípio fundamental do método consiste em executar um número elevado de simulações que representem o processo para qual se deseja calcular o valor esperado, de tal

maneira que, pela lei dos grandes números, o valor médio dos resultados das simulações convergirá para o valor correto da expressão. Naturalmente, quanto maior o número de simulações, maior será a precisão atingida.

Apesar do conceito da técnica já existir há um certo tempo, sua popularidade aumentou recentemente devido aos avanços da capacidade computacional. As vantagens e desvantagens da simulação de Monte Carlo dependem do problema para qual ela está sendo utilizada para resolver.

A principal vantagem é a capacidade de realizar a precificação de derivativos através de processos que não podem ser calculados ou simulados através de outros métodos, como diferenças finitas ou FFT (*Fast Fourier Transform*), devido a dificuldades de modelagem, formulação analítica ou convergência.

Entre as principais dificuldades, podemos citar a existência de:

- múltiplos ativos objetos com comportamento correlacionado nas regras de precificação do derivativo.
- *path dependency*, ou seja, características de dependência de trajetória do(s) ativo(s) objeto(s) nas regras de precificação do derivativo.
- estados latentes naturalmente não observáveis, representados através de equações diferenciais estocásticas adicionais.
- funções características com elementos que impossibilitam a expressão analítica.

No caso do modelo GARCH-SVNIG, o obstáculo dos outros métodos é justamente a função característica imprópria, devido à presença do expoente não-afim da volatilidade estocástica GARCH.

Por outro lado, a principal desvantagem da simulação de Monte Carlo está relacionada ao *tradeoff* existente entre precisão atingida e tempo de execução, que é diretamente influenciada pela capacidade computacional disponível. Além disso, pode existir uma certa dificuldade de estimar com precisão o intervalo de incerteza do resultado em certas condições.

3.4.2 Aceleração da Convergência

Existem diversas técnicas amplamente estudadas na literatura que podem ser utilizadas para acelerar consideravelmente a convergência da simulação de Monte Carlo. Serão apresentadas a seguir duas dessas técnicas, que foram utilizadas neste projeto:

- **Execução Paralela:** como cada realização de uma simulação é independente da outra, uma das maneiras de reduzir o tempo de execução é através da paralelização do método. Considerando um computador que possui uma arquitetura com n núcleos de processamento, é possível utilizar um núcleo para centralizar o código principal e disparar de maneira síncrona a execução paralela nos outros $n - 1$ núcleos restantes.

- **Sequências de Baixa Discrepância:** diferente das sequências tradicionais, que são computacionalmente aleatórias, estas sequências possuem a propriedade de preencher de maneira mais uniforme e distribuída o hipercubo da simulação. Existem diversos tipos de modelo de construção para este tipo de sequência, cada um com características específicas. Quando esta técnica é utilizada, a literatura utiliza o termo *Quasi Monte Carlo* (QMC) para diferenciar da execução com sequências tradicionais. Em particular, a sequência de Sobol é uma das mais utilizadas quando esta metodologia é aplicada, pois inúmeros estudos mostram que ele proporciona o melhor ganho de convergência.

É possível utilizar estas duas técnicas simultaneamente para acelerar ao máximo a convergência do resultado. Porém, é necessário um certo cuidado para evitar erros que podem desfigurar completamente a validade do método, como por exemplo, a divisão incorreta da sequência entre os núcleos.

3.5 Otimização com o Método CMA-ES

Nesta seção, vamos abordar as dificuldades do problema de otimização que a calibração do processo estocástico impõe, como superá-las através do método CMA-ES.

3.5.1 Problemas de Otimização Difíceis

Existem muitos problemas de otimização que são muito complicados do ponto de vista matemático, de tal maneira que os métodos clássicos baseados em cálculo diferencial não são aplicáveis. Adicionalmente, tentar encontrar a solução do problema através da força

bruta também não costuma ser uma opção viável, pois mesmo com uma alta capacidade computacional, a quantidade gigantesca de possibilidades e combinações a serem testadas faz com que o tempo total necessário para concluir a busca seja totalmente impraticável.

Conforme evidenciado por [Magnusson e Ådahl \(2018\)](#), o problema de calibração do processo estocástico abordado neste projeto se encaixa exatamente nesta situação, pois além de contar com uma função objetivo não diferenciável, o espaço de soluções é extremamente rugoso e multimodal, ou seja, repleto de mínimos e máximos locais.

Para contornar este tipo de dificuldade, diversos métodos alternativos foram propostos e testados extensivamente ao longo da história. O principal objetivo destes métodos abordar o problema de uma forma diferente, seguindo algum tipo de inspiração (heurística) ou técnica que consiga fornecer uma solução muito boa num tempo aceitável.

É muito comum que algoritmos de métodos heurísticos sejam especificamente desenhados para tentar resolver, de maneira muito eficiente, uma classe específica de problemas complicados. Porém, a descoberta de qual método será mais apropriado para resolver um determinado problema e suas variantes, muitas vezes só acontece através da tentativa e erro.

[Peel e Moon \(2020\)](#) disponibilizam inúmeros métodos de otimização de diferentes naturezas e seus respectivos código na linguagem Julia.

3.5.2 Princípios do Método CMA-ES

O método conhecido como CMA-ES (*Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy*) é considerado como estado da arte para resolver problemas da natureza mencionada anteriormente. O princípio básico do método consiste em gerar amostras aleatórias através de uma distribuição normal multivariável de dimensão igual à do problema.

Para que o algoritmo possa ser iniciado, alguns elementos e parâmetros de configuração devem ser informados:

- limite de tolerância: determina o critério de parada do algoritmo a partir do resultado produzido em cada iteração. Quando o valor do mínimo global ou de seu ínfimo é conhecido, é possível estabelecer uma tolerância máxima de desvio, de tal maneira que o algoritmo seja interrompido se a diferença absoluta entre o resultado atual e a referência do mínimo for menor que esta tolerância. Alternativamente, quando não há qualquer conhecimento sobre o mínimo global, pode-se construir um critério de parada que tenha como base a sensibilidade de alteração do valor do resultado, que será realmente muito pequena quando o algoritmo estiver próximo de convergir para o mínimo que está perseguindo.

- número máximo de iterações: determina em qual iteração o algoritmo deve ser interrompido caso o limite de tolerância não seja alcançado. Esta configuração é importante quando a execução do algoritmo está sujeito a limitações de tempo.
- tamanho de população: determina quantas amostras serão utilizadas em cada iteração para evoluir os mecanismos de busca. Quanto mais amostras, mais poder exploratório o algoritmo possuirá, porém, em contrapartida, maior será o custo computacional por iteração.
- ponto de partida: corresponde a um vetor que informa uma sugestão do usuário sobre o ponto inicial de busca do algoritmo. Dependendo da natureza do problema, a escolha de um ponto razoável é extremamente importante para que algoritmo consiga convergir para uma solução de boa qualidade. Este elemento é utilizado na primeira iteração como o vetor de médias inicial da distribuição normal.
- passo de busca: corresponde a um vetor que informa o tamanho do passo de busca associado a cada variável do problema, podendo ser configurada de acordo com o tamanho do espaço a ser explorado em cada uma das dimensões. Este elemento será multiplicado pela matriz identidade para produzir a matriz de covariância inicial da distribuição normal.

A cada iteração, uma nova população de amostras é produzida pela distribuição normal e a função objetivo é avaliada para cada uma delas. A partir dos resultados obtidos, aplica-se um critério de máxima verossimilhança para atualizar o vetor de médias e a matriz de covariâncias.

Com isso, o algoritmo segue explorando o espaço de busca até que o critério de parada seja atingido. Quando isso acontece, o vetor de médias é retornado como a solução encontrada. Como qualquer método de natureza heurística e evolucionária, não há qualquer garantia de que esta solução corresponda ao mínimo global do problema de otimização.

Adicionalmente, vale destacar que as restrições do problema de otimização podem ser incorporadas no fluxo iterativo de diferentes maneiras. Uma técnica muito popular e eficiente (que também pode ser utilizada em outros métodos heurísticos) é a estratégia da punição, na qual o valor do objetivo é configurado para sofrer um grande aumento de valor caso algumas das restrições seja violada. Dessa forma, sempre que o algoritmo esbarrar em alguma restrição, ele será naturalmente desviado para outra direção de busca.

[Hansen \(2016\)](#) apresenta mais detalhes sobre o método CMA-ES.

3.6 Consolidação da Metodologia

Todos os conceitos teóricos importantes para a compreensão do projeto foram apresentados ao longo deste capítulo e do anterior. Com isso, para consolidar de maneira mais completa e detalhada a metodologia proposta, será apresentado um fluxo de etapas similar a um pseudo-algoritmo. Por razões de confidencialidade comercial, o script original não será publicado.

O fluxo principal foi dividido em 4 etapas, apresentadas nas subseções a seguir.

3.6.1 Etapa 1: Preparação

A etapa de preparação corresponde aos procedimentos iniciais que precisam ser realizados para possibilitar a execução das etapas seguintes:

- Definir o ativo objeto que será explorado pela metodologia.
- Definir os parâmetros da simulação de Monte-Carlo paralelizada:
 - total de núcleos utilizados (W).
 - total de simulações (M).
 - total de passos discretos (N).
 - dimensão por passo (no caso, $d = 5$).
- Calcular parâmetros adicionais da simulação (em função dos anteriores):
 - simulações por núcleo.
 - dimensão total da simulação ($D = d \cdot N$).
- Construir as sequências de Sobol em função de M e D .
- Definir os parâmetros do algoritmo de otimização CMA-ES:
 - número máximo de iterações
 - tolerância do erro
 - tamanho da população
 - variância inicial de busca

- Definir o limite mínimo e o limite máximo dos parâmetros $(\theta, \kappa, \zeta, \rho, \alpha, \beta, \delta)$ e do estado inicial da volatilidade estocástica (V_0) .
- Definir o mecanismo de utilização de pesos que será empregado para decidir a relevância de cada ponto da calibração.
- Definir lista de pontos candidatos que serão testados pelo algoritmo para definir qual será o ponto de largada.
- Definir os pontos da grade $K \times T$ que serão utilizados para efetuar a generalização da superfície após a calibração.

3.6.2 Etapa 2: Extração

A etapa de extração consiste buscar as informações (em função do ativo objeto escolhido) de entrada do modelo de alguma fonte de dados, podendo ser uma fotografia de um instante do mercado, ou então os valores oficiais de fechamento do dia:

- Executar a extração das seguintes informações:
 - estrutura a termo da taxa de juros
 - estrutura a termo da taxa de dividendos (quando aplicável)
 - preço *spot/forward*.
 - lista de opções negociáveis e seus respectivos preços
- Aplicar algum critério (por exemplo, nível de liquidez ou tamanho do *spread*) para selecionar quais opções serão analisadas e quais serão descartadas.
- Calcular volatilidade implícita das opções selecionadas em função das informações extraídas do mercado (taxa de juros, dividendos, preço *spot/forward*) e do cadastro estático (preço de exercício e vencimento).

3.6.3 Etapa 3: Calibração

A etapa de calibração tem por objetivo encontrar o conjunto de parâmetros que minimiza o erro entre os preços (e por consequência, das volatilidades implícitas) do

mercado (obtidos na etapa anterior) e aqueles obtidos pelo processo estocástico que os parâmetros modelam. Portanto, como já foi mencionado, trata-se de um problema de otimização:

- Enquanto o critério de parada do algoritmo não for atingido, executar os seguintes passos em cada iteração:

- Para cada membro da população de parâmetros, utilizar as equações 3.7 do processo discretizado e a simulação de Monte Carlo para calcular o preço da opção na medida do processo estocástico. Em seguida, calcular as volatilidade implícitas e comparar com os valores do mercado. Em função da diferenças obtidas, determinar o *fitness* do membro da população.

- Utilizar os indicadores de *fitness* para atualizar o vetor de médias e a matriz de covariância do método CMA-ES.

3.6.4 Etapa 4: Generalização

Por fim, a etapa de generalização utiliza o processo estocástico com parâmetros calibrados para gerar todos os pontos da nova superfície:

- Para cada ponto da grade ($K \times T$), utilizar as equações 3.7 e a simulação de Monte Carlo para calcular o preço da opção na nova medida do processo estocástico naquele ponto.

- calcular volatilidade implícita do modelo Black-Scholes para todos os preços obtidos dessa maneira.

- Retornar os valores obtidos e utilizá-los para construir tabelas e gráficos de resultado.

4 Validação e Infraestrutura da Execução

Na capítulo anterior, consolidamos o modelo GARCH-SVNIG e as ferramentas necessárias para realizar sua simulação e calibração. Neste capítulo, vamos apresentar os dados e procedimentos de testes que foram empregados para avaliar a performance do modelo.

4.1 Validações Preliminares

Nesta seção, serão mencionadas algumas validações preliminares importantes que foram realizadas antes dos testes principais. O principal objetivo destas validações foi garantir que os códigos de programação estavam de fato produzindo resultados consistentes e de boa qualidade.

4.1.1 Amostragem Individual Exploratória

Nesta etapa de validação, foram geradas algumas amostras de simulação do modelo, com diferentes configurações de parâmetro. Para cada simulação, foi utilizada a mesma semente geradora, e as trajetórias dos estados observáveis e latentes foram exibidas em gráficos.

Com isso, foi possível verificar que os elementos avançados do processo estocástico estavam se manifestando de acordo com o esperado, e adicionalmente, analisar a sensibilidade de cada parâmetro do modelo para estabelecer limites mínimos e máximos que fizessem sentido do ponto de vista prático.

4.1.2 Verificação da Medida Martingal

Nesta etapa de validação, foram geradas várias simulações do modelo para algumas configurações de parâmetro, com o objetivo de verificar o valor esperado do preço final. De acordo com a teoria, para que o processo estocástico esteja devidamente configurado na medida martingal, é necessário que o valor esperado do preço final, descontado exponencialmente pelo termo do *drift* (neste caso, pela taxa de juros livre de risco), seja igual ou extremamente próximo do valor de largada.

Após a realização dos testes, foi constatado que este comportamento se concretizou, indicando que o processo estocástico estava adequado para realizar a precificação de derivativos na medida neutra ao risco.

4.1.3 Convergência da Simulação de Monte Carlo

Nesta etapa de validação, foi realizada uma análise rigorosa da simulação de Monte Carlo nas configurações de sequência aleatória tradicional e sequência de baixa discrepância de Sobol para avaliar suas respectivas performances.

Após a escolha de uma configuração de parâmetros do modelo e características de uma opção, foram realizadas 10.000.000 simulações utilizando 1.000 passos discretos, para encontrar um valor extremamente preciso para o preço real e para a volatilidade implícita.

Tomando como referência este gabarito, as duas metodologias foram testadas para diferentes combinações de quantidade de simulações e passos discretos. No caso da sequência de Sobol, para cada realização, o ponto de partida era amplamente espaçado para garantir que os números utilizados que pudessem apresentar resultados diferentes.

Ficou constatado que, conforme esperado, a sequência de Sobol apresenta uma performance de convergência superior para número fixo de simulações, desde que a dimensão do problema seja muito grande. Este resultado está alinhado com as constatações descritas por [Acworth, Broadie e Glasserman \(1998\)](#) e [Silva e Barbe \(2005\)](#).

Para balizar esta condição, o valor dimensão do problema foi fixado em 100. Considerando que, para cada passo discreto o modelo GARCH-SVNIG consome 5 dimensões, o total de passos foi consequentemente fixado em 20. Apesar de ser um número aparentemente baixo e insuficiente, ficou comprovado neste mesmo teste que a quantidade de passos discretos é muito menos relevante do que a quantidade de simulações para o convergência do valor correto, de tal maneira que a qualidade do resultado foi devidamente preservada.

Por fim, para garantir um valor de erro aceitável, a quantidade de simulações foi fixada em 70.000.

4.1.4 Eficiência do Método de Otimização CMA-ES

Nesta etapa de validação, uma configuração de parâmetros foi escolhida para gerar uma superfície de volatilidade sintética. Neste caso, pelo fato de sabermos exatamente o valor dos parâmetros que foram utilizados, conhecemos o mínimo global do problema de otimização.

Com isso, o método CMA-ES foi testado e comparado com diversos outros métodos

de otimização, como algoritmos genéticos, evolução diferencial, arrefecimento simulado, enxame de partículas, método ameba (Nelder-Mead), método MADS (*Mesh Adaptive Direct Search*), Gauss-Newton com aproximação das derivadas parciais, e modelos *Surrogates* com algoritmos de Machine Learning.

Após a realização do teste, ficou constatado que nenhum dos métodos conseguiu encontrar a resposta exata do mínimo global, porém, o método CMA-ES apresentou a melhor performance de todas, apresentando simultaneamente o menor erro no menor tempo, independente do ponto inicial escolhido.

4.1.5 Velocidade de Execução do Script

Durante a simulação de Monte Carlo, os estados observáveis e latentes do modelo são atualizados sequencialmente para construir as trajetórias randômicas. Este processo computacional é acionado uma quantidade gigantesca de vezes.

Para exemplificação, considere uma situação na qual desejamos calibrar o modelo a partir de 10 pontos amostrais do mercado. Com as configurações escolhidas, são necessárias 70.000 simulações para precificar um único ponto da solução candidata, de tal maneira que, para avaliar os 10 pontos e calcular o *fitness*, são necessárias $10 \times 70.000 = 700.000$ simulações. Porém, isso corresponde a apenas uma única solução candidata. Para uma população de tamanho 50, teríamos $50 \times 700.000 = 35.000.000$ simulações. Porém, isso corresponde apenas a uma única iteração do método. Para a execução de 250 de iterações do algoritmo, teríamos $250 \times 35.000.000 = 8.750.000.000$ simulações.

Por esse motivo, é extremamente importante garantir que o código do *script* seja executado numa linguagem de programação de alta performance, e que sua construção e sintaxe estejam escritas de forma mais eficiente possível.

Para este projeto, a linguagem Julia foi escolhida para realizar o processamento da etapa de calibração, pois mesmo sendo uma linguagem de alto nível, apresenta uma altíssima velocidade de execução devido ao seu conceito de compilação JIT (*Just in Time*), conseguindo alcançar muitas vezes a performance de linguagens como C/C++ e Fortran.

O trecho do código responsável pela etapa de simulação foi submetido a diversos testes, tomando como base as recomendações disponíveis em [Julia-Tips](#) (), de tal maneira que o código final pudesse apresentar o menor tempo de execução. Entre as principais melhorias que puderem ser ajustadas ou incorporados ao código, podemos citar:

- declaração de variáveis globais imutáveis como constantes.
- declaração dos tipos de variáveis nos *inputs* e *outputs* das funções.

- encapsulamento de blocos iterativos em funções especializadas.
- acessar *arrays* na ordem da memória (no caso, colunas).
- pré-alocação de *arrays* com valores *dummy*, de acordo com as dimensões finais.
- utilização do comando *@inbounds* para evitar verificações internas em *arrays*.
- *loops* diretos apresentaram performance melhor que cálculos vetorizados.

A máquina utilizada para execução do código possui sistema operacional Windows 10, processador Intel(R) Core(TM) i7-7700K CPU @ 4.20GHz e 16Gb de memória RAM instalada. Este processador dispõe de um total de 8 núcleos, de tal maneira que, na execução paralela, 1 deles fica responsável pela consolidação central e os outros 7 podem ser utilizados no processamento distribuído.

Para o total de 70.000 simulações com 20 passos discretos, divididas igualmente entre os núcleos (ou seja 10.000 para cada um), o tempo de execução necessário para calcular o preço de um vértice ficou em torno de 7 milissegundos. Retornando ao exemplo anterior, o tempo de execução total do algoritmo fica em torno de $8.750.000.000 \div 70.000 \times 0,007 = 875$ segundos, equivalente 14 minutos e 35 segundos.

Porém, resta ainda uma tática especial para reduzir ainda mais o custo computacional. Como a sequência de Sobol é puramente determinística, o mesmo lote de números aleatórios será empregado no cálculo de cada vértice. Para vértices de um mesmo prazo, as trajetórias das simulações geradas são todas iguais, e a única parte exclusiva é o cálculo do *payoff* final, que varia de acordo com o *strike*. Com isso, o grande bloco de simulações pode ser realizado apenas uma vez por prazo disponível, reduzindo drasticamente o tempo total de processamento.

4.2 Configurações de Execução

Nesta seção, vamos apresentar as configurações efetivamente utilizadas durante o processo de calibração, algumas delas já mencionadas na seção anterior:

- Configurações da simulação de Monte Carlo para o total de passos discretos (N), total de simulações (M), total de núcleos para execução paralela (W) e deslocamento inicial na sequência de Sobol (L):

$$N = 20 \quad M = 70.000 \quad W = 7 \quad L = 1.000.000$$

- Configurações do método de otimização CMA-ES para o limite de tolerância (ϵ), número máximo de iterações (I), tamanho da população (λ) e variância inicial (σ), igual para todas as variáveis:

$$\epsilon = 0,001 \quad I = 250 \quad \lambda = 50 \quad \sigma = 0,3$$

- Valores mínimos e máximos dos parâmetros para limitar o intervalo de busca do algoritmo e para preservar a consistência física do modelo (Tabela 2):

| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
|--------------|-------|----------|----------|---------|--------|----------|---------|----------|
| Valor Mínimo | 0,00 | 0,00 | 1,00 | 0,05 | -1,00 | 0,05 | -200,00 | 0,05 |
| Valor Máximo | 2,00 | 2,00 | 100,00 | 50,00 | 1,00 | 200,00 | 200,00 | 10,00 |

Tabela 2 – Limites do intervalo de busca dos parâmetros

- Para determinar o ponto de partida μ , é realizada uma bateria de cálculos com $2^8 = 256$ pontos, que correspondem ao produto cartesiano dos parâmetros nas faixas de 35% e 65% do intervalo de busca. O ponto que apresentar o melhor resultado da função objetivo fica definido como ponto de partida.

4.3 Amostras Utilizadas

Nesta seção, vamos apresentar a origem dos dados utilizados nos testes, que estão divididos em duas classes: artificiais e reais. Além disso, serão descritas as metodologias de teste adotadas para cada um deles.

4.3.1 Dados Artificiais

Os dados artificiais foram construídos com o objetivo de representar de maneira simples e prática alguns dos formatos de *smiles* de volatilidade já observados no mercado. Para isso, foi utilizada uma equação polinomial de segundo grau $P_2x^2 + P_1x + P_0$ para construir as curvas.

No total, foram construídas 5 curvas com diferentes percepções de risco a partir da seleção dos coeficientes P_2 , P_1 e P_0 , designadas pelas letras do alfabeto A, B, C, D e E, conforme as tabelas a seguir:

- tipo A: corresponde ao formato de risco simétrico, no qual mercado vislumbra simultaneamente cenários de queda e de alta de maneira equilibrada.
- tipo B: corresponde ao formato de risco de queda com concavidade positiva. Neste caso, o prêmio de risco é mais suave para a região superior a *moneyness* de 100%, crescendo de forma acentuada na medida em que *moneyness* diminui.
- tipo C: corresponde ao formato de risco de queda com concavidade negativa. Neste caso, o prêmio de risco já apresenta um crescimento forte para a região superior a *moneyness* de 100%, sendo suavizado lentamente na medida em que *moneyness* diminui.
- tipo D: equivalente ao tipo B, porém, considerando um cenário de alta.
- tipo E: equivalente ao tipo C, porém, considerando um cenário de alta.

Na prática, os formatos mais comuns são o A e B. O formato D costuma surgir sempre que existe algum ativo objeto que apresenta correlação muito negativa com outro que se enquadre no cenário B. Um exemplo desta situação no mercado brasileiro seria justamente o índice Ibovespa (formato B) e o Dólar comercial (formato D).

A Tabela 3 exibe os coeficientes polinomiais de cada formato de curva, enquanto a Tabela 4 exibe os respectivos valores de volatilidade implícita para diferentes valores de *moneyness*:

| P_N | A | B | C | D | E |
|-------|---------|---------|----------|---------|----------|
| 2 | 0,02500 | 0,00625 | -0,00625 | 0,00625 | -0,00625 |
| 1 | -5,0 | -1,5 | 1,0 | -1,0 | 1,5 |
| 0 | 270,0 | 110,0 | -10,0 | 60,0 | -60,0 |

Tabela 3 – Coeficientes das equações polinomiais para cada formato de curva

| <i>Moneyiness</i> | A | B | C | D | E |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 80 | 30,00000 | 30,00000 | 30,00000 | 20,00000 | 20,00000 |
| 85 | 25,62500 | 27,65625 | 29,84375 | 20,15625 | 22,34375 |
| 90 | 22,50000 | 25,62500 | 29,37500 | 20,62500 | 24,37500 |
| 95 | 20,62500 | 23,90625 | 28,59375 | 21,40625 | 26,09375 |
| 100 | 20,00000 | 22,50000 | 27,50000 | 22,50000 | 27,50000 |
| 105 | 20,62500 | 21,40625 | 26,09375 | 23,90625 | 28,59375 |
| 110 | 22,50000 | 20,62500 | 24,37500 | 25,62500 | 29,37500 |
| 115 | 25,62500 | 20,15625 | 22,34375 | 27,65625 | 29,84375 |
| 120 | 30,00000 | 20,00000 | 20,00000 | 30,00000 | 30,00000 |

Tabela 4 – Valores artificiais para cada formato de curva

A Figura 1 exibe o gráfico dos formatos obtidos:

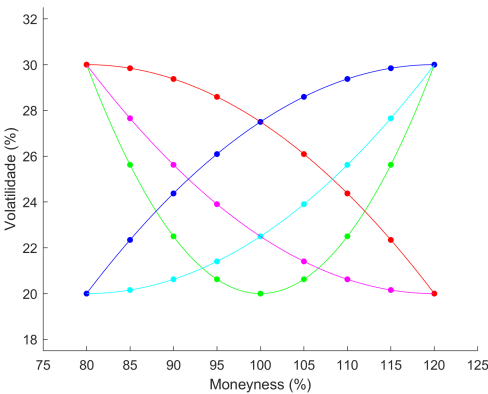


Figura 1 – Formato das Curvas Artificiais

Além disso, para cada formato de curva, consideramos também 3 horizontes de tempo no qual eles poderiam se manifestar, conforme a Tabela 5 a seguir:

| Horizonte | Dias | Meses | Ano |
|-----------|------|-------|-----|
| 1 | 18 | 0,6 | 5% |
| 2 | 90 | 3 | 25% |
| 3 | 180 | 6 | 50% |

Tabela 5 – Horizontes escolhidos

Com isso, consolidamos um total de 15 cenários de teste. Cada um deles passou por um processo de calibração individual, para que seja possível analisar a capacidade do modelo de se ajustar aos pontos amostrais, e qual seria o respectivo formato da superfície generalizada a partir da configuração de parâmetros obtida.

4.3.2 Dados Reais

Ao contrário dos dados artificiais, os dados reais representam valores que foram efetivamente praticados e registrados no mercado. A quantidade e variedade de dados históricos disponíveis é imensa, e por esse motivo, é necessário fazer uma escolha criteriosa considerando vários aspectos, como a data de observação, o ativo objeto e o nível de liquidez das opções em diferentes vértices.

Seguindo o principal *benchmark* para testes adotado na literatura, utilizamos os dados de opções vanilla sobre o índice S&P 500, que representa um dos mercados mais ativos e líquidos do mundo, com superfícies de volatilidade muito completas e confiáveis.

Os dados foram obtidos na página web de [Poulsen](#) (), que disponibiliza os valores de fechamento diário para um longo período de tempo, que vai desde 29/01/2004 até 31/07/2009. Em particular, selecionamos para o testes o dia 31/07/2009, cujo preço *spot* final do índice foi de 987,45 pontos.

A Tabela 6 apresenta, para a data em questão, as volatilidades implícitas para 14 diferentes prazos em meses (linhas) e *moneyness* em % (colunas), enquanto a Figura 2 exhibe a mesma informação na forma de curvas de nível para cada um dos prazos:

| * | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 49,5 | 43,8 | 38,3 | 33,7 | 29,7 | 26,2 | 23,2 | 20,5 | 18,4 | 16,6 | 15,3 | 14,3 | 13,7 |
| 2 | 43,2 | 39,2 | 35,5 | 32,1 | 29,2 | 26,5 | 24,1 | 22,0 | 20,1 | 18,6 | 17,3 | 16,1 | 15,3 |
| 3 | 40,3 | 37,2 | 34,3 | 31,7 | 29,3 | 27,0 | 24,9 | 23,0 | 21,4 | 20,0 | 18,7 | 17,6 | 16,8 |
| 6 | 36,8 | 34,7 | 32,7 | 30,8 | 28,9 | 27,2 | 25,5 | 24,0 | 22,6 | 21,4 | 20,3 | 19,3 | 18,5 |
| 9 | 35,2 | 33,5 | 31,8 | 30,2 | 28,6 | 27,1 | 25,7 | 24,3 | 23,1 | 22,0 | 20,9 | 19,9 | 19,1 |
| 12 | 34,2 | 32,7 | 31,2 | 29,8 | 28,4 | 27,1 | 25,8 | 24,6 | 23,5 | 22,5 | 21,5 | 20,6 | 19,8 |
| 15 | 33,5 | 32,1 | 30,8 | 29,6 | 28,3 | 27,1 | 25,9 | 24,8 | 23,8 | 22,8 | 21,9 | 21,0 | 20,3 |
| 18 | 33,0 | 31,8 | 30,6 | 29,4 | 28,3 | 27,1 | 26,0 | 25,0 | 24,0 | 23,1 | 22,3 | 21,5 | 20,7 |
| 21 | 32,7 | 31,6 | 30,4 | 29,3 | 28,3 | 27,2 | 26,2 | 25,2 | 24,3 | 23,5 | 22,7 | 21,9 | 21,2 |
| 24 | 32,5 | 31,4 | 30,3 | 29,3 | 28,3 | 27,3 | 26,3 | 25,4 | 24,6 | 23,8 | 23,0 | 22,3 | 21,6 |
| 27 | 32,4 | 31,3 | 30,3 | 29,3 | 28,3 | 27,4 | 26,5 | 25,6 | 24,8 | 24,0 | 23,3 | 22,6 | 22,0 |
| 30 | 32,2 | 31,2 | 30,3 | 29,3 | 28,4 | 27,5 | 26,7 | 25,9 | 25,1 | 24,4 | 23,7 | 23,0 | 22,4 |
| 33 | 32,1 | 31,2 | 30,3 | 29,4 | 28,5 | 27,7 | 26,9 | 26,2 | 25,4 | 24,8 | 24,1 | 23,5 | 22,9 |
| 36 | 32,0 | 31,1 | 30,3 | 29,4 | 28,6 | 27,9 | 27,1 | 26,4 | 25,7 | 25,1 | 24,5 | 23,9 | 23,3 |

Tabela 6 – Dados Reais

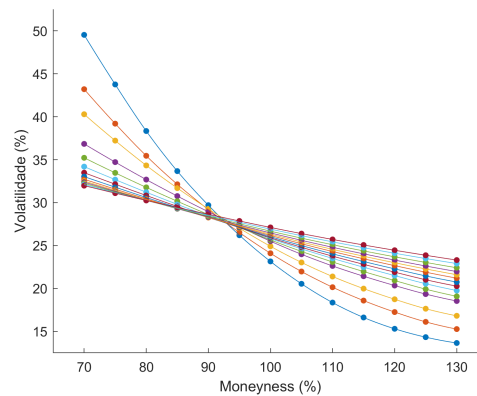


Figura 2 – Formato das Curvas Reais

Adicionalmente, exibimos também a Tabela 7 contendo a estrutura a termo da taxa de juros (*zero coupon*) e da taxa de retorno de dividendos contínua (*dividend yield*) para os mesmo horizontes, ambas anualizadas.

A taxa efetiva usada na precificação é a diferença entre estas taxas, apresentada na coluna R, enquanto o prazo corresponde ao tempo em anos, na coluna T:

| Prazo | Data | T | ZC | DY | R |
|-------|------------|------|------|------|-------|
| 1M | 31/08/2009 | 0,08 | 0,27 | 3,19 | -2,92 |
| 2M | 30/09/2009 | 0,17 | 0,32 | 2,79 | -2,47 |
| 3M | 02/11/2009 | 0,26 | 0,47 | 2,36 | -1,90 |
| 6M | 01/02/2010 | 0,51 | 0,50 | 2,38 | -1,89 |
| 9M | 30/04/2010 | 0,75 | 0,62 | 2,41 | -1,80 |
| 12M | 02/08/2010 | 1,01 | 0,76 | 2,39 | -1,63 |
| 15M | 01/11/2010 | 1,25 | 0,93 | 2,39 | -1,46 |
| 18M | 31/01/2011 | 1,50 | 1,11 | 2,39 | -1,29 |
| 21M | 02/05/2011 | 1,75 | 1,29 | 2,39 | -1,11 |
| 24M | 01/08/2011 | 2,00 | 1,47 | 2,39 | -0,93 |
| 27M | 31/10/2011 | 2,25 | 1,64 | 2,38 | -0,75 |
| 30M | 31/01/2012 | 2,50 | 1,81 | 2,40 | -0,59 |
| 33M | 30/04/2012 | 2,75 | 1,96 | 2,42 | -0,46 |
| 36M | 31/07/2012 | 3,00 | 2,11 | 2,44 | -0,34 |

Tabela 7 – Estrutura a termo da taxa de juros e dividendos

Para os dados reais, os testes foram realizados da seguinte maneira:

- 14 calibrações individuais, uma para cada prazo isolado, seguindo o mesma ideia proposta para os dados artificiais.

- 2 calibrações conjuntas, na qual todos os prazos participaram do processo ao mesmo tempo, totalizando 182 pontos de volatilidade. A primeira configuração não utiliza qualquer tipo de peso, enquanto a segunda utiliza pesos priorizando prazos em ordem crescente e *moneyness* em ordem crescente de distância em relação ao centro (100%).

Vale destacar que, em função da quantidade de pontos, a calibração conjunta é bem mais demorada em termos de execução computacional.

5 Análise dos Resultados Obtidos

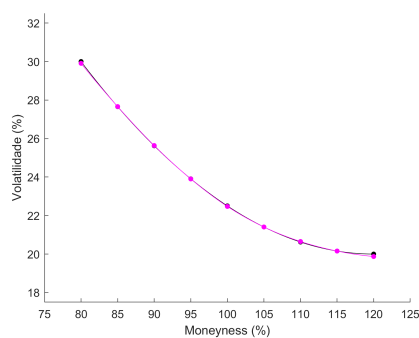
Neste capítulo, será realizada uma análise detalhada dos resultados obtidos nos testes com dados artificiais e reais, respectivamente nesta ordem.

5.1 Dados Artificiais

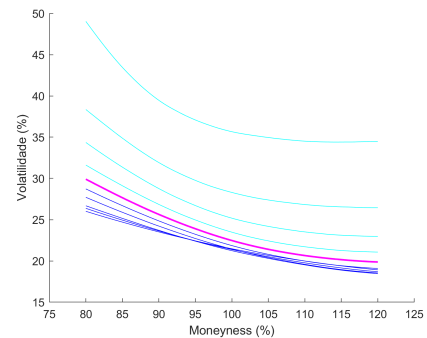
Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos na calibração dos dados artificiais e realizamos uma análise dos mesmos.

5.1.1 Apresentação

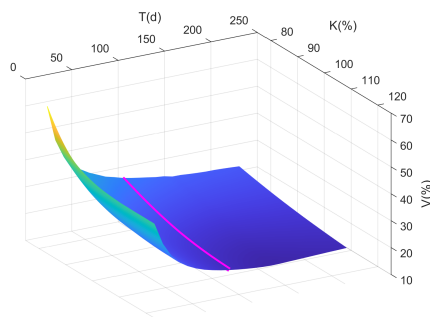
Para cada cenário proposto, foram construídos os gráficos que exibidos na Figura 3:



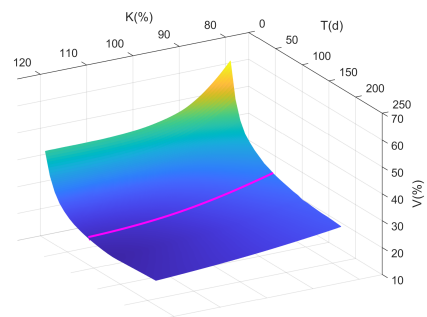
(a) Resultado da Calibração



(b) Curvas de Nível



(c) Superfície - Visão 240°



(d) Superfície - Visão 330°

Figura 3 – Exemplo dos resultados obtidos com os dados artificiais

Estes gráficos tem o objetivo de apresentar:

- (a) uma comparação entre os valores obtidos com a calibração (cor magenta) e os valores originais (cor preta).
- (b): as curvas de nível da superfície generalizada, exibidas ao longo do eixo de *moneyness* (ou seja, cada corte está associado a um prazo diferente).
- (c),(d): Visualização da superfície generalizada em três dimensões.

O exemplo apresentado correspondente ao resultado do cenário B para um prazo de 90 dias. No apêndice, estão disponíveis as figuras de cada um dos 15 cenários propostos, assim como tabelas mostrando os valores numéricos dos parâmetros obtidos.

5.1.2 Análise

Para os dados artificiais, percebemos que cada uma das configurações se comportou de maneira diferente. A Tabela 8 apresenta um resumo consolidado, onde (+) representa um resultado bom, (o) representa um resultado médio e (-) representa um resultado insatisfatório, segundo com um critério visual estabelecido pelo autor:

| Horizonte | A | B | C | D | E |
|-----------|---|---|---|---|---|
| 1 | o | + | - | - | o |
| 2 | + | + | + | + | + |
| 3 | o | + | o | + | + |

Tabela 8 – Avaliação dos resultados obtidos com os dados artificiais

Em termos de formatos, o tipo B apresentou o melhor resultado geral, e o tipo C o pior. Sob outro ponto de vista, em termos de horizonte, o prazo 2 apresentou o melhor resultado geral, e o prazo 1 o pior.

De qualquer forma, o fenômeno da multimodalidade fica muito evidente, pois observamos uma variedade muito grande de formas de superfície generalizadas e suas respectivas curvas de nível para curvas de volatilidade relativamente parecidas. Isso nos

mostra que a ausência de informação de outros prazos pode produzir, para um certo limite de tolerância, diferentes resultados que satisfazem o problema de otimização.

É importante também destacar o fenômeno de colapso da volatilidade, observado em algumas configurações, no qual o valor da volatilidade implícita sofre uma queda rápida em direção ao valor zero.

5.2 Dados Reais

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos na calibração dos dados reais e realizamos uma análise dos mesmos. As tabelas e figuras mais relevantes são apresentadas ao longo das próximas páginas, e as restantes estão disponíveis no apêndice.

5.2.1 Apresentação

As Tabelas 9 e 10 apresentam os parâmetros obtidos nas calibrações:

| Prazo | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
|-------|--------|----------|----------|---------|---------|----------|-----------|----------|
| 1M | 0,1516 | 0,0823 | 41,5367 | 0,4612 | 0,0885 | 116,7625 | -103,1085 | 0,6216 |
| 2M | 0,1556 | 0,0973 | 73,6335 | 1,9170 | 0,0394 | 105,4536 | -96,2823 | 0,4174 |
| 3M | 0,0622 | 0,1040 | 70,1408 | 0,1853 | 0,3674 | 133,5107 | -126,9119 | 0,2594 |
| 6M | 0,7254 | 0,0850 | 93,9592 | 1,1458 | 0,4562 | 40,5332 | -36,8466 | 0,2364 |
| 9M | 0,7071 | 0,0903 | 59,2233 | 0,4104 | 0,9916 | 94,0057 | -91,2059 | 0,1180 |
| 12M | 0,1088 | 0,0080 | 52,6259 | 3,6583 | 0,9878 | 126,8423 | -123,0150 | 0,1507 |
| 15M | 0,3296 | 0,0451 | 44,6252 | 2,0847 | 0,6024 | 80,7799 | -77,7935 | 0,1326 |
| 18M | 1,3070 | 0,0400 | 96,4563 | 0,7805 | -0,7069 | 44,3539 | -42,5617 | 0,1063 |
| 21M | 0,0098 | 0,1327 | 24,0120 | 0,2079 | 0,3864 | 19,5317 | -18,6276 | 0,0659 |
| 24M | 1,9695 | 0,0224 | 93,1101 | 1,3792 | -0,8634 | 16,5787 | -15,0919 | 0,1405 |
| 27M | 0,1048 | 0,0668 | 19,1977 | 0,2389 | 0,6064 | 46,3184 | -44,8875 | 0,0821 |
| 30M | 0,0557 | 0,0222 | 19,8611 | 3,7882 | 0,9767 | 142,2075 | -53,7619 | 4,6614 |
| 33M | 1,8216 | 0,0278 | 74,5289 | 2,8374 | -0,5166 | 23,4744 | -22,2444 | 0,0995 |
| 36M | 0,3626 | 0,0249 | 88,1115 | 0,9921 | -0,5946 | 107,8984 | -106,6187 | 0,0503 |

Tabela 9 – Parâmetros obtidos nas calibrações individuais

| Peso | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
|------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|-----------|----------|
| Não | 0,0008 | 0,0277 | 10,3454 | 3,0462 | 0,4094 | 28,3656 | -19,9078 | 0,5970 |
| Sim | 0,0006 | 0,0189 | 8,8196 | 3,4378 | 0,5523 | 162,0556 | -145,4315 | 0,8021 |

Tabela 10 – Parâmetros obtidos nas calibrações conjuntas

As Tabelas 11 e 12 apresentam os resultados das calibrações conjuntas sem peso e com peso, respectivamente, exibindo as volatilidades implícitas nas mesmas configurações da Tabela 6:

| * | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 57,4 | 49,4 | 42,5 | 36,5 | 31,1 | 25,9 | 20,8 | 17,0 | 16,1 | 16,8 | 17,1 | 18,2 | 21,8 |
| 2 | 47,9 | 41,7 | 36,5 | 32,2 | 28,5 | 25,2 | 22,2 | 19,7 | 17,8 | 16,9 | 16,6 | 16,1 | 16,0 |
| 3 | 43,6 | 38,4 | 34,1 | 30,6 | 27,7 | 25,2 | 23,1 | 21,2 | 19,6 | 18,4 | 17,5 | 17,0 | 16,7 |
| 6 | 38,0 | 34,3 | 31,3 | 28,9 | 27,0 | 25,4 | 24,1 | 22,9 | 21,9 | 21,1 | 20,3 | 19,6 | 19,0 |
| 9 | 36,0 | 32,9 | 30,5 | 28,6 | 27,0 | 25,7 | 24,7 | 23,8 | 23,0 | 22,3 | 21,7 | 21,1 | 20,6 |
| 12 | 34,9 | 32,2 | 30,2 | 28,5 | 27,2 | 26,1 | 25,2 | 24,4 | 23,7 | 23,1 | 22,6 | 22,1 | 21,7 |
| 15 | 34,2 | 31,9 | 30,1 | 28,6 | 27,4 | 26,4 | 25,6 | 24,9 | 24,3 | 23,8 | 23,3 | 22,9 | 22,4 |
| 18 | 33,6 | 31,6 | 29,9 | 28,6 | 27,5 | 26,6 | 25,9 | 25,2 | 24,7 | 24,2 | 23,8 | 23,4 | 23,0 |
| 21 | 33,4 | 31,5 | 29,9 | 28,7 | 27,7 | 26,8 | 26,1 | 25,5 | 25,0 | 24,5 | 24,1 | 23,8 | 23,4 |
| 24 | 33,2 | 31,4 | 30,0 | 28,8 | 27,9 | 27,1 | 26,4 | 25,9 | 25,4 | 24,9 | 24,5 | 24,2 | 23,8 |
| 27 | 33,0 | 31,4 | 30,0 | 28,9 | 28,0 | 27,3 | 26,6 | 26,1 | 25,6 | 25,2 | 24,8 | 24,4 | 24,1 |
| 30 | 32,8 | 31,2 | 30,0 | 28,9 | 28,1 | 27,4 | 26,8 | 26,2 | 25,8 | 25,4 | 25,0 | 24,7 | 24,4 |
| 33 | 32,7 | 31,2 | 30,0 | 29,0 | 28,2 | 27,5 | 26,9 | 26,4 | 25,9 | 25,6 | 25,2 | 24,9 | 24,6 |
| 36 | 32,5 | 31,1 | 29,9 | 29,0 | 28,2 | 27,6 | 27,0 | 26,5 | 26,1 | 25,7 | 25,3 | 25,0 | 24,8 |

Tabela 11 – Valores obtidos na calibração conjunta sem peso

| * | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 54,7 | 46,1 | 39,1 | 33,8 | 29,7 | 26,1 | 22,7 | 19,2 | 15,7 | 13,1 | 15,4 | 18,2 | 21,8 |
| 2 | 46,9 | 40,2 | 34,8 | 30,8 | 27,9 | 25,5 | 23,5 | 21,6 | 19,8 | 18,0 | 16,4 | 14,9 | 15,7 |
| 3 | 42,6 | 37,0 | 32,7 | 29,6 | 27,3 | 25,5 | 23,9 | 22,6 | 21,4 | 20,2 | 19,0 | 17,9 | 16,9 |
| 6 | 37,2 | 33,4 | 30,6 | 28,5 | 27,0 | 25,8 | 24,7 | 23,9 | 23,1 | 22,5 | 21,8 | 21,2 | 20,7 |
| 9 | 35,4 | 32,4 | 30,2 | 28,5 | 27,2 | 26,1 | 25,3 | 24,6 | 24,0 | 23,5 | 23,0 | 22,6 | 22,1 |
| 12 | 34,2 | 31,7 | 29,8 | 28,4 | 27,2 | 26,3 | 25,6 | 25,0 | 24,5 | 24,1 | 23,7 | 23,3 | 23,0 |
| 15 | 33,6 | 31,4 | 29,7 | 28,4 | 27,4 | 26,6 | 25,9 | 25,4 | 24,9 | 24,5 | 24,2 | 23,8 | 23,5 |
| 18 | 33,3 | 31,4 | 29,8 | 28,6 | 27,6 | 26,8 | 26,2 | 25,7 | 25,2 | 24,9 | 24,5 | 24,2 | 23,9 |
| 21 | 33,0 | 31,2 | 29,8 | 28,7 | 27,8 | 27,0 | 26,4 | 25,9 | 25,5 | 25,2 | 24,8 | 24,6 | 24,3 |
| 24 | 32,9 | 31,2 | 29,9 | 28,8 | 28,0 | 27,3 | 26,7 | 26,2 | 25,8 | 25,4 | 25,1 | 24,9 | 24,6 |
| 27 | 32,8 | 31,2 | 30,0 | 28,9 | 28,1 | 27,4 | 26,9 | 26,4 | 26,0 | 25,7 | 25,4 | 25,1 | 24,9 |
| 30 | 32,8 | 31,2 | 30,0 | 29,0 | 28,2 | 27,6 | 27,1 | 26,6 | 26,2 | 25,9 | 25,6 | 25,3 | 25,1 |
| 33 | 32,6 | 31,2 | 30,0 | 29,1 | 28,3 | 27,7 | 27,2 | 26,8 | 26,4 | 26,1 | 25,8 | 25,5 | 25,3 |
| 36 | 32,5 | 31,1 | 30,0 | 29,2 | 28,4 | 27,8 | 27,3 | 26,9 | 26,5 | 26,2 | 25,9 | 25,7 | 25,5 |

Tabela 12 – Valores obtidos na calibração conjunta com peso

As Tabelas 13 e 14 apresentam os erros das calibrações conjuntas sem peso e com peso, respectivamente, exibindo as diferenças de volatilidade implícita nas mesmas configurações da Tabela 6:

| * | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 |
|----|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | -7,9 | -5,6 | -4,2 | -2,9 | -1,4 | 0,3 | 2,3 | 3,5 | 2,3 | -0,2 | -1,8 | -3,9 | -8,2 |
| 2 | -4,7 | -2,5 | -1,0 | -0,1 | 0,7 | 1,3 | 1,9 | 2,3 | 2,3 | 1,7 | 0,6 | 0,0 | -0,8 |
| 3 | -3,3 | -1,1 | 0,2 | 1,1 | 1,5 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,6 | 1,2 | 0,6 | 0,1 |
| 6 | -1,2 | 0,5 | 1,4 | 1,8 | 1,9 | 1,8 | 1,4 | 1,0 | 0,7 | 0,4 | 0,1 | -0,3 | -0,5 |
| 9 | -0,7 | 0,6 | 1,3 | 1,6 | 1,6 | 1,4 | 1,0 | 0,5 | 0,1 | -0,4 | -0,8 | -1,2 | -1,5 |
| 12 | -0,7 | 0,4 | 1,0 | 1,3 | 1,2 | 1,0 | 0,6 | 0,2 | -0,3 | -0,7 | -1,1 | -1,6 | -1,9 |
| 15 | -0,7 | 0,2 | 0,8 | 1,0 | 0,9 | 0,7 | 0,3 | -0,1 | -0,5 | -1,0 | -1,4 | -1,8 | -2,2 |
| 18 | -0,6 | 0,2 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,5 | 0,1 | -0,3 | -0,7 | -1,1 | -1,5 | -1,9 | -2,3 |
| 21 | -0,7 | 0,1 | 0,5 | 0,6 | 0,6 | 0,4 | 0,0 | -0,3 | -0,7 | -1,1 | -1,5 | -1,9 | -2,2 |
| 24 | -0,7 | 0,0 | 0,3 | 0,5 | 0,4 | 0,2 | -0,1 | -0,4 | -0,8 | -1,2 | -1,5 | -1,9 | -2,2 |
| 27 | -0,6 | 0,0 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | -0,1 | -0,5 | -0,8 | -1,1 | -1,5 | -1,8 | -2,2 |
| 30 | -0,6 | 0,0 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | -0,1 | -0,4 | -0,7 | -1,0 | -1,3 | -1,6 | -2,0 |
| 33 | -0,6 | 0,0 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,0 | -0,2 | -0,5 | -0,8 | -1,1 | -1,4 | -1,7 |
| 36 | -0,5 | 0,0 | 0,3 | 0,4 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | -0,1 | -0,4 | -0,6 | -0,9 | -1,2 | -1,5 |

Tabela 13 – Erros da calibração conjunta sem peso

| * | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 |
|----|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | -5,1 | -2,3 | -0,8 | -0,1 | 0,0 | 0,1 | 0,5 | 1,3 | 2,6 | 3,6 | -0,1 | -3,9 | -8,2 |
| 2 | -3,7 | -1,0 | 0,6 | 1,3 | 1,3 | 1,0 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | -0,5 |
| 3 | -2,3 | 0,2 | 1,6 | 2,1 | 2,0 | 1,5 | 1,0 | 0,4 | 0,0 | -0,2 | -0,3 | -0,2 | -0,1 |
| 6 | -0,3 | 1,3 | 2,1 | 2,2 | 2,0 | 1,4 | 0,8 | 0,1 | -0,5 | -1,0 | -1,5 | -1,9 | -2,1 |
| 9 | -0,2 | 1,0 | 1,6 | 1,7 | 1,4 | 1,0 | 0,3 | -0,3 | -0,9 | -1,5 | -2,1 | -2,6 | -3,0 |
| 12 | 0,0 | 1,0 | 1,4 | 1,4 | 1,2 | 0,8 | 0,2 | -0,4 | -1,0 | -1,6 | -2,2 | -2,7 | -3,2 |
| 15 | -0,1 | 0,7 | 1,1 | 1,1 | 0,9 | 0,5 | 0,0 | -0,6 | -1,2 | -1,7 | -2,3 | -2,8 | -3,3 |
| 18 | -0,3 | 0,4 | 0,8 | 0,8 | 0,6 | 0,3 | -0,2 | -0,7 | -1,2 | -1,7 | -2,2 | -2,8 | -3,2 |
| 21 | -0,3 | 0,4 | 0,6 | 0,7 | 0,5 | 0,2 | -0,3 | -0,7 | -1,2 | -1,7 | -2,2 | -2,7 | -3,1 |
| 24 | -0,4 | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 0,0 | -0,4 | -0,8 | -1,2 | -1,7 | -2,1 | -2,6 | -3,0 |
| 27 | -0,5 | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | -0,1 | -0,4 | -0,8 | -1,2 | -1,7 | -2,1 | -2,5 | -2,9 |
| 30 | -0,5 | 0,0 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | -0,1 | -0,4 | -0,7 | -1,1 | -1,5 | -1,9 | -2,3 | -2,7 |
| 33 | -0,5 | 0,0 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,0 | -0,3 | -0,6 | -1,0 | -1,3 | -1,7 | -2,0 | -2,4 |
| 36 | -0,5 | 0,0 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,0 | -0,2 | -0,5 | -0,8 | -1,1 | -1,5 | -1,8 | -2,1 |

Tabela 14 – Erros da calibração conjunta com peso

A Figura 4 exibe as superfícies obtidas (cor magenta) em comparação com a superfície original (cor preta):

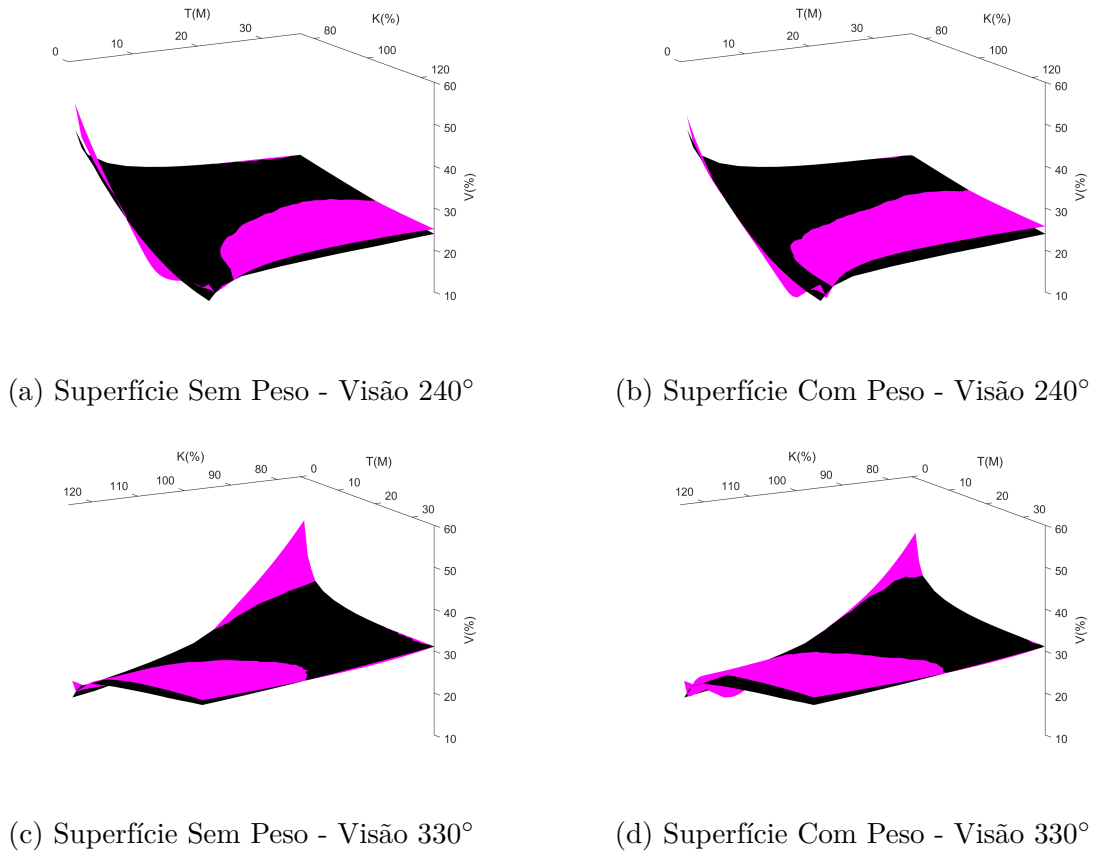


Figura 4 – Comparação da superfície original com a superfície obtida na calibração

5.2.2 Análise

Para os dados reais, as calibrações individuais produziram ótimos resultados. Porém, quando existem dados disponíveis em outros vencimentos, o tratamento correto do ponto de vista teórico é realizar a calibração conjunta, pois cada vértice adiciona informações importantes sobre a percepção do mercado em relação à dinâmica do ativo objeto. Observando a tabela dos parâmetros calibrados nos prazos isolados, percebemos que não existe qualquer tipo padrão que pudesse indicar uma possível composição de estrutura a termo dos mesmos.

Nas calibrações conjuntas, percebemos que o modelo conseguiu capturar relativamente bem o formato da superfície, embora algumas regiões tenham ficado com erros um pouco mais elevados do que outras. Na calibração sem peso, os primeiros vencimentos apresentaram um erro maior, enquanto que na calibração com peso, o cenário oposto aconteceu, pois a mesma foi configurada para priorizar a diminuição dos erros em vértices mais curtos.

Com isso, constatamos que a utilização dos pesos, pode ser efetivamente utilizada para proporcionar um controle de quais pontos da superfície devem apresentar um melhor alinhamento com a superfície original.

5.3 Conclusões

Após a análise dos resultados, as principais conclusões que podemos extrair da realização deste projeto são as seguintes:

- o modelo GARCH-SVNIG apresenta um desempenho bastante satisfatório para capturar diferentes formatos de curva de volatilidade, sofrendo uma deterioração de qualidade relevante apenas em vértices de curtíssimo prazo.

- a calibração conjunta possui muito mais valor do que a calibração individual, pois consegue impor barreiras naturais que diminuem o espaço de parâmetros viáveis, reduzindo assim a variabilidade de dinâmicas que podem ser capturadas. Porém, a calibração conjunta só pode ser realizada quando existem dados confiáveis, como é caso do índice S&P 500.

- quando a calibração conjunta não conseguir ajustar com perfeição todos os pontos disponíveis, como foi o caso dos testes realizados, um ou mais dos cenários a seguir pode ter se manifestado:

1. O modelo de processo estocástico proposto não é complexo o suficiente para capturar completamente a dinâmica implícita do ativo objeto.
2. O algoritmo de otimização não conseguiu encontrar um ponto suficientemente próximo do mínimo global, seja por sua própria limitação de lidar com o tipo de problema, ou por algum outro fator como o ponto inicial de busca ou domínio de busca das variáveis.
3. Os preços de mercado apresentam algum tipo de ruído ou distorção que prejudica o processo de calibração e inviabiliza um ajuste perfeito.

Conforme mencionado anteriormente, Para lidar com este tipo de problema, a utilização dos pesos pode ser utilizada para priorizar uma determinada região de interesse da superfície.

- Num cenário em que pouquíssimos prazos estejam disponíveis (como o mercado de opções no Brasil, por exemplo), a geração de superfícies a partir da calibração é perfeitamente viável, desde que os limites dos parâmetros sejam devidamente configurados para reproduzir um formato que faça sentido de ponto de vista prático, pois a multimodalidade do problema proporciona a possibilidade de muitos resultados diferentes que atendam ao prazo observado.

- a calibração de processos estocásticos é importante para viabilizar a precificação de derivativos exóticos com dependência de trajetória, pois os mesmos conseguem capturar de maneira adequada os riscos implícitos que o mercado vislumbra para um ativo objeto através da sua superfície de volatilidade.

- o tempo de execução total pode ser diminuído de diversas maneiras, entra elas:
 1. sacrificar a precisão do resultado através da diminuição da quantidade de simulações, passos discretos, amostras populacionais ou iterações do algoritmo.
 2. eliminar pontos amostrais da superfície de volatilidade que não sejam significativos para a calibração desejada.
 3. disponibilizar mais núcleos de processamento para acelerar a simulação de Monte Carlo paralela.

Finalizamos concluindo que o modelo (e possíveis variações do mesmo) e as técnicas de execução empregadas podem ser utilizadas para ajudar os participantes do mercado a ter uma visão mais completa das superfícies de volatilidade que não estão inteiramente disponíveis. Com isso, é possível oferecer preços mais justos e competitivos, e até mesmo explorar eventuais oportunidades de arbitragem pouco visíveis. Adicionalmente, também é possível precificar de maneira mais assertiva derivativos exóticos que possuam dependência de trajetória.

5.4 Trabalhos Futuros

Com base no que foi desenvolvido neste projeto, é possível elencar alguns tópicos que poderiam ser utilizados como temas de trabalhos e pesquisas no futuro:

- investigar a utilização de outros modelos de volatilidade estocástica não-afim e saltos de Levy com diferentes propriedades de atividade e variação.
- testar o modelo com outros blocos de dados reais, variando as datas de análise e os ativos objetos.
- realizar a implementação do código numa arquitetura de GPU, que possui muitos núcleos, e por esse motivo, tem potencial de acelerar significativamente a simulação paralela, conforme sugerido por [Poklewski-Koziell \(2017\)](#).

Para qualquer um destes possíveis tópicos, pode ser necessário ou importante realizar algumas das validações descritas anteriormente.

Referências

- ACWORTH, P. A.; BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. A comparison of some monte carlo and quasi monte carlo techniques for option pricing. n. Mc, 1998. ISSN 0930-0325.
- AIUBE, F. *Modelos Quantitativos em Finanças: Com Enfoque em Commodities*. [S.l.: s.n.], 2012. ISBN 9788565837361.
- BERGSTROM, J. *Pricing American Options using Lévy Processes and Monte Carlo Simulations*. 2015.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, UChicago Press, v. 81, n. 3, p. 637, 1973.
- CARR, P. P. et al. Stochastic volatility for lévy processes. *SSRN Electronic Journal*, 2005.
- GEMAN, H. *Stochastic Clock and Financial Markets*. [S.l.]: Elsevier B.V., 2009. v. 15. 649–663 p. ISSN 15708659.
- GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Method in Financial Engineering*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 4. ISSN 14697688.
- HANSEN, N. The cma evolution strategy: A tutorial. 2016.
- HESTON, S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, v. 6, p. 327–343, 1993.
- IGNATIEVA, K.; RODRIGUES, P.; SEEGER, N. Stochastic Volatility and Jumps: Exponentially Affine Yes or No? An Empirical Analysis of SP500 Dynamics. *SSRN Electronic Journal*, 2011. ISSN 1556-5068.
- JULIA-TIPS. *Julia Performance Tips*. <<https://docs.julialang.org/en/v1/manual/performance-tips>>. Data de acesso: 2021-05-01.
- LANGRENÉ, N.; LEE, G.; ZHU, Z. Switching to nonaffine stochastic volatility: A closed-form expansion for the inverse gamma model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, v. 19, n. 5, p. 1–30, 2016. ISSN 02190249.
- LI, H.; WELLS, M. T.; YU, C. L. A bayesian analysis of return dynamics with lévy jumps. *Review of Financial Studies*, v. 21, n. 5, p. 2345–2378, 2008. ISSN 08939454.
- MAGNUSSON, E.; ÅDAHL, M. *Implied Volatility Surface Construction*. Dissertação (Mestrado), 2018.
- PAPADOPOULOS, Y. A. *Fast option calibration: more non-affine stochastic volatility models*. 2018. <<https://www.acenumerics.com/miscellaneous>>.
- PAPADOPOULOS, Y. A.; LEWIS, A. L. A first option calibration of the garch diffusion model by a pde method. *arXiv*, 2018. ISSN 23318422.

PEEL, C.; MOON, T. K. *Algorithms for Optimization*. [S.l.: s.n.], 2020. v. 40. ISSN 1941000X. ISBN 9780262039420.

POKLEWSKI-KOZIELL, W. *Stochastic Volatility Models: Calibration, Pricing And Hedging*. Dissertação (Mestrado), 2017.

POULSEN, R. *S&P500 Options Data*. <<http://web.math.ku.dk/~rolf/Svend/>>. Data de acesso: 2021-05-01.

SCHOUTENS, W. *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. [S.l.: s.n.], 2004. ISBN 0470851562.

SILVA, M. E. da; BARBE, T. Quasi-monte carlo in finance: extending for problems of high effective dimension. *Economia Aplicada*, v. 9, n. 4, p. 577–594, 2005. ISSN 1413-8050.

YANG, H. *Markov Chain Monte Carlo Estimation of Stochastic Volatility Models with Finite and Infinite Activity Lévy Jumps: Evidence for Efficient Models and Algorithms*. Tese (Doutorado), 2015.

Apêndices

APÊNDICE A – Tabelas e Figuras

A.1 Dados Artificiais

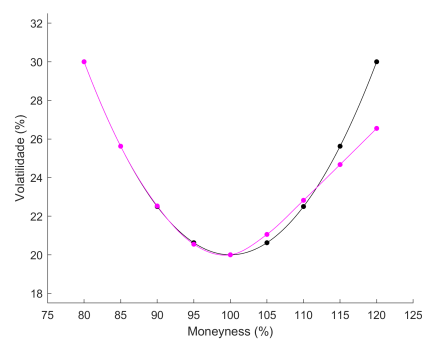
Nesta seção, disponibilizamos os resultados obtidos na calibração dos dados artificiais. Nas próximas 15 páginas, eles serão apresentados para cada par de formato e horizonte, de acordo com a seguinte estrutura sequencial:

- Tabela exibindo os valores das volatilidades observadas e volatilidades calibradas para cada ponto de *moneyness*.
- Tabela exibindo os valores dos parâmetros do modelo calibrado, utilizados para gerar a superfície generalizada.
- Figura exibindo o gráfico da volatilidade observada (cor preta) e da volatilidade calibrada (cor magenta).
- Figura exibindo as curvas de nível da superfície generalizada, diferenciando o prazo da calibração (cor magenta), prazos anteriores ao da calibração (cor ciano) e prazos posteriores ao da calibração (cor azul).
- Figuras exibindo a superfície generalizada sob os ângulos de 60° , 150° , 240° , 330° . Para cada uma delas, o prazo da calibração é destacado por uma linha (cor magenta).

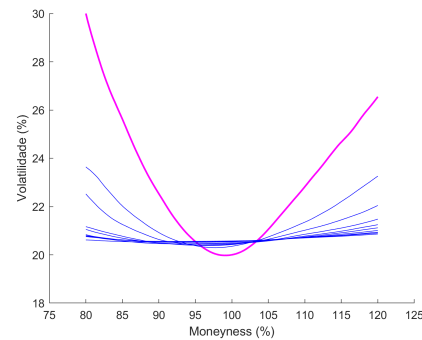
A.1.1 Formato de risco tipo A observado num prazo de 18 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 30,00 | 25,63 | 22,50 | 20,63 | 20,00 | 20,63 | 22,50 | 25,63 | 30,00 |
| Vol Calibrada | 30,00 | 25,95 | 22,50 | 20,57 | 20,02 | 20,62 | 22,49 | 25,73 | 29,84 |

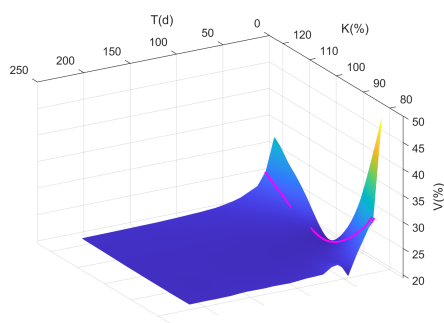
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|---------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 0,1397 | 0,0177 | 56,2218 | 27,6933 | -0,0218 | 54,6257 | -0,5756 | 1,545 |



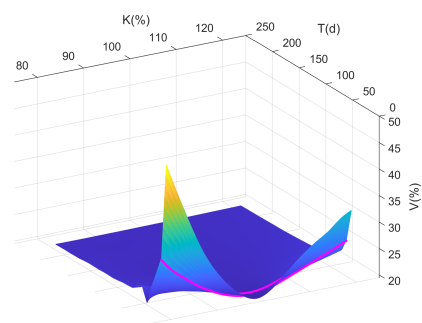
Resultado da Calibração



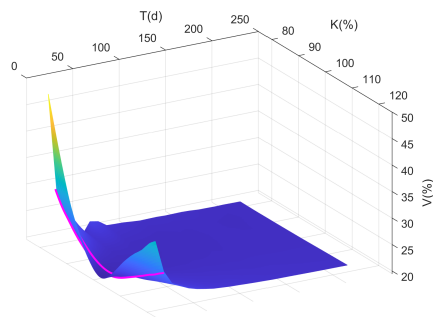
Curvas de Nível



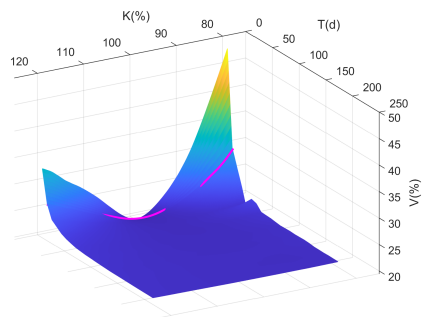
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

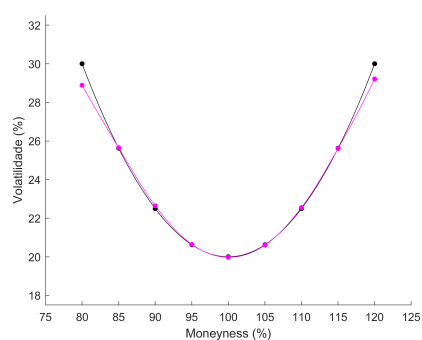


Superfície - Visão 330°

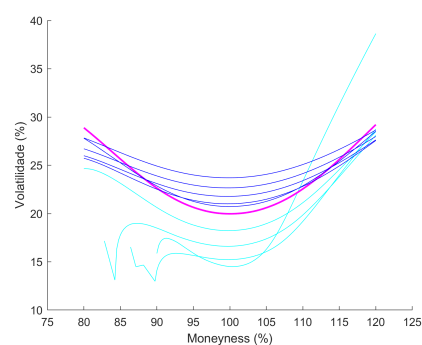
A.1.2 Formato de risco tipo A observado num prazo de 90 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 30,00 | 25,63 | 22,50 | 20,63 | 20,00 | 20,63 | 22,50 | 25,63 | 30,00 |
| Vol Calibrada | 28,79 | 25,65 | 22,67 | 20,61 | 19,93 | 20,63 | 22,60 | 25,54 | 28,93 |

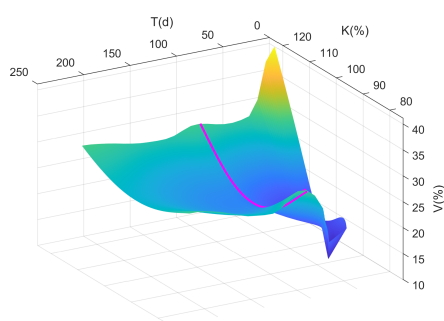
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|---------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 0,0609 | 0,0421 | 30,095 | 32,1494 | -0,0324 | 61,9125 | -0,3204 | 0,9552 |



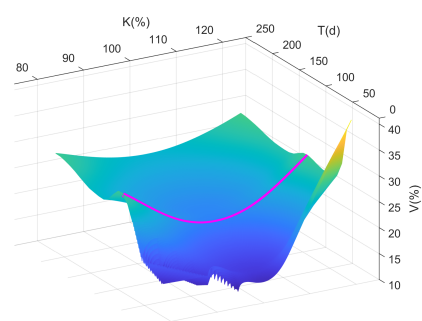
Resultado da Calibração



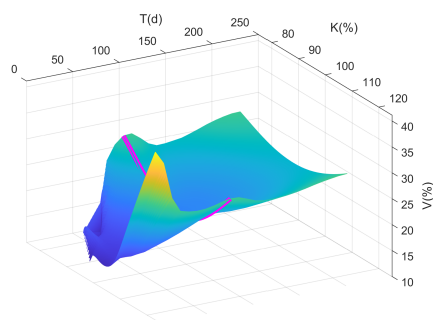
Curvas de Nível



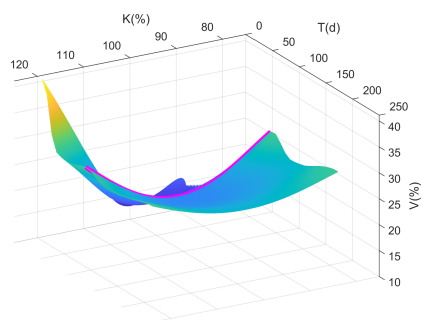
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

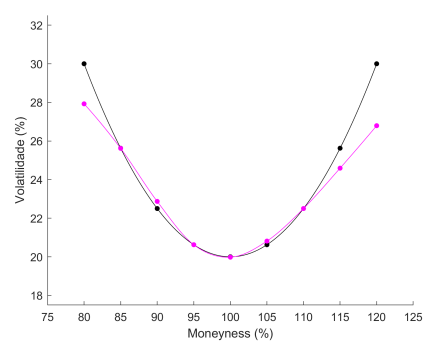


Superfície - Visão 330°

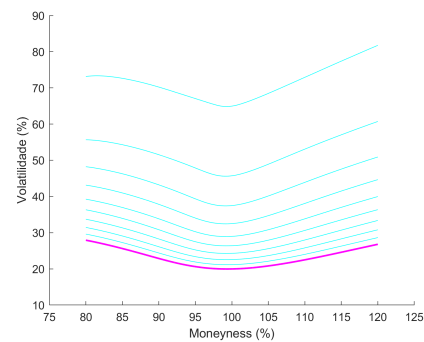
A.1.3 Formato de risco tipo A observado num prazo de 180 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 30,00 | 25,63 | 22,50 | 20,63 | 20,00 | 20,63 | 22,50 | 25,63 | 30,00 |
| Vol Calibrada | 27,76 | 25,61 | 22,98 | 20,64 | 19,80 | 20,66 | 22,54 | 24,83 | 27,16 |

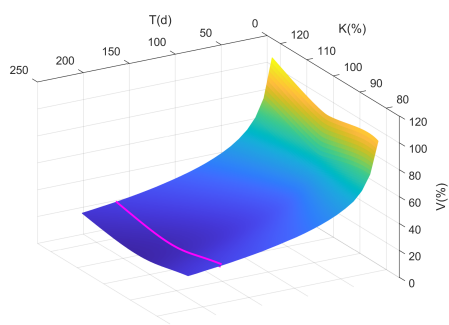
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|---------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 1,9351 | 0,0421 | 99,6601 | 14,5889 | -0,0358 | 86,7988 | 70,8867 | 0,1214 |



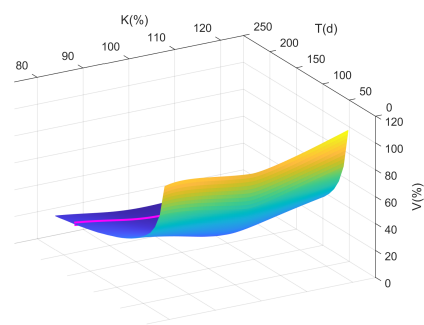
Resultado da Calibração



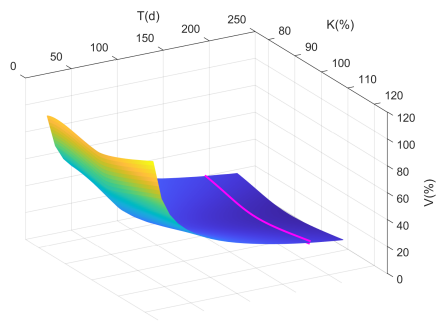
Curvas de Nível



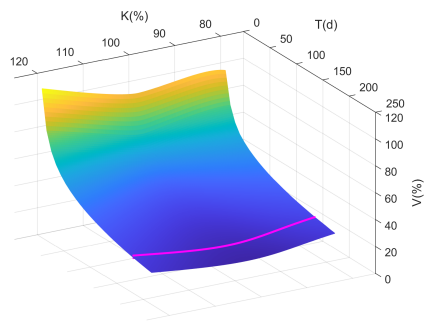
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

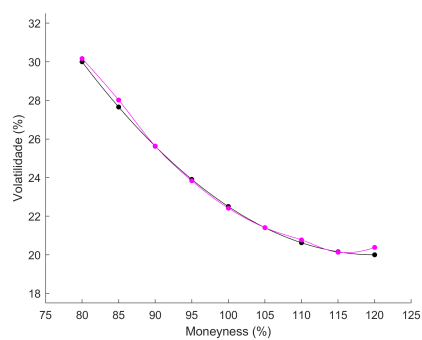


Superfície - Visão 330°

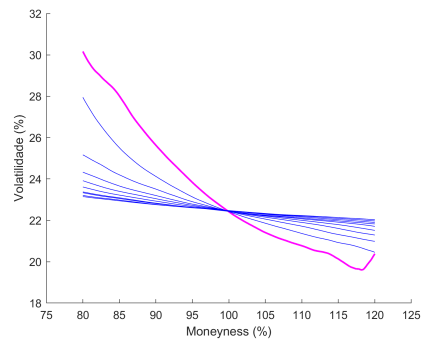
A.1.4 Formato de risco tipo B observado num prazo de 18 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 30,00 | 27,66 | 25,63 | 23,91 | 22,50 | 21,41 | 20,63 | 20,16 | 20,00 |
| Vol Calibrada | 30,00 | 27,65 | 25,65 | 23,91 | 22,50 | 21,39 | 20,63 | 20,17 | 19,95 |

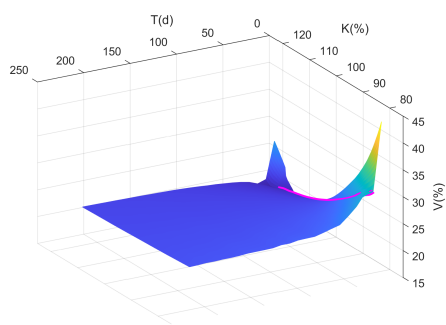
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|----------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 0,1338 | 0,0749 | 3,8005 | 2,1323 | 0,0053 | 48,0314 | -30,6989 | 0,8448 |



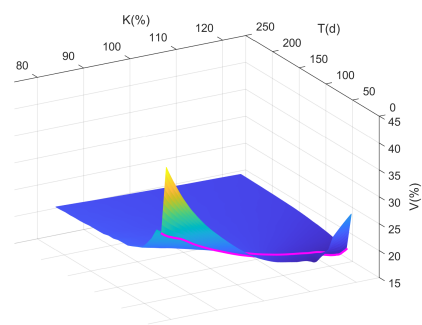
Resultado da Calibração



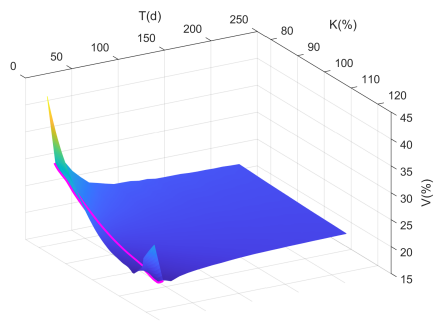
Curvas de Nível



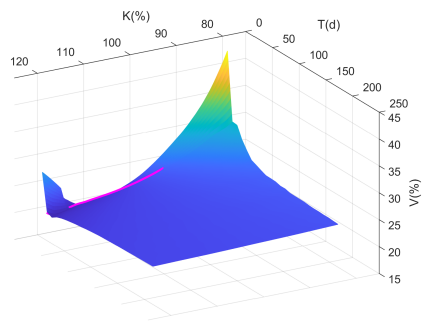
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

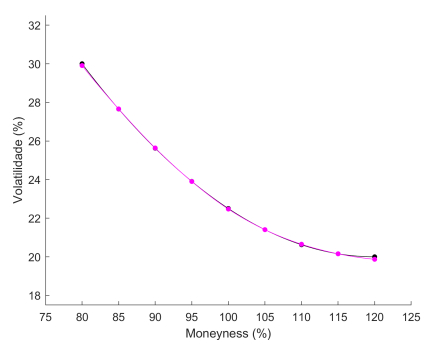


Superfície - Visão 330°

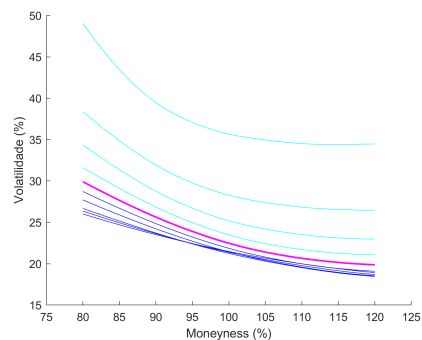
A.1.5 Formato de risco tipo B observado num prazo de 90 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 30,00 | 27,66 | 25,63 | 23,91 | 22,50 | 21,41 | 20,63 | 20,16 | 20,00 |
| Vol Calibrada | 29,99 | 27,66 | 25,64 | 23,90 | 22,48 | 21,42 | 20,63 | 20,16 | 19,98 |

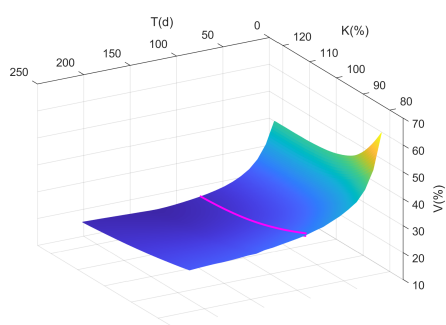
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 0,4618 | 0,0889 | 85,9363 | 0,2225 | 0,1789 | 17,606 | -9,2306 | 0,5327 |



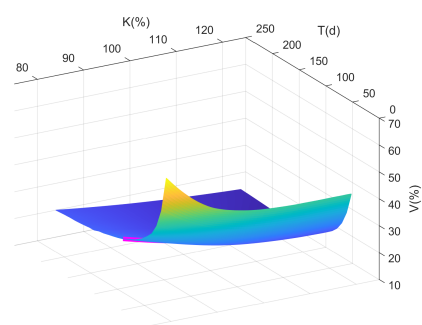
Resultado da Calibração



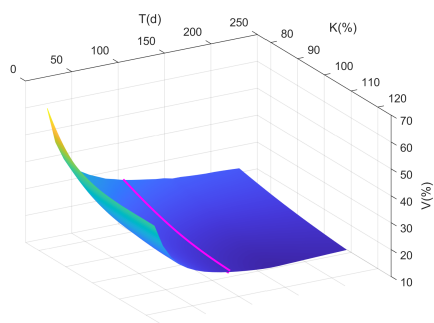
Curvas de Nível



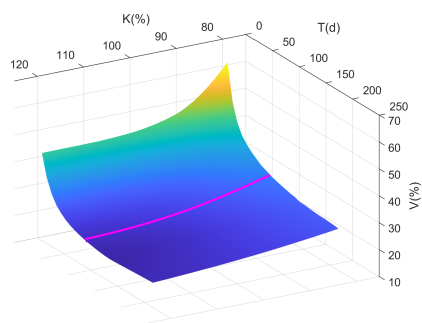
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

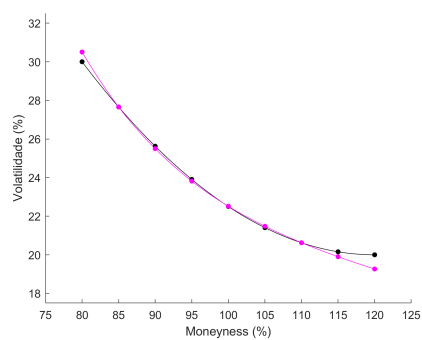


Superfície - Visão 330°

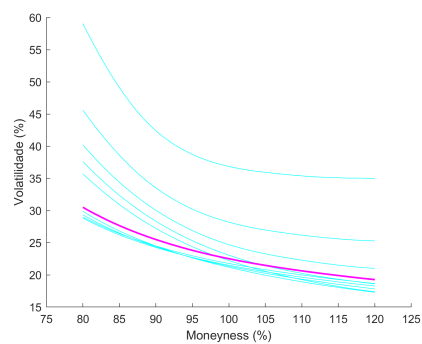
A.1.6 Formato de risco tipo B observado num prazo de 180 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 30,00 | 27,66 | 25,63 | 23,91 | 22,50 | 21,41 | 20,63 | 20,16 | 20,00 |
| Vol Calibrada | 29,99 | 27,65 | 25,61 | 23,91 | 22,49 | 21,40 | 20,62 | 20,16 | 19,94 |

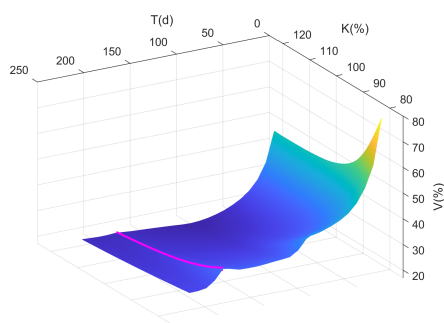
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 1,1218 | 0,0596 | 97,7125 | 2,8437 | 0,1461 | 8,8304 | -4,3948 | 0,311 |



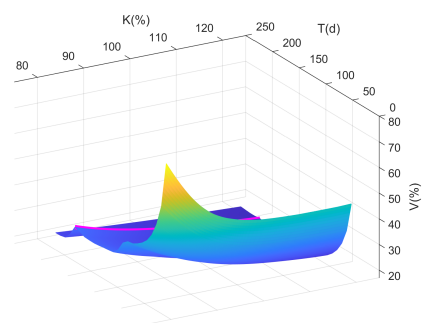
Resultado da Calibração



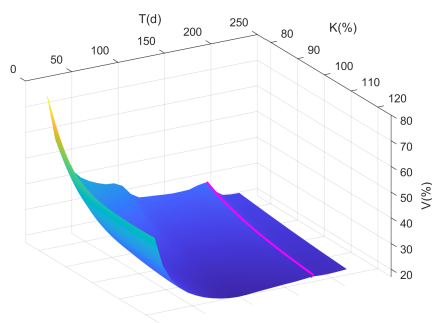
Curvas de Nível



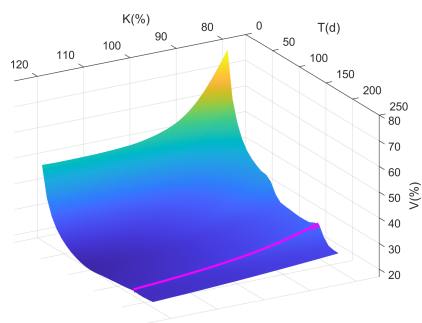
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

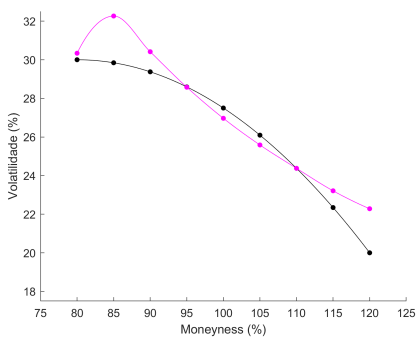


Superfície - Visão 330°

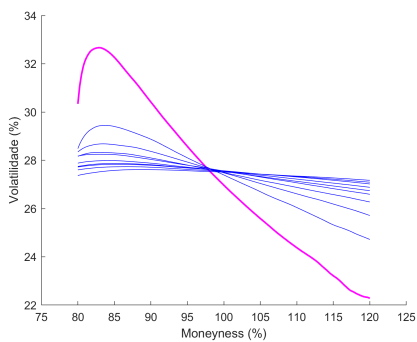
A.1.7 Formato de risco tipo C observado num prazo de 18 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 30,00 | 25,63 | 22,50 | 20,63 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 |
| Vol Calibrada | 31,92 | 25,62 | 21,98 | 20,63 | 20,15 | 20,00 | 19,98 | 20,00 | 20,19 |

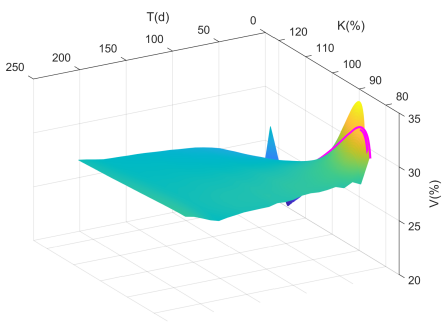
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 0,1072 | 0,0509 | 18,362 | 3,4309 | 0,0466 | 69,3 | -6,1721 | 2,3538 |



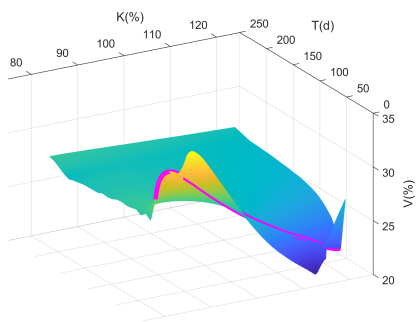
Resultado da Calibração



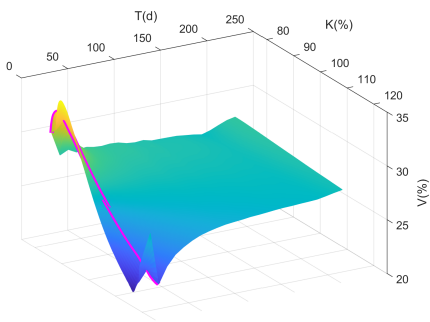
Curvas de Nível



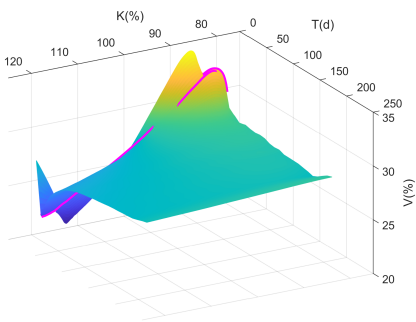
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

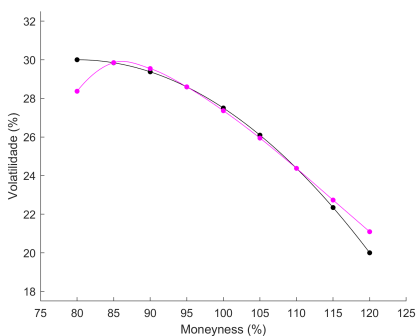


Superfície - Visão 330°

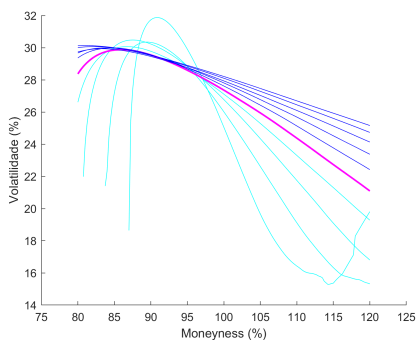
A.1.8 Formato de risco tipo C observado num prazo de 90 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyiness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 30,00 | 25,63 | 22,50 | 20,63 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 |
| Vol Calibrada | 30,94 | 25,62 | 22,30 | 20,80 | 20,19 | 20,00 | 19,94 | 20,00 | 20,08 |

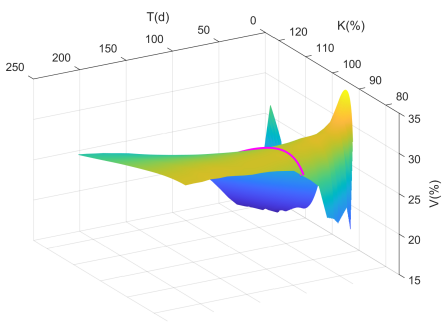
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 0,1996 | 0,0303 | 54,5266 | 3,5056 | 0,1447 | 73,5436 | 12,7764 | 2,4501 |



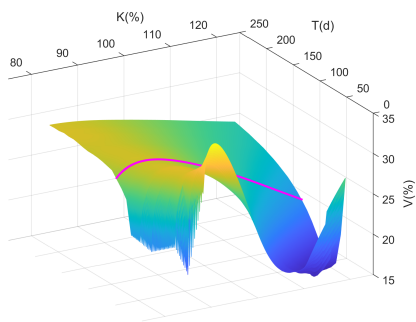
Resultado da Calibração



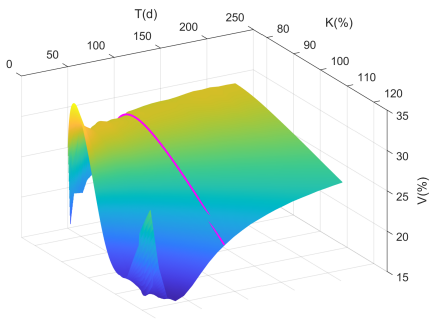
Curvas de Nível



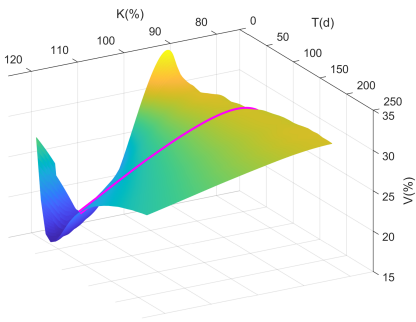
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

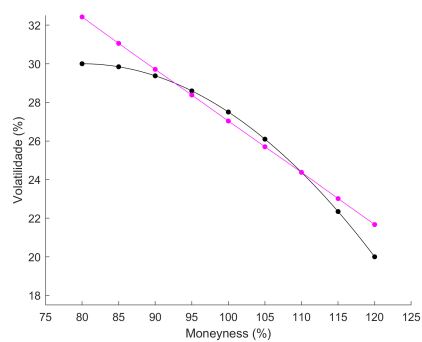


Superfície - Visão 330°

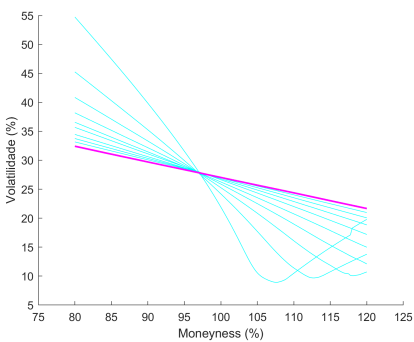
A.1.9 Formato de risco tipo C observado num prazo de 180 dias

| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Vol Observada | 30,00 | 25,63 | 22,50 | 20,63 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 |
| Vol Calibrada | 30,01 | 25,55 | 22,50 | 20,79 | 20,00 | 19,76 | 19,81 | 20,00 | 20,35 |

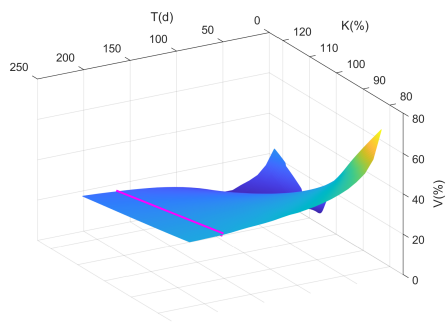
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
|-------------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|---------|----------|
| Valor Final | 1,1827 | 0,0156 | 63,6907 | 3,8518 | 0,2363 | 78,5592 | 45,5643 | 1,1746 |



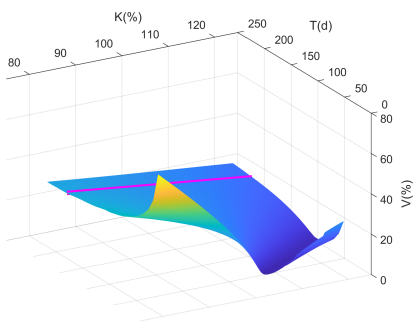
Resultado da Calibração



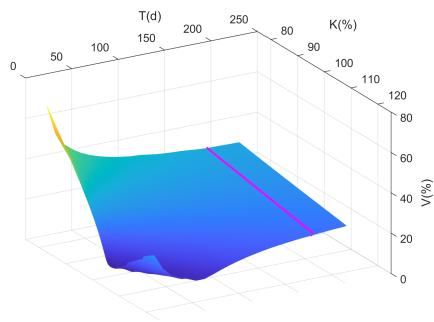
Curvas de Nível



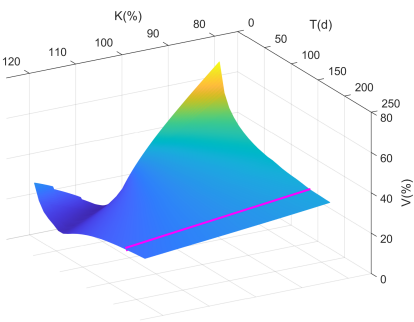
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

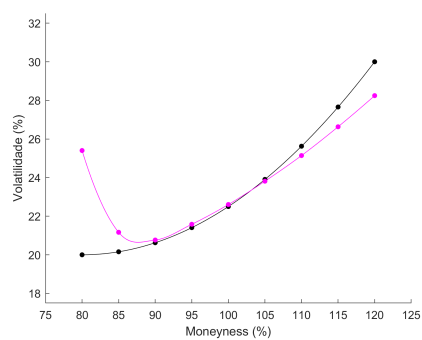


Superfície - Visão 330°

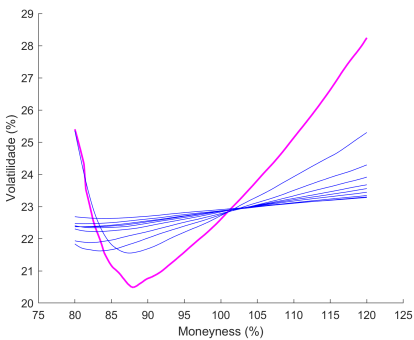
A.1.10 Formato de risco tipo D observado num prazo de 18 dias

| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Vol Observada | 20,00 | 20,16 | 20,63 | 21,41 | 22,50 | 23,91 | 25,63 | 27,66 | 30,00 |
| Vol Calibrada | 20,03 | 19,76 | 20,62 | 21,74 | 22,92 | 24,13 | 25,32 | 26,50 | 27,66 |

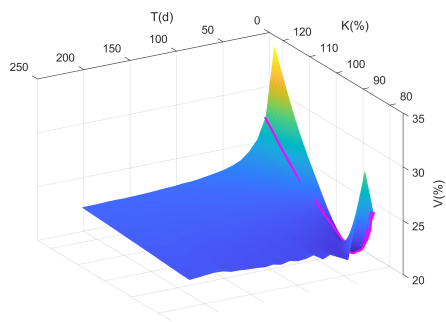
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
|-------------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|---------|----------|
| Valor Final | 0,3139 | 0,0346 | 92,0115 | 1,0255 | 0,0114 | 66,4821 | 42,2437 | 1,4969 |



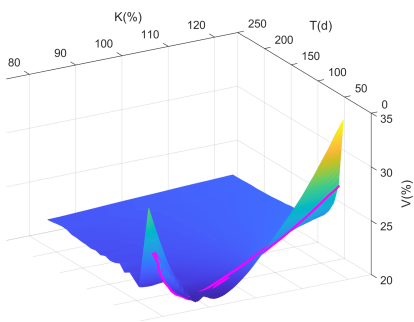
Resultado da Calibração



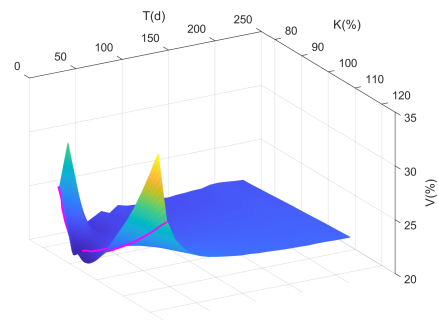
Curvas de Nível



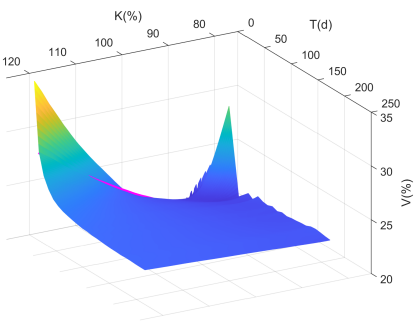
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

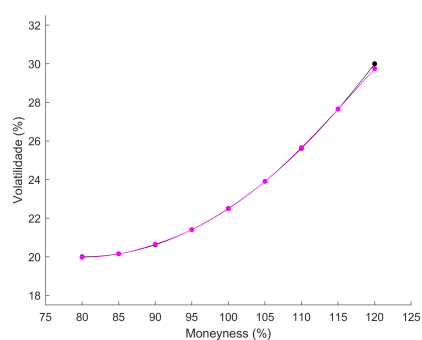


Superfície - Visão 330°

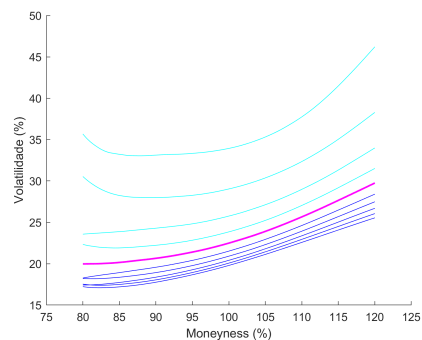
A.1.11 Formato de risco tipo D observado num prazo de 90 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 20,00 | 20,16 | 20,63 | 21,41 | 22,50 | 23,91 | 25,63 | 27,66 | 30,00 |
| Vol Calibrada | 20,00 | 20,16 | 20,60 | 21,40 | 22,58 | 24,02 | 25,63 | 27,35 | 29,08 |

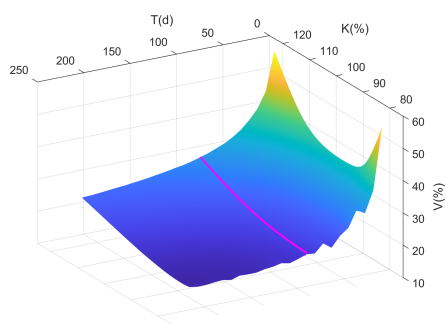
| | | | | | | | | |
|-------------|-------|----------|----------|---------|---------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 0,978 | 0,0589 | 55,985 | 0,9172 | -0,0011 | 75,8951 | 69,6307 | 0,1564 |



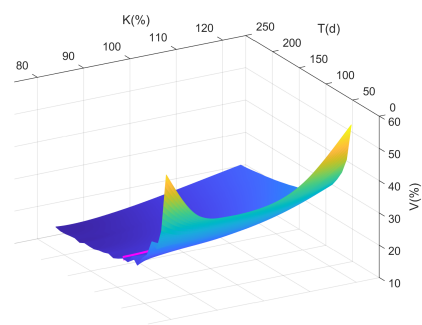
Resultado da Calibração



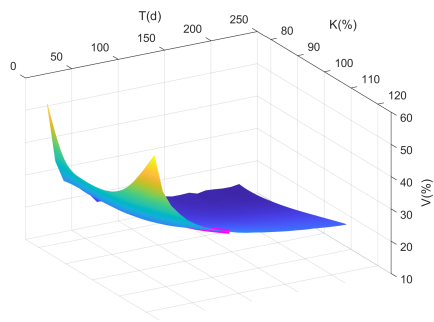
Curvas de Nível



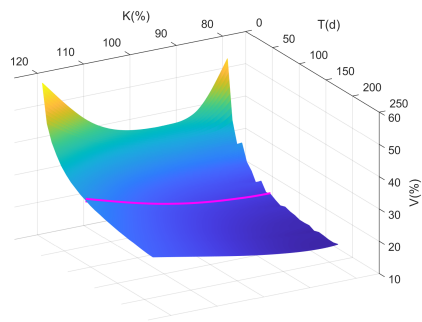
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

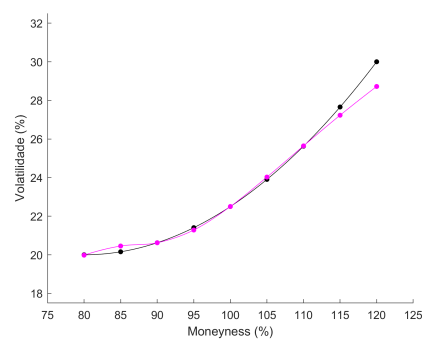


Superfície - Visão 330°

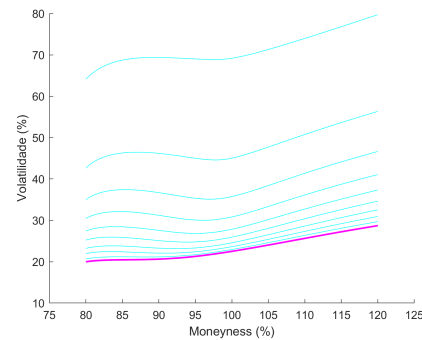
A.1.12 Formato de risco tipo D observado num prazo de 180 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 20,00 | 20,16 | 20,63 | 21,41 | 22,50 | 23,91 | 25,63 | 27,66 | 30,00 |
| Vol Calibrada | 20,00 | 20,18 | 20,60 | 21,37 | 22,53 | 23,98 | 25,63 | 27,40 | 29,21 |

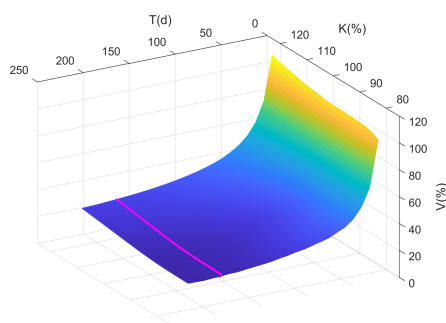
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|---------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 0,3344 | 0,1239 | 25,2719 | 6,1468 | -0,0007 | 34,3188 | 32,0172 | 0,0594 |



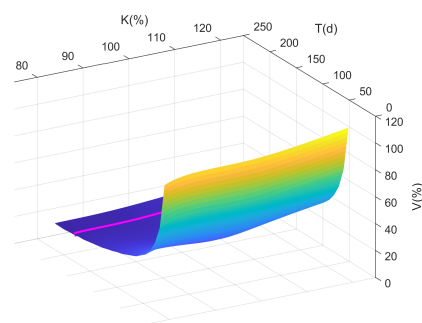
Resultado da Calibração



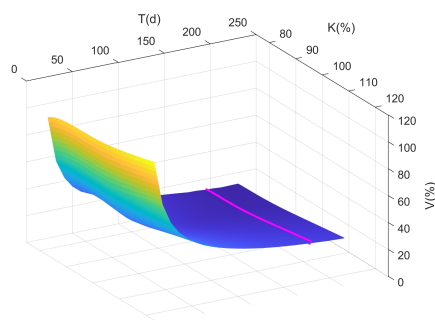
Curvas de Nível



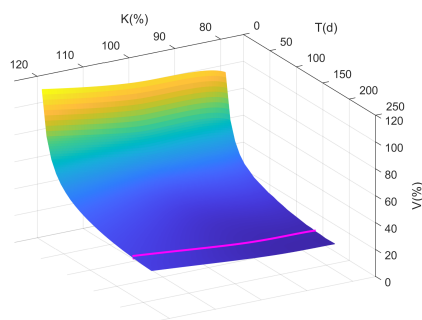
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

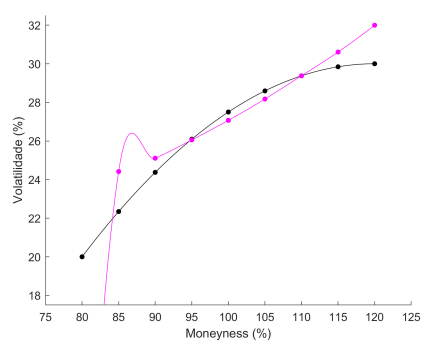


Superfície - Visão 330°

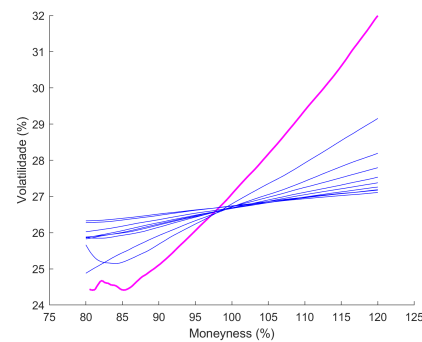
A.1.13 Formato de risco tipo E observado num prazo de 18 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,63 | 22,50 | 25,63 | 30,00 |
| Vol Calibrada | 20,01 | 19,57 | 20,00 | 20,54 | 21,05 | 21,61 | 22,21 | 22,83 | 23,47 |

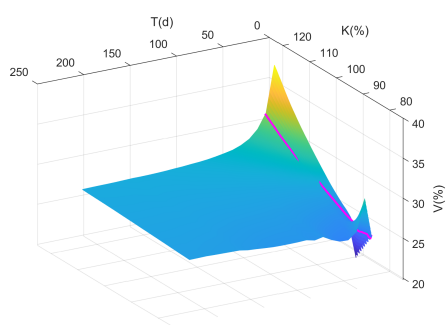
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 0,1198 | 0,0004 | 73,4956 | 0,5573 | 0,0046 | 92,5098 | 41,225 | 2,9121 |



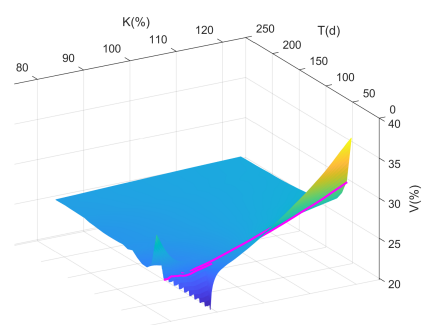
Resultado da Calibração



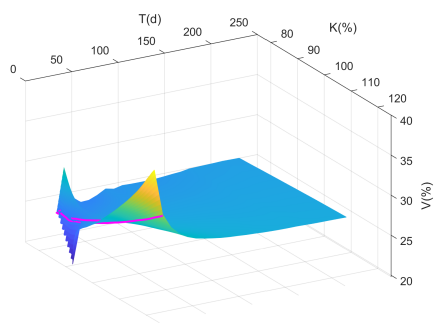
Curvas de Nível



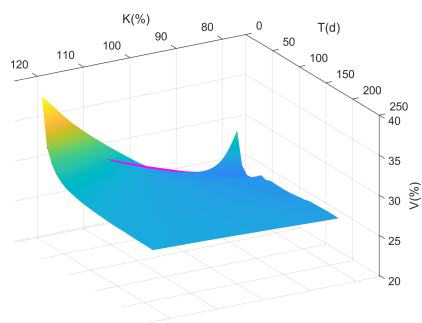
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

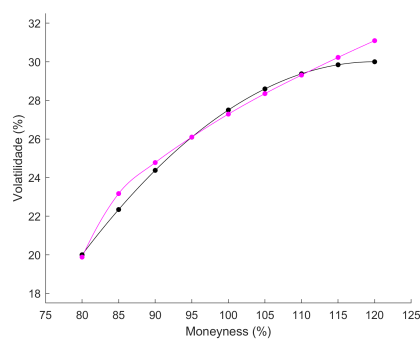


Superfície - Visão 330°

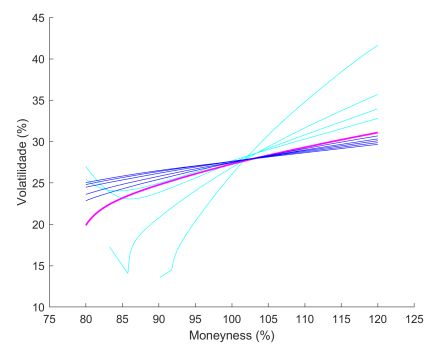
A.1.14 Formato de risco tipo E observado num prazo de 90 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,63 | 22,50 | 25,63 | 30,00 |
| Vol Calibrada | 20,01 | 20,30 | 20,00 | 19,76 | 20,00 | 21,12 | 22,57 | 24,21 | 26,03 |

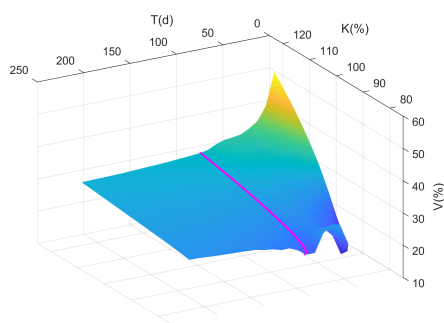
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|---------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 1,9945 | 0,001 | 68,8668 | 0,6746 | -0,0032 | 36,4752 | 32,5681 | 0,0501 |



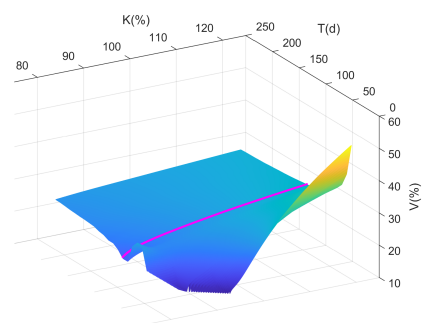
Resultado da Calibração



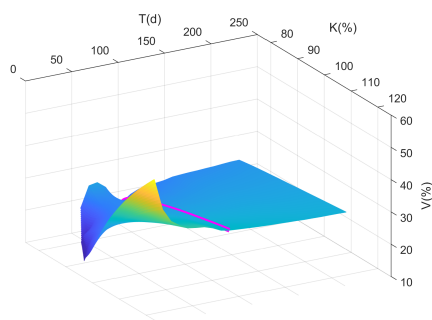
Curvas de Nível



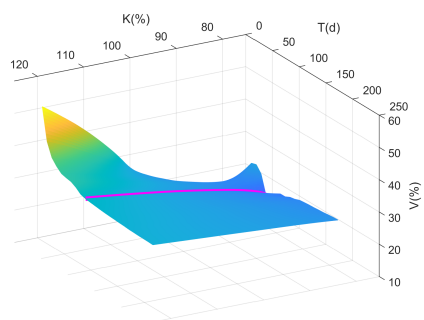
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



Superfície - Visão 240°

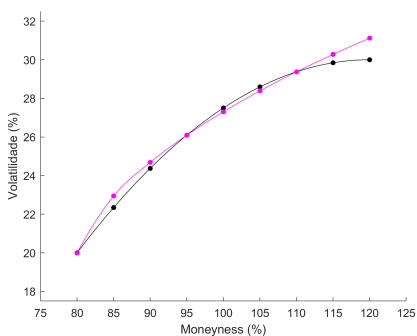


Superfície - Visão 330°

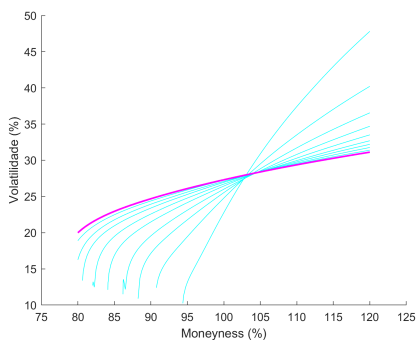
A.1.15 Formato de risco tipo E observado num prazo de 180 dias

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Moneyness | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 |
| Vol Observada | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,63 | 22,50 | 25,63 | 30,00 |
| Vol Calibrada | 22,39 | 20,00 | 19,54 | 20,00 | 20,78 | 21,64 | 22,50 | 23,34 | 24,15 |

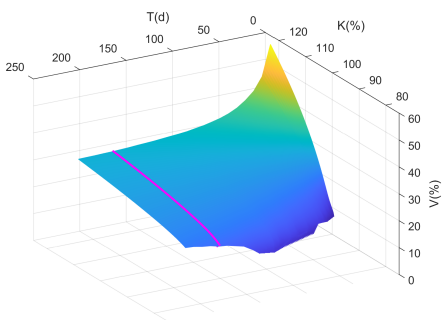
| | | | | | | | | |
|-------------|--------|----------|----------|---------|--------|----------|---------|----------|
| Parâmetro | V_0 | θ | κ | ζ | ρ | α | β | δ |
| Valor Final | 1,6433 | 0,022 | 79,6583 | 2,1741 | 0,2329 | 38,1609 | 28,7138 | 0,4568 |



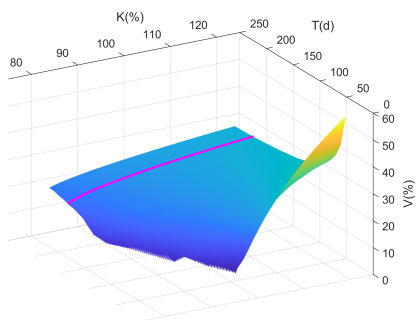
Resultado da Calibração



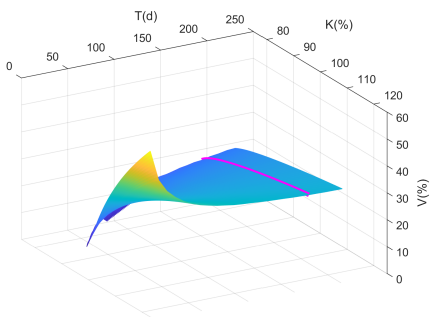
Curvas de Nível



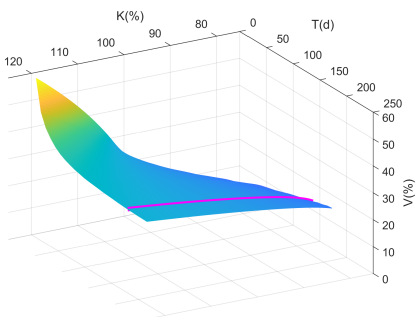
Superfície - Visão 60°



Superfície - Visão 150°



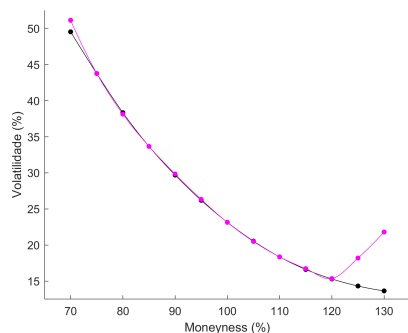
Superfície - Visão 240°



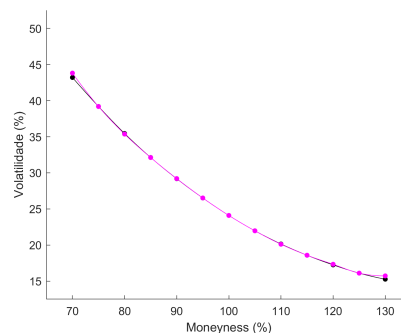
Superfície - Visão 330°

A.2 Dados Reais

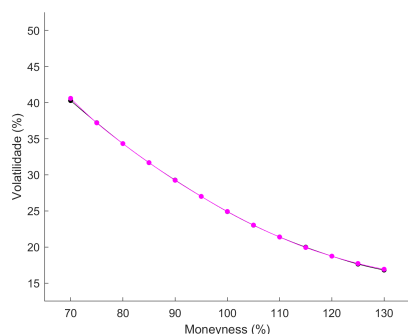
Nesta seção são exibidos os gráficos da volatilidade observada (cor preta) e da volatilidade calibrada (cor magenta) para cada uma das 14 calibrações individuais e para as 2 calibrações conjuntas:



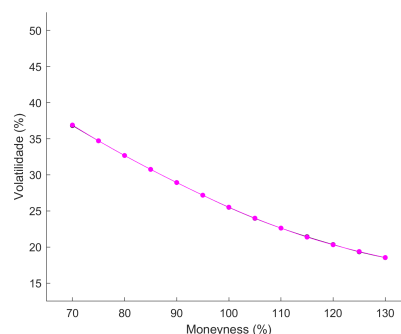
Calibração Individual - 1M



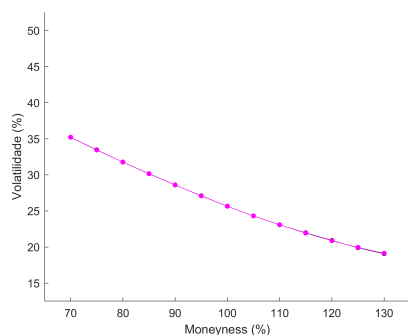
Calibração Individual - 2M



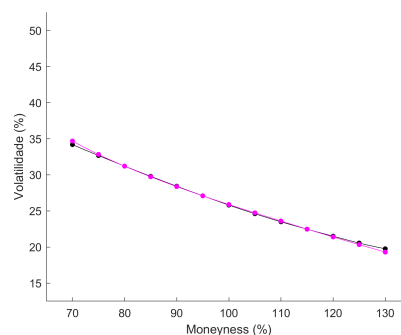
Calibração Individual - 3M



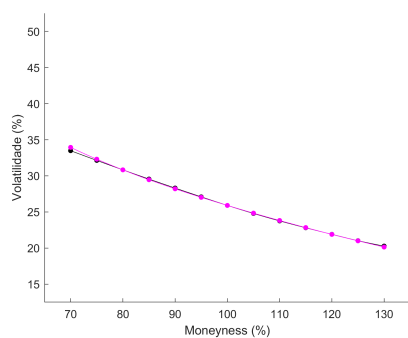
Calibração Individual - 6M



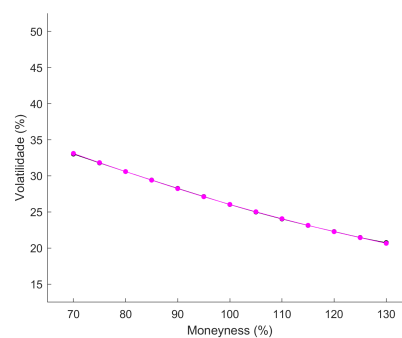
Calibração Individual - 9M



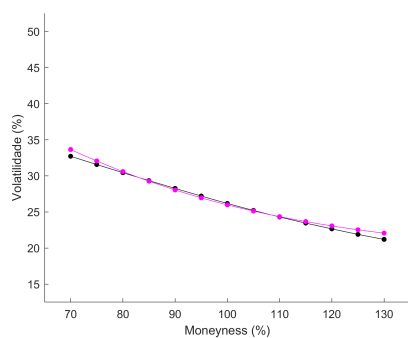
Calibração Individual - 12M



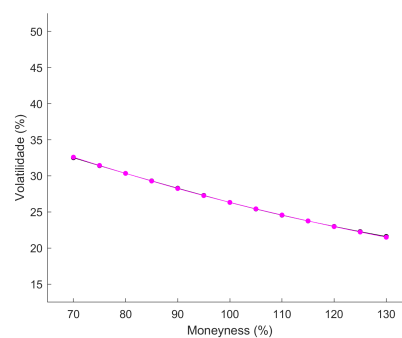
Calibração Individual - 15M



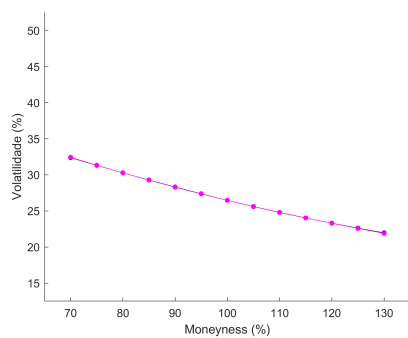
Calibração Individual - 18M



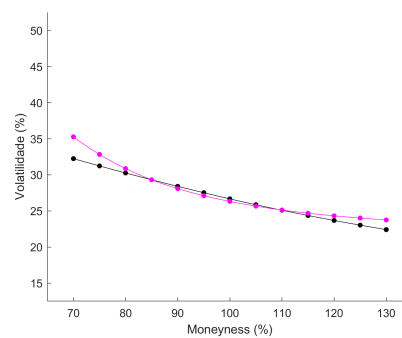
Calibração Individual - 21M



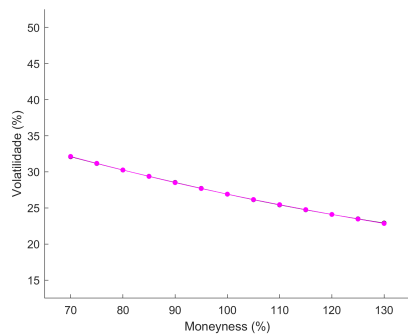
Calibração Individual - 24M



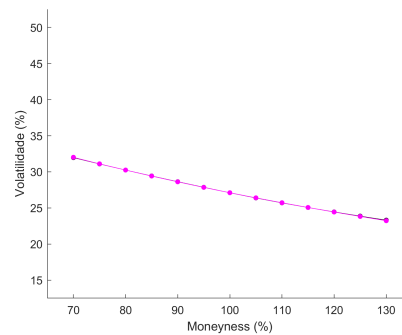
Calibração Individual - 27M



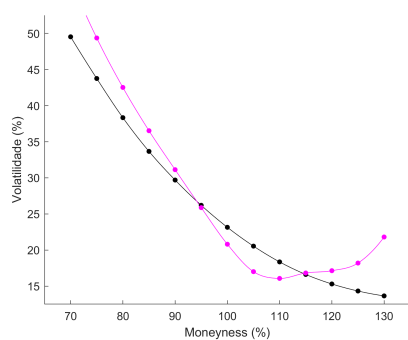
Calibração Individual - 30M



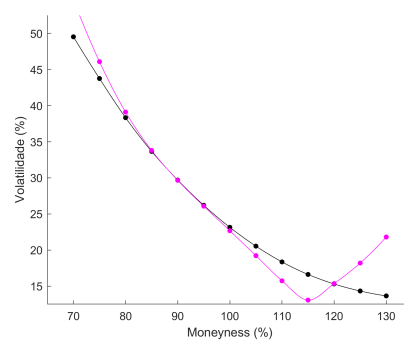
Calibração Individual - 33M



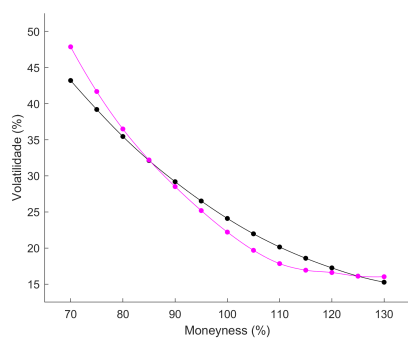
Calibração Individual - 36M



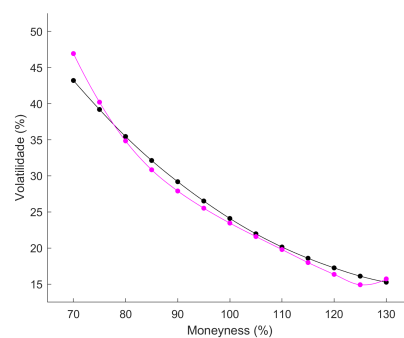
Calibração Conjunta Sem Peso - 1M



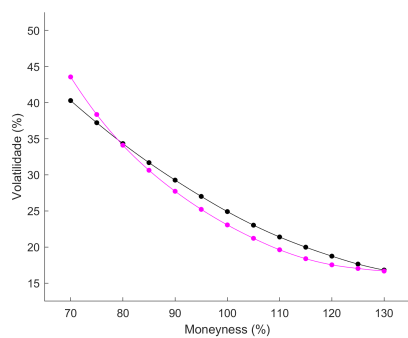
Calibração Conjunta Com Peso - 1M



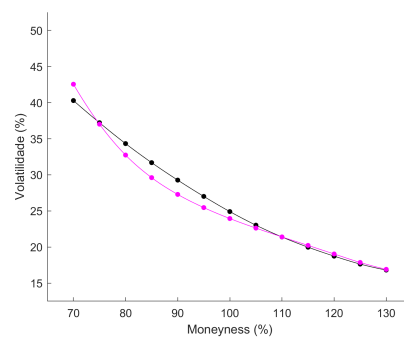
Calibração Conjunta Sem Peso - 2M



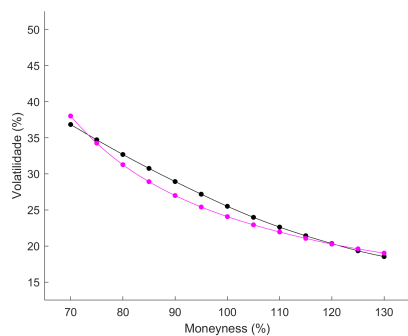
Calibração Conjunta Com Peso - 2M



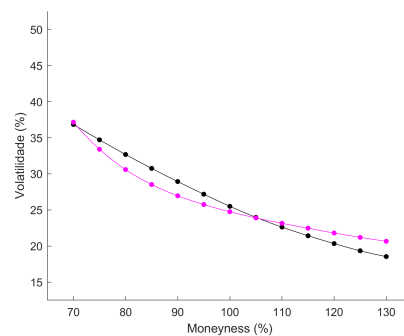
Calibração Conjunta Sem Peso - 3M



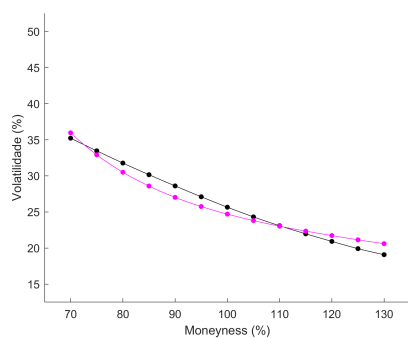
Calibração Conjunta Com Peso - 3M



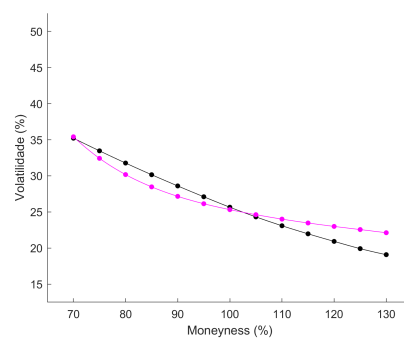
Calibração Conjunta Sem Peso - 6M



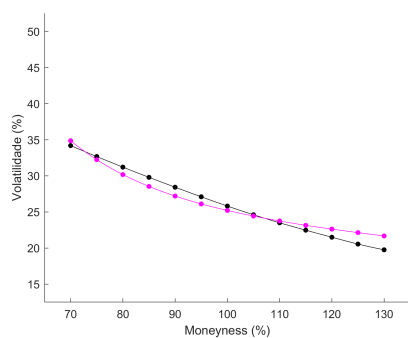
Calibração Conjunta Com Peso - 6M



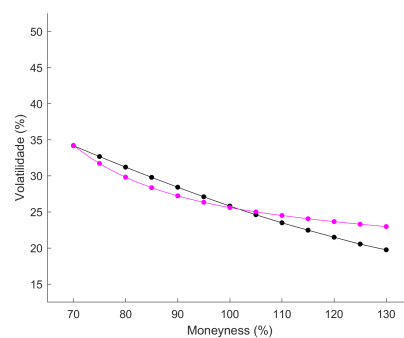
Calibração Conjunta Sem Peso - 9M



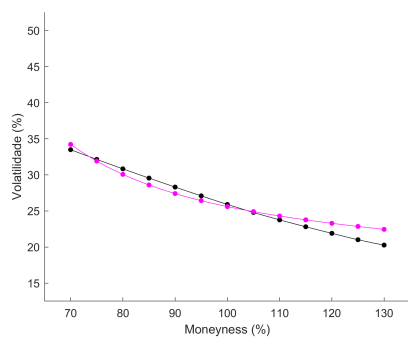
Calibração Conjunta Com Peso - 9M



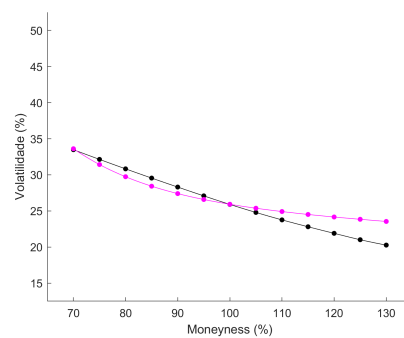
Calibração Conjunta Sem Peso - 12M



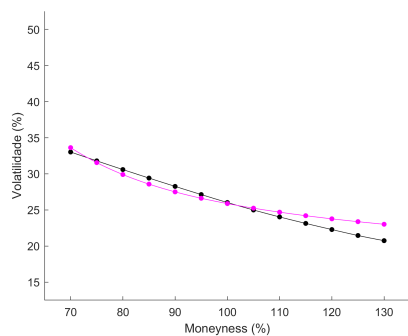
Calibração Conjunta Com Peso - 12M



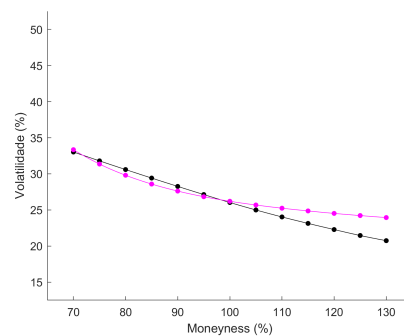
Calibração Conjunta Sem Peso - 15M



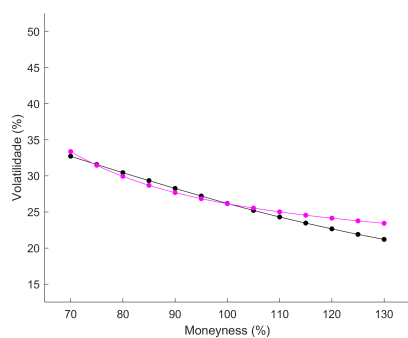
Calibração Conjunta Com Peso - 15M



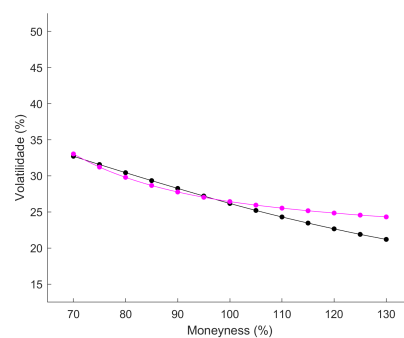
Calibração Conjunta Sem Peso - 18M



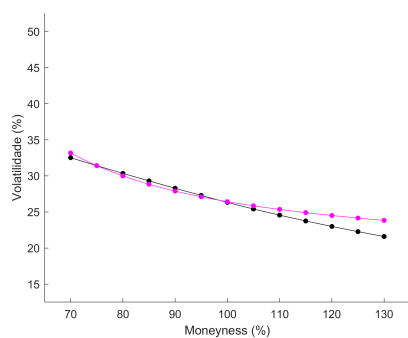
Calibração Conjunta Com Peso - 18M



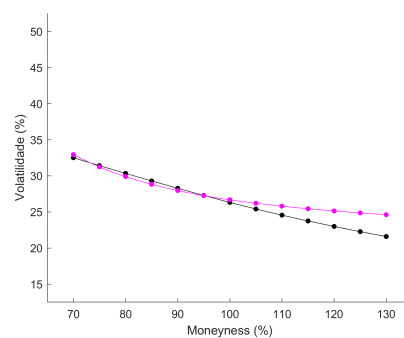
Calibração Conjunta Sem Peso - 21M



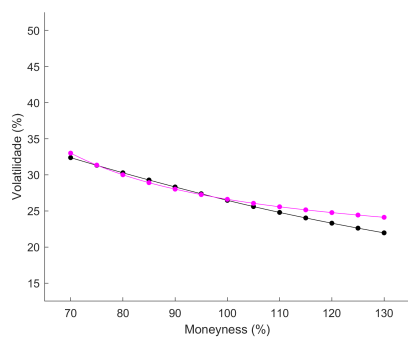
Calibração Conjunta Com Peso - 21M



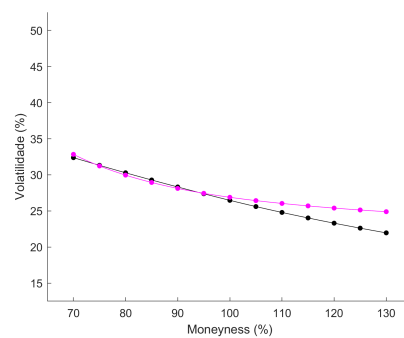
Calibração Conjunta Sem Peso - 24M



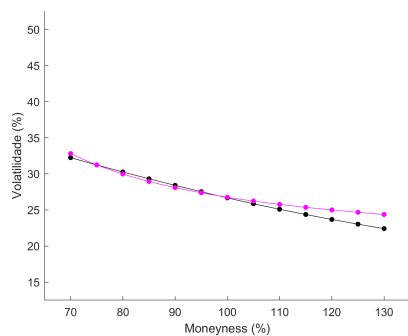
Calibração Conjunta Com Peso - 24M



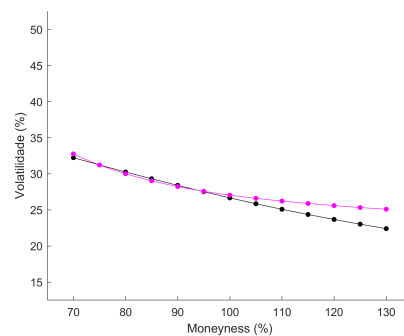
Calibração Conjunta Sem Peso - 27M



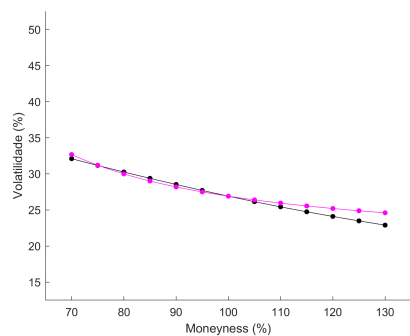
Calibração Conjunta Com Peso - 27M



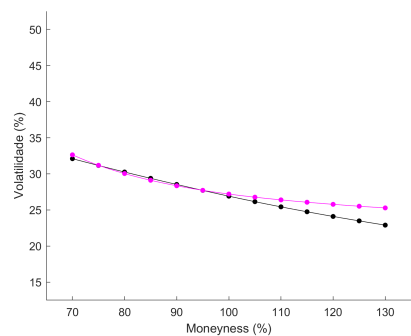
Calibração Conjunta Sem Peso - 30M



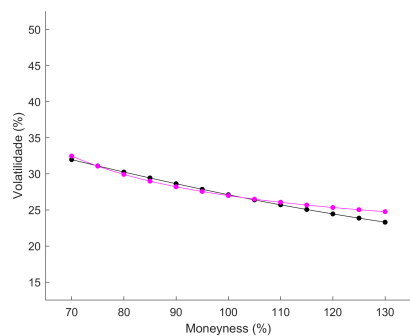
Calibração Conjunta Com Peso - 30M



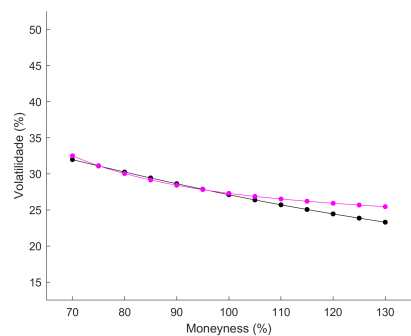
Calibração Conjunta Sem Peso - 33M



Calibração Conjunta Com Peso - 33M



Calibração Conjunta Sem Peso - 36M



Calibração Conjunta Com Peso - 36M