

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS  
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

THALES GUILHERME KUBO DE ARRUDA

**A INFLUÊNCIA DA MATURIDADE DA DÍVIDA PÚBLICA NA  
ETTJ**

São Paulo

2020

THALES GUILHERME KUBO DE ARRUDA

**A INFLUÊNCIA DA MATURIDADE DA DÍVIDA PÚBLICA NA  
ETTJ**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas como requisito para obtenção de título de mestre em Economia

Orientador: Ricardo Ratner Rochman.  
Coorientador: João Ricardo Costa Filho.

São Paulo

2020

Arruda, Thales Guilherme Kubo de.

A influência da maturidade da dívida pública na ETTJ / Thales Guilherme Kubo de Arruda. - 2020.

59 f.

Orientador: Ricardo Ratner Rochman.

Co-orientador: João Ricardo Mendes Gonçalves Costa Filho.

Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Fundação Getulio Vargas, Escola de Economia de São Paulo.

1. Taxas de juros. 2. Títulos públicos. 3. Dívida pública - Brasil. I. Rochman, Ricardo Ratner. II. Costa Filho, João Ricardo Mendes Gonçalves. III. Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Escola de Economia de São Paulo. IV. Fundação Getulio Vargas. V. Título.

CDU 336.3(81)

THALES GUILHERME KUBO DE ARRUDA

## **A INFLUÊNCIA DA MATURIDADE DA DÍVIDA PÚBLICA NA ETTJ**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas como requisito para obtenção de título de mestre em Economia

Data da defesa: 13/07/2020

Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Ricardo Ratner Rochman  
FGV EESP (Orientador)

---

Prof. Dr. João Ricardo Costa Filho  
FGV EESP (Co-Orientador)

---

Prof. Dr. Luiz Fernando Ohara Kamogawa  
Membro externo

# AGRADECIMENTOS

Aos Professores Ricardo Ratner Rochman e João Ricardo Costa Filho, por todo o suporte e amparo que possibilitou a conclusão dessa etapa final do mestrado. Trabalhar sob a orientação de vocês foi uma experiência enriquecedora e espero manter contato para projetos futuros.

À Carol, pelo companheirismo, incentivo e compreensão neste período de árduo crescimento.

Aos meus pais, por toda a atenção, apoio e esforço em todos os momentos que precisei.

A todos os meus colegas de classe, pela amizade e solidariedade, aspectos fundamentais para que nosso ambiente de aprendizado fosse desafiador e divertido.

Aos companheiros da GS, cujo auxílio foi essencial para que esse projeto pudesse ser concluído sem afetar as atividades rotineiras do nosso trabalho.

# RESUMO

Apesar de o principal instrumento de política monetária do Banco Central ser a taxa de curto prazo, são as taxas longas que permitem estimar o nível futuro da demanda agregada. Marçal e Marinho (2012) testam as proposições de Greenwood e Vayanos (2014) examinando quais impactos a oferta de títulos públicos tem sobre a estrutura a termo de taxa de juros. No modelo original, alterações no *duration* da dívida americana afetam a estrutura a termo como um todo, tendo os arbitadores como os responsáveis pela propagação dos choques. Buscando agregar a literatura de Marçal e Marinho (2012), o horizonte temporal de observações foi praticamente dobrado e a metodologia para interpolação dos juros futuros brasileiros foi aproximada para o padrão americano de *swaps on-the-run*. Foi possível constatar que para o intervalo de 2001-2010, o prazo médio tem um efeito significativo sobre a determinação dos *spreads*, corroborando o estudo anterior de Marçal e Marinho (2012). Porém o horizonte completo de 2001-2019 ou o intervalo subsequente 2011-2019 o mesmo resultado não é observado. Um dos possíveis fatores para esse comportamento seria uma quebra estrutural no período da amostra.

**Palavras-chave:** estrutura a termo da taxa de juros, excesso de retorno, oferta de títulos públicos brasileiros, maturidade da dívida pública

# ABSTRACT

Despite the fact that the main instrument Central Banks have for monetary policy is the short term rate, the long dated rates are the ones used to estimate the level of future aggregated demand. Marçal and Marinho (2012) test the propositions from Greenwood and Vayanos (2014), exploring how the forward rate structure is affected by the supply of government bonds. In the original model, changes in American debt duration affect the forward rates curve as a whole, having arbitrageurs as the main participants that propagate shocks. With the objective of expanding Marçal and Marinho (2012) literature, the time horizon of observations was practically doubled, and the swaps interpolation methodology was adjusted to the American standard of on-the-run swaps. It was possible to observe that for the 2001-2010 interval, the debt duration has a significance effect on the curve yield spreads, confirming the results previously observed by Marçal and Marinho. However, for the full 2001-2019 horizon or the later interval of 2011-2019 the same results were not observed. One of the possible motives for this behaviour would be a structural break for the complete period.

**Keywords:** forward interest rates curve, excess returns, supply of Brazilian public bonds, public debt maturity

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Composição da DMPFi sob responsabilidade do Tesouro . . . . .	14
Figura 2 – Distribuição da DMPFi . . . . .	15
Figura 3 – Curva de Juros Interpolada - Parte Curta . . . . .	25
Figura 4 – Curva de Juros Interpolada - Parte Longa . . . . .	25
Figura 5 – Taxas Curtas Versus SELIC . . . . .	26
Figura 6 – Histograma das Diferenças das Taxas . . . . .	26
Figura 7 – Prazo Médio versus Taxas Interpoladas . . . . .	27
Figura 8 – Teste CUSUM - Período de 2001-2019 . . . . .	32
Figura 9 – Curva de Juros Interpolada - Completa . . . . .	37
Figura 10 – Curva de Juros Interpolada - Curta . . . . .	38
Figura 11 – Curva de Juros Interpolada - Longa . . . . .	39
Figura 12 – Prazo Médio versus Spreads (Colorido) . . . . .	40
Figura 13 – Testes de White . . . . .	41
Figura 14 – Resumo de todas as regressões . . . . .	42
Figura 15 – 2001 - 2019 ( <i>Short Rate</i> 1y) . . . . .	43
Figura 16 – 2001 - 2019 ( <i>Short Rate</i> 1m) . . . . .	44
Figura 17 – 2001 - 2019 ( <i>Short Rate</i> SELIC) . . . . .	45
Figura 18 – 2001 - 2010 ( <i>Short Rate</i> 1y) . . . . .	46
Figura 19 – 2001 - 2010 ( <i>Short Rate</i> 1m) . . . . .	47
Figura 20 – 2001 - 2010 ( <i>Short Rate</i> SELIC) . . . . .	48
Figura 21 – 2011 - 2019 ( <i>Short Rate</i> 1y) . . . . .	49
Figura 22 – 2011 - 2019 ( <i>Short Rate</i> 1m) . . . . .	50
Figura 23 – 2011 - 2019 ( <i>Short Rate</i> SELIC) . . . . .	51
Figura 24 – Excessos de retorno . . . . .	52
Figura 25 – Teste CUSUM - Período de 2001-2019 . . . . .	53
Figura 26 – Teste CUSUM - Período de 2001-2010 . . . . .	53
Figura 27 – Teste CUSUM - Período de 2011-2019 . . . . .	54
Figura 28 – Contratos Futuros de DI . . . . .	57



# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatísticas descritivas amostra total (2001-2019) . . . . .	27
Tabela 2 – Estatísticas descritivas 1a Parte (2001-2010) . . . . .	28
Tabela 3 – Estatísticas descritivas 2a Parte (2011-2019) . . . . .	28
Tabela 4 – Regressões Prazo médio da dívida versus ETTJ Interpolada (2001-2010)	29
Tabela 5 – Regressões Prazo médio da dívida versus excesso de retornos (2001-2010)	30
Tabela 6 – Regressões Prazo médio da dívida versus excesso de retornos (2011-2019)	31
Tabela 7 – Exemplo Curva Juros . . . . .	55
Tabela 8 – Resultados Exemplo FRA . . . . .	56

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .	12
3	MODELO TEÓRICO . . . . .	17
4	BASE DE DADOS . . . . .	23
5	RESULTADOS . . . . .	27
6	CONCLUSÃO . . . . .	34
	REFERÊNCIAS . . . . .	35
	APÊNDICE A – GRÁFICOS . . . . .	37
	APÊNDICE B – TABELAS . . . . .	41
	APÊNDICE C – CÁLCULO DO <i>FORWARD SWAP</i> . . . . .	55
	APÊNDICE D – INTERPOLAÇÃO DOS DIS . . . . .	57

# 1 INTRODUÇÃO

Inúmeros são os estudos sobre os componentes da estrutura a termo das taxas de juros (ET TJ) e os diferentes parâmetros que afetam o seu comportamento. Alguns autores como [Bernz \(2014\)](#), [Stona et al. \(2015\)](#) e [Almeida e Faria \(2014\)](#) tentam replicar o modelos de [Adrian, Crump e Moench \(2013\)](#) e [Diebold, Piazzesi e Rudebusch \(2005\)](#) incorporando variáveis macroeconômicas aos modelos da ET TJ buscando um melhor poder preditivo. Também podemos encontrar estudos como [Castro et al. \(2007\)](#) e [Paes \(2003\)](#) onde o principal objetivo é entender os determinantes da duração e da variação da dívida pública brasileira.

[Shousha \(2008\)](#) conclui que a curva de juros possui informações adicionais com relação ao crescimento futuro da economia e que variáveis cíclicas da economia (hiato do produto, taxa de inflação e variação do câmbio nominal) podem explicar até 50% da variação das taxas. O principal instrumento de política monetária do [Banco Central](#) consiste em alterar a taxa de juros de curto prazo mas são as taxas longas que permitem estimar o nível futuro da demanda agregada, motivando os investimentos com horizonte de tempo maior. Dessa maneira, é essencial entender a dinâmica entre as variáveis macroeconômicas, as ações tomadas pelos agentes políticos e o impacto sofrido na economia real.

Raras são as publicações brasileiras como [Marçal e Marinho \(2012\)](#) que tentam relacionar o comportamento da ET TJ com a oferta de títulos públicos. Com o objetivo de aprofundar a literatura desse tema, será replicado o que foi feito por estes autores testando de maneira empírica se existe uma relação entre o maturidade da dívida e a estrutura a termo de taxas de juros. Com o atual cenário pós-crise Covid, uma das discussões principais gira em torno de controlar os *yields* da curva de juros como forma alternativa de política econômica, compreender se o tamanho dos leilões de dívida e a escolha de indexadores para financiamento do governo impactam a ET TJ pode ser de grande utilidade para decisões sobre política econômica e fiscal.

Comparado ao estudo original algumas mudanças foram feitas: 1) a interpolação dos juros segue o formato *on-the-run*; 2) O horizonte temporal foi praticamente dobrado e amostra foi dividida entre a primeira parte compreendendo os anos de 2001-2010, a

segunda parte com os anos de 2011-2019 e o prazo completo de 2001-2019.

A maturidade da dívida impacta os *yields* e os prêmios da curva de juros? A **primeira pergunta** a ser respondida é se seguindo [Marçal e Marinho \(2012\)](#) e utilizando a interpolação americana, conseguiremos replicar os resultados anteriores. A **segunda pergunta** a ser respondida é verificar se aumentando o horizonte temporal para incorporar observações de 2001 a 2019, as mesmas relações estatísticas permanecem inalteradas.

Este trabalho será dividido em 5 seções além da introdução. A seção 2 apresenta a revisão bibliográfica. A seção 3 explica o modelo utilizado. A seção 4 dá mais detalhes sobre a base de dados. A seção 5 discute os resultados. Por fim a seção 6 conclui o trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dentro do campo da estudos de estrutura a termo de juros, duas visões contrastantes podem ser mencionadas. A primeira é a **teoria das expectativas**, ela defende que os juros mais longos devem ser iguais a média da expectativa futura das taxas de curto prazo mais um prêmio pela maturidade, mais comumente conhecido como prêmio de risco. Com a evolução da literatura e a nova abordagem econômica do comportamento racional dos agentes de mercado, o escopo foi ampliado para teoria das expectativas racionais.

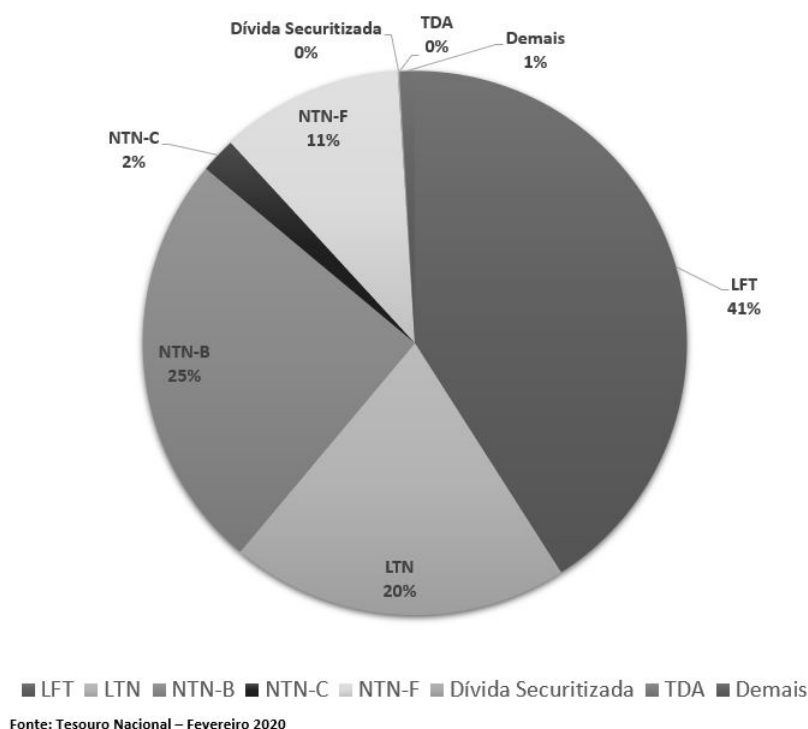
Vale ressaltar que estudos como [Cochrane e Piazzesi \(2005\)](#) defendem que o prêmio de risco é constante no tempo, o que implicaria em uma versão mais extrema da teoria das expectativas, na qual seria possível afirmar que as mudanças na inclinação da estrutura a termo dos juros seriam causadas unicamente pelas mudanças nas expectativas dos agentes. Contestando essa interpretação, [Brito, Duarte e Guillén \(2003\)](#) rejeitam a hipótese de um coeficiente unitário, mas reconhecem o poder preditivo desse diferencial. Esse estudo se limitará a analisar apenas o excesso de retornos dos títulos e não o comportamento do prêmio de risco, variável que exige maiores cuidados para ser testada devido a sua complexidade.

Algumas publicações sobre a validade da teoria das expectativas racionais já foram elaboradas usando dados empíricos brasileiros. [Tabak e Andrade \(2003\)](#) concluem pela rejeição da hipótese para o Brasil, ao passo que [Lima e Issler \(2003\)](#) apresentam resultados apenas parcialmente favoráveis e [Marçal e Pereira \(2007\)](#) mostram que a teoria não consegue descrever os dados de maneira satisfatória.

A segunda é a teoria do **habitat preferido**, modelo desenvolvido por [Vayanos e Vila \(2009\)](#) no qual agentes têm preferências por maturidades específicas com base em suas características individuais. Fundos de pensão e seguradoras teriam preferência por títulos de prazos longos, ao passo que arbitradores tendem a migrar suas alocações conforme os retornos e oportunidades observados no formato da curva de juros. Estes agentes seriam os principais responsáveis por propagar impactos em determinada maturidade da curva para outros vencimentos que a princípio não deveriam ser afetados. Adicionalmente [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) estudam empiricamente como alterações no prazo de maturidade da dívida

pública americana afetam a estrutura de juros como um todo. [Marçal e Marinho \(2012\)](#) adaptam e replicam o modelo para a economia brasileira. A maturidade da dívida pública foi considerada um fator endógeno, ou seja, através dos leilões de venda ou recompra de títulos promovidos pelo [Secretaria Tesouro Nacional](#), o governo pode escolher aumentar ou reduzir a maturidade da dívida.

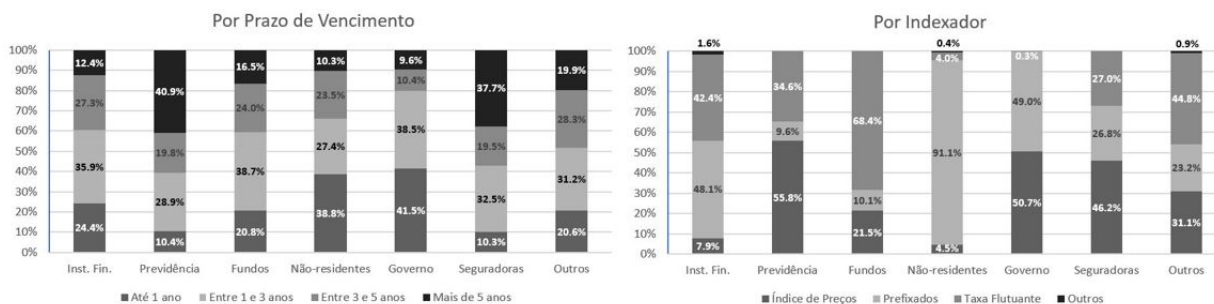
O Ministério da Fazenda, por meio do Tesouro Nacional é o órgão responsável pela administração da Dívida Pública Federal (DPF). A DPF refere-se a todas às dívidas contraídas pelo governo federal para financiamento do seu déficit orçamentário, nele incluído o refinanciamento da própria dívida, e para outras operações com finalidades específicas, definidas em lei. É possível classificar a DPF de acordo com os instrumentos usados para captação de recursos e pela moeda na qual ocorre o pagamento de seus fluxos. Em relação à captação de recursos, esta pode ocorrer por emissão de títulos públicos (sendo por essa razão classificada como mobiliária), ou por contratos, firmados principalmente com organismos multilaterais (sendo esta dívida classificada como contratual). Já sobre a moeda usada para fazer face a seus pagamentos, a dívida é classificada como interna quando os pagamentos são realizados na moeda corrente em circulação no país, no caso brasileiro o real, ou externa, quando os pagamentos são feitos em moeda estrangeira, normalmente o dólar norte-americano

*Figura 1 – Composição da DMPFi sob responsabilidade do Tesouro*

Atualmente, toda a Dívida Pública Federal em circulação no mercado nacional é paga em real e captada por meio da emissão de títulos públicos, sendo por essa razão definida como Dívida Pública Mobiliária Federal interna (DPMFi). A figura 1 mostra a composição atual da dívida interna de acordo com os títulos públicos. Já a Dívida Pública Federal existente no mercado internacional é paga em dólar norte-americano e tem sido captada tanto por meio da emissão de títulos quanto por contratos, sendo por isso definida como Dívida Pública Federal externa (DPFe).

Tomando como base os dados do último relatório mensal da dívida de fevereiro de 2020, o valor da DPF é de aproximadamente R\$ 4,28 trilhões dos quais R\$ 4,09 trilhões correspondem ao estoque de DPMFi. Dentre os títulos utilizados para financiamento interno, as LTNs e NTN-Fs representam 30,95% cujos prazos médios em anos são 1,41 e 3,33 respectivamente. Observando os detentores da dívida, 24,6% são investidores relacionados a Previdência, 24,1% estão com Instituições Financeiras, 26,9% com Fundos de Investimento e 10,9% com Investidores Não-residentes. Governo, Seguradoras e Outros têm menos de 5% cada.

Figura 2 – Distribuição da DMPFi



Fonte: Tesouro Nacional – Fevereiro 2020

Também é interessante analisar a composição da carteira dos investidores na figura 2. Previdência e Seguradoras têm a maior parte do seu portfolio alocado em títulos com prazo superior a 5 anos, além de possuírem uma clara preferência por ativos relacionados a Índice de Preços. O que condiz com a teoria de habitat preferido proposta por Vayanos e Vila (2009).

Fundos e Instituições financeiras podem ser interpretados como arbitradores. Analisando os prazos dos títulos que eles detêm, vemos diferentes maturidades com destaque para preferência para títulos com menos de 3 anos. Quando analisamos os tipos de ativos nos portfólios, fica evidente a grande quantidade de papéis em taxa flutuante detida pelos Fundos. Isso acontece pois eles utilizam as LFTs tanto para caixa quanto para margem de operações com derivativos. Já para as Instituições Financeiras é comum que elas sejam *market-makers* de títulos públicos, provendo liquidez para os diversos investidores. Dessa maneira faz sentido que elas possuam uma alocação mais balanceada com LFTs que são usadas com o mesmo propósito dos Fundos e um estoque de títulos prefixados com objetivo de negociá-los no mercado secundário.

Outra informação que vale comentar é a clara preferência dos Investidores Não-residentes para títulos pré-fixados. Um dos fatores que explica essa preferência é que a mecânica dos títulos prefixados se assemelham aos títulos negociados internacionalmente, as LTNs são *zero-coupon* como as *T-bills* e as NTN-Fs são similares as *Treasuries*. Outro fator importante é porque títulos pré-fixados permitem conhecer o rendimento futuro no momento do investimento, possibilitando que os Não-residentes façam o *hedge* cambial com derivativos.

O cálculo do prazo médio/duração do estoque da dívida leva em consideração o



prazo de vencimento e o estoque financeiro de cada série de emissão dos títulos. Seu cálculo é realizado considerando uma média ponderada onde os estoques financeiros de cada série entram como fatores de ponderação, conforme a metodologia do Banco Central: Prazo médio do estoque total =  $\sum_{i=1}^n Ei \times Pi / \sum_{i=1}^n Ei$ , onde  $Ei$  e  $Pi$  representam, respectivamente, o estoque financeiro e o prazo do ativo  $i$ , para  $i \in [1, n]$ , onde  $n$  é o total de ativos.

### 3 MODELO TEÓRICO

A metodologia empregada nesse estudo será uma combinação da literatura original desenvolvida por [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) e da adaptação ao mercado brasileiro realizada por [Marçal e Marinho \(2012\)](#).

O modelo original possui três agentes: investidores com habitat preferido, arbitadores e o Governo. Investidores escolhem qual maturidade preferem alocar seu capital de acordo com a rentabilidade esperada no futuro, o horizonte de investimento, a aversão ao risco, etc. Fundos de renda fixa de curto prazo tendem a preferir papéis curtos, menos voláteis e com alto grau de liquidez (alguns deles têm definido em seu regulamento a maturidade máxima que podem investir). Fundos de pensão e seguradoras tendem a preferir títulos mais longos que apesar de possuírem maior volatilidade, os permitem atingir sua meta atuarial de rentabilidade. Para efeitos de simplificação iremos assumir que esses gestores de ativos não migram suas preferências na estrutura a termo, pois se o fizessem estariam se comportando como arbitadores.

Arbitadores são os principais responsáveis pela propagação dos choques causados pelo Governo para o restante da curva de juros. Eles interligam os papéis de curto e longo prazo de acordo com oportunidades percebidas. Por exemplo, se o [Tesouro Nacional](#) anunciar um leilão de recompra de títulos curtos, uma maior demanda por tais papéis faz com que a taxa de juros curta diminua em relação ao juros longo, fundos de renda fixa de curto prazo não deslocarão sua demanda para maturidades longas, criando uma oportunidade para arbitadores venderem os papéis curtos e comprarem papéis longos. Portanto, mesmo que a taxa de juros inicialmente atingida seja a parte mais curta, a estrutura a termo como um todo poderia ser afetada.

Por fim temos o Governo, que por meio de política econômica e/ou fiscal pode recomprar ou emitir títulos públicos. A oferta de títulos será considerada endógena na análise, variando de acordo com a estratégia macroeconômica dos agentes do Governo.

O modelo foi construído em tempo contínuo e considera que a estrutura dos juros futuros no instante  $t$  é constituída por títulos zero-cupom com maturidade no intervalo  $(0, T]$  e valor de face igual a um. O preço de um título no instante  $t$  com maturidade  $\tau$  é

definido por  $P_t^\tau$ . O *yield* ( $y$ ) de um título com vencimento  $\tau$  em  $t$  é definido por

$$y_t^\tau = -\frac{\log P_t^{(\tau)}}{\tau}, \quad [3.1]$$

onde a demanda dos investidores com habitat preferido e dos arbitradores depende dos *yields* pagos pelo papel.

Os autores definem  $r_t$  como a taxa curta (*short rate*), que seria o limite do *yield*  $y_t^\tau$  quando  $\tau$  tende a zero. Eles assumem que arbitradores podem escolher a quantidade de títulos no instante  $t$  com vencimentos  $\tau$  definida por  $x_t^\tau$  que pretendem alocar em seu portfolio com o intuito de maximizar riqueza  $W_t$ . Dessa maneira sua restrição orçamentaria seria

$$dW_t = \int_0^T x_t^{(\tau)} \frac{dP_t^{(\tau)}}{P_t^{(\tau)}} d\tau + \left( W_t - \int_0^T x_t^{(\tau)} d\tau \right) r_t dt. \quad [3.2]$$

O primeiro termo da equação é o retorno obtido por investir nos títulos e o segundo seria o retorno por investir o restante da riqueza na taxa de juros curta. Portanto seu objetivo de maximizar riqueza poderia ser definido por

$$\max_{\{x_t^{(\tau)}\}_{\tau \in (0, T]}} \left[ E_t(dW_t) - \frac{\alpha}{2} \text{Var}_t(dW_t) \right], \quad [3.3]$$

onde  $\alpha$  seria o coeficiente de aversão ao risco.

Vale lembrar que a taxa curta  $r_t$  é exógena e segue um processo Ornstein-Uhlenbeck com reversão a média:

$$dr_t = k_r (\bar{r} - r_t) dt + \sigma_r dB_r t \quad [3.4]$$

Nessa equação temos que  $\bar{r}$  é a média de juros de curto prazo,  $\sigma_r$  é a volatilidade das taxas de juros e  $B_r t$  representa o movimento Browniano. As taxas de juros longas seriam determinadas através de operações no mercado de títulos públicos e derivativos futuros entre investidores e arbitradores.

A oferta líquida de títulos ( $s_t^\tau$ ) é dada pela oferta total de títulos públicos ( $\beta_t^\tau$ ) menos a demanda por esses papéis ( $f(\tau, y_t^\tau)$ ), que define tanto o comportamento dos arbitradores já mencionado acima, quanto a demanda dos investores com habitat preferido. A oferta líquida de títulos públicos é uma função linear decrescente dos *yields*:

$$s_t^\tau = \beta_t^\tau - f(\tau, y_t^\tau) \quad [3.5]$$

E a oferta total ( $\beta_t^\tau$ ) é definida da seguinte maneira:

$$\beta_t^{(\tau)} = \bar{\beta} + \sum_{k=1}^K \theta_k(\tau) \beta_{k,t} \quad [3.6]$$

Na qual  $\bar{\beta}$  é uma constante,  $\beta_{k,t}$  ( $k=1, \dots, K$ ) são os fatores de risco que impactam demanda e oferta e  $\theta_k(\tau)$  ( $k=1, \dots, K$ ) são funções que definem como cada fator de risco se comporta entre as diferentes maturidades. Para exemplificar vamos assumir que risco de *default* seja o  $k=1$  e inflação seja o  $k=2$ . Temos então dois fatores que impactam o comportamento da oferta e demanda de títulos em  $t=0$  ( $\beta_{k,0}^\tau$ ) onde  $\theta_1(\tau)$  é a função que determina a parcela de  $\beta_{1,0}^\tau$  que varia de acordo com alterações no preço do CDS de Brasil (perspectiva de *default*) e  $\theta_2(\tau)$  seria o que determina a parcela de  $\beta_{2,0}^\tau$  que se altera quando a perspectiva futura do IPCA muda (inflação). Greenwood e Vayanos (2014) demonstraram que se  $\theta_k(\tau)$  fosse independente da maturidade, alterações nos fatores de risco  $\beta_{k,t}$  deslocariam a curva toda de juros em um movimento paralelo, uma vez que todas as maturidades seriam afetadas na mesma intensidade. O que podemos ver na prática é que mudanças em fatores de risco específicos podem não apenas afetar as maturidades com intensidades diferentes como em alguns casos tal impacto pode causar movimentos opostos (*steepening* ou *flattening* da curva a termo de juros).

Os arbitradores são de vital importância para a propagação dos movimentos ao longo da estrutura a termo, pois cada vencimento tem investidores específicos, logo se não existissem arbitradores, os choques de oferta seriam isolados a cada maturidade específica. Como mostrado na equação (3.3), a aversão ao risco dos arbitradores (coeficiente  $\alpha$ ) está diretamente relacionada com a intensidade de propagação dos choques. Quando arbitradores têm elevado grau de aversão ao risco, a propagação fica limitada a taxas dentro do intervalo de maturidade que foi atingido (seja por um choque macroeconômico ou política do Governo) dado que o apetite por alocar recursos em outros intervalos será menor.

Como qualquer investimento em títulos expõe o arbitrador a um risco maior do que a taxa curta ( $r_t$ ), os papéis longos devem oferecer um retorno esperado positivo. Se a taxa curta for relativamente mais elevada do que os juros dos títulos longos, os arbitradores venderão os papéis longos para alocar seus recursos na taxa curta. De maneira contrária, se houver alguma mudança na estratégia do Governo levando-os a ofertar papéis no mercado, arbitradores podem enxergar isso como uma oportunidade para comprar títulos longos e

vender taxa curta (oferta maior no mercado diminui o preço e aumenta o *yield* dos ativos, tornando-os mais atrativos para investimento). Como papéis longos têm um *duration* maior que os curtos, a quantidade de recursos investida em ambos os vencimentos não é igual. O montante financeiro vendido nos títulos curtos é maior do que o montante financeiro comprado nos títulos longos (assumindo que o arbitrador quer um portfólio com o mesmo risco de *duration*). Concluimos então que a curva toda de juros termina com *yields* mais elevados do que observados antes do Governo emitir dívida.

As proposições abaixo são demonstradas teoricamente no trabalho de [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) e com base nelas criamos as quatro hipóteses que serão testadas na parte empírica desse trabalho.

**Proposição 1 (Oferta e *Yields*).** Um choque no fator de oferta ( $\beta_t$ ) move os *yields* dos títulos para a mesma direção do choque. Além disso o efeito tende a aumentar conforme a maturidade.

**Proposição 2 (Oferta e Retornos Esperados).** Um choque no fator de oferta move instantaneamente os retornos esperados de todos os títulos na mesma direção do choque. Além disso, o efeito tende a aumentar conforme a maturidade.

**Proposição 3 (Retornos Esperados vs *Yields*).** Um choque no fator de oferta tem um efeito maior no retorno esperado do que nos *yields*.

**Proposição 4 (Aversão ao Risco dos Arbitradores).** O efeito do fator de oferta nos retornos esperados aumenta a medida que a aversão ao risco dos arbitradores aumenta. Ou seja, quando  $\alpha$  aumenta, maior o efeito de  $\beta_t$  nos retornos esperados.

Das proposições teóricas acima, foram definidas quatro hipóteses a serem testadas. A **primeira hipótese** diz: os *yields* da ETTJ com maturidade de  $\tau$  anos crescem a medida que a maturidade da dívida pública aumenta. Para analisar empiricamente a hipótese acima, usaremos a técnica de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), onde a maturidade média dos títulos e a *short rate* são as variáveis independentes, pois elas mudam de acordo com a estratégia de administração da dívida do governo, ao passo que as taxas de juros interpoladas são as variáveis dependentes. A idéia é examinar o impacto que mudanças na oferta de títulos públicos causaria nos *yields* das taxas longas.

Também é importante esclarecer algumas diferenças de metodologia entre os autores

anteriormente citados. [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) usam na regressão apenas o *yield* das maturidades longas, e a *short rate* entra como uma variável independente junto com o prazo médio. [Marçal e Marinho \(2012\)](#) usam o *spread* entre as maturidades longas e a *short rate*.

Método Greenwood e Vayanos:

$$y_t^{(\tau)} = a + bX_t + cy_t^1 + e_t \quad [3.7]$$

Método Marçal e Marinho:

$$(y^\tau - y^1)_t = a + bX_t + e_t \quad [3.8]$$

Nas regressões acima,  $y_t^{(\tau)}$  seria a taxa longa, definida por uma constante  $a$ , um coeficiente  $b$  atrelado ao prazo médio  $X_t$ , um coeficiente  $c$  correspondente a variável da taxa curta  $y_t^1$  e  $e_t$  que é o erro padrão. De acordo com [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) usar a *short rate* como uma variável dentro da equação ou usar como um spread da maturidade  $\tau$  não deveria afetar o resultado final, de qualquer maneira foram testados os dois modelos alternando a *short rate* entre a taxa de um mês, um ano e SELIC, além de usar *lags* de 4 e 36 períodos para os erros padrões. Como os resultados foram similares entre si, esse estudo utilizará o modelo original de [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) para as regressões.

Uma diferença relevante da base de dados desse estudo versus os estudos anteriores, é que a estrutura a termo dos juros é considerada como dada, ou seja, não foi estimada a partir dos *yields* dos títulos da DPF. Acredito que para o Brasil, existe influência dos juros futuros dos preços dos títulos públicos e gostaria de ver quais resultados chegaremos partindo dessa suposição (mais detalhes serão apresentados na seção sobre a base de dados).

A **segunda hipótese** diz que o excesso de retorno entre títulos com maturidade em  $\tau$  anos e um ano cresce à medida que a maturidade da dívida pública aumenta. Para calcular o excesso de retorno utilizaremos a definição de [Cochrane e Piazzesi \(2005\)](#). Tais autores consideram um cenário onde o investidor toma dinheiro emprestado a taxa curta  $r_t$ , aplica o recurso em um título de maturidade  $\tau$  e carrega esse investimento por um ano, vendendo o título que agora possui vencimento  $\tau - 1$  no período seguinte.

[Cochrane e Piazzesi \(2005\)](#) usam o log nas variáveis preço e retorno, nas equações abaixo para finalidade didática a nomenclatura foi suprimida com o objetivo de deixar

as fórmulas visualmente mais "limpas". Também foi alterada a sintaxe original para não confundir com termos já utilizados anteriormente nesse estudo.

Temos que o log da taxa *forward* ( $Fr$ ) para um vencimento  $\tau$  no tempo  $t$  para o empréstimo entre o  $t+\tau-1$  e  $t+\tau$  como:

$$Fr_t^{(\tau)} = P_t^{(\tau-1)} - P_t^{(\tau)} \quad [3.9]$$

Podemos então escrever que o log do retorno esperado no próximo período ( $Ret_{t+1}$ ) de comprar um título  $\tau$  no tempo  $t$  e vender esse mesmo título em  $t+1$  com vencimento agora  $\tau-1$  como:

$$Ret_{t+1}^{(\tau)} = P_{t+1}^{(\tau-1)} - P_t^{(\tau)} \quad [3.10]$$

Logo, subtraímos desse retorno o custo inicial do empréstimo que nesse caso é a própria taxa do título de um ano para chegar ao excesso de retorno ( $RetX_{t+1}$ ):

$$RetX_{t+1}^{(\tau)} = Ret_{t+1}^{(\tau)} - y_t^{(1)} \quad [3.11]$$

Outra maneira de chegar no excesso de retorno seria calcular a taxa *forward* equivalente a  $\tau$  versus  $\tau-1$  (mais detalhes no apêndice), o que nos levaria a:

$$RetX_{t+1}^{\tau} = [\tau y^{\tau} - (\tau - 1)y^{\tau-1}] - y_t^{(1)} \quad [3.12]$$

A **terceira hipótese** diz que tal relação se torna mais forte à medida que  $\tau$  aumenta, ou seja os coeficientes deveriam ser maiores conforme os prazos dos juros aumentam. E a **quarta hipótese** afirma que as variações no prazo médio terão maior efeito nos excessos de retorno do que nos *yields*, portanto os coeficientes dos excessos de retorno deveriam ser maiores em termos absolutos do que os coeficientes dos *yields*.

## 4 BASE DE DADOS

Greenwood e Vayanos (2014) estimaram a estrutura a termo com base nos *yields* das *Treasuries* ao passo que a reduzida liquidez de alguns títulos brasileiros não nos permite seguir a mesma metodologia uma vez que corremos o risco de comprometer os resultados da análise. Irei utilizar os contratos de juros futuros negociados na B3 (Contratos *swap* de DI pré-fixado) como a estrutura a termo brasileira e uma *proxy* de como se comportariam as taxas dos títulos públicos brasileiros.

O mercado brasileiro tem algumas peculiaridades relevantes quando comparado ao mercado americano. Apesar de a liquidez dos títulos públicos aqui ser reduzida para maturidades mais longas, os DIs são os derivativos de *swap* mais líquidos da América Latina e um dos mais líquidos entre os mercados emergentes do mundo. Um reflexo disso é a maneira como *market makers* negociam títulos no mercado secundário. Quando uma contraparte busca um preço para um lote de papéis, os *dealers* fazem o *hedge* do risco de taxa primeiro no contrato futuro de DI para depois buscar o papel que será entregue para a contraparte com quem fechou negócio em leilões de corretoras. O diferencial entre a taxa do contrato de DI e o *yield* do título público é chamado de "casado".

Apesar do argumento mais lógico para a definição do valor do casado ser a diferença entre o risco de *default* da B3 (contraparte do contrato futuro) e do Governo Federal (contraparte do título público), na prática o que observamos é que os *market makers* enxergam o risco de crédito de ambos como similares, portanto o principal fator que define se o casado vai ser positivo ou negativo é a própria oferta e demanda dos títulos públicos. Em condições normais de mercado, *broker-dealers* preferem ter o contrato de DI em seu portfólio e não o papel em si. Isso tem duas explicações principais: 1) O DI é mais líquido que o *bond*; 2) O DI por ser um derivativo futuro, permite maior alavancagem uma vez que para ter exposição no *swap* do juros futuro, não é necessário desembolsar todo o caixa. Portanto, o papel costuma operar com um *yield* maior do que as taxas dos *swaps* de DIs correspondentes (casado positivo). Vale lembrar que além dos fluxos dos investidores, intervenções do Tesouro como leilões de rolagem de dívida ou até mesmo recompra de títulos também impactam o valor do casado. Podemos argumentar então que no mercado



brasileiro de títulos públicos os preços dos papéis também tendem a ser influenciados pelo mercado de juros futuros (*swaps* DI) e não necessariamente o contrário.

Devido aos períodos conturbados de hiperinflação, uma grande quantidade de títulos públicos indexados era utilizada para compor a dívida pública. Portanto nesse estudo foram considerados os anos de 2001 a 2019 como período de análise. A partir de 2001 não apenas a curva de juros teve a volatilidade reduzida versus padrões históricos, como o horizonte de contratos de juros futuro com liquidez razoável foi expandido acima de 3 anos. Interessante observar que apesar de hoje em dia existirem contratos futuros na B3 com maturidade superior a 15 anos, sua liquidez ainda é consideravelmente reduzida sendo a maior parte das operações nos *swaps* pré-fixados ainda concentrada em contratos com vencimento de até 5 anos.

O histórico das taxas dos DIs utilizadas nesse trabalho foram extraídas do base de dados da Bloomberg que é abastecido com os preços de fechamento diários da B3. É muito importante observar que os nossos derivativos de contratos futuros de juros têm uma diferença quando comparados aos *swaps* americanos: os contratos brasileiros possuem a data de maturidade fixa ao passo que os americanos (e a maioria dos juros de países desenvolvidos) tem maturidade *on-the-run*. Isso quer dizer ao contratar um *swap* de 1 ano no mercado americano, você tem exatamente a taxa de juros começando agora e vencendo daqui um ano. O mesmo não é válido para o mercado brasileiro, para a parte dos juros curtos, os contratos tem maturidade fixa sempre com o vencimento no primeiro dia útil de cada mês. Para vencimentos intermediários, existem apenas contratos vencendo em Janeiro e Julho e para a parte mais longa da curva, apenas contratos com vencimento em Janeiro.

Para replicar a mesma metodologia observada em [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) a maneira correta seria interpolar os DIs exponencialmente porém neste trabalho foi feita uma aproximação linear descrita com mais detalhes no apêndice. A maior dificuldade encontrada foi construir a base de dados, uma vez que a extração e a organização cronológica do histórico dos contratos futuros foi feita manualmente para cada vencimento. As Figuras 3 e 4 mostram a ETTF interpolada. Os vencimentos foram separados em dois gráficos para facilitar a visualização.

Figura 3 – Curva de Juros Interpolada - Parte Curta

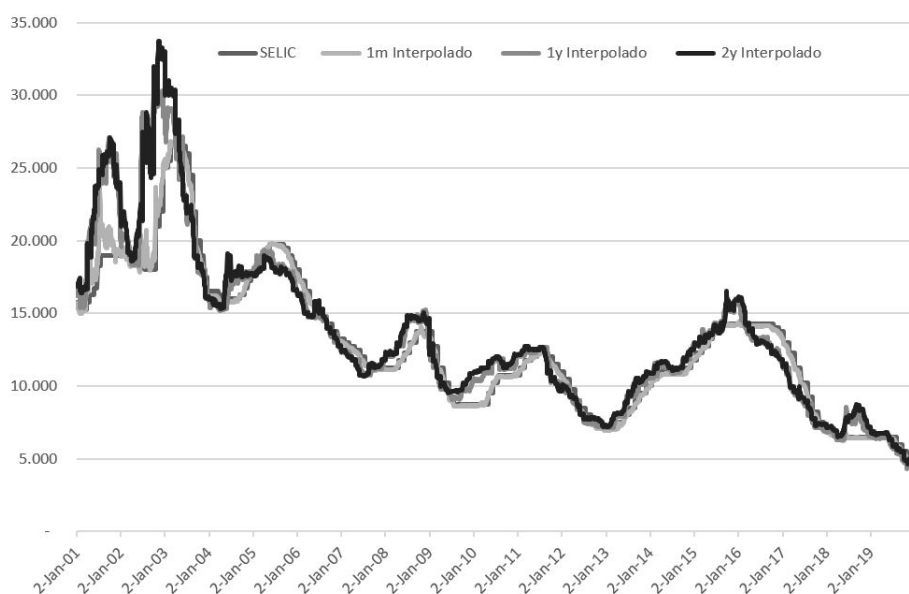
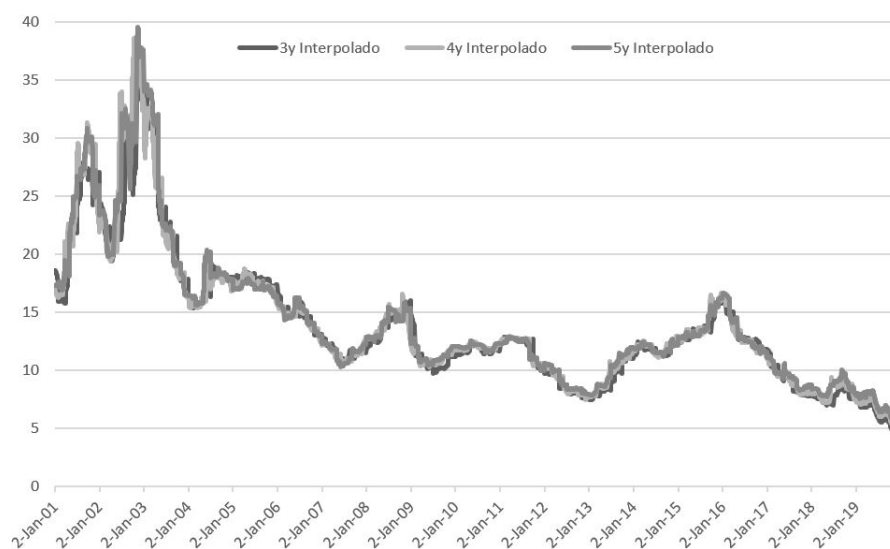
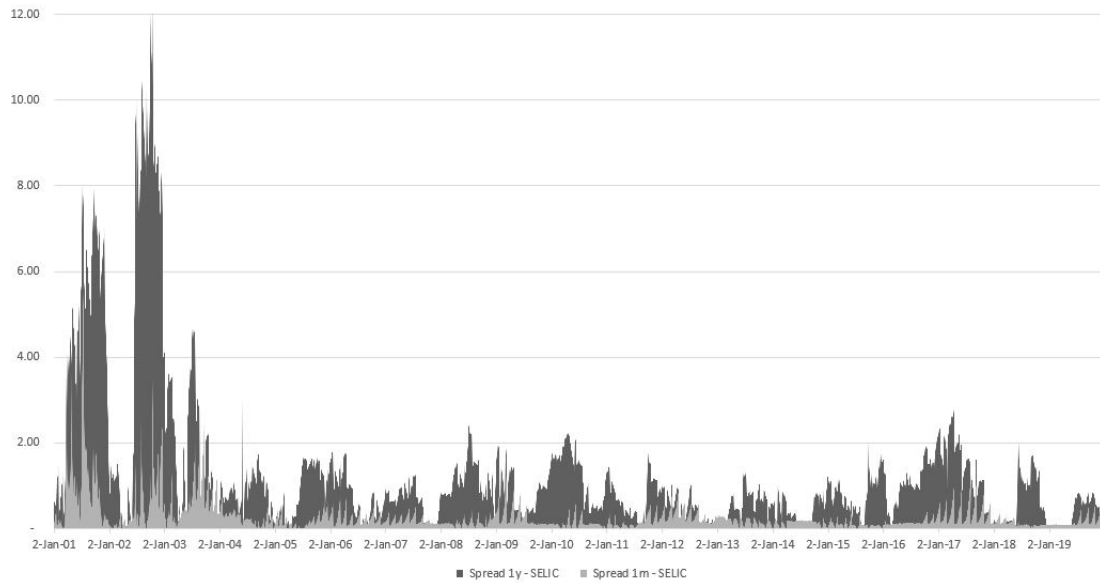


Figura 4 – Curva de Juros Interpolada - Parte Longa



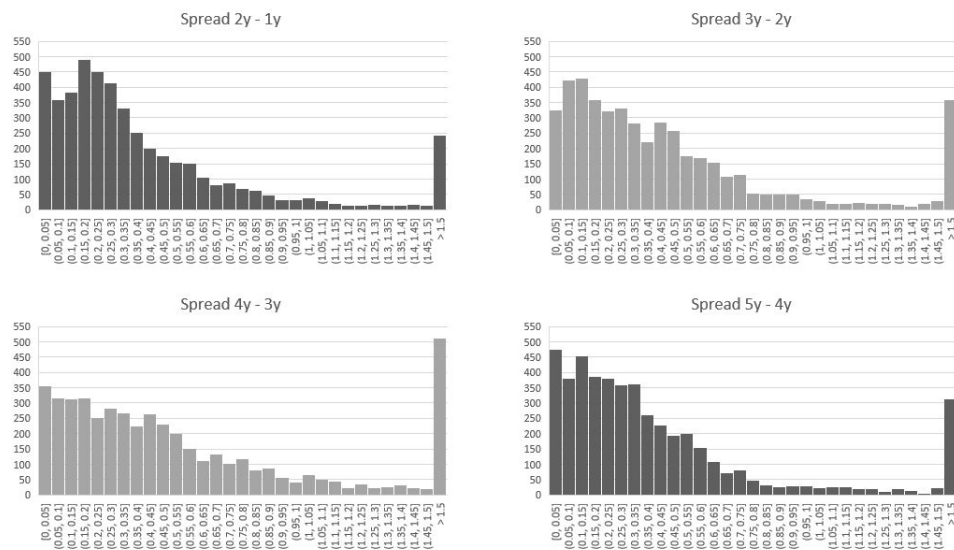
A Figura 5 compara em valores absolutos a diferença entre as taxas curtas de um mês e 1 ano contra a taxa SELIC. Podemos observar que a taxa de um mês tende a acompanhar a SELIC com um *spread* consideravelmente mais baixo do que a taxa de um ano. O que faz sentido uma vez que investidores deveriam exigir um prêmio maior pela incerteza de maturidades maiores.

Figura 5 – Taxas Curtas Versus SELIC



A Figura 6 mostra as diferenças entre dois pontos subsequentes das taxas interpoladas. Foram construídos então histogramas com intervalos de 0.05%, o objetivo aqui é avaliar se existe algum padrão na maneira que elas interagem entre si. É fácil notar que a parte “curta” (2y-1y) e a parte “longa” (5y-4y) da ETTJ possuem uma concentração nas variações menores. Ao passo que o “miolo” da curva (3y-2y e 4y-3y) não apenas tem histogramas mais distribuídos como também possui mais variações acima de 1.5%.

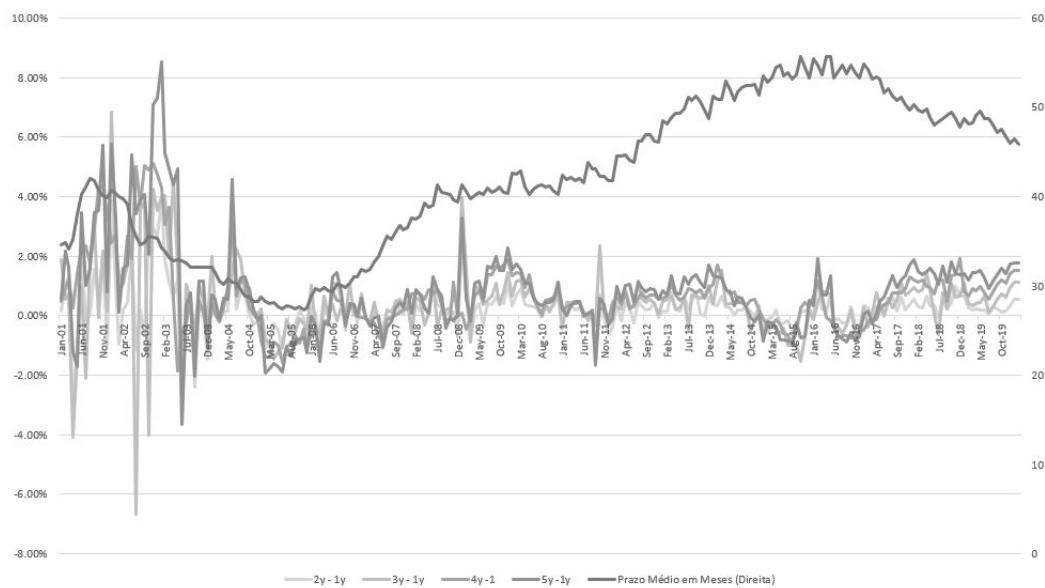
Figura 6 – Histograma das Diferenças das Taxas



## 5 RESULTADOS

Com o objetivo de facilitar a visualização para o horizonte completo, será comparado o prazo médio com a diferença entre a taxa interpolada de cada *swap* e a *short rate*. A Figura 7 mostra essa comparação. Apenas olhando para o horizonte inteiro da amostra, não parece existir correlação entre o o prazo da dívida, que aumentou consideravelmente desde 2001, e os *spreads* das taxas de juros, que aparentam oscilar entre um intervalo limitado ao longo dos anos.

*Figura 7 – Prazo Médio versus Taxas Interpoladas*



Antes de entrarmos nos resultados das regressões, é valido mencionar alguns detalhes sobre a base de dados e o comportamento das variáveis.

*Tabela 1 – Estatísticas descritivas amostra total (2001-2019)*

	PM	1y	2y	3y	4y	5y
Mínimo	27.28	4.43	4.59	5.07	5.51	5.85
1o Quartil	34.78	9.73	9.95	10.22	10.47	10.52
Mediana	41.31	12.32	12.36	12.41	12.32	12.30
Média	42.01	13.40	13.65	13.84	14.04	14.23
3o Quartil	49.61	15.84	16.03	15.96	16.23	16.37
Máximo	55.73	29.97	33.03	33.51	34.74	37.62
Desv. Padrão	8.48	5.58	5.73	5.83	6.07	6.21

Olhando para a Tabela 1, observamos que a média do prazo médio da dívida esta

próxima da mediana, indicando uma distribuição centralizada dos dados, ao passo que as médias dos *swaps* são maiores do que suas respectivas medianas, indicando que a amostra é ligeiramente assimétrica à direita. Os desvios padrões crescem a medida que a maturidade dos *swaps* aumenta, em linha com a teoria de que a parte mais longa da curva costuma ser mais volátil.

*Tabela 2 – Estatísticas descritivas 1a Parte (2001-2010)*

	PM	1y	2y	3y	4y	5y
Mínimo	27.28	9.08	9.52	9.74	10.34	10.29
1o Quartil	30.52	11.97	12.03	12.14	12.11	12.19
Mediana	35.26	15.37	15.83	15.71	15.54	15.89
Média	35.18	16.53	16.83	17.10	17.32	17.54
3o Quartil	40.24	19.01	18.71	18.95	19.07	19.15
Máximo	42.92	29.97	33.03	33.51	34.74	37.62
Desv. Padrão	4.89	5.58	5.84	6.02	6.45	6.73

Quando divimos a amostra em 2 períodos, notamos que os valores máximos dos *swaps* da Tabela 2 são iguais aos valores da Tabela 1, indicando que os maiores patamares de juros foram atingidos nesse 1o período. A mesma análise pode ser feita olhando o valor mínimo do prazo médio, indicando que o governo possuía uma dívida mais curta nesse período. Analisando os desvios padrões dos *swaps*, não apenas temos a mesma constatação onde as maturidades mais longas parecem ser mais voláteis, como os valores absolutos para a 1a parte são superiores a amostra completa.

*Tabela 3 – Estatísticas descritivas 2a Parte (2011-2019)*

	PM	1y	2y	3y	4y	5y
Mínimo	41.49	4.43	4.59	5.07	5.51	5.85
1o Quartil	47.42	7.34	7.72	7.88	8.19	8.53
Mediana	49.74	10.07	9.96	10.32	10.23	10.52
Média	49.62	9.93	10.12	10.22	10.40	10.55
3o Quartil	53.14	12.39	12.48	12.51	12.37	12.26
Máximo	55.72	15.87	15.91	15.84	16.54	16.38
Desv. Padrão	3.91	2.88	2.77	2.60	2.53	2.36

Considerando a 2a parte do estudo, temos que o máximo prazo médio foi alcançado, ou seja, o governo alongou o perfil da dívida desde 2001. Comparando médias e medianas,

as amostras da Tabela 3 estão bem mais próximas do que foi observado anteriormente, indicando um padrão mais simétrico para essa parte do estudo. Sobre os desvios padrões, não apenas os valores absolutos são consideravelmente menores quando comparados com a Tabela 2 como também parecer diminuir conforme a maturidade dos *swaps* aumenta. Apesar de contra-intuitivo, poderia ser explicado por achatamento da ETTF (*flattening* da curva) e/ou uma melhor previsibilidade sobre o comportamento futuro dos juros.

Foi encontrada evidência de heterocedasticidade nos resíduos das regressões, se tratando de observações diárias de variáveis do mercado financeiro, tal resultado já era esperado. O teste de Breusch-Pagan com 4 *lags* indicou que existe auto-correlação dos erros, corroborando a literatura anterior que utilizou estimadores robustos para as análises. Seguindo Greenwood e Vayanos (2014) os *lags* foram ajustados para 36 períodos e o teste de Cumby-Huizinga mostra que permitindo que os erros sejam correlacionados por mais tempo ajudou a melhorar a significância estatística dos estimadores robustos do modelo.

Tabela 4 – Regressões Prazo médio da dívida versus ETTJ Interpolada (2001-2010)

	2y	3y	4y	5y
Constante	.0046 (.0368)	−.1453** (.0599)	−.4752*** (.0840)	−.4050 (.0916)
Prazo Médio	.0020*** (.0006)	.0051*** (.0008)	.0097*** (.0008)	.0093** (.0011)
Taxa Curta (1y)	.9778*** (.0094)	.9996*** (.0166)	1.0639*** (.0256)	1.0457*** (.0274)
R <sup>2</sup>	.9683	.9454	.9803	.9530
Adj. R <sup>2</sup>	.9678	.9445	0.98	.9521
Num. obs.	120	120	120	120
Breush-Goodfrey (4 <i>lags</i> )	.1273	.0204	.0003	.0079
Cumby-Huizinga (36 <i>lags</i> )	.1722	.5003	.2235	.2029

\* $p < 0.10$ , \*\* $p < 0.05$ , \*\*\* $p < 0.01$ ,

A Tabela 4 mostra os resultados das regressões do prazo médio e a taxa curta (um ano) contra as taxas longas (*swaps on-the-run*), não apenas os coeficientes são significativos como também vale destacar o sinal positivo, reforçando a teoria proposta por Greenwood e Vayanos (2014). *Yields* na curva de juros podem ser usados como um termômetro da situação do país, quando há uma maior perspectiva de calote ou fechamento de fronteira, a curva de juros “abre” pois investidores demandarão um prêmio maior para o mesmo título. A equação 3.6 discutida anteriormente mostra que os mesmos fatores de risco  $\beta_{k,t}$

também definem a oferta de títulos públicos, e consequentemente o prazo médio da dívida. Essas conclusões vão em linha com o que já havia sido observado no mercado brasileiro por [Marçal e Marinho \(2012\)](#). Portanto existe evidência estatística que os *yields* da ETTJ são influenciados pelo prazo médio da dívida pública, sendo que quanto maior o prazo médio, maiores serão os *yields* na curva a termo de juros.

Para os cálculos dos excessos de retornos da ETTJ, utilizaremos as taxas dos *forward starting swaps* de cada maturidade, de acordo com a metodologia explicada na Equação 3.12.

Tabela 5 – Regressões Prazo médio da dívida versus excesso de retornos (2001-2010)

	2y1y	3y1y	4y1y	5y1y
Constante	-1.5287 (1.607)	-14.536*** (3.2884)	-38.976*** (6.7748)	-8.7909 (6.161)
Prazo Médio	.0653*** (.0234)	.2169*** (.0383)	.4835*** (.0680)	.1447** (.0579)
Taxa Curta (1y)	-.1385 (.4694)	2.9861*** (.8649)	8.5344*** (2.0781)	1.8783 (1.877)
R <sup>2</sup>	.01914	.1135	.2283	.0111
Adj. R <sup>2</sup>	.0024	.0984	.2151	-.0058
Num. obs.	120	120	120	120
Breush-Goodfrey (4 lags)	.2791	.1142	.1619	.7512
Cumby-Huizinga (36 lags)	.4829	.2860	.785	1

\* $p < 0.10$ , \*\* $p < 0.05$ , \*\*\* $p < 0.01$ ,

A Tabela 5 mostra os resultados das regressões do prazo médio com os excessos de retorno dos períodos. Os coeficientes do prazo médio são estatisticamente significantes e positivos, confirmando a validade da segunda hipótese. Esse resultado também foi observado na literatura original de [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) e as justificativas do porquê os coeficientes têm sinal positivo seguem a mesma logica já apresentada para os coeficientes dos *yields*. Também é observado que os números aumentam de acordo com a maturidade, validando a terceira hipótese. A única exceção foi o coeficiente no prazo de cinco anos, que diminuiu quando comparado aos números anteriores, uma justificativa para essa distorção pode vir da maior volatilidade do ativo objeto, sendo assim, uma simples aproximação linear, não captura de maneira devida *swaps* com maturidades mais longas.

Contrastando os valores absolutos dos coeficientes do prazo médio entre as Tabelas

4 e 5 nota-se que os números dos excessos de retorno são consideravelmente maiores do que os *yields*, confirmando o que é proposto na quarta hipótese. De acordo com Greenwood e Vayanos (2014), a lógica para esse comportamento mais acentuado nos excessos de retornos advém da aversão ao risco dos arbitradores. Se os arbitradores fossem neutros ao risco, eles não exigiriam nenhum prêmio extra para absorver choques de oferta dos papéis e portanto os preços, e conseqüentemente os *yields*, não seriam afetados. Quanto mais averso ao risco forem os aritradores, maior o prêmio que eles irão exigir em relação a taxa neutra, no caso desse modelo a *short rate* de 1y. Portanto faz sentido que os excessos de retorno tenham coeficientes maiores do que os *yields* no mundo real, onde existe aversão ao risco.

A segunda parte desse estudo consiste em usar a mesma metodologia e quase dobrar o horizonte das amostras, infelizmente não foi possível obter significância estatística nas regressões de prazo médio e *yields* dos *swaps* para o período completo de 2001 a 2019. Mesmo quebrando a amostra e testando apenas a segunda metade do período (2011 a 2019), não foram obtidos resultados satisfatórios. Como alternativa, foram testados os diferentes modelos trocando o *benchmark* da taxa curta e alterando os *lags* dos erros, porém nenhuma dessas mudanças melhorou os resultados.

Tabela 6 – Regressões Prazo médio da dívida versus excesso de retornos (2011-2019)

	2y1y	3y1y	4y1y	5y1y
Constante	1.5909** (.7536)	9.0988*** (1.1719)	4.6109 (3.6943)	7.5281*** (1.9541)
Prazo Médio	.0249 (.0157)	-.1001*** (.0180)	.0101 (.0765)	.0748** (.0320)
Taxa Curta (1y)	-1.0945*** (.1424)	-1.6476*** (.4233)	-1.7942*** (.4783)	-4.4672*** (.6059)
R <sup>2</sup>	.1559	.2541	.0704	.3287
Adj. R <sup>2</sup>	.1402	.2402	.0530	.3161
Num. obs.	108	108	108	108
Breush-Goodfrey (4 <i>lags</i> )	.03015	.0004	.0613	.5333
Cumby-Huizinga (36 <i>lags</i> )	.3816	.4063	.2736	.3228

\* $p < 0.10$ , \*\* $p < 0.05$ , \*\*\* $p < 0.01$ ,

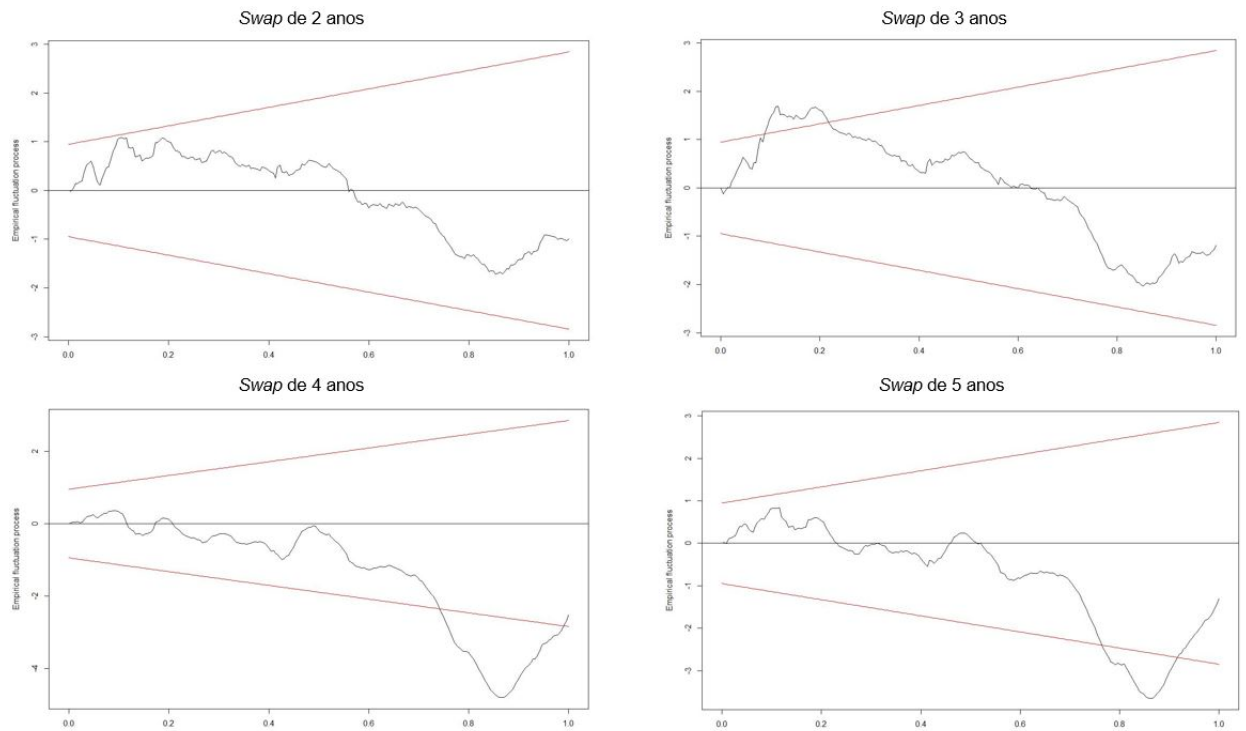
Também foram calculados os excessos de retorno para os períodos de 2001-2019 e 2011-2019. Novamente para o período completo de quase 20 anos, nenhuma significância estatística foi observada. A Tabela 6 mostra o resultado das regressões para o período de 2011-2019 que apesar de apresentar coeficientes relevantes para as maturidades de dois



e quatro anos, estes possuem sinais opostos e o mais longo tem o valor absoluto menor que o mais curto, resultados que vão contra o que foi observado na literatura anterior. Adicionalmente, o  $R^2$  está consideravelmente baixo, indicando que esse modelo não é adequado para avaliar a situação inicialmente proposta.

Com o objetivo de testar uma possível quebra estrutural na amostra, foi utilizada a análise CUSUM para o período completo de 2001 a 2019. O teste CUSUM representa graficamente as somas acumuladas (*Cumulated SUMs*) dos desvios de cada valor da amostra a partir do valor alvo. Como a carta CUSUM é cumulativa, mesmo o menor deslocamento na média do processo causará aumentos (ou reduções) constantes nos valores dos desvios acumulados. Esse teste tem como objetivo avaliar a estabilidade dos coeficientes  $\beta$  em uma regressão múltipla de forma  $y = x \beta + \epsilon$ , a hipótese nula diz que se a soma dos desvios saem do intervalo estabelecido existem indícios de uma quebra estrutural no modelo ao longo do tempo.

Figura 8 – Teste CUSUM - Período de 2001-2019



Os resultados podem ser observados na Figura 25. Os *swaps* de três, quatro e cinco anos mostram indícios de quebra e o *swap* de dois anos apesar de não romper o limite superior passa bem perto. Separando nos 2 períodos e rodando novamente o CUSUM,

observamos que o comportamento do *swap* de 3 anos parece ser explicado pela primeira parte da amostra (2001-2010), o passo que os resultados dos *swaps* de quatro e cinco anos parecem vir da segunda parte da amostra (2011-2019), as figuras completas podem ser encontradas no apêndice.

É válido lembrar que o estudo da estrutura a termo de taxas de juros no Brasil não é um processo fácil e exige cautela. Não apenas o horizonte passível de testes é relativamente pequeno dado o histórico conturbado da inflação antes do Plano Real, como a liquidez de alguns instrumentos financeiros, incluindo os derivativos utilizados nesse estudo, pode sofrer distorções em cenários de estresse. Como parâmetro de comparação, [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) tinham um horizonte de mais de 50 anos e utilizaram os preços das *Treasuries* americanas, que são negociadas no mundo inteiro praticamente 24 horas por dia, sendo portanto muito mais líquidas do que os *swaps* de DI brasileiros. Dessa maneira, mesmo que o resultado para a 1ª parte desse estudo apresente similaridades a teoria proposta, quando olhamos para o período completo, temos resultados conflitantes que não puderam ser completamente justificados e configuram limitações dessa análise.

## 6 CONCLUSÃO

O presente trabalho explorou se variações na maturidade da dívida pública podem ajudar a explicar movimentos da estrutura a termo de taxas de juros (ETTJ). [Greenwood e Vayanos \(2014\)](#) fizeram o primeiro estudo no mercado americano e [Marçal e Marinho \(2012\)](#) adaptaram a literatura para o mercado brasileiro.

O primeiro objetivo foi alcançado com sucesso, mesmo mudando a metodologia de interpolação dos juros para o padrão americano, foi possível replicar os resultados observados anteriormente por outros autores. Entre o período de 2001-2010, existe significância estatística de que o prazo médio da dívida interfere positivamente nos *yields* da ETTJ e nos excessos de retorno da curva. Também foi constatado que os efeitos aumentam conforme a maturidade dos *swaps* e em números absolutos o impacto nos excessos de retorno são maiores do que nos *yields*.

O segundo objetivo não foi alcançado. Quando aumentamos o horizonte temporal para 2001-2019, os coeficientes das regressões não se mantêm estatisticamente significantes, indicando que relação entre o prazo médio da dívida e a ETTJ não se mantém constante ao longo do tempo. O teste CUSUM mostra indícios de uma quebra estrutural, fica como sugestão para pesquisas futuras expandir esse assunto para comprovar se realmente algo aconteceu e quais as possíveis causas desse comportamento. Outro ponto importante é a metodologia de interpolação dos juros. Nesse exercício foi utilizada uma aproximação linear para chegar as taxas *on-the-run*, mas diferentes autores usam diferentes métodos e em períodos de alta volatilidade essas taxas podem apresentar distorções consideráveis.

Diversos são os fatores que influenciam a formação de preços dos ativos financeiros e a dinâmica de negociação dos títulos públicos. O presente estudo buscou isolar apenas a maturidade da dívida pública e quais as consequências que mudanças nessa variável teriam sobre o formato da ETTJ, literatura pouco explorada no mercado brasileiro. Analisar como choques de oferta e decisões dos agentes políticos são incorporados na curva de juros é de vital importância para interpretar o comportamento dos investidores, auxiliando na execução de uma política monetária e fiscal mais eficiente.

## REFERÊNCIAS

- ADRIAN, T.; CRUMP, R. K.; MOENCH, E. Pricing the term structure with linear regressions. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 110, n. 1, p. 110–138, 2013. 10
- ALMEIDA, C.; FARIA, A. Forecasting the brazilian term structure using macroeconomic factors. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 34, n. 1, p. 45–77, 2014. 10
- Banco Central. *Prazo médio Total (Série 10618)*. Disponível em: <<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/consultarvalores/consultarValoresSeries.do?method=consultarGraficoPorId&hdOidSeriesSelecionadas=10618>>. Acesso em: 10 Abril 2020. 10
- BERNZ, B. M. *Modelo Nelson-Siegel dinâmico da estrutura a termo da taxa de juros com fatores exógenos macroeconômicos: uma aplicação ao mercado brasileiro*. Tese (Doutorado) — Biblioteca Virtual FGV EESP, 2014. 10
- BRITO, R. D.; DUARTE, A. J.; GUILLÉN, O. T. *O prêmio pela maturidade na estrutura a termo das taxas de juros brasileiras*. [S.l.]: Banco Central do Brasil, 2003. 12
- CASTRO, F. J. d. et al. A variação da dívida pública brasileira entre 1995 e 2005 fatores determinantes. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007. 10
- COCHRANE, J. H.; PIAZZESI, M. Bond risk premia. *American Economic Review*, v. 95, n. 1, p. 138–160, 2005. 12, 21, 55
- DIEBOLD, F. X.; PIAZZESI, M.; RUDEBUSCH, G. D. Modeling bond yields in finance and macroeconomics. *American Economic Review*, v. 95, n. 2, p. 415–420, 2005. 10
- GREENWOOD, R.; VAYANOS, D. Bond supply and excess bond returns. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 27, n. 3, p. 663–713, 2014. 12, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 29, 30, 31, 33, 34, 56
- LIMA, A. M. C.; ISSLER, J. V. A hipótese das expectativas na estrutura a termo de juros no brasil: uma aplicação de modelos de valor presente. *Revista brasileira de economia*, SciELO Brasil, v. 57, n. 4, p. 873–898, 2003. 12
- MARÇAL, E. F.; MARINHO, C. R. V. A estrutura a termo da taxa de juros e a oferta de títulos públicos. In: *XII Encontro Brasileiro de Finanças*. [S.l.: s.n.], 2012. 10, 11, 13, 17, 21, 30, 34
- MARÇAL, E. F.; PEREIRA, P. L. V. A estrutura a termo das taxas de juros no brasil: Testando a hipótese de expectativas. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), 2007. 12
- PAES, C. V. *Os Determinantes da Duração da Dívida Pública Brasileira no Período Pós-Real*. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Economia)-Departamento de Economia, PUC-Rio, Setembro, 2003. 10
- Secretaria Tesouro Nacional. *Relatório Mensal da Dívida*. Disponível em: <<http://www.tesouro.fazenda.gov.br/relatorio-mensal-da-divida>>. Acesso em: 19 Abril 2020. 13

SHOUSHA, S. *Estrutura a termo da taxa de juros e dinâmica macroeconômica no Brasil*. [S.l.]: Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social, 2008. 10

STONA, F. et al. Análise da estrutura a termo das taxas de juros em países América latina entre 2006 a 2014. *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 13, n. 4, p. 650–690, 2015. 10

TABAK, B. M.; ANDRADE, S. C. de. Testing the expectations hypothesis in the Brazilian term structure of interest rates. *Brazilian Review of Finance*, v. 1, n. 1, p. 19–43, 2003. 12

Tesouro Nacional. *O que é a Dívida Pública Federal?* Disponível em: <<http://www.tesouro.fazenda.gov.br/conceitos-basicos-faq>>. Acesso em: 10 Abril 2020. 17

VAYANOS, D.; VILA, J.-L. *A preferred-habitat model of the term structure of interest rates*. [S.l.], 2009. 12, 15

# APÊNDICE A – GRÁFICOS

## Gráficos ETTF Interpolada

*Figura 9 – Curva de Juros Interpolada - Completa*

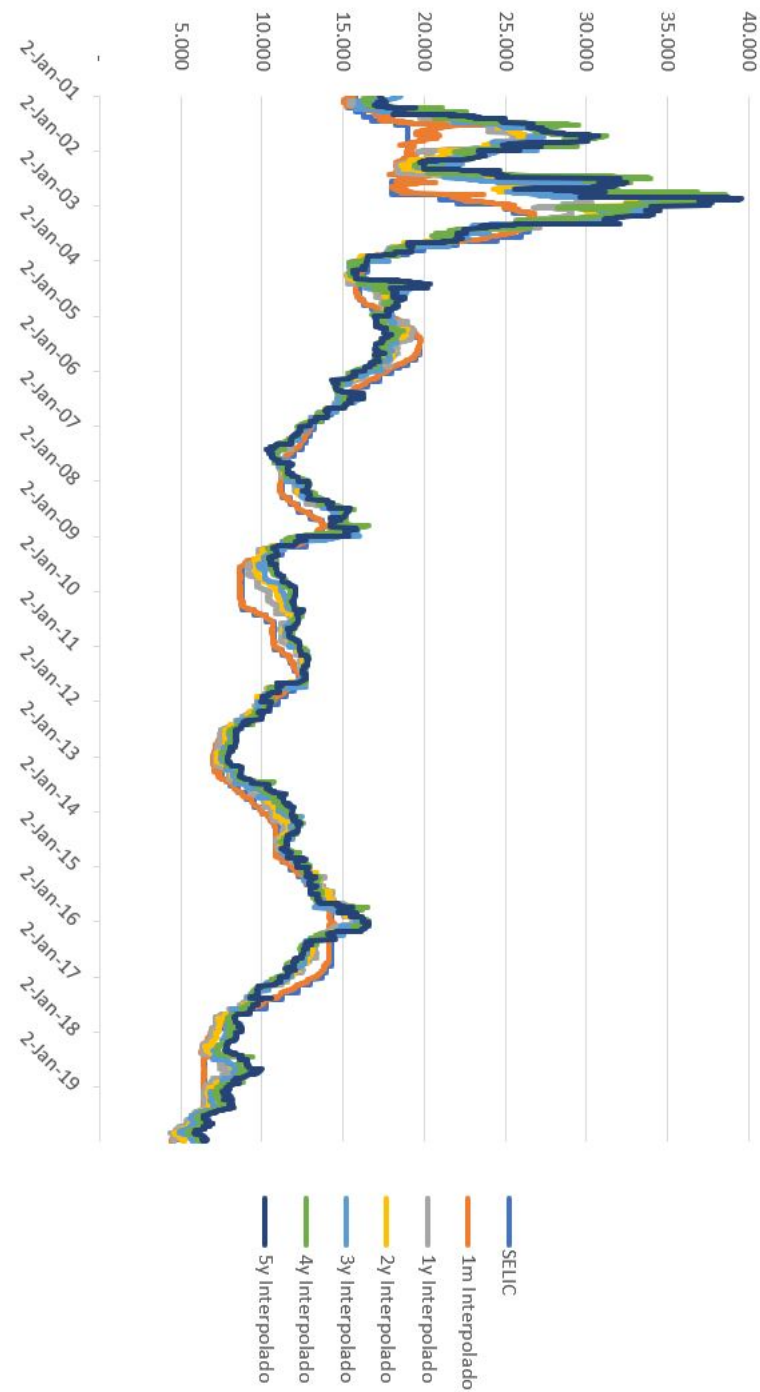


Figura 10 – Curva de Juros Interpolada - Curta

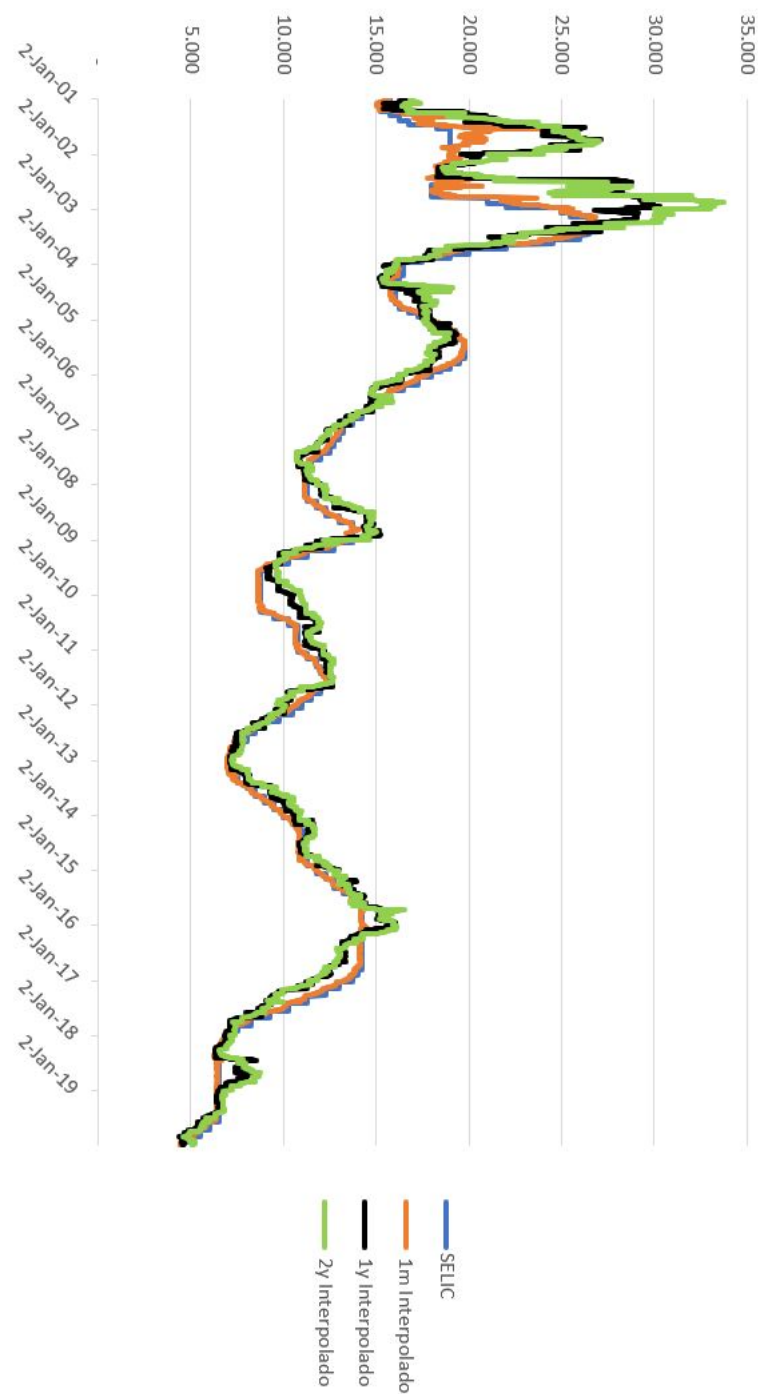


Figura 11 – Curva de Juros Interpolada - Longa

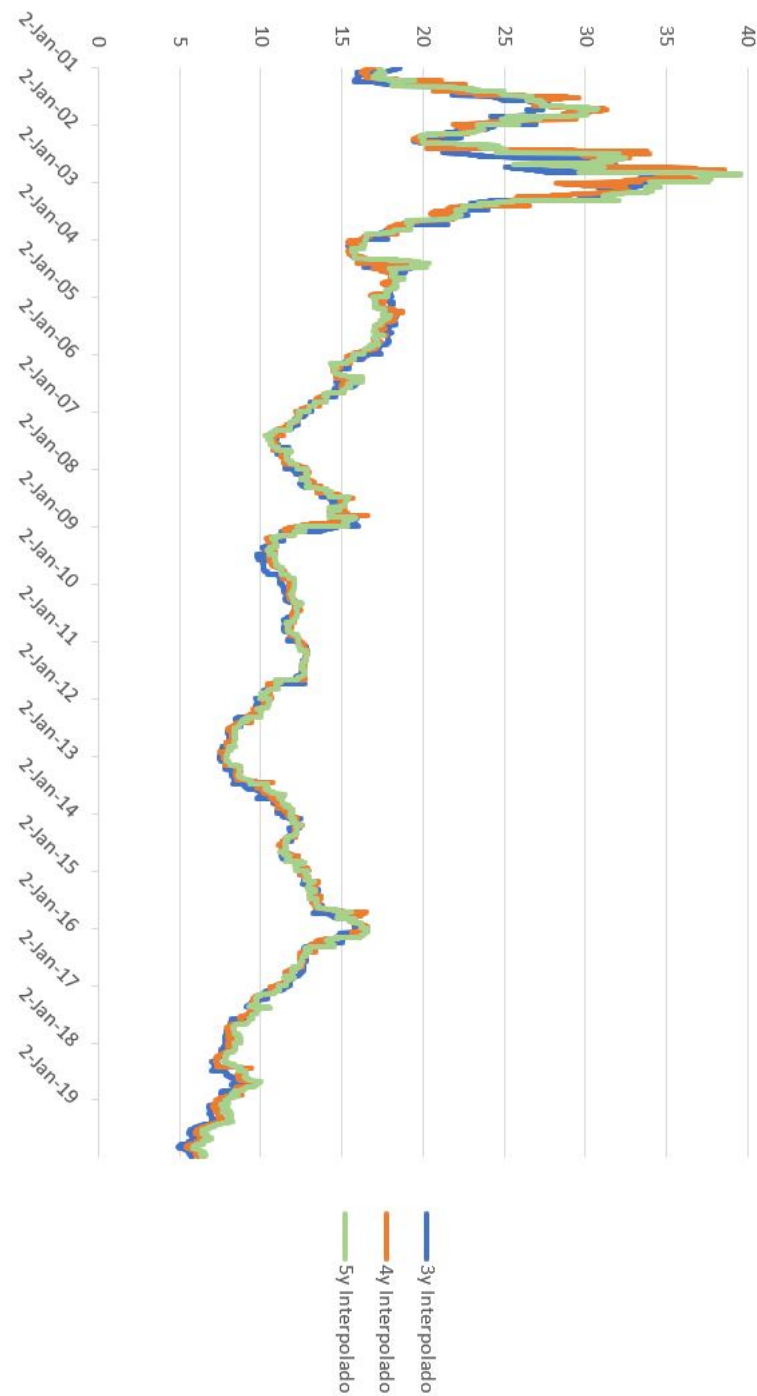
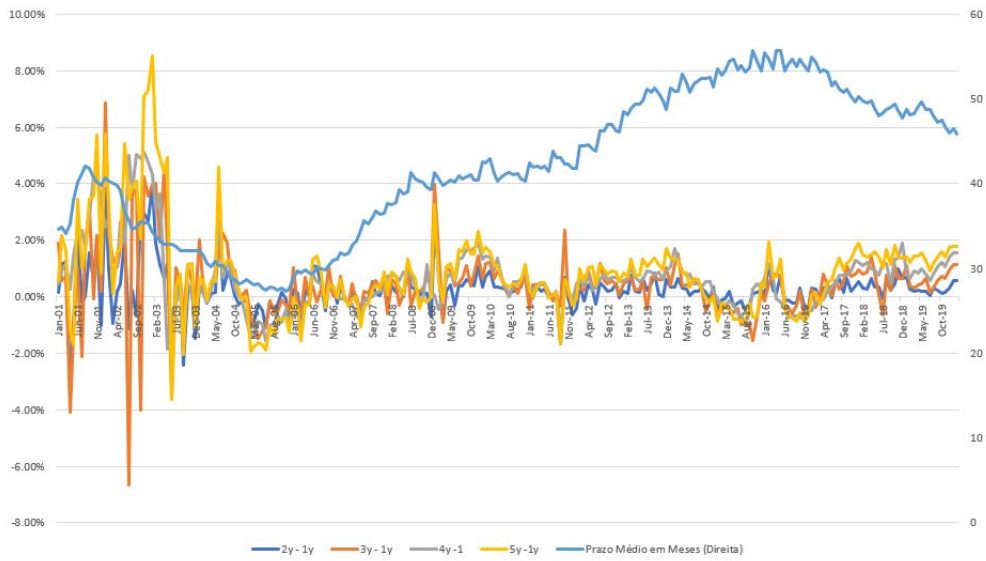




Figura 12 – Prazo Médio versus Spreads (Colorido)



# APÊNDICE B – TABELAS

Figura 13 – Testes de White

	Dependent variable:			
	residsq_2y (1)	residsq_3y (2)	residsq_4y (3)	residsq_5y (4)
pm	-0.00002 (0.00004)	0.0001 (0.0001)	0.0001* (0.0001)	0.0001 (0.0001)
log.1y	0.003*** (0.001)	0.009*** (0.002)	0.006*** (0.001)	0.012*** (0.002)
Constant	-0.003 (0.004)	-0.022*** (0.007)	-0.014*** (0.005)	-0.027*** (0.008)
Observations	228	228	228	228
R2	0.056	0.105	0.112	0.153
Adjusted R2	0.047	0.097	0.104	0.145
Residual Std. Error (df = 225)	0.005	0.009	0.006	0.010
F Statistic (df = 2; 225)	6.655***	13.139***	14.175***	20.265***
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01			

	Dependent variable:			
	residsq_2y (1)	residsq_3y (2)	residsq_4y (3)	residsq_5y (4)
pm	0.0001 (0.0001)	0.001** (0.0002)	0.0001 (0.0001)	0.0002 (0.0002)
log.1y	0.004** (0.002)	0.015*** (0.004)	0.001 (0.001)	0.008*** (0.003)
Constant	-0.012* (0.007)	-0.056*** (0.015)	-0.002 (0.005)	-0.023** (0.011)
Observations	120	120	120	120
R2	0.042	0.143	0.008	0.069
Adjusted R2	0.026	0.128	-0.009	0.053
Residual Std. Error (df = 117)	0.006	0.012	0.004	0.009
F Statistic (df = 2; 117)	2.562*	9.742***	0.469	4.327**
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01			

	Dependent variable:			
	residsq_2y (1)	residsq_3y (2)	residsq_4y (3)	residsq_5y (4)
pm	0.0001 (0.0001)	0.001** (0.0002)	0.0001 (0.0001)	0.0002 (0.0002)
log.1y	0.004** (0.002)	0.015*** (0.004)	0.001 (0.001)	0.008*** (0.003)
Constant	-0.012* (0.007)	-0.056*** (0.015)	-0.002 (0.005)	-0.023** (0.011)
Observations	120	120	120	120
R2	0.042	0.143	0.008	0.069
Adjusted R2	0.026	0.128	-0.009	0.053
Residual Std. Error (df = 117)	0.006	0.012	0.004	0.009
F Statistic (df = 2; 117)	2.562*	9.742***	0.469	4.327**
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01			

Figura 14 – Resumo de todas as regressões

1y Short Rate		1m Short Rate		SELIC Short Rate	
Período 2001-2019		Período 2001-2019		Período 2001-2019	
Método	Resultado	Método	Resultado	Método	Resultado
GV36	-	GV36	-	GV36	-
C36	-	C36	-	C36	-
GV4	-	GV4	-	GV4	-
C4	-	C4	-	C4	-

1y Short Rate		1m Short Rate		SELIC Short Rate	
Período 2001-2010		Período 2001-2010		Período 2001-2010	
Método	Resultado	Método	Resultado	Método	Resultado
GV36	Forte	GV36	Forte	GV36	Forte
C36	Forte	C36	Forte	C36	Forte
GV4	Forte	GV4	Forte	GV4	Forte
C4	Forte	C4	Forte	C4	Forte

1y Short Rate		1m Short Rate		SELIC Short Rate	
Período 2011-2019		Período 2011-2019		Período 2011-2019	
Método	Resultado	Método	Resultado	Método	Resultado
GV36	Fraca	GV36	-	GV36	-
C36	-	C36	-	C36	-
GV4	-	GV4	-	GV4	-
C4	Fraca	C4	Fraca	C4	-

Figura 15 – 2001 - 2019 (Short Rate 1y)

**Modelo GV, 1 ano - Prazo médio da dívida (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1yr	.95053*** (.016664)	.92674*** (.038547)	.92898*** (.067496)	.88588*** (.076805)
pmtot	-.000352 (.0005233)	-.0012434 (.0014737)	.0000644 (.0025038)	-.000509 (.0026454)
_cons	.15784*** (.058014)	.27159* (.14276)	.22741 (.24801)	.37328 (.27362)
r2	.98424	.9657	.97004	.95077
r2_adjusted	.9841	.9654	.96977	.95033
pval_breushgoodfrey	.0041502	.0000226	2.11e-13	1.33e-12
cumby_huizinga36	.14771	.18303	.083026	.085286

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **2001-2019 - Modelo Carolina, 1 ano - Prazo médio da dívida Total (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread lnp2	spread lnp3	spread lnp4	spread lnp5
pmtot	9.51e-04 (6.99e-04)	6.86e-04 (1.41e-03)	1.93e-03 (2.14e-03)	2.50e-03 (2.55e-03)
_cons	-2.08e-02 (2.51e-02)	7.03e-03 (5.43e-02)	-2.91e-02 (8.51e-02)	-3.88e-02 (9.73e-02)
N	230	230	230	230

**2001-2019 - Modelo GV, 1 ano - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1yr	9.51e-01*** (1.53e-02)	9.27e-01*** (2.58e-02)	9.29e-01*** (3.89e-02)	8.86e-01*** (4.30e-02)
pmtot	-3.52e-04 (5.03e-04)	-1.24e-03 (9.32e-04)	6.44e-05 (1.35e-03)	-5.09e-04 (1.51e-03)
_cons	1.58e-01*** (5.13e-02)	2.72e-01*** (9.21e-02)	2.27e-01 (1.38e-01)	3.73e-01** (1.51e-01)
N	230	230	230	230

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **2001-2019 - Modelo Carolina, 1 ano - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread lnp2	spread lnp3	spread lnp4	spread lnp5
pmtot	9.51e-04* (5.19e-04)	6.86e-04 (8.65e-04)	1.93e-03 (1.19e-03)	2.50e-03* (1.45e-03)
_cons	-2.08e-02 (2.15e-02)	7.03e-03 (3.42e-02)	-2.91e-02 (4.72e-02)	-3.88e-02 (5.68e-02)
N	230	230	230	230

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$

Figura 16 – 2001 - 2019 (Short Rate 1m)

**Modelo GV, 1 month - Prazo médio da dívida Interna (36 lags)**

	(1) lnp2yr	(2) lnp3yr	(3) lnp4yr	(4) lnp5yr
lnp1month	.97316*** (.067155)	.94548*** (.085276)	.91091*** (.10634)	.87722*** (.11595)
pmtot	-.0002177 (.0030903)	-.0011982 (.0038563)	-.0008434 (.0046391)	-.0011531 (.0046544)
_cons	.12815 (.25852)	.25446 (.32671)	.34138 (.39665)	.45148 (.42076)
r2	.93653	.91556	.86937	.86479
r2_adjusted	.93597	.91482	.86822	.8636
pval_breushgoodfrey	2.32e-14	5.83e-12	5.22e-11	2.49e-12
cumby_huizinga36	.17457	.078926	.11819	.09364

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **Modelo Carolina, 1 month - Prazo médio da dívida Total (36 lags)**

	(1) spread_lnp1 month2	(2) spread_lnp1 month3	(3) spread_lnp1 month4	(4) spread_lnp1 month5
pmtot	4.76e-04 (2.50e-03)	2.11e-04 (3.19e-03)	1.46e-03 (4.02e-03)	2.02e-03 (4.19e-03)
_cons	3.27e-02 (1.11e-01)	6.05e-02 (1.41e-01)	2.44e-02 (1.76e-01)	1.46e-02 (1.80e-01)
N	230	230	230	230

**Modelo GV, 1 month - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1) lnp2yr	(2) lnp3yr	(3) lnp4yr	(4) lnp5yr
lnp1month	9.73e-01*** (4.52e-02)	9.45e-01*** (5.29e-02)	9.11e-01*** (6.50e-02)	8.77e-01*** (6.73e-02)
pmtot	-2.18e-04 (1.87e-03)	-1.20e-03 (2.14e-03)	-8.43e-04 (2.63e-03)	-1.15e-03 (2.62e-03)
_cons	1.28e-01 (1.64e-01)	2.54e-01 (1.91e-01)	3.41e-01 (2.33e-01)	4.51e-01* (2.37e-01)
N	230	230	230	230

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **Modelo Carolina, 1 month - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1) spread_lnp1 month2	(2) spread_lnp1 month3	(3) spread_lnp1 month4	(4) spread_lnp1 month5
pmtot	4.76e-04 (1.60e-03)	2.11e-04 (1.86e-03)	1.46e-03 (2.36e-03)	2.02e-03 (2.46e-03)
_cons	3.27e-02 (6.94e-02)	6.05e-02 (8.10e-02)	2.44e-02 (1.02e-01)	1.46e-02 (1.05e-01)
N	230	230	230	230

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$



Figura 17 – 2001 - 2019 (Short Rate SELIC)

**Modelo GV, selic - Prazo médio da dívida Interna(36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnselic	.99296*** (.077803)	.97062*** (.095916)	.93139*** (.11495)	.89938*** (.12585)
pmtot	-.000345 (.0033774)	-.0012114 (.0041404)	-.0009634 (.0048711)	-.0012121 (.0048927)
_cons	.073472 (.29304)	.18139 (.36222)	.28453 (.42497)	.38821 (.45337)
r2	.91439	.89488	.84114	.83925
r2_adjusted	.91363	.89395	.83973	.83782
pval_breushgoodfrey	5.36e-14	3.77e-12	7.55e-11	4.37e-12
cumby_huizinga36	.22409	.086361	.13044	.098943

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

**Modelo Carolina, selic - Prazo médio da dívida Total(36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_lns elic2	spread_lns elic3	spread_lns elic4	spread_lns elic5
pmtot	-1.71e-04 (2.66e-03)	-4.83e-04 (3.29e-03)	7.37e-04 (4.09e-03)	1.28e-03 (4.20e-03)
_cons	4.86e-02 (1.21e-01)	7.76e-02 (1.49e-01)	4.22e-02 (1.83e-01)	3.29e-02 (1.85e-01)
N	228	228	228	228

**Modelo GV, selic - Prazo médio da dívida Total(4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnselic	9.93e-01*** (5.43e-02)	9.71e-01*** (6.00e-02)	9.31e-01*** (7.17e-02)	8.99e-01*** (7.41e-02)
pmtot	-3.45e-04 (2.06e-03)	-1.21e-03 (2.31e-03)	-9.63e-04 (2.79e-03)	-1.21e-03 (2.76e-03)
_cons	7.35e-02 (1.92e-01)	1.81e-01 (2.13e-01)	2.85e-01 (2.53e-01)	3.88e-01 (2.58e-01)
N	228	228	228	228

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

**Modelo Carolina, selic - Prazo médio da dívida Total(4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_lns elic2	spread_lns elic3	spread_lns elic4	spread_lns elic5
pmtot	-1.71e-04 (1.73e-03)	-4.83e-04 (1.96e-03)	7.37e-04 (2.45e-03)	1.28e-03 (2.52e-03)
_cons	4.86e-02 (7.63e-02)	7.76e-02 (8.66e-02)	4.22e-02 (1.08e-01)	3.29e-02 (1.10e-01)
N	228	228	228	228

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

Figura 18 – 2001 - 2010 (Short Rate 1y)

**2001-2010 - Modelo GV, 1 ano - Prazo médio da dívida Interna (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1yr	.97783*** (.0094087)	.9996*** (.016559)	1.0639*** (.025635)	1.0457*** (.027353)
pmtot	.0019647*** (.0006139)	.0050677*** (.0008409)	.009674*** (.0008259)	.0093313*** (.0010714)
_cons	.0046159 (.036764)	-.14533** (.059869)	-.47515*** (.083948)	-.40499*** (.091594)
r2	.96832	.94543	.98034	.95294
r2_adjusted	.96778	.94449	.98	.95213
pval_breushgoodfrey	.12733	.020444	2.31e-06	.007934
cumby_huizinga36	.58558	.54641	.9267	.6732

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

**2001-2010 - Modelo Carolina, 1 ano - Prazo médio da dívida Total (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread lnp2	spread lnp3	spread lnp4	spread lnp5
pmtot	2.41e-03*** (5.16e-04)	5.08e-03*** (7.78e-04)	8.40e-03*** (1.23e-03)	8.42e-03*** (1.28e-03)
_cons	-7.19e-02*** (1.97e-02)	-1.47e-01*** (2.66e-02)	-2.54e-01*** (3.92e-02)	-2.47e-01*** (4.39e-02)
N	120	120	120	120

**2001-2010 - Modelo GV, 1 ano - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1yr	9.78e-01*** (2.59e-02)	1.00e+00*** (2.67e-02)	1.06e+00*** (3.10e-02)	1.05e+00*** (3.34e-02)
pmtot	1.96e-03** (9.27e-04)	5.07e-03*** (1.36e-03)	9.67e-03*** (1.36e-03)	9.33e-03*** (1.77e-03)
_cons	4.62e-03 (8.91e-02)	-1.45e-01 (9.79e-02)	-4.75e-01*** (9.67e-02)	-4.05e-01*** (1.15e-01)
N	120	120	120	120

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

**2001-2010 - Modelo Carolina, 1 ano - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread lnp2	spread lnp3	spread lnp4	spread lnp5
pmtot	2.41e-03*** (7.86e-04)	5.08e-03*** (1.26e-03)	8.40e-03*** (1.43e-03)	8.42e-03*** (1.80e-03)
_cons	-7.19e-02** (2.91e-02)	-1.47e-01*** (4.21e-02)	-2.54e-01*** (4.81e-02)	-2.47e-01*** (6.40e-02)
N	120	120	120	120

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

Figura 19 – 2001 - 2010 (Short Rate 1m)

**2001-2010 - Modelo GV, 1 month - Prazo médio da dívida Interna (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1month	1.1107*** (.040194)	1.1384*** (.045953)	1.1552*** (.062937)	1.1608*** (.063769)
pmtot	.016488*** (.0017936)	.020004*** (.0017963)	.023846*** (.0027817)	.024038*** (.0026813)
_cons	-.81191*** (.1504)	-.99113*** (.16647)	-1.1625*** (.23655)	-1.1766*** (.2321)
r2	.92607	.90759	.85721	.86983
r2_adjusted	.92481	.90601	.85477	.8676
pval_breushgoodfrey	3.82e-07	.0000817	.0001496	1.37e-06
cumby_huizinga36	.35379	.52546	.58308	.56907

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **2001-2010 - Modelo Carolina, 1 month - Prazo médio da dívida Total (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_lnp1 month2	spread_lnp1 month3	spread_lnp1 month4	spread_lnp1 month5
pmtot	1.31e-02*** (2.17e-03)	1.58e-02*** (2.41e-03)	1.91e-02*** (3.26e-03)	1.91e-02*** (3.21e-03)
_cons	-3.94e-01*** (6.97e-02)	-4.69e-01*** (7.58e-02)	-5.77e-01*** (1.03e-01)	-5.70e-01*** (1.04e-01)
N	120	120	120	120

**2001-2010 - Modelo GV, 1 month - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1month	1.11e+00*** (6.07e-02)	1.14e+00*** (6.46e-02)	1.16e+00*** (8.64e-02)	1.16e+00*** (8.38e-02)
pmtot	1.65e-02*** (2.96e-03)	2.00e-02*** (2.82e-03)	2.38e-02*** (3.88e-03)	2.40e-02*** (3.97e-03)
_cons	-8.12e-01*** (2.28e-01)	-9.91e-01*** (2.30e-01)	- (3.13e-01)	- (3.09e-01)
N	120	120	120	120

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **2001-2010 - Modelo Carolina, 1 month - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_lnp1 month2	spread_lnp1 month3	spread_lnp1 month4	spread_lnp1 month5
pmtot	1.31e-02*** (2.56e-03)	1.58e-02*** (2.57e-03)	1.91e-02*** (3.33e-03)	1.91e-02*** (3.44e-03)
_cons	-3.94e-01*** (8.88e-02)	-4.69e-01*** (8.93e-02)	-5.77e-01*** (1.13e-01)	-5.70e-01*** (1.21e-01)
N	120	120	120	120

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$



Figura 20 – 2001 - 2010 (Short Rate SELIC)

**2001-2010 - Modelo GV, selic - Prazo médio da dívida Interna(36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnselic	1.1399*** (.052168)	1.1705*** (.056595)	1.1762*** (.072062)	1.1885*** (.072419)
pmtot	.0183*** (.0026499)	.021932*** (.0026712)	.025438*** (.0037022)	.025843*** (.003532)
_cons	-.95738*** (.21181)	-1.1488*** (.22505)	-1.2784*** (.29191)	-1.3178*** (.28593)
r2	.89847	.88303	.81785	.83871
r2_adjusted	.89673	.88103	.81474	.83595
pval_breushgoodfrey	3.63e-07	.0000296	.0000858	1.75e-06
cumby_huizinga36	.44807	.76789	.67632	.5484

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **2001-2010 - Modelo Carolina, selic - Prazo médio da dívida Total(36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_insel ic2	spread_insel ic3	spread_insel ic4	spread_insel ic5
pmtot	1.39e-02*** (2.99e-03)	1.66e-02*** (3.25e-03)	1.99e-02*** (4.06e-03)	1.99e-02*** (3.98e-03)
_cons	-4.25e-01*** (9.14e-02)	-5.00e-01*** (9.83e-02)	-6.08e-01*** (1.24e-01)	-6.01e-01*** (1.24e-01)
N	120	120	120	120

**2001-2010 - Modelo GV, selic - Prazo médio da dívida Total(4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnselic	1.14e+00*** (7.62e-02)	1.17e+00*** (7.75e-02)	1.18e+00*** (9.96e-02)	1.19e+00*** (9.72e-02)
pmtot	1.83e-02*** (3.68e-03)	2.19e-02*** (3.42e-03)	2.54e-02*** (4.61e-03)	2.58e-02*** (4.60e-03)
_cons	-9.57e-01*** (2.93e-01)	-1.15e+00*** (2.85e-01)	-1.28e+00*** (3.74e-01)	-1.32e+00*** (3.68e-01)
N	120	120	120	120

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **2001-2010 - Modelo Carolina, selic - Prazo médio da dívida Total(4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_insel ic2	spread_insel ic3	spread_insel ic4	spread_insel ic5
pmtot	1.39e-02*** (3.01e-03)	1.66e-02*** (2.99e-03)	1.99e-02*** (3.75e-03)	1.99e-02*** (3.80e-03)
_cons	-4.25e-01*** (1.03e-01)	-5.00e-01*** (1.02e-01)	-6.08e-01*** (1.27e-01)	-6.01e-01*** (1.32e-01)
N	120	120	120	120

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$

Figura 21 – 2011 - 2019 (Short Rate 1y)

**Modelo GV, 1 ano - Prazo médio da dívida Interna (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1yr	.9061*** (.0097235)	.8517*** (.012253)	.80089*** (.020023)	.71741*** (.016445)
pmtot	.0015703* (.0008441)	-.0013564 (.0009669)	-.0005988 (.0018839)	.0013356 (.0013644)
_cons	.15811*** (.043607)	.43868*** (.047783)	.53891*** (.11242)	.64994*** (.088506)
r2	.98397	.95858	.96914	.95691
r2_adjusted	.98367	.95781	.96857	.9561
pval_breushgoodfrey	.01442	.0014939	1.52e-06	.0000227
cumby_huizinga36	.28508	.26269	.33826	.29441

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

**2011-2019 - Modelo Carolina, 1 ano - Prazo médio da dívida Total (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread lnp2	spread lnp3	spread lnp4	spread lnp5
pmtot	-1.43e-03 (2.86e-03)	-6.09e-03 (4.23e-03)	-6.96e-03 (6.93e-03)	-7.69e-03 (8.95e-03)
_cons	9.70e-02 (1.48e-01)	3.42e-01 (2.18e-01)	4.09e-01 (3.56e-01)	4.66e-01 (4.59e-01)
N	110	110	110	110

**2011-2019 - Modelo GV, 1 ano - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1yr	9.06e-01*** (1.40e-02)	8.52e-01*** (2.33e-02)	8.01e-01*** (2.41e-02)	7.17e-01*** (2.37e-02)
pmtot	1.57e-03 (1.41e-03)	-1.36e-03 (1.55e-03)	-5.99e-04 (1.83e-03)	1.34e-03 (1.99e-03)
_cons	1.58e-01** (6.57e-02)	4.39e-01*** (8.62e-02)	5.39e-01*** (1.08e-01)	6.50e-01*** (1.17e-01)
N	110	110	110	110

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

**2011-2019 - Modelo Carolina, 1 ano - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread lnp2	spread lnp3	spread lnp4	spread lnp5
pmtot	-1.43e-03 (1.86e-03)	-6.09e-03** (2.82e-03)	-6.96e-03* (4.09e-03)	-7.69e-03 (5.30e-03)
_cons	9.70e-02 (9.42e-02)	3.42e-01** (1.43e-01)	4.09e-01* (2.08e-01)	4.66e-01* (2.70e-01)
N	110	110	110	110

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

Figura 22 – 2011 - 2019 (Short Rate 1m)

**2011-2020 - Modelo GV, 1 month - Prazo médio da dívida Interna (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1month	.87453*** (.030799)	.83041*** (.027085)	.75323*** (.030072)	.68012*** (.030349)
pmtot	.0010981 (.0033835)	-.0020823 (.0029723)	-.0003516 (.0040057)	.0013754 (.0032044)
_cons	.26176 (.17995)	.53145*** (.16709)	.6415*** (.22166)	.73884*** (.18814)
r2	.93511	.9255	.88037	.88287
r2_adjusted	.9339	.92411	.87813	.88068
pval_breushgoodfrey	4.96e-07	9.29e-08	8.44e-08	1.59e-07
cumby_huizinga36	.9329	.39471	.39647	.41191

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **2011-2019 - Modelo Carolina, 1 month - Prazo médio da dívida Total (36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_lnp1 month2	spread_lnp1 month3	spread_lnp1 month4	spread_lnp1 month5
pmtot	-3.12e-03 (6.04e-03)	-7.79e-03 (7.05e-03)	-8.65e-03 (9.93e-03)	-9.39e-03 (1.16e-02)
_cons	1.92e-01 (2.98e-01)	4.37e-01 (3.53e-01)	5.04e-01 (4.97e-01)	5.61e-01 (5.87e-01)
N	110	110	110	110

**2011-2019 - Modelo GV, 1 month - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnp1month	8.75e-01*** (4.57e-02)	8.30e-01*** (4.30e-02)	7.53e-01*** (4.72e-02)	6.80e-01*** (4.48e-02)
pmtot	1.10e-03 (3.75e-03)	-2.08e-03 (3.32e-03)	-3.52e-04 (3.90e-03)	1.38e-03 (3.71e-03)
_cons	2.62e-01 (1.83e-01)	5.31e-01*** (1.70e-01)	6.42e-01*** (2.10e-01)	7.39e-01*** (1.98e-01)
N	110	110	110	110

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$ **2011-2019 - Modelo Carolina, 1 month - Prazo médio da dívida Total (4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_lnp1 month2	spread_lnp1 month3	spread_lnp1 month4	spread_lnp1 month5
pmtot	-3.12e-03 (4.32e-03)	-7.79e-03* (4.66e-03)	-8.65e-03 (6.21e-03)	-9.39e-03 (7.03e-03)
_cons	1.92e-01 (2.13e-01)	4.37e-01* (2.31e-01)	5.04e-01 (3.09e-01)	5.61e-01 (3.53e-01)
N	110	110	110	110

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < 0.05$ , \*\*\*  $p < 0.01$



Figura 23 – 2011 - 2019 (Short Rate SELIC)

**2011-2020 - Modelo GV, selic - Prazo médio da dívida Interna(36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnselic	.88468*** (.040584)	.84931*** (.038568)	.76841*** (.040854)	.69132*** (.040853)
pmtot	.0015418 (.003777)	-.0017247 (.003334)	.0000543 (.0043202)	.0017464 (.0034958)
_cons	.19996 (.21089)	.4541** (.19967)	.57163** (.25058)	.68149*** (.21611)
r2	.90954	.90339	.85107	.85303
r2_adjusted	.90781	.90155	.84823	.85023
pval_breushgoodfrey	1.67e-07	6.84e-08	7.70e-08	1.15e-07
cumby_huizinga36	.98504	.57724	.48636	.51692

Standard errors in parentheses  
\* p < 0.10, \*\* p < 0.05, \*\*\* p < 0.01

**2011-2019 - Modelo Carolina, selic - Prazo médio da dívida Total(36 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_lns elic2	spread_lns elic3	spread_lns elic4	spread_lns elic5
pmtot	-1.92e-03 (5.84e-03)	-6.24e-03 (6.48e-03)	-6.89e-03 (9.17e-03)	-7.51e-03 (1.06e-02)
_cons	1.11e-01 (2.85e-01)	3.38e-01 (3.20e-01)	3.94e-01 (4.55e-01)	4.44e-01 (5.35e-01)
N	108	108	108	108

**2011-2019 - Modelo GV, selic - Prazo médio da dívida Total(4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	lnp2yr	lnp3yr	lnp4yr	lnp5yr
lnselic	8.85e-01*** (5.85e-02)	8.49e-01*** (5.28e-02)	7.68e-01*** (5.77e-02)	6.91e-01*** (5.53e-02)
pmtot	1.54e-03 (4.36e-03)	-1.72e-03 (3.88e-03)	5.43e-05 (4.38e-03)	1.75e-03 (4.15e-03)
_cons	2.00e-01 (2.15e-01)	4.54e-01** (1.97e-01)	5.72e-01** (2.37e-01)	6.81e-01*** (2.24e-01)
N	108	108	108	108

Standard errors in parentheses  
\* p < 0.10, \*\* p < 0.05, \*\*\* p < 0.01

**2011-2019 - Modelo Carolina, selic - Prazo médio da dívida Total(4 lags)**

	(1)	(2)	(3)	(4)
	spread_lns elic2	spread_lns elic3	spread_lns elic4	spread_lns elic5
pmtot	-1.92e-03 (4.55e-03)	-6.24e-03 (4.57e-03)	-6.89e-03 (5.95e-03)	-7.51e-03 (6.60e-03)
_cons	1.11e-01 (2.24e-01)	3.38e-01 (2.25e-01)	3.94e-01 (2.93e-01)	4.44e-01 (3.29e-01)
N	108	108	108	108

Standard errors in parentheses  
\* p < 0.10, \*\* p < 0.05, \*\*\* p < 0.01

Figura 24 – Excessos de retorno

**Excesso de retorno, Modelo GV, 1 ano - Prazo médio da dívida Interna(36 lags)**

	(1) exc 2yrlyr	(2) exc 3yrlyr	(3) exc 4yrlyr	(4) exc 5yrlyr
lnplyr	-.43248 (.31685)	.41359 (1.4181)	2.9054 (2.8615)	-.94974 (1.5451)
pmtot	-.000941 (.012969)	-.02016 (.059475)	.10533 (.10616)	-.023935 (.053309)
_cons	1.5058 (1.1608)	.71625 (5.3801)	-10.384 (10.402)	4.7522 (5.1704)
r2	.0089964	.011474	.047237	.0035568
r2_adjusted	.0002651	.0027644	.038843	-.0052224
pval_breushgoodfrey	.16531	.0034606	.0079788	.67124
cumby_huizinga36	.17219	.50026	.2235	.2029

Standard errors in parentheses

\* p &lt; 0.10, \*\* p &lt; 0.05, \*\*\* p &lt; 0.01

**2001-2010 - Excesso de retorno, Modelo GV, 1 ano - Prazo médio da dívida Interna(36 lags)**

	(1) exc 2yrlyr	(2) exc 3yrlyr	(3) exc 4yrlyr	(4) exc 5yrlyr
lnplyr	-.13848 (.46938)	2.9861*** (.86488)	8.5344*** (2.0781)	1.8783 (1.877)
pmtot	.065283*** (.023364)	.21688*** (.038269)	.48348*** (.068013)	.14471** (.057925)
_cons	-1.5287 (1.607)	-14.536*** (3.2884)	-38.976*** (6.7748)	-8.7909 (6.161)
r2	.019138	.1135	.22829	.01114
r2_adjusted	.0023712	.098351	.2151	-.0057635
pval_breushgoodfrey	.27909	.11417	.16188	.7512
cumby_huizinga36	.48286	.28596	.785	1

**2011-2020 - Excesso de retorno, Modelo GV, 1 ano - Prazo médio da dívida Interna(36 lags)**

	(1) exc 2yrlyr	(2) exc 3yrlyr	(3) exc 4yrlyr	(4) exc 5yrlyr
lnplyr	-1.0945*** (.14235)	-1.6476*** (.4233)	-1.7942*** (.47829)	-4.4672*** (.60594)
pmtot	.02489 (.015735)	-.10008*** (.017979)	.010099 (.076541)	.074827** (.031962)
_cons	1.5909** (.75358)	9.0988*** (1.1719)	4.6109 (3.6943)	7.5281*** (1.9541)
r2	.15593	.25414	.070353	.32865
r2_adjusted	.14016	.2402	.052976	.3161
pval_breushgoodfrey	.030153	.0004167	.061298	.53328
cumby_huizinga36	.38161	.40625	.27356	.32276

Figura 25 – Teste CUSUM - Período de 2001-2019

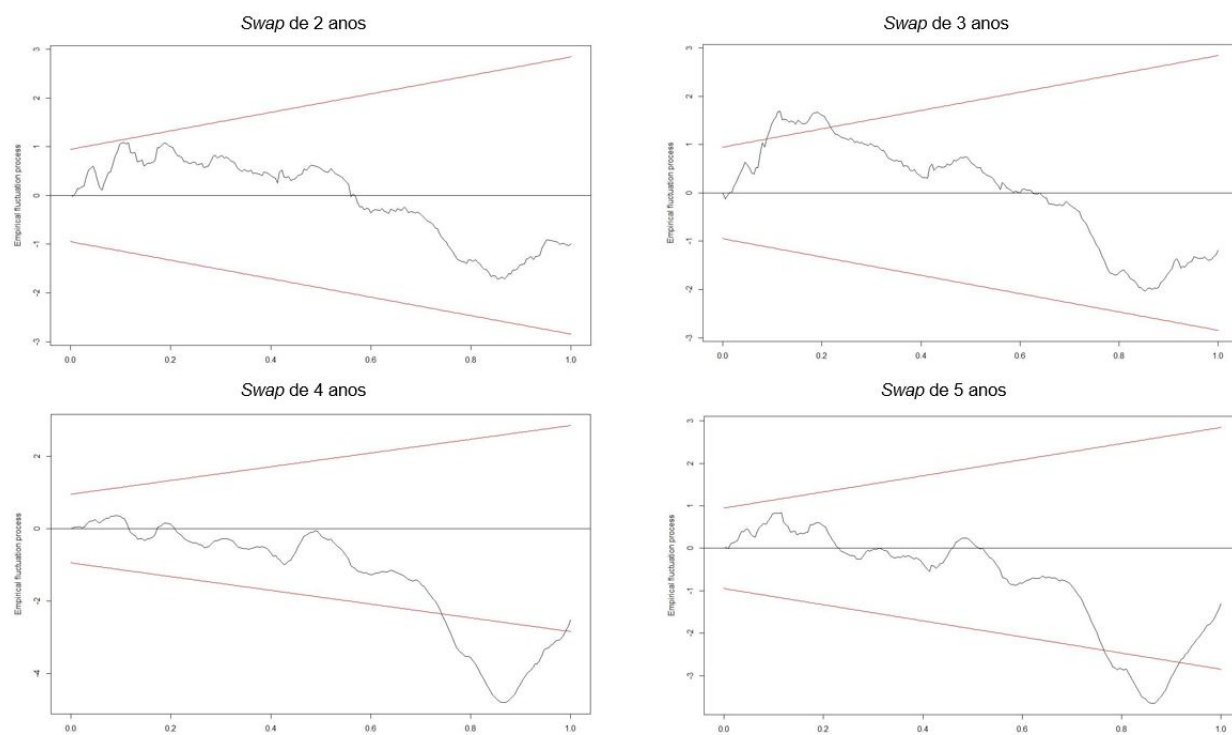
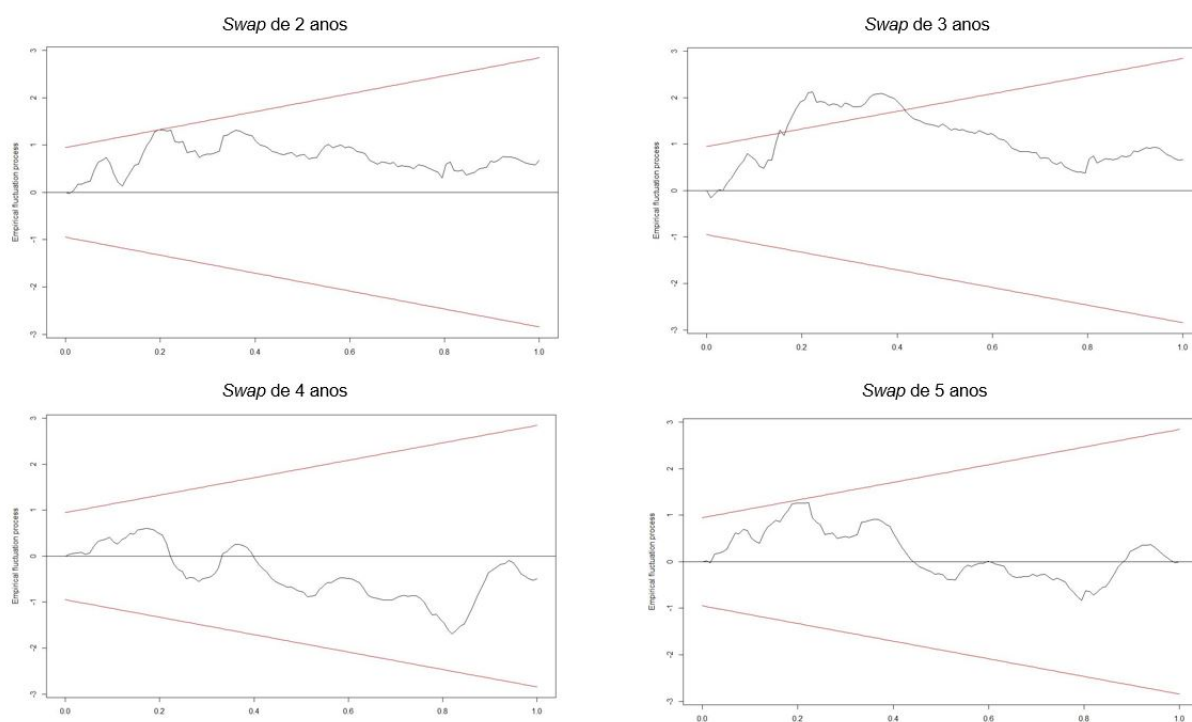
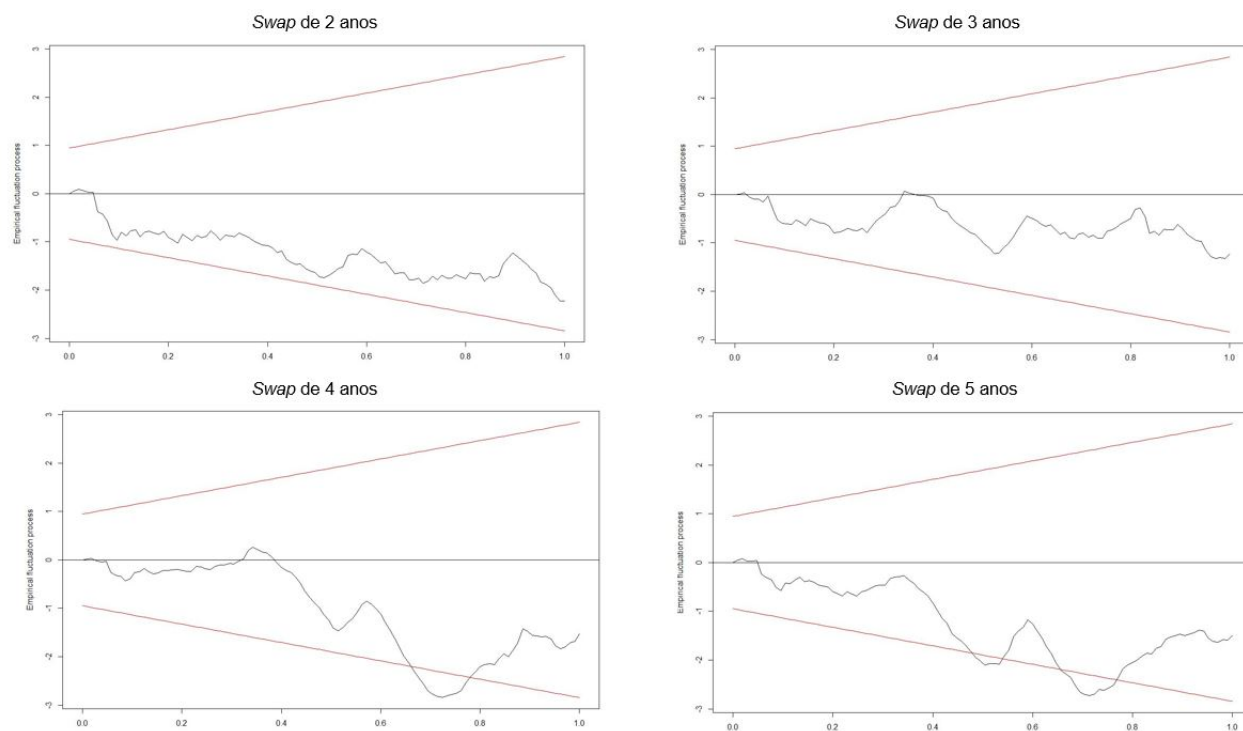


Figura 26 – Teste CUSUM - Período de 2001-2010



*Figura 27 – Teste CUSUM - Período de 2011-2019*

# APÊNDICE C – CÁLCULO DO *FORWARD* *SWAP*

Cochrane e Piazzesi (2005) define que deve-se usar a taxa *forward* da curva de juros para chegar ao retorno esperado e depois subtrair a *short rate* chegando assim ao excesso de retorno. Apesar de a justificativa do porquê isso é válido não ser explicitada no estudo, é fácil montar uma tabela de cenários e entender que a conta matemática é válida.

Os autores dizem que para entender o quanto de retorno esperado uma maturidade tem sobre outra, uma possível arbitragem seria comprar o papel longo e vendê-lo depois de um ano. Capturando assim o “prêmio” to papel longo sobre o papel curto e chegando ao retorno esperado (Assumindo que a curva de juros se mantém inalterada). Ainda seguindo a literatura original, para chegar ao excesso de retorno, devemos subtrair desse resultado o custo de financiamento (*short rate*), no meu exemplo será a taxa de um ano.

*Tabela 7 – Exemplo Curva Juros*

Ano	Taxa
1	3%
2	5%
3	9%
4	10%
5	12%

Tomando como base as taxas da estrutura a termo na tabela 7 e calculando a *Forward Rate* ou FRA 4y1y teríamos:  $5 * 12\% - 4 * 10\% = 20\%$ . Tirando o custo de financiamento teríamos um excesso de retorno de:  $20\% - 3\% = 17\%$

Para facilitar os cálculos vamos assumir que o capital inicial são 100 reais, que o arbitrador toma emprestado a taxa de 3% e precisa pagar de volta um ano. Com esse capital ele compra um título de 5 anos que remunera 12% ao ano. Assumindo que a estrutura da curva permanece inalterada, daqui a um ano o investidor vende esse papel que agora possui 4 anos de maturidade a uma taxa de 10%. O resultado financeiro dessa



arbitragem fica:

*Tabela 8 – Resultados Exemplo FRA*

Tempo (Anos)	Juros do financiamento	Juros <i>long</i> 5y	Juros <i>short</i> 4y
1º Ano	-3	12	0
2º Ano	0	12	-10
3º Ano	0	12	-10
4º Ano	0	12	-10
5º Ano	0	12	-10

A tabela 8 mostra os resultados financeiros em reais de cada uma das posições do arbitrador. No final do 1º ano, ele tem uma dívida de 3 reais pelo custo de financiamento da taxa curta e também coleta 12 reais proveniente dos juros no título de 5 anos que ele comprou anteriormente. O arbitrador então vende 100 reais do título de 4 anos para quitar o financiamento inicial não tendo esse custo mais no futuro.

Os próximos anos são basicamente os rendimentos que o arbitrador continua recebendo sobre o título inicial de 5 anos menos o que ele deve por estar vendido no título de 4 anos. Lembrando que ele não possui mais o custo de financiamento pois sua dívida foi paga no final do primeiro ano.

Temos então como resultado total da operacao :  $(5 \cdot 12 - 4 \cdot 10) - 3 = 17$  reais. Onde termo a esquerda representa o valor líquido dos rendimentos e o termo a direita representa o custo de financiamento. É fácil ver que o termo a esquerda é exatamente a fórmula da taxa *forward* 4y1y já definida anteriormente na equação 3.9 provando que esse cálculo pode ser usado para chegar ao retorno esperado. Ao subtrairmos a taxa curta chegamos ao excesso de retorno, abordagem que foi usada por Greenwood e Vayanos (2014).

# APÊNDICE D – INTERPOLAÇÃO DOS DIS

*Figura 28 – Contratos Futuros de DI*

Mensais	Trimestrais	Janeiro e Julho	Apenas Janeiro
Mai 2020	Jul 2021	Jan 2025	Jan 2027
Jun 2020	Out 2021	Jul 2025	Jan 2028
Jul 2020	Jan 2022	Jan 2026	Jan 2029
Ago 2020	Abr 2022	Jul 2026	Jan 2030
Set 2020	Jul 2022		
Out 2020	Out 2022		
Nov 2020	Jan 2023		
Dez 2020	Abr 2023		
Jan 2021	Jul 2023		
Fev 2021	Out 2023		
Mar 2021	Jan 2024		
Abr 2021	Abr 2024		
Mai 2021	Jul 2024		
	Out 2024		

Para exemplificar como funciona a interpolação, consideremos que hoje é dia 15 de Abril de 2020 e a Figura 28 representa os contratos abertos na B3. Lembrando que cada contrato vence no primeiro dia útil de cada mês, portanto o contrato de Maio 2020 é negociado até o ultimo dia útil de Abril e é liquidado no primeiro dia útil de Maio.

Para calcular a taxa do *swap* que representa a taxa de exatamente um ano de hoje, precisamos interpolar os contratos de Abril2021 e Maio2021. Para encontrar a taxa de dois, três e quatro anos, não existem contratos equivalentes para Maio, portanto a interpolação deve utilizar os contratos de Julho (Abr2022/Jul2022 para 2 anos, Abr2023/Jul2023 para 3 anos e Abr2024/Jul2024 para 4 anos). Para o contrato de cinco anos não existe nem o contrato de Abril nem o contrato de Maio, portanto a taxa do *swap on-the-run* é encontrada com a interpolação dos futuros de Jan2025/Jul2025.

O método correto de interpolação precisa ser baseado na quantidade de dias úteis de cada mês acruado pela base anual de 252 dias. Por conta dos feriados, a quantidade de dias úteis de cada mês varia dependendo do ano. Interpolar todas as curvas com essa

metodologia exigiria um trabalho manual considerável uma vez que a base total possui 19 anos. Foi utilizada então uma aproximação assumindo que cada mês tem 30 dias e cada ano tem 360 dias. Para *swaps* onde o dia corrente é um mês que existe entre os contratos abertos na B3, consideramos:

$$R_{interp} = ((Tot_{periodo} - D_{periodo}) * R_{futc} + D_{periodo} * R_{futl}) / Tot_{periodo}, \quad [D.1]$$

e para interpolar *swaps* quando o futuro curto não condiz com o mês corrente, mudamos a ordem da equação para:

$$R_{interp} = (D_{periodo} * R_{futc} + (Tot_{periodo} - D_{gap}) * R_{futl}) / Tot_{periodo}. \quad [D.2]$$

Na equação D.1, para chegar a taxa interpolada  $R_{interp}$ , precisamos atribuir pesos aos períodos de dias correspondentes ao contrato futuro de DI curto  $R_{futc}$  e ao contrato futuro de DI longo  $R_{futl}$ . A quantidade de dias da primeira parte, se dá ao subtrair o dia atual  $D_{periodo}$  do total de dias do período inteiro  $Tot_{periodo}$ . Para ponderar a segunda taxa utilizamos o próprio dia de referência  $D_{periodo}$ . A equação D.2 apenas inverte a ordem de ponderação.

Em linha com a exemplificação anterior, se hoje é dia 15 de Abril de 2020 e existem contratos futuros de Abril para os anos de 2021, 2022 2023 e 2024, porém não para 2025, preciso usar a equação D.1 para encontrar os *swaps* de um, dois três e quatro anos e a equação D.2 para o *swap* de cinco anos. Como cálculo aproximado da interpolação de um ano teríamos  $(15 * TaxaAbr21 + 15 * TaxaMai21) / 30$  ao passo que para a interpolação de cinco anos, o contrato de janeiro é anterior a abril, portanto teríamos  $(105 * TaxaJan25 + 75 * TaxaJul25) / 180$ .