

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS  
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

LUIS NAZARIO RAELE RODRIGUES

ANÁLISE DA CURVA DE JUROS REAL E  
NOMINAL: EVOLUÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DE  
SEUS FATORES AO LONGO DO TEMPO

São Paulo  
2020

**LUIS NAZARIO RAELE RODRIGUES**

**ANÁLISE DA CURVA DE JUROS REAL E  
NOMINAL: EVOLUÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DE  
SEUS FATORES AO LONGO DO TEMPO**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de Concentração: Finanças/Macroeconomia

Orientador: Prof. Dr. Emerson Fernandes Marçal

São Paulo  
2020

Rodrigues, Luis Nazario Raele.

Análise da curva de juros real e nominal : evolução e decomposição de seus fatores ao longo do tempo / Luis Nazario Raele Rodrigues. - 2020.

51 f.

Orientador: Emerson Fernandes Marçal.

Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Fundação Getulio Vargas, Escola de Economia de São Paulo.

1. Taxas de juros - Brasil. 2. Inflação. 3. Métodos de espaço de estados. 4. Cointegração. I. Marçal, Emerson Fernandes. II. Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Escola de Economia de São Paulo. III. Fundação Getulio Vargas. IV. Título.

CDU 336.781.5(81)

LUIS NAZARIO RAELE RODRIGUES

**ANÁLISE DA CURVA DE JUROS REAL E  
NOMINAL: EVOLUÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DE  
SEUS FATORES AO LONGO DO TEMPO**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de Concentração: Finanças/Macroeconomia

**Data de Aprovação**

\_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_

**Banca Examinadora:**

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Emerson Fernandes Marçal (Orientador)

FGV-EESP

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marcelo Kfoury

FGV-EESP

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Diogo de Prince

UNIFESP

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Prof. Dr. Emerson Fernandes Marçal pela orientação, ajuda e paciência no desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas de curso, em especial ao Tiago, que tornaram esses anos mais tranquilos.

Aos meus pais, Nazario e Maisa, por sempre me apoiarem e estarem comigo.

E à Natalia, por estar sempre do meu lado deixando a minha vida melhor e mais fácil de ser vivida.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é entender o comportamento das curvas de juros nominal e real no Brasil ao longo dos últimos anos. Curvas de juros são usualmente descritas através de fatores latentes, portanto, será proposto um Modelo Espaço Estado capaz de lidar com variáveis não observáveis e que possibilita interpretação direta de seus componentes. A base de dados contará com vencimentos das curvas de juros real e nominal, além de dados referentes a atividade econômica, inflação e expectativa de inflação. Os resultados obtidos indicam uma relação linear de equilíbrio de longo prazo entre as variáveis, em que a variável inflação atua como componente de ajuste de desequilíbrios, desta maneira, as curvas de juros real e nominal têm informação importante sobre o futuro da inflação. A partir desta observação, implementa-se o Modelo Espaço Estado e discute-se mudanças em sua configuração original. De maneira geral, as componentes do Modelo Espaço Estado indicam uma redução do nível dos juros ao longo de todo o período, com o aumento da explicação por fatores transitórios nos últimos anos. Por se tratar de uma base de dados de curto período, é necessário repetir a análise em períodos futuros para verificar a confirmação das evidências observadas.

**Palavras-Chave:** Brasil, Curva de Juros, Juro Nominal, Juro Real, Inflação, Modelo Espaço Estado, Cointegração.

## **ABSTRACT**

This paper's purpose is to understand Brazil nominal and real yield curves behavior in the last years. Yield curves are usually described using latent factors that can provide a straight forward component analysis. In order to represent this factors, the method used will be a State Space Model with unobserved components. The data will include real and nominal yield curves maturities, as well as data on economic activity, inflation and inflation expectation. The results suggest a linear long term combination of variables, known as cointegration, with inflation acting as an adjustment component. From this observation, State Space Model is applied and some changes in its original description are discussed. In general, the State Space Model components suggest a reduction in interest rate level along all database course, and a increasing importance of transitory factors on the last years. As data includes a short time range, it will be fruitfully to repeat this analysis with a longer period to confirm these results.

## LISTA DE TABELA

1	Descrição Variáveis Observadas . . . . .	29
2	Testes de Cointegração de Johansen . . . . .	30
3	Coeficientes $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	32
4	Modelo Inicial . . . . .	35
5	Modelos Modificados II e III . . . . .	39
6	Comparação de Modelos . . . . .	39



## LISTA DE FIGURAS

1	Logartimpo da Produção Industrial . . . . .	23
2	IPCA Mensal Anualizado . . . . .	24
3	Juro Nominal . . . . .	26
4	Juro Real . . . . .	27
5	Expectativa de Inflação . . . . .	29
6	Vetor Cointegração - dados curvas de juros de 2 anos . . . . .	33
7	Vetor Cointegração - dados curvas de juros de 5 anos . . . . .	34
8	Resultado Modelo com Restrições - 2 anos . . . . .	36
9	Resultado Modelo com Restrições - 5 anos . . . . .	38
10	Resultado Modelo Modificado III - 2 anos . . . . .	41
11	Resultado Modelo Modificado III - 5 anos . . . . .	42
12	Resultado Modelo Modificado I - 2 anos . . . . .	47
13	Resultado Modelo Modificado I - 5 anos . . . . .	48
14	Resultado Modelo Modificado II - 2 anos . . . . .	49
15	Resultado Modelo Modificado II - 5 anos . . . . .	50

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>BASE DE DADOS</b>	<b>22</b>
4.1	PRODUÇÃO INDUSTRIAL . . . . .	23
4.2	INFLAÇÃO . . . . .	23
4.3	JURO NOMINAL . . . . .	24
4.4	JURO REAL . . . . .	25
4.5	EXPECTATIVA DE INFLAÇÃO . . . . .	28
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>29</b>
5.1	ANÁLISE DE COINTEGRAÇÃO . . . . .	30
5.2	MODELO INICIAL COM RESTRIÇÃO DE NÃO ARBITRAGE	35
5.3	MODIFICAÇÕES MODELO ORIGINAL . . . . .	38
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>42</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIA</b>	<b>44</b>
<b>8</b>	<b>APÊNDICE</b>	<b>46</b>
8.1	MODELO MODIFICADO I . . . . .	46
8.2	MODELO MODIFICADO II . . . . .	48

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do mercado financeiro brasileiro ao longo dos últimos 25 anos tem como um de seus resultados a evolução da estrutura a termo da curva de juros. Desde a criação do Plano Real, a melhora do arcabouço macroeconômico aliado ao controle dos níveis de inflação trouxe maior previsibilidade a respeito dos indicadores econômicos, tornando possível o aumento do prazo de vencimento dos títulos pré-fixados e indexados à inflação.

Este trabalho tem como objetivo analisar o comportamento das curvas de juros real e nominal ao longo deste período. Para isto, serão avaliados os vencimentos de 2 e 5 anos de ambas as curvas. É importante ressaltar que, por se tratar de um mercado em desenvolvimento, a existência de dados representativos referentes aos vencimentos de 5 anos é muito mais recente quando comparada a de 2 anos. Para avaliar a trajetória das curvas, isto é, o quanto do seu movimento é explicado por mudanças permanentes em seu nível e o quanto se dá por fatores transitórios, será empregada a conjunção de duas metodologias: Modelo Espaço Estado (MEE) e cointegração.

O MEE é frequentemente utilizado em análises de séries temporais já que permite que movimentos característicos destas séries sejam decompostos em componentes não observáveis. Tais componentes permitem uma interpretação direta de seus resultados.

As variáveis utilizadas serão: logaritmo da Produção Industrial, inflação realizada (IPCA), juros reais e nominais e a expectativa de inflação de 2 e 5 anos. O MEE irá compor, a depender da variável, as séries com os fatores de nível, inclinação, sazonal e transitório. O período analisado também dependerá da variável. Conforme mencionado acima, os dados da curva de juros com vencimento de 5 anos são mais recentes. Neste caso, para ambos juros real e nominal, o período analisado compreende o intervalo entre os anos de 2011 e 2019. Já os dados da curva de juros com vencimento de 2 anos, o período analisado compreende o intervalo entre os anos de 2001 e 2019 para o juro nominal e 2009 a 2019 para o juro real. Portanto, ainda que os vencimentos mais longos tenham menor período de observação, tanto o número de observações, quanto o período podem ser considerados relevantes.

A análise de cointegração sugere a existência de uma relação de equilíbrio

de longo prazo entre as variáveis, em que a inflação é responsável pelo ajustamento dos desequilíbrios. Portanto, há uma evidência de que as demais variáveis trazem informação relevante sobre o futuro da inflação.

O MEE aponta para uma redução relevante do nível do juro no período que compreende os anos de 2001 a 2013. Esta redução pode ser atribuída à queda do juro neutro e do prêmio de risco, explicada por uma melhora do ambiente macroeconómico e credibilidade do Banco Central no período. Após o ano de 2013, é observado um aumento substancial dos fatores transitórios. Este aumento dos fatores transitórios pode ser atribuído a um aumento da variabilidade do prêmio de risco e incerteza do nível de juro neutro. O que vai de encontro a um período de deterioração da política macroeconómica, em especial da política fiscal, e da credibilidade do Banco Central.

O presente trabalho encontra-se dividido em seis seções, sendo a primeira constituída por esta introdução. A segunda, contém uma breve revisão de artigos relacionados a estrutura a termo da curva de juros. Em seguida, apresenta-se uma discussão da metodologia empregada, seguida de um detalhamento da base de dados. A quinta seção consiste na apresentação dos resultados e a última seção conclui este estudo.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Entender o comportamento conjunto da curva de juros e das variáveis macroeconômicas é extremamente importante para a precificação dos títulos, decisão de investimentos e política pública. Neste contexto, a hipótese de Fisher propõe, através de sua equação, uma relação básica entre taxas de juros nominal, taxas de juros real e expectativa de inflação, em que a taxa de juros nominal é o somatório da taxa real e da expectativa de inflação. Portanto, através da hipótese de Fisher, o juro nominal deve responder a mudanças no juro real e na expectativa de inflação.

Alguns estudos, como no caso de Pearson e Sun (1994), Litterman e Scheinkman (1991) e Dai e Singleton (2000), utilizam modelos de fatores latentes para explicar movimentos nas curvas de juros. No entanto, estes fatores não apresentam relação direta com variáveis macroeconômicas.

Litterman e Scheinkman (1991) buscaram determinar os fatores comuns que afetaram os retornos dos títulos no passado. De acordo com o estudo, os três principais fatores responsáveis pelas variações nos retornos dos títulos são: nível, inclinação (*steepness*) e curvatura (*curvature*). Apesar dos autores destacarem a importância destes três fatores, que, segundo eles, descrevem praticamente toda a variabilidade do retorno ao longo das curvas de juros, Litterman e Scheinkman (1991) não fazem uma relação direta entre esses fatores e variáveis macroeconômicas.

A vantagem dos modelos de fatores reside no fato de que sua única imposição é a condição de não arbitragem, não sendo necessária nenhuma outra condição que caracterize o equilíbrio da economia. No entanto, como estes fatores não estão diretamente relacionados com indicadores econômicos, o modelo não consegue explicar como os juros respondem às condições da economia.

Para tentar superar esta deficiência dos modelos de fatores, muitos estudos utilizaram modelos de Vetores Autoregressivos (VAR) para descrever a relação direta entre estrutura da curva de juros e variáveis macroeconômicas. Evans e Marshall (2001), através de funções impulso resposta e da decomposição da variância do modelo VAR associaram choques tecnológicos que geram impacto na atividade e no nível de preço a movimentos ao longo da

curva de juros.

O modelo VAR tem a vantagem de ser flexível ao mesmo tempo em que consegue dar algumas indicações sobre a relação entre os choques econômicos e os movimentos da curva de juros. No entanto, algumas limitações deste modelo também precisam ser consideradas: primeiro, apenas os vencimentos incluídos no VAR podem ser relacionados às questões econômicas, isto é, perde-se a relação da curva como um todo, ficando limitada ao vencimento especificado; segundo, a não ser quando imposto pela estimação do VAR, não se pode descartar as oportunidades de arbitragem; terceiro, variáveis não observáveis não podem ser incluídas.

Ang e Piazzesi (2003) sugerem um modelo de fatores Gaussiano (que, em última instância, também é um VAR), para explicar os efeitos de variáveis macroeconômicas na estrutura a termo da taxa de juros. Ao agregar os dois modelos previamente expostos, Ang e Piazzesi (2003) conseguem combinar vantagens de ambos. Através do VAR é possível relacionar curva de juros com economia, ao mesmo tempo em que, por meio do modelo de fatores, é permitida a caracterização do comportamento de toda a curva e não somente dos vencimentos incluídos no modelo. Além disso, a metodologia proposta por estes autores permite a incorporação de variáveis latentes. Finalmente, o VAR permite a análise das funções impulso resposta e decomposição da variância, sendo apenas necessária a condição de não arbitragem.

Através deste modelo, Ang e Piazzesi (2003) observaram que fatores macroeconômicos podem explicar uma grande parte das variações das taxas de juros dos títulos. Atividade e nível de preços são responsáveis por até 85% da variância nas projeções de vencimentos mais curtos. No entanto, o impacto destas variáveis macro é menor para maturidades mais longas, chegando a 40%.

Duffee (2002) examinou a habilidade de previsão dos modelos afim da estrutura a termo da taxa de juros<sup>1</sup>. Para Duffee (2002), essa avaliação é extremamente importante porque, se um modelo produz projeções ruins, é

---

<sup>1</sup>Segundo Duffee (2002): *By "affine," I refer to models where zero-coupon bond yields, their physical dynamics, and their equivalent martingale dynamics are all affine functions of an underlying state vector*.

pouco provável que ele traga informações relevantes sobre os motivos que levaram à violação das hipóteses de Fisher e de expectativas.

A primeira grande conclusão de Duffee (2002) é que a classe de modelos "completamente afim", utilizada até aquele momento de forma mais intensiva, falhava nas previsões, ou seja, os juros estimados por esses modelos eram consistentemente piores do que os gerados por um modelo que considerava que os rendimentos seguiam um passeio aleatório. Segundo o estudo, os modelos "completamente afim" produzem erros de estimação dos juros com forte correlação negativa com a inclinação da curva. Para o autor, isso acontece por dois motivos: a distribuição dos juros não é fortemente viesada - sugerindo um passeio aleatório - e, enquanto o excesso de retorno médio dos títulos não é muito maior que zero, a inclinação da estrutura a termo prevê uma variação significativamente grande do excesso de retorno destes papéis. Os modelos "completamente afim" não capturam essas características ao exigir a condição de não arbitragem, a compensação vai a zero quando o risco também vai a zero. Entretanto, o próprio Duffee (2002) reafirma a relevância destes modelos ao destacar que eles podem ser estendidos sem grandes custos, gerando previsões mais acuradas das taxas de juros.

Depois da introdução dos títulos atrelados à inflação, surgiram muitos estudos tentando descrever o comportamento das taxas reais e suas relações com as taxas nominais e inflação. Fisher (1930), estabeleceu que a inflação implícita, determinada pela diferença entre as taxas de juros nominal e real, é igual a expectativa de variação futura. No entanto, a hipótese de Fisher desconsidera a aversão ao risco dos agentes e, por isso, foi rejeitada em diversos estudos.

Enquanto os títulos reais podem ser considerados ativos com menor nível de risco, já que são indexados a um índice de preços, os títulos nominais, ao possuírem um valor monetário predefinido, estão sujeitos ao risco inflacionário. Em um contexto de não arbitragem, os agentes deveriam demandar uma remuneração adicional para dos papéis nominais devido ao risco inflacionário, denominada prêmio de risco da inflação.

Os títulos indexados à inflação foram emitidos pela primeira vez no Reino

Unido em 1981<sup>2</sup>, por isso, existe uma ampla gama de trabalhos acerca da decomposição da inflação implícita britânica. Evans (1998), utilizando dados do Reino Unido encontra forte evidência para rejeitar a hipótese de Fisher. O autor também rejeita a hipótese de expectativas, ao detectar presença de um prêmio de risco de inflação variável no tempo ao longo da estrutura a termo de taxa de juros britânica.

Joyce, Lildholdt e Sorensen (2010) também analisam a estrutura a termo da taxa de juros do Reino Unido. No entanto, impondo ao modelo a restrição de não arbitragem entre as taxas de juros nominal e real, os autores são capazes de decompor os juros em: taxa de juros real esperada, expectativa de inflação, prêmio de risco real e prêmio de risco de inflação. O modelo proposto por Joyce, Lildholdt e Sorensen (2010) é derivado da classe de modelos estruturais afins, e tem duas suposições centrais: a primeira é assumir que não há arbitragem entre os títulos nominais e reais; a segunda, os títulos são precificados por um fator de desconto estocástico, no qual o prêmio de risco do mercado é uma função linear de fatores observáveis e não observáveis.

A preferência por fatores latentes em detrimento dos fatores macroeconômicos é defendida pelos autores por gerar uma melhor aderência estatística aos dados e por garantir uma "abordagem agnóstica" que, consequentemente, levaria a menores erros de especificação. Joyce, Lildholdt e Sorensen (2010) sugerem que dois fatores latentes impactam a taxa de juros real de curto prazo esperado, enquanto os mesmos dois fatores somados a duas variáveis (índice de preços e uma não observável) afetam a curva nominal e o prêmio de risco real.

Também utilizando um modelo de livre arbitragem, Amico, Kim e Wei (2008) mostram boa aderência entre a inflação implícita e a expectativa da inflação americana, apesar da presença do prêmio de liquidez.

No Brasil, alguns estudos também procuraram decompor a inflação implícita. Vicente e Graminho (2015), utilizando dados brasileiros de 2006 a 2013, propuseram um modelo econômico simples que decompunha a inflação implícita nos seguintes fatores: expectativa de inflação, termo de convexi-

---

<sup>2</sup>Nos Estados Unidos essas emissões tiveram início apenas em 1997 e no Brasil, os títulos indexados à inflação foram emitidos pela primeira vez em 2001.



dade e prêmios de liquidez e de risco de inflação. Segundo os autores não é só o prêmio de risco da inflação que invalida a hipótese de Fisher. Mesmo considerando o risco inflacionário, a inflação implícita não é igual a expectativa de inflação futura, pois a menor liquidez dos títulos indexados à inflação também exige uma recompensa extra (prêmio de liquidez) e a relação entre os preços dos títulos e taxas é dada por uma função convexa, no surgimento de mais uma componente da inflação implica, o viés de convexidade. No entanto, ao analisarem separadamente cada componente da inflação implícita, Vicente e Graminho (2015) chegaram à conclusão que a expectativa de inflação explica 60% da variação na inflação implícita, enquanto os termos de convexidade e liquidez são insignificantes e o prêmio de risco da inflação tem magnitude consideravelmente menor do que a inflação implícita (em média 10 vezes menor em modulo). Ou seja, embora a hipótese de Fisher não seja válida, os autores justificam a popularidade da inflação implícita como indicador da variação de preço futura, diante do resultado de que o principal componente de diferença entre as taxas nominal e real é de fato a expectativa de inflação.

### 3 METODOLOGIA

Com objetivo de analisar os fatores não observáveis da curva de juros, o presente estudo empregará uma metodologia frequentemente utilizada para a modelagem de séries temporais, denominada de Modelo de Espaço Estado (MEE).

O MEE permite que movimentos característicos de uma série temporal sejam decompostos em componentes não observáveis tais como, tendência, inclinação, sazonalidade, entre outros. Esta metodologia apresenta duas principais vantagens frente às demais: oferece interpretação direta dos componentes e lida com dados multivariados e processos estocásticos.

Outra vantagem do MEE é que, conforme será discutido na seção de base de dados, é possível estimar os parâmetros com valores omitidos das variáveis observadas. Isto é, torna possível o uso de variáveis com diferentes intervalos de tempo de sua base de dados. O MEE é caracterizado por duas equações - a de medida (observações) e a de estado (transição) - representadas, conforme Durbin e Koopman (2012), respectivamente, por:

$$y_t = z_t' \alpha_t + \epsilon_t \quad (1)$$

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + R_t \eta_t \quad (2)$$

Com  $\epsilon_t \sim N(0, h_t)$  e  $\eta_t \sim N(0, Q_t)$ .  $\epsilon_t$  são ruídos não correlacionados e  $\eta_t$  vetor de ruídos serialmente não correlacionados<sup>3</sup>.  $z_t$ ,  $T_t$  e  $R_t$  são matrizes conhecidas do sistema.

A equação de medida descreve a relação entre as variáveis observadas,  $y_t$ , e o vetor de estado  $\alpha_t$ . Já a segunda equação mostra a dinâmica das variáveis de estado. A equação de estado é crucial em séries de tempo. Commandeur e Koopman (2007) representam a dependência intertemporal nas séries de tempo como o estado no momento  $t$  sendo função do estado no momento  $t-1$ . Portanto, de maneira geral, o valor da série observada no momento  $t$  assemelha-se mais ao valor observado no momento  $t-1$  do que a qualquer outro valor anterior da série.

O vetor  $\alpha_t$  pode conter os componentes de tendência, inclinação, sazonalidade, ciclicidade, além dos termos de erro. Como o vetor de estado é não observável, para estimá-lo utiliza-se o algoritmo recursivo de Filtro de Kalman<sup>4</sup>.

Considerando o componente de tendência do vetor de estado, este pode ser representado por duas equações: uma responsável por modelar o nível e outra inclinação. Ambos fatores, nível e inclinação, podem seguir um processo estocástico, isto é, possuem variação ao longo do tempo, ou um processo determinístico - em que seu valor não varia no tempo. A inclinação pode ser considerada análoga ao coeficiente angular de uma regressão clássica ( $\beta$ ). No entanto, Commandeur e Koopman (2007) reforçam o ponto de que, diferentemente do ( $\beta$ ), que tem coeficiente fixo, a inclinação pode variar no tempo. Conforme será discutido na seção de resultados, o componente de tendência tem grande importância neste trabalho, pois será responsável por descrever quais movimentos ao longo do tempo tem caráter permanente.

---

<sup>3</sup> $\epsilon_t$  e  $\eta_t$  também não são correlacionados entre si.

<sup>4</sup>A derivação do Filtro de Kalman depende da hipótese de distribuição normal conjunta de  $\alpha_t$  e  $y_t$ .

Séries temporais podem apresentar comportamentos periódicos ou variações cíclicas. No primeiro caso, os dados que demonstram um padrão temporal de ocorrência seguem, o que é chamado, padrão sazonal. Com o intuito de corrigir este padrão de ocorrência, o MEE possibilita a utilização de um efeito sazonal em seu vetor de estado. Para controlar esta característica é adicionado à variável um filtro sazonal.

Já o componente cíclico pode ser representado por um modelo Autorregressivo (AR), que identifica as relações lineares entre cada variável e o valor defasado, a depender do número de defasagens utilizados, dela própria e de todas as demais variáveis.

Como dito anteriormente, a estimação dos parâmetros do vetor de estado é obtida através da utilização de um algoritmo recursivo. O Filtro de Kalman é um algoritmo capaz de estimar valores para componentes não observados com base nas informações disponíveis. Assim, o filtro determina as estimativas do vetor de estado no período  $t$  dada toda a informação disponível até  $t-1$ . Algumas propriedades interessantes fazem com que o Filtro de Kalman seja o algoritmo recursivo mais utilizado neste tipo de estimação. Entre estas propriedades, destaca-se o fato do Filtro de Kalman coincidir com médias e variâncias *a posteriori* calculadas sob o ponto de vista Bayesiano.

Koopman (2009) descreve o função do Filtro de Kalman no modelo espaço estado em séries de tempo como análoga a dos Mínimos Quadrados Ordinários em um modelo de regressão. De maneira geral, o Filtro de Kalman consiste em uma série de vetores e matrizes recursivas e sua importância é baseada em: cálculo das estimativas dos parâmetros de um período a frente e seu erro quadrático médio, análise do erro médio de suas projeções, cálculo da função de verossimilhança através da decomposição do erro de suas projeções e a suavização de seus resultados.

Este trabalho contará com as seguintes variáveis observadas ( $\vec{y}_t$ ): logaritmo da produção industrial mensal (PIM), dado oficial de inflação realizada (IPCA) anualizada, vencimentos de 2 e 5 anos da curva de juros nominal, expectativa de inflação de 2 e 5 anos retirada do relatório FOCUS e, por fim, vencimentos de 2 e 5 anos da curva de juros real.

O logaritmo da PIM será utilizado a fim de introduzir uma variável ma-

croeconômica, com a mesma base temporal das demais variáveis, que adicione informações a respeito do nível de atividade econômica e o respectivo momento do ciclo econômico. Sobre esta variável, a equação de estado utilizará, dentro dos componentes de tendência, tanto fatores de nível quanto de inclinação - por se tratar de uma série em nível crescente no tempo. Será utilizado também um componente sazonal, com o objetivo de controlar os padrões temporais da série, como, por exemplo, meses com diferentes números de dias úteis. A equação ainda contará com um componente autoregressivo com duas defasagens AR(2), que será responsável por identificar a parcela cíclica da atividade.

O dado mensal anualizado da inflação realizada será incluído no modelo pois, de acordo com a Regra de Taylor, os preços, juntamente com a atividade econômica, são os principais fatores para a determinação da taxa de juros. No caso brasileiro, a importância da inflação na determinação da taxa de juros é explícita, já que, desde 1999, o Banco Central do Brasil está sob o regime de metas de inflação<sup>5</sup>. Neste artigo, a equação de estado referente à inflação contará com um componente de tendência, o de nível, responsável por identificar as eventuais mudanças permanentes no nível de inflação. Além disso, será adicionado um componente sazonal, pois, assim como a série da PIM, os dados de inflação também demonstram forte padrão sazonal. Com o objetivo de identificar a parcela cíclica será utilizado um componente autoregressivo com duas defasagens AR(2).

Os vencimentos de 2 e 5 anos das curvas de juros real e nominal são as principais variáveis deste estudo. O objetivo deste trabalho é identificar o seu comportamento ao longo do tempo, bem como a sua relação com as demais variáveis. Para isto, suas equações de estado irão contar com um componente de tendência, que, assim como na equação da inflação, será o de nível. Através do componente de nível será possível estimar as mudanças permanentes na trajetória das taxas de juros futuras. Será empregado também, com o objetivo de estimar a parcela cíclica das taxas de juros, um componente autoregressivo com duas defasagens AR(2).

Por fim, levando em consideração que um dos objetivos do sistema de me-

---

<sup>5</sup>No Brasil, o Banco Central tem como mandato manter a inflação dentro da meta estipulada pelo Conselho Monetário Nacional(CMN).

tas de inflação é ancorar as expectativas sobre a inflação futura dos agentes econômicos, as expectativas de inflação, capturadas pela pesquisa FOCUS, de 2 e 5 anos também serão incorporadas no modelo. Estas terão em sua equação de estado os mesmos componentes das equações referentes aos juros nominal e real.

Desta maneira, sendo  $y_{1t}$  o log da PIM,  $y_{2t}$  a inflação realizada,  $y_{3t}$  o juro nominal,  $y_{4t}$  a expectativa de inflação,  $y_{5t}$  o juro real,  $\mu_t$  nível,  $\beta_t$  inclinação,  $\gamma_t$  sazonalidade a seguinte especificação será utilizada:

$$y_t = z'_t \alpha_t + \epsilon_t \quad (3)$$

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + R_t \eta_t \quad (4)$$

$$\text{Com } y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \\ y_{4t} \\ y_{5t} \end{bmatrix}, z'_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ AR(2) \end{bmatrix}, T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 1 \end{bmatrix}$$

$\epsilon_t \sim N(0, h_t)$  e  $\eta_t \sim N(0, Q_t)$ .

Através desta configuração e aplicando o Filtro de Kalman otimizado pelo método de Máxima Verossimilhança serão estimados os parâmetros do modelo e o comportamento das variáveis ao longo do tempo. Será utilizado o software OxMetrics em seu módulo STAMP (*Structural Time Series Analyser Modeller and Predictor 8.0*). O módulo STAMP é utilizado para modelagem de séries de tempo com presença de variáveis não observadas e possibilita a estimação dos parâmetros através da configuração descrita acima.

Ao modelo descrito acima, será adicionada a seguinte restrição de não arbitragem entre as curvas de juros nominal e real :

$$\dot{i}_t = r_t + \pi_t \quad (5)$$

Na qual  $\dot{i}_t$  e  $r_t$  são as curvas de juros nominal e real, respectivamente e  $\pi_t$  a taxa de inflação.

Esta restrição indica que, no longo prazo, há uma relação entre os vencimentos a termo de mesmo prazo das curvas de juros e a inflação realizada

de modo a não existir a possibilidade de arbitragem entre as curvas de juros. Isto é, de maneira permanente há uma relação de não arbitragem. Portanto, a componente de nível, responsável pela mudança em longo prazo, sofrerá esta restrição.

A presença de uma relação linear entre as variáveis observadas implica na existência do que é conhecido como cointegração. Esta relação de equilíbrio entre as variáveis é obtida no longo prazo. Entretanto, no curto prazo, está sujeita a desvios. Para que esses desequilíbrios de curto prazo sejam corrigidos e, então, a cointegração seja observada, o presente artigo utilizará o Modelo Vetorial de Correção de Erros, popularizado por Johansen e Juselius numa série de trabalhos (Johansen 1988, 1991, 1995b; Johansen e Juselius 1990; Juselius 1995), descrito abaixo.

Considerando o seguinte modelo VAR(2):

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \Phi_t q_t + v_t \quad (6)$$

Em que  $y_t$  é  $n \times 1$ ,  $q_t$  contém os termos determinísticos e  $v_t \sim N_I(0, \Sigma)$ . Essa equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta y_t = (\alpha_1 + \alpha_2 - I_n) y_{t-1} - \alpha_2 \Delta y_{t-1} + \Phi_t q_t + v_t \quad (7)$$

Determinando  $P_0 = (\alpha_1 + \alpha_2 - I_n)$  e  $\delta_1 = -\alpha_2$ :

$$\Delta y_t = P_0 y_{t-1} - \delta_1 \Delta y_{t-1} + \Phi_t q_t + v_t \quad (8)$$

$P_0$  é a matriz de respostas de longo prazo que determina como  $y_t$  entra no sistema. Sendo assim, o posto da matriz  $P_0$  determina quantas combinações lineares das variáveis são estacionárias. Considerando o posto da matriz  $P_0$  igual  $r$ , se  $r=n$  todas as variáveis de  $y_t$  são estacionárias, enquanto se  $r=0$  não existe cointegração pois  $\Delta y_t$  é  $I(0)$ . Já quando  $0 < r \leq n$ , há  $r$  relações de cointegração. A hipótese de cointegração pode ser escrita como:

$$H(r) = \text{posto}(P_0) \leq r$$

Sendo que  $P_0$  pode ser representado pelo produto de duas matrizes:

$$P_0 = \alpha * \beta' \quad (9)$$

Em que  $\alpha$  e  $\beta$  apresentam ordem  $n \times r$ ,  $n$  representando a dimensão do VAR e  $r$ , o posto da matriz  $P_0$ .  $\alpha$  é normalmente chamado de matriz de coeficientes de ajustamento, enquanto  $\beta$  é a matriz de cointegração. Através do método de Máxima Verossimilhança, Johansen (1988) propôs, por meio dos testes abaixo, a estimação do posto de  $P_0$ . Sabendo que o posto também fornece o número de autovalores  $\lambda$  não nulos, se as séries não forem cointegradas, todos os autovalores serão nulos e, conseqüentemente, o  $\log(1 - \lambda_i) = 0$  para todo  $i$ . Sendo assim, o teste para avaliar o posto de  $P_0$  é baseado na seguinte estatística traço:

$$\lambda_{tr}(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^n \log(1 - \lambda_i) \quad (10)$$

Em que a hipótese nula é  $r \leq r_0$  e a hipótese alternativa, é a de que  $r_0 < r < n$ , sendo  $n$  o número máximo de possíveis vetores de cointegração. Se  $r = r_0$  então os autovalores são aproximadamente nulos e a estatística traço será pequena. Caso se rejeite esta hipótese nula, a próxima hipótese nula do teste será posto de  $P_0$  igual a  $r_0 + 1$ . Alternativamente, Johansen (1988) também apresentou a estatística de máximo valor, descrita pela equação:

$$\lambda_{max}(r_0) = -T \log(1 - \lambda_{r_0+1}) \quad (11)$$

Para testar a hipótese nula de que  $r = r_0$  versus a alternativa de que  $r = r_0 + 1$ . Após identificado o número de vetores de integração, a matriz de cointegração será  $(n-r) \times n$ , sendo  $r$  o número de vetores de cointegração. Obedecendo o número de vetores de cointegração e seu valor em função da restrição adotada, as variáveis serão rearranjadas para que seja obtida a equação de estado referente ao nível.

Na seção de resultados será discutido os possíveis ganhos obtidos quando se adiciona esta restrição, bem como diferentes configurações do modelo.

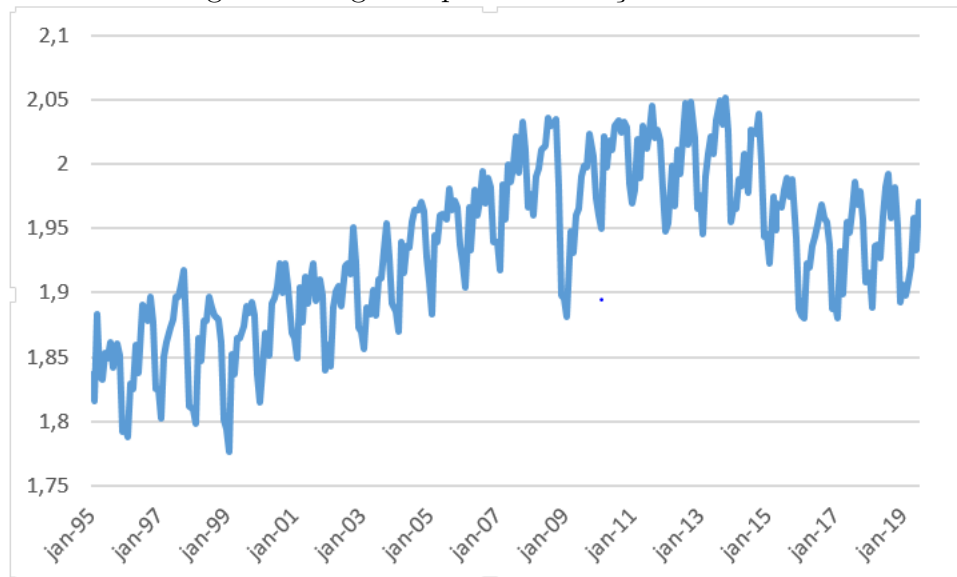
## 4 BASE DE DADOS

Este trabalho tem como variáveis observadas a produção industrial, a variação mensal do índice de preços ao consumidor ampliado (IPCA), taxas de juros reais e nominais com prazo de 2 e 5 anos e, por fim, a expectativa de inflação anual dos próximos 2 e 5 anos.

## 4.1 PRODUÇÃO INDUSTRIAL

O índice de produção industrial mensal (PIM) é divulgado mensalmente pelo IBGE. A série utilizada é a da indústria geral sem ajuste sazonal, e compreende o período entre os meses de janeiro do ano de 1995 e julho do ano de 2019 - totalizando 295 observações. Os valores estão em nível, com a média do ano de 2012 sendo igual a 100. Como há mudanças na série durante o período em questão, foram usadas séries encadeadas mantendo o ano de 2012 como base 100. A fim de tornar a série mais suave, será utilizado o logaritmo em seus dados.

Figura 1: Logartimpo da Produção Industrial



## 4.2 INFLAÇÃO

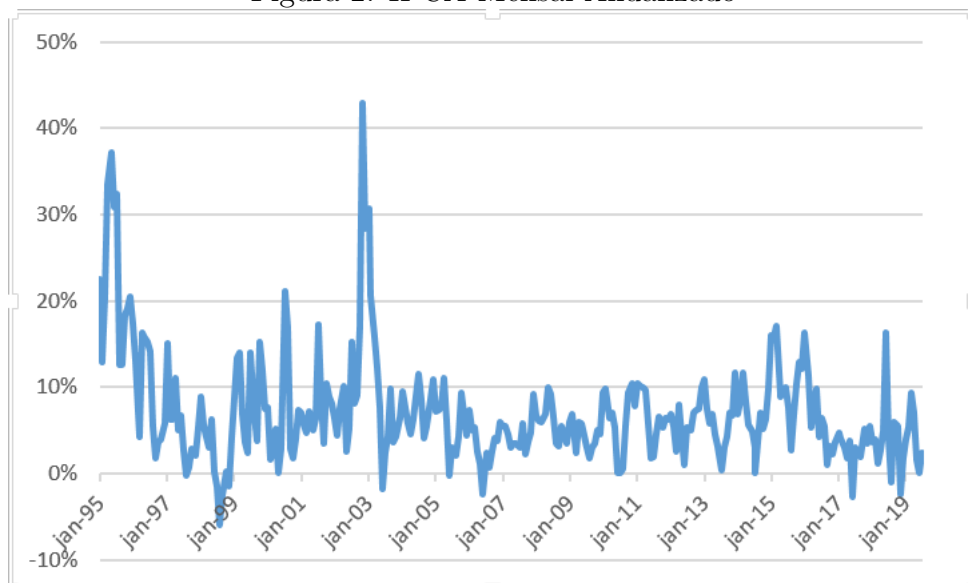
Os dados de inflação são obtidos através do índice de preços ao consumidor ampliado (IPCA). Assim como a PIM, sua divulgação ocorre de maneira mensal pelo IBGE. A série utilizada compreende o período entre os meses de janeiro de 1995 e julho de 2019. Será utilizado a sua variação percentual mensal e, a fim de deixar a série com a mesma base de comparação das demais variáveis, a variação mensal será anualizada. Esta anualização potencializará



os efeitos sazonais - que, conforme exposto na seção de metodologia, serão controlados através de um filtro de sazonalidade.

Importante salientar que o IPCA é o dado oficial de inflação e que, desde junho de 1999 - começo do regime de metas de inflação -, a atuação da política monetária tem como objetivo manter o IPCA dentro de sua meta definida pelo CMN. Além disto, o IPCA é o fator que corrige os títulos públicos indexados à inflação (NTN-Bs) que serão utilizados como base de dados para o juro real deste trabalho.

Figura 2: IPCA Mensal Anualizado



### 4.3 JURO NOMINAL

Serão utilizados os vencimentos de 2 e 5 anos da curva de juros nominal brasileira com dados obtidos através dos contratos futuros da curva de juros negociados na Bolsa de Mercadoria e Futuros - antiga BMF, atual B3. A opção de utilização do contrato futuro em detrimento de um eventual título do governo federal como as Letras do Tesouro Nacional (LTN) ou Notas do Tesouro Nacional série F (NTN-Fs) se dá pela liquidez e representatividade do mercado.

O contrato futuro de juros (Futuro de DI - depósito interbancário) tem mesmas características de uma LTN, um título pré-fixado com pagamento de juros e principal em seu vencimento. Por ser um contrato futuro, diferentemente de um *swap*, há padronização, ajuste diário e margem depositada. Portanto, com padronização e ausência de risco de crédito, este contrato tem enorme liquidez no mercado local e se torna representativo a respeito do comportamento da taxa de juros futura.

Outra característica importante do contrato futuro de taxas de juros nominal é que seu vencimento ocorre sempre no primeiro dia útil do mês referido. Desta maneira, não há um contrato futuro com prazo fixo de 2 ou 5 anos, mas sim como uma data fixa, como, por exemplo, janeiro 2023. A fim de obter os prazos de 2 e 5 anos fixos, será utilizada uma interpolação cúbica entre os vencimentos mais próximos do prazo em questão.

A série utilizada para o prazo de 2 anos está compreendida no intervalo entre os meses de janeiro do ano de 2002 e julho de 2019. Já para o prazo de 5 anos, o intervalo está compreendido entre janeiro de 2011 e julho de 2019. A diferença entre as séries se deve as características do mercado local. Por se tratar de um mercado em desenvolvimento, anteriormente ao ano de 2011 há baixa representatividade e liquidez para contratos de prazo similar a 5 anos.

A negociação dos contratos futuras é diária e, desta maneira, há, diariamente, um ajuste de fechamento para cada vencimento. Com o objetivo de manter um padrão com as demais variáveis envolvidas neste trabalho, serão utilizados apenas os dados de fechamento do último dia de cada mês do intervalo referido.

#### 4.4 JURO REAL

Assim como no Juro Nominal, serão utilizados os vencimentos de 2 e 5 anos. Entretanto, para o Juro Real os dados utilizados serão obtidos através dos títulos públicos, mais especificamente, das Notas do Tesouro Nacional Serie B (NTN-B).

As NTN-Bs são títulos emitidos pelo Governo Federal e sua remuneração é composta da seguinte maneira: o valor do principal é corrigido diariamente

Figura 3: Juro Nominal



pelo Índice de Preços ao Consumidor Ampliado (IPCA) e os juros são pagos semestralmente através de um cupom de 6% ao ano. A negociação destes títulos é realizada pelo cupom de juros.

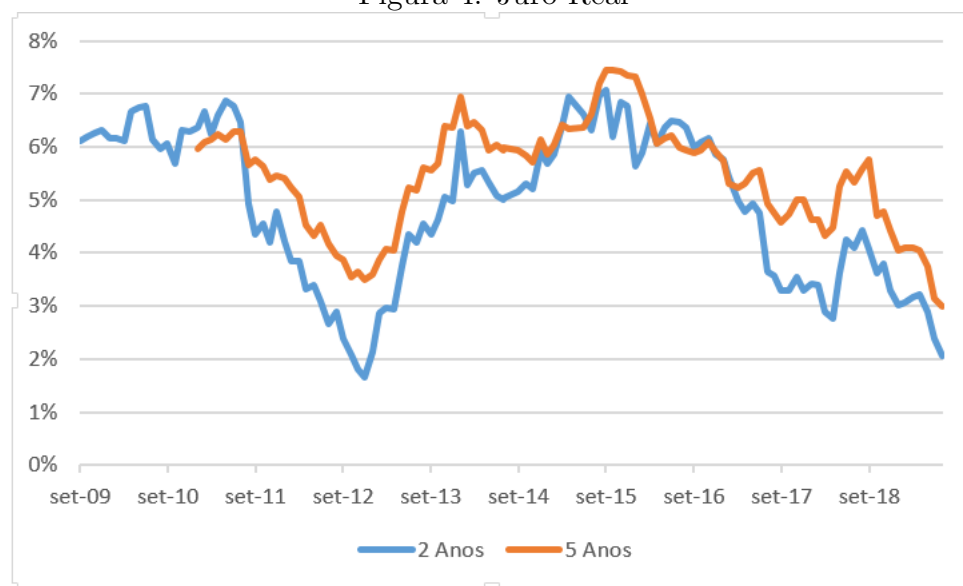
De maneira análoga ao contrato futuro de juro nominal, as NTN-Bs são títulos com vencimento pré-estabelecido, e não prazo específico, por esta razão, assim como realizado com os dados de juro nominal, as taxas de juro real serão interpoladas - utilizando interpolação cúbica - para que se encontre os valores correspondentes aos prazos de 2 e 5 anos.

A série utilizada para o prazo de 2 anos está compreendida no intervalo entre os meses de setembro de 2009 e julho de 2019. Já para o prazo de 5 anos, o intervalo está compreendido entre o mês de janeiro de 2011 e julho de 2019. Também de maneira similar ao ocorrido com os dados de juro nominal, por se tratar de um mercado em desenvolvimento, as janelas em que se encontram os dados não são as mesmas a fim de se utilizar dados que tenham maior representatividade e melhor liquidez. Neste aspecto, cabe notar que até o ano de 2006, o Tesouro Nacional ainda emitia as Notas do Tesouro Nacional Série C (NTN-C), títulos de estrutura similar a da NTN-B, mas

que tem seu principal corrigido pelo IGP-M<sup>6</sup>.

As NTN-Bs são detidas por diversos tipos de investidores: fundos de pensão, fundos de investimento, bancos, pessoas físicas, investidores estrangeiros. Sua negociação ocorre diariamente em diversas estruturas de mercado - sendo a mais comum o mercado de balcão, e seu preço de fechamento é divulgado diariamente pela Anbima<sup>7</sup>. Da mesma maneira como ocorre com os dados de juro nominal, com o objetivo de se manter um padrão com as demais variáveis, será utilizado o dado de fechamento do último dia de cada mês do intervalo referido.

Figura 4: Juro Real



<sup>6</sup>O IGP-M (Índice Geral de Preços do Mercado) é um índice calculado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV) com base na média ponderada do índice de Preços por atacado, do índice de preços ao Consumidor, e do índice de Nacional de Custos e Construção Civil.

<sup>7</sup>A Anbima (Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais) é uma entidade de auto-regulação composta por bancos, gestoras, corretoras, distribuidoras e administradoras.

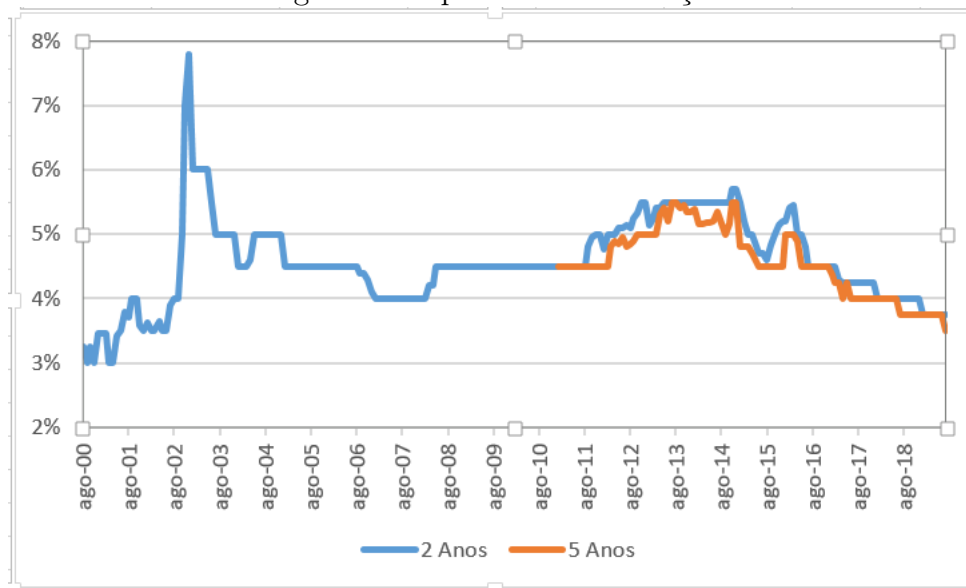
## 4.5 EXPECTATIVA DE INFLAÇÃO

Os dados sobre expectativa de inflação são obtidos através do Relatório FOCUS, divulgado semanalmente pelo Banco Central do Brasil. O relatório traz um resumo das estatísticas que levam em consideração as expectativas dos agentes do mercado sobre diversos indicadores: índices de inflação, taxas de juros, crescimento do PIB, entre outros.

Para a expectativa de inflação será utilizada a mediana das projeções de inflação dos agentes para os anos localizados 2 e 5 anos no futuro. Dito de outra forma, o dado referente ao mês de janeiro de 2012 será, para o prazo de 2 anos, o da expectativa de inflação para o ano de 2014, e, para o prazo de 5 anos, o da expectativa de inflação para o ano de 2017. A opção da utilização da mediana das expectativas é justificada para que se evite a contaminação do dado por valores extremos.

A série utilizada para expectativa de inflação de 2 anos a frente esta compreendida no intervalo entre os meses de agosto do ano de 2000 e julho do ano de 2019. A série utilizada para expectativa de inflação de 5 anos à frente possui o intervalo de janeiro de 2011 até julho de 2019. Os dados utilizados serão os do último dia de cada mês do intervalo referido. Como é possível observar, os dados de 5 anos trazem pouca informação, pois estão em praticamente todo período observado ancorados na meta de inflação.

Figura 5: Expectativa de Inflação



A tabela a seguir consolida as variáveis observadas:

Tabela 1: Descrição Variáveis Observadas

Variável	Interv. Obs.	Num. Obs	Fonte
Produção Industrial	Jan 1995 a Jul 2019	295	IBGE
Inflação	Jan 1995 a Jul 2019	295	IBGE
Juro Nominal 2 Anos	Jan 2002 a Jul 2019	211	BMF Bovespa (B3)
Juro Nominal 5 Anos	Jan 2011 a Jul 2019	103	BMF Bovespa (B3)
Juro Real 2 Anos	Set 2009 a Jul 2019	119	ANBIMA
Juro Real 5 Anos	Jan 2011 a Jul 2019	103	ANBIMA
Expec Infl 2 Anos	Ago 2000 a Jul 2019	228	BCB
Expec Infl 5 Anos	Jan 2011 a Jul 2019	103	BCB

## 5 RESULTADOS

Os resultados apresentados nesta seção são referentes a duas bases de dados: A primeira, utilizará os vencimentos das curvas de juros e as expectativas de inflação com o prazo de 2 anos e a segunda base contará com os vencimentos

e expectativas de 5 anos. As demais variáveis, PIM e inflação, serão semelhantes nas duas bases.

## 5.1 ANÁLISE DE COINTEGRAÇÃO

Com o objetivo de propor a matriz mais adequada a ser utilizada na equação de estado, primeiro, implementou-se os testes de cointegração de Johansen - traço e máximo autovalor. O modelo utilizado para o teste foi estimado com 4 defasagens e uma constante de sazonalidade. Os resultados da Tabela 2 indicam a presença de um vetor de cointegração em ambas as bases. Considerando a base de dados composta com os vencimentos de 2 anos, nos dois testes rejeita-se, com 5% de significância, a hipótese nula de Posto nulo da matriz  $P_0$ , isto é, para a não presença dos vetores de cointegração. Já na base de dados com vencimento de 5 anos, os dois testes de Johansen apontam para a rejeição da hipótese nula, considerando 1% de significância.

Tabela 2: Testes de Cointegração de Johansen

Posto	2 anos		5 anos	
	Traço	Max	Traço	Max
0	74,87*	36,89*	90,37**	44,15**
1	37,98	20,09	46,22	24,65
2	17,88	8,11	21,57	11,79
3	9,78	6,31	9,78	5,76
4	3,46	3,46	4,02	4,02

Nota: \* indica significância de 5%, \*\* indica significância de 1%.

A existência de cointegração evidencia a presença de uma relação de equilíbrio de longo prazo entre as variáveis. Este resultado está alinhado com a restrição de não arbitragem proposta pela Equação 5, que mostra a relação de equilíbrio entre o juro real, nominal e a inflação no longo prazo. Diante da presença de um único vetor de cointegração, a equação de estado referente ao nível contará com uma variável dependente<sup>8</sup>. Em outras pala-

---

<sup>8</sup>O modelo de nível local sem a presença de cointegração pode ser representado pelas seguintes equações:

$$y_t = \tilde{\mu}_t + \epsilon_t$$

vras, a matriz  $T_t$  possuirá dimensão 5 x 4.

A Tabela 3 apresenta as primeiras colunas<sup>9</sup> das matrizes  $\alpha$  e  $\beta$  obtidas junto ao Modelo de Correção de Erros (Equação 9). Os coeficientes de  $\alpha$  representam o ajustamento do desequilíbrio, ou seja, estão relacionados à parte transitória, enquanto a matriz  $\beta$  contém os coeficientes de longo prazo.

Em ambas as bases de dados observa-se que os coeficientes  $\alpha$  tem significância apenas para os dados da inflação realizada. Esta ocorrência traz duas importantes implicações para este trabalho. A primeira é que somente os dados de inflação trazem informação transitória. Com isto, é possível refinar o modelo inicialmente proposto e utilizar o componente autoregressivo da equação de estado apenas para a variável de inflação, deixando as demais variáveis sem este componente. Nos parágrafos seguintes serão discutidos os possíveis ganhos desta nova configuração para o modelo.

A segunda implicação deriva do fato do coeficiente  $\alpha$  representar o ajustamento do desequilíbrio, ou seja, a variável inflação ser responsável pelo ajuste dos desvios das demais variáveis. Desta maneira, as demais variáveis carregam informação relevante sobre o futuro da inflação. Dito de outra maneira, é possível que as demais variáveis tenham um poder preditivo sobre a inflação, pois esta exerce a função de ajuste do equilíbrio em um instante futuro do desequilíbrio observado no presente.

Os coeficientes relacionados à inflação possuem sinal positivo para os

---


$$\tilde{\mu}_t = \tilde{\mu}_{t-1} + \tilde{R}_t \tilde{\eta}_t$$

Já o modelo de nível local com um vetor de cointegração pode ser representado por:

$$y_t = \Theta \mu_t + \epsilon_t$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + R_t \eta_t$$

Onde  $\Theta$  é uma matriz  $N \times (N-1)$ . Considerando uma variável dependente na equação de estado referente ao nível temos que:

$$\tilde{\mu}_t = \Theta \tilde{\mu}_t + \tilde{\mu}_{t-1} + \tilde{R}_t \tilde{\eta}_t$$

<sup>9</sup>Analisa-se a primeira coluna devido a presença de apenas um vetor de cointegração (p=1)



Tabela 3: Coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ 

Variável	2 anos		5 anos	
	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$
Log Pim	1,000	-0,0395	1,000	0,0063
Inflação	-2,6173	0,2353**	-4,2225	0,14912**
Juro Nominal	8,7597	0,0109	18,257	0,0008
Expectativa Infl	-6,7633	0,0053	-0,18182	0,0064
Juro Real	-11,245	0,0049	-29,951	0,0035

Nota: \*\* indica significância de 1%.

dados de 2 e 5 anos. Desta maneira, por se tratar de um coeficiente de correção, há um indício de que a inflação terá um comportamento em sinal oposto ao desvio da relação de equilíbrio das demais variáveis. As Figuras 6 e 7 mostram, respectivamente, os vetores de cointegração estimados pelo *software OxMetrics* para as bases de 2 e 5 anos.

Figura 6: Vetor Cointegração - dados curvas de juros de 2 anos

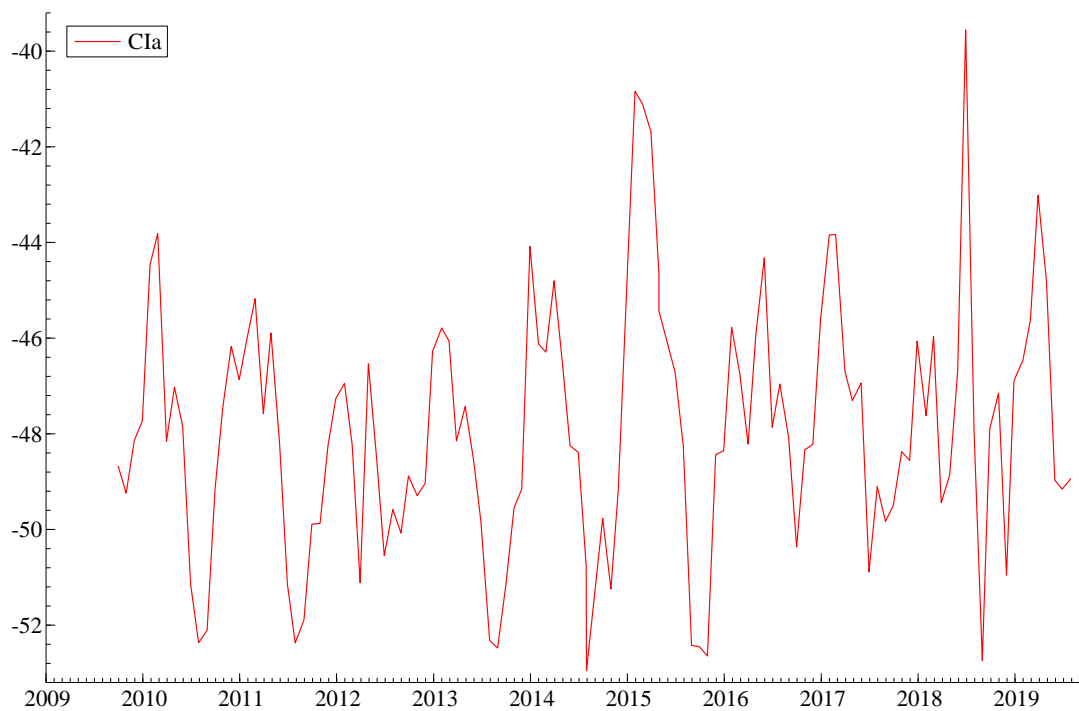
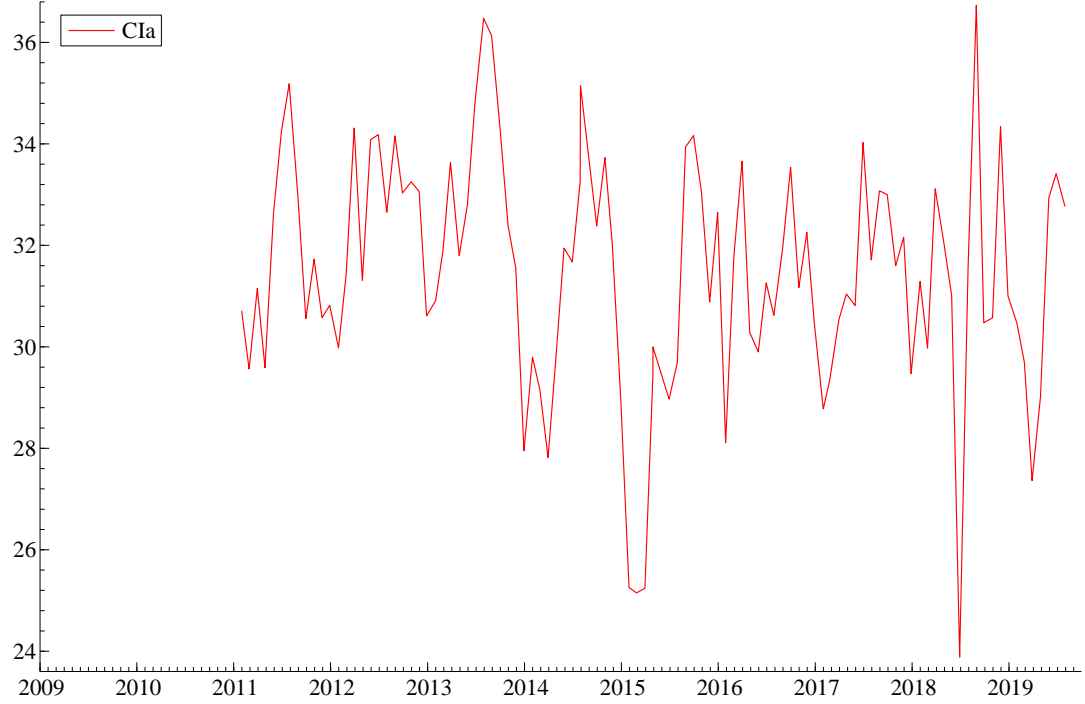


Figura 7: Vetor Cointegração - dados curvas de juros de 5 anos



Por fim, a existência de um vetor de cointegração tem impacto no modelo espaço estado proposto. Como exposto acima, a matriz da equação de estado referente ao nível terá dimensão 5 x 4, indicando que uma variável é dependente. Portanto, a matriz deve tomar, de maneira genérica, o formato observado pela equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} \text{LogPim} \\ \text{Inflação} \\ \text{JuroNominal} \\ \text{JuroReal} \\ \text{ExpecInfl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \\ z_{3t} \\ z_{4t} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ao utilizar a restrição descrita na Equação 5, impõe-se o seguinte vetor de cointegração [1 -1 -1] com relação as variáveis de juro nominal, inflação e

juro real. Desta maneira, chegamos a seguinte relação que será utilizada na equação de estado:

$$\begin{bmatrix} Inflação \\ JuroNominal \\ JuroReal \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 5.2 MODELO INICIAL COM RESTRIÇÃO DE NÃO ARBITRAGE

Utilizando as relações observadas na Equação 13, e, rearranjando suas variáveis, é obtida a Equação 14 que será utilizada no modelo com a restrição de arbitragem imposta pela Equação 5.

$$\begin{bmatrix} LogPim \\ Inflação \\ JuroNominal \\ ExpecInfl \\ JuroReal \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \\ z_{3t} \\ z_{4t} \end{bmatrix} \quad (14)$$

As demais equações do modelo de estado seguirão como descritas na metodologia e sumarizadas através da Tabela 4.

Tabela 4: Modelo Inicial

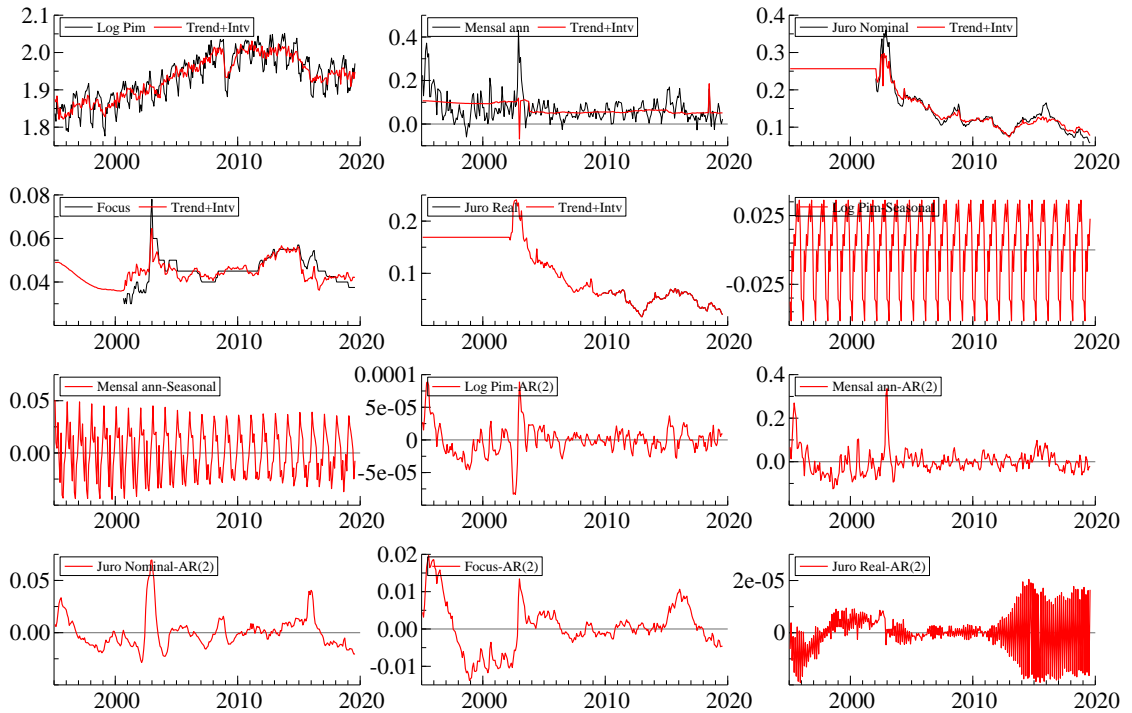
Variável	Nível	Inclinação	Sazonal	AR (2)
Log Pim	1	1	1	1
Inflação	1	0	1	1
Juro Nominal	1	0	0	1
Expectativa Infl	1	0	0	1
Juro Real	2	0	0	1

(0)=fora, (1)=dentro, (2)=dependente

A Figura 8 mostra os resultados utilizando a base de dados com os vencimentos de 2 anos. Nota-se que praticamente a totalidade do movimento do vencimento da curva de juro real é explicado por fatores permanentes. Portanto, observa-se uma convergência, de maneira estrutural, da queda do

nível da taxa de juros real ao longo dos últimos anos. Este efeito é mais pronunciado até o ano de 2013. Já os fatores transitórios revelam-se importantes para a explicação do vencimento da curva de juros nominal, da inflação, e da expectativa de inflação (FOCUS). No caso da inflação, nota-se durante todo o período pouca alteração de seu nível, sendo seu movimento quase que inteiramente explicado por fatores transitórios, sugerindo baixa conversão da inflação desde meados da década passada. Para o juro nominal, é observado o aumento dos fatores transitórios a partir do ano de 2013. Este resultado, em que fatores transitórios são mais relevantes para a curva de juros nominal em comparação com a real, pode sugerir uma maior incidência do prêmio de risco sobre o juro nominal do que sobre o juro real. Uma possível explicação para este resultado se encontra na piora da política macroeconômica observada no período. A piora fiscal e a perda de credibilidade do Banco Central no período de 2012 a 2017 trouxeram maior volatilidade aos dados.

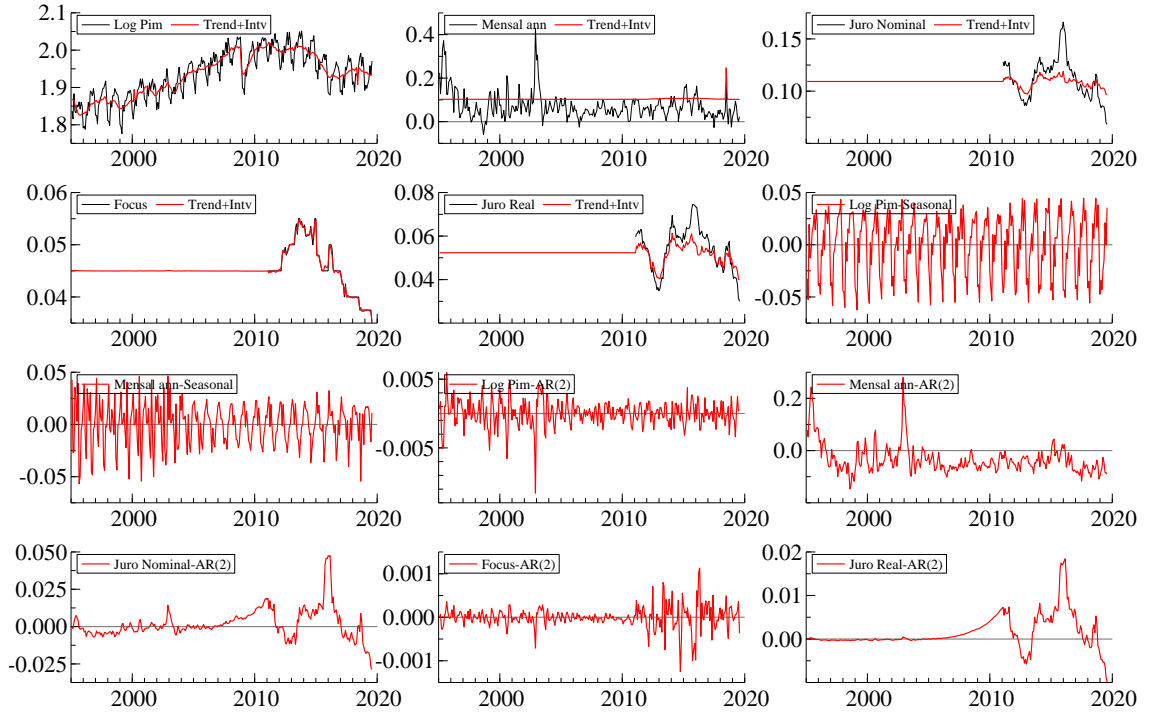
Figura 8: Resultado Modelo com Restrições - 2 anos



A Figura 9 apresenta os resultados obtidos através da base de dados que contém os vencimentos de 5 anos. Neste caso, de maneira distinta ao que foi apresentado com os dados de 2 anos, demonstra que, tanto fatores permanentes, quanto transitórios, definem a trajetória dos vencimentos das curvas de juros real e nominal.

Em ambos os casos não é possível demonstrar uma queda, de maneira permanente, dos níveis de taxas de juros nominal e real. Este comportamento pode ser uma consequência do curto período da base de dados, já que ambos vencimentos das curvas de juros só tem início no ano de 2011. Outra explicação possível pode ser encontrada no fato de dados das curvas de juros de 5 anos refletirem de maneira mais acentuada o nível de risco e menos os efeitos de política monetária. O aumento de prazo exige uma compensação pelo risco. Como há sempre oscilação da percepção de risco por parte dos agentes, vencimentos mais longos devem trazer maior explicação por efeitos transitórios. Adicionalmente, a piora macroeconômica do período trouxe ainda maior variabilidade do prêmio de risco.

Figura 9: Resultado Modelo com Restrições - 5 anos



A respeito dos vencimentos das curvas real e nominal, é possível observar três períodos distintos. O primeiro, compreendido entre os anos de 2011 e 2014, onde há uma queda, de maneira permanente e transitória de ambas taxas de juros, rapidamente sucedida por um retorno ao nível inicial. O segundo, compreendido entre os anos de 2014 e 2017, onde há estabilidade do nível de taxas de juros aliada a alta dos fatores transitórios - podendo estes estarem relacionados a um aumento do prêmio de risco. E, por fim, o período entre 2017 e 2019, onde há uma queda do nível das taxas de juros de maneira permanente - efeito mais acentuado no juro real - aliado a uma forte queda advinda de fatores transitórios.

### 5.3 MODIFICAÇÕES MODELO ORIGINAL

Ao modelo original será proposto três diferentes configurações. A primeira modificação (modelo modificado I) irá manter o arranjo inicial observado na

Tabela 4, porém não contará com a restrição de não arbitragem obtida pela Equação 5. O segundo e o terceiro modelos modificados (modelo modificado II e III) propostos irão levar em consideração a informação obtida sobre o  $\alpha$  no modelo de correção de erros de Johansen, portanto, contarão apenas com a variável inflação na parte transitória da equação de estado - conforme exposto na Tabela 5. A diferença entre estes dois modelos será a de que, o segundo utilizará a restrição de não arbitragem imposta pela Equação 5 e terceiro não utilizará.

Tabela 5: Modelos Modificados II e III

Variável	Nível	Inclinação	Sazonal	AR (2)
Log Pim	1	1	1	0
Inflação	1	0	1	1
Juro Nominal	1	0	0	0
Expectativa Infl	1	0	0	0
Juro Real	2	0	0	0

(0)=fora, (1)=dentro, (2)=dependente

A comparação entre as 4 opções de modelo - a inicial e as três modificações propostas - será feita através do Critério de Informação de Akaike (AIC) e do Critério Bayesiano de Schwarz (BIC), apresentados na Tabela 6. Serão analisados os critérios para cada modelo e para cada base de dados (2 e 5 anos).

Nesta seção, será reportado o resultado apenas do modelo modificado que tiver melhor classificação. Os resultados dos demais modelos são apresentados no Apêndice deste artigo.

Tabela 6: Comparação de Modelos

Modelo	2 anos		5 anos	
	AIC	BIC	AIC	BIC
Modelo Inic	-34,16	-33,35	-25,86	-25,02
Modelo Mod I	-33,99	-33,16	-26,23	-25,38
Modelo Mod II	-31,84	-31,29	-24,37	-23,85
Modelo Mod III	-34,40	-33,76	-26,12	-25,71

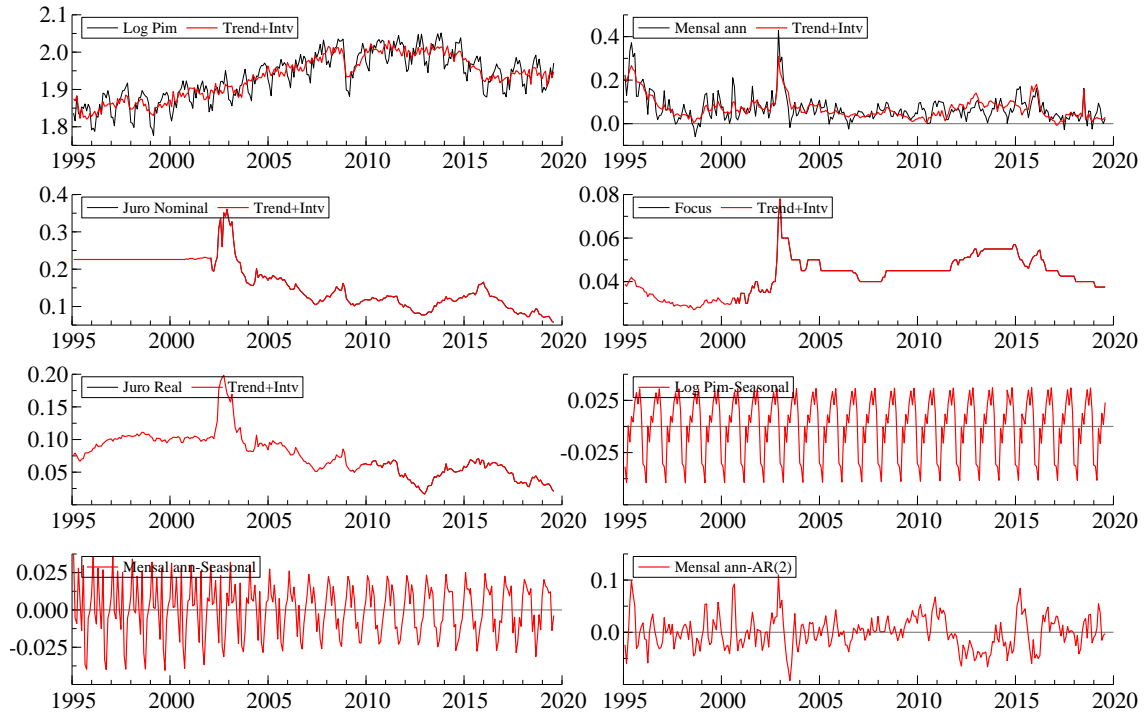


Analisando os critérios de informação, o modelo com melhor performance - inclusive superior ao inicial - é o terceiro modelo modificado. Isto é, o modelo que possui apenas a variável inflação na equação de estado referente a parcela transitória e não possui a restrição de não arbitragem exposta na Equação 5.

Este modelo utiliza a mesma configuração apresentada na tabela 5, mas sem o uso da restrição a arbitragem imposta pela equação 5. Portanto, os fatores de carregamento da equação de estado relativo ao nível não estão restritos.

Os resultados obtidos com o Modelo Modificado III, utilizando os dados de 2 anos são mostrados na figura 10. A forma como é construído este modelo impõe que toda a variação observada nos vencimentos da curva de juros terá caráter permanente e não estará sujeita a nenhuma restrição de arbitragem. Desta maneira, e sem fatores transitórios em sua composição, as taxas de juros estarão sempre sofrendo permanentes alterações de nível.

Figura 10: Resultado Modelo Modificado III - 2 anos

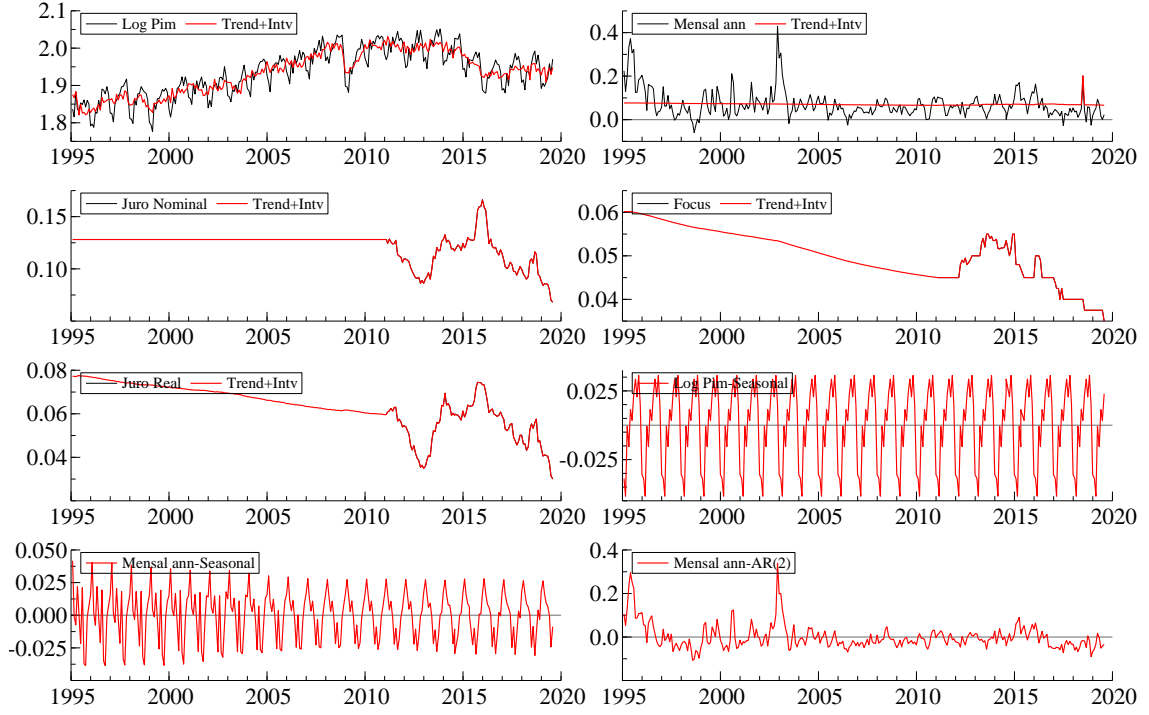


Neste caso, os dados de inflação apresentam maior complexidade de resultados, sendo explicados tanto por variações permanentes do nível ao longo da amostra, quanto por fatores transitórios.

O resultado observado utilizando os dados de 5 anos é exposto na figura 11. De maneira similar, toda a variação dos vencimentos da curva de juros real e nominal são explicadas por uma variação do nível de caráter permanente. Entretanto, observa-se uma diferença substancial para os dados de inflação.

A construção da trajetória de inflação é, em grande parte, obtida pela componente transitória. Isto é, não há quase nenhuma alteração do nível de inflação de maneira permanente durante o período da amostra, sendo sua variação explicada pelos fatores cíclicos.

Figura 11: Resultado Modelo Modificado III - 5 anos



Em suma, tanto o modelo inicial, quanto o modificado III demonstram uma queda do nível de maneira permanente para os dados de juro real e nominal com vencimento de 2 anos, com a diferença de que, no modelo inicial a trajetória do juro real é quase integralmente construída pelo fator permanente, e no modelo III, em razão da ausência tanto dos fatores transitórios quanto da condição de não arbitragem, o fator permanente constrói integralmente sua trajetória. Para os dados de juro real e nominal com vencimento de 5 anos, a partir do ano de 2014, observa-se um aumento dos fatores transitórios no modelo inicial e da variabilidade do nível no modelo III.

## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho procurou acompanhar a dinâmica dos vencimentos de 2 e 5 anos das curvas de juro real e nominal brasileiras ao longo dos últimos anos.

Por se tratar de um mercado ainda em desenvolvimento, o período de análise é curto - especialmente para o vencimento de 5 anos - o que torna qualquer conclusão suscetível a revisões. Entretanto, é observado, para o vencimento de 2 anos, uma queda, de maneira permanente, do seu nível em especial no período que compreende os anos de 2001 a 2013. Esta observação sugere que, ao longo do tempo, ocorreu uma redução tanto do nível de juro neutro quanto do prêmio de risco.

Devido ao menor espaço amostral, cujo início se dá em 2011, e a característica de refletir mais o prêmio de risco, não é possível observar a mesma evidência para o vencimento de 5 anos. Entretanto, é possível avaliar que, para ambos vencimentos, há um aumento da parcela explicada por efeitos transitórios no modelo após o ano de 2013. Este resultado sugere um aumento da variabilidade do prêmio de risco neste período, assim como do valor esperado pelo juro neutro. A forte incerteza e deterioração da política fiscal brasileira no período, aliada a um ciclo de queda de juros entre os anos de 2011 e 2012 e uma tímida normalização nos anos seguintes, em um ambiente de expectativas desancoradas e inflação realizada acima do centro da meta durante todo o período de 2011 a 2016, contribuíram negativamente para a credibilidade do Banco Central brasileiro e podem sustentar esta conclusão.

Por fim, através da análise de cointegração, há evidência de que as variáveis do modelo trazem informação sobre qual será o valor futuro da inflação. Para que se tenha uma evidência mais forte do poder preditivo das demais variáveis sobre a inflação é necessária uma base de dados com período mais extenso. Portanto, esta é uma evidência que deve ser testada novamente em estudos posteriores.

## 7 REFERÊNCIA

Ang, A., Piazzesi, M., 2003. A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. *Journal of Monetary Economics* 50, 745–78

Commandeur, J.J.F., Koopman, S.J., (2007). *An Introduction to State Space Time Series Analysis*. OUP Oxford.

Dai, Q. and K. Singleton (2000). Specification analysis of affine term structure models. *Journal of Finance* 50 (5), 1943–1978.

D’Amico, S., Kim, D. H., Wei, M., 2008. Tips from Tips: The informational content of Treasury Inflation Protected Securities prices. BIS Working paper 248.

Duffee, G.R., 2002. Term premia and interest rate forecasts in affine models. *Journal of Finance* 57, 405–443

Durbin, J. and Koopman, S. J. (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods: Second Edition*. Oxford Statistical Science Series. OUP Oxford.

Evans, M., 1998. Real rates, expected inflation and inflation risk premia. *Journal of Finance* 53, 187–218.

Evans, C.L., Marshall, D.A., 2001. Economic determinants of the term structure of nominal interest rates. Working paper, Federal Reserve Bank of Chicago, Chicago, IL.

Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12:231–254

Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, 59(6):1551–1580.

Johansen, S. (1995b). *Likelihood-Based Cointegrated Vector Auto-Regressive Models*. Advanced Texts in Economics. Oxford University Press, New York.

Johansen, S. Juselius, K. (1990). Maximum likelihood estimation and inference on cointegration. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52(2):169–210

Joyce, Michael, Peter M. Lildholdt and Steffen Sorensen (2010): Extracting Inflation Expectations and Inflation Risk Premia from the Term Structure: A Joint Model of the UK Nominal and Real Yield Curves, *Journal of Banking and Finance*, 34, pp.281–94.

Juselius, K. (1995). Do purchasing power parity and uncovered interest rate parity hold in the long run? An example of likelihood inference in a multivariate time-series model. *Journal of Econometrics*, 69:211–240.

Koopman, S. J., Harvey, A.C., Doornik, J.A., Shepard, N., 2009. *Structural Time Series Analyser and Modeller and Predictor - STAMP 8.2*. Timberlake Consultants.

Litterman, R. and J. Scheinkman (1991). Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income* 1, 54–61.

Pearson, N. D. and T. Sun (1994). Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the Cox, Ingersoll, and Ross model. *Journal of Finance* 49, 1279–1304.

Vicente, J.V.M. e Graminho, F. M. (2015), Decompondo a Inflação Implícita, *Revista Brasileira de Economia*, 69(2): 263-284

## 8 APÊNDICE

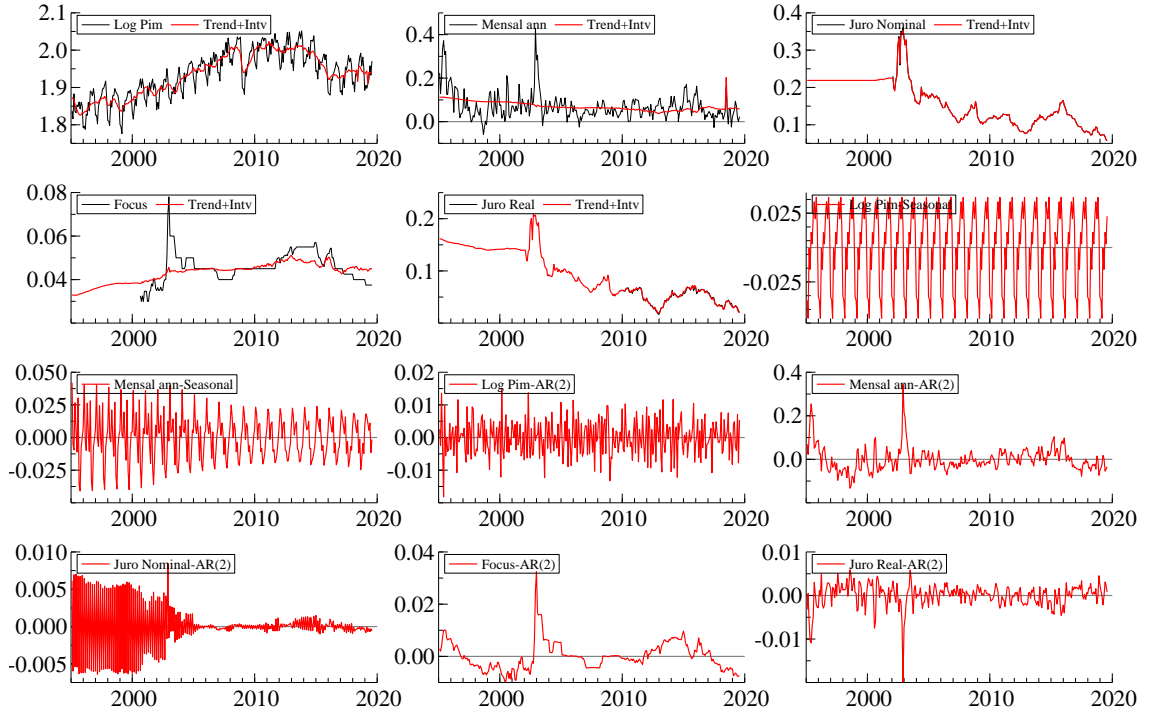
### 8.1 MODELO MODIFICADO I

Utilizando a configuração inicial do modelo, como observada na tabela 4, mas sem o uso da restrição de arbitragem, equação 5, utiliza-se a equação 10 para que seja obtido a equação de estado referente ao nível. Ou seja, este modelo possui a mesma configuração do anterior, entretanto os fatores de carregamento da equação de estado com relação ao nível não estão restritos pela equação de não arbitragem. A fim de manter uma configuração similar, a ordem das variáveis sera mantida como a observada no modelo com restrição.

O resultado obtido utilizando a base com os vencimentos de 2 anos é mostrado na figura 12. É possível observar que a parcela permanente é responsável por quase toda a dinâmica dos vencimentos das curvas de juros nominal e real. Há uma tendência de queda do nível de ambas as taxas observadas no espaço amostral, com pouca relevância dos efeitos transitórios sobre o período. Neste modelo, os efeitos transitórios são relevantes para o comportamento da inflação, bem como da expectativa de inflação.

Nota-se, também, uma divergência entre a trajetória do nível da inflação e das expectativas de inflação. Enquanto a inflação possui uma suave trajetória de queda em seu nível entre o período compreendido pelos anos de 1995 e 2013, o nível da expectativa de inflação demonstra aumento durante o mesmo período. Este resultado pode sugerir duas explicações, a primeira de que a queda do nível de inflação pode ter sido aquém do esperado pelas expectativas, e a segunda referente a um possível aumento do prêmio de risco sobre as expectativas de inflação.

Figura 12: Resultado Modelo Modificado I - 2 anos



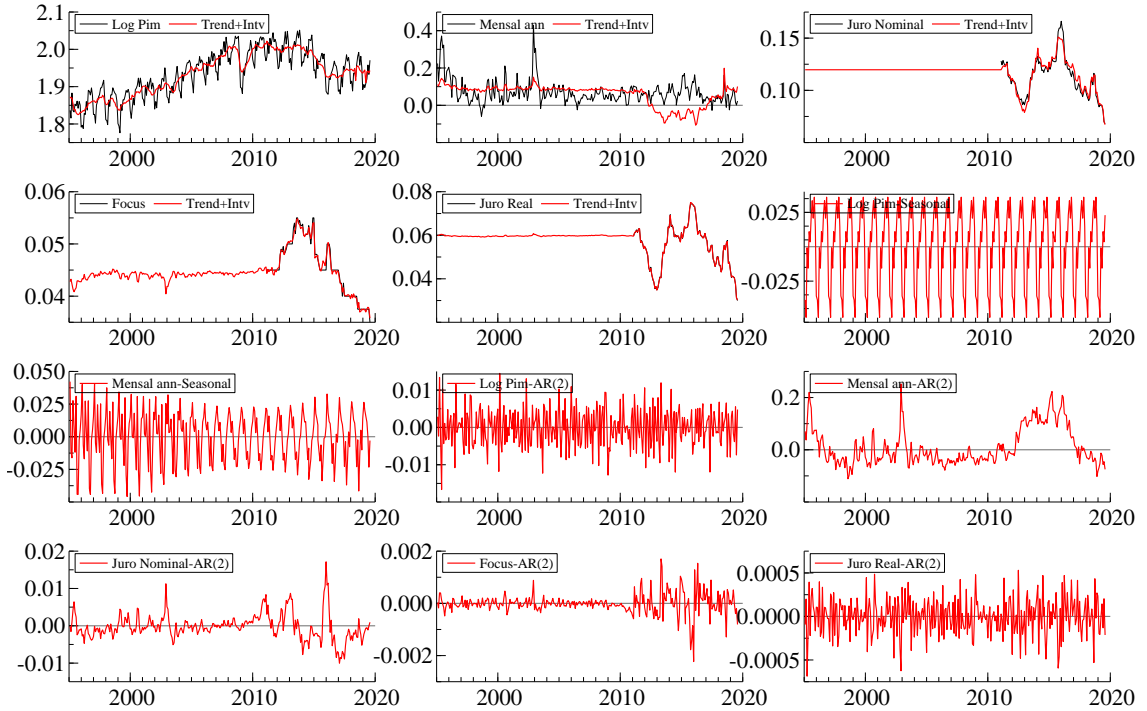
Utilizando o mesmo modelo inicial sem restrição de arbitragem com os dados de 5 anos é obtido um resultado diferente. Conforme é observado na figura 13, o vencimento de 5 anos da curva de juro nominal sofre, ainda que de forma fraca, influência dos fatores transitórios, ao passo que estes fatores são pouco relevantes para o vencimento do juro real. Os fatores transitórios tornam-se mais relevantes no juro nominal em momentos de nível mais extremo como no vale observado em 2013 e no pico de 2016. Uma possível explicação pode se dar pela junção de um exagero da expectativa de mudança do nível do juro neutro aliada a uma rápida mudança dos prêmios de risco.

A construção da trajetória de inflação sofre um estranho efeito entre os anos de 2012 e 2019. O modelo sugere uma mudança permanente de nível, com uma queda acentuada do nível de inflação entre os anos de 2012 e 2014, manutenção deste nível entre os anos de 2014 e 2016 e volta ao nível anterior



após o ano de 2018. Este efeito é compensado pelos fatores transitórios. Não há explicação lógica sugerida para este efeito.

Figura 13: Resultado Modelo Modificado I - 5 anos



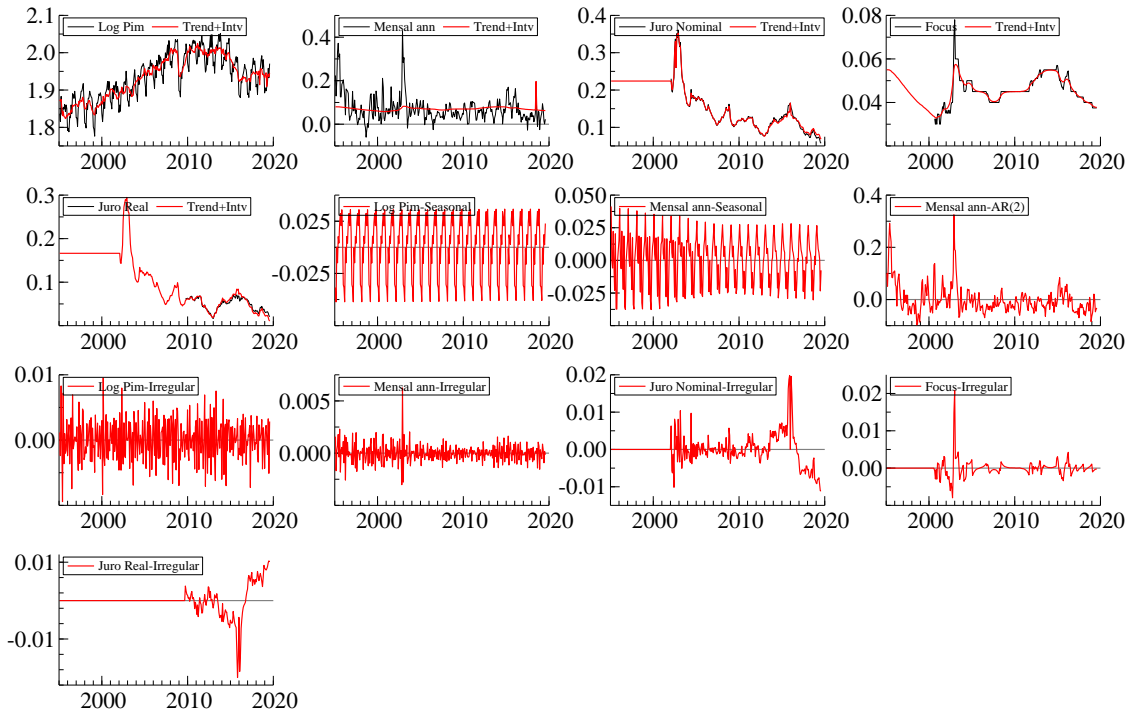
## 8.2 MODELO MODIFICADO II

Os resultados obtidos com o Modelo Modificado II, utilizando a base de dados com os vencimentos de 2 anos, são apresentados na Figura 14. Neste caso, a correção do que não é explicado pelo nível para os dados de juro real e nominal é feita pelo fator irregular - relativo ao erro. A dinâmica deste modelo faz com que os erros entre as estimativas do juro real e nominal se anulem. Nota-se que há um aumento da parcela explicada pelo erro a partir do ano de 2015, sugerindo uma variação de taxas de juros e, por consequência, de seu prêmio de risco, pouco condizentes com o equilíbrio de longo prazo. Entretanto, é possível observar que, para o juro real e o nominal, há uma

queda do nível, mesmo que de maneira não contínua, ao longo da amostra.

Já os dados de inflação não são capazes de construir uma dinâmica de alteração do nível ao longo dos anos. A sua variação é quase que totalmente explicada por fatores transitórios. Esta pode ser uma evidência que fortalece o uso do efeito transitório apenas para a variável inflação.

Figura 14: Resultado Modelo Modificado II - 2 anos



A Figura 15 expõe os resultados observados ao se utilizar os dados de 5 anos. A explicação da dinâmica dos vencimentos das curvas de juro real e nominal é semelhante ao resultado com dados de 2 anos, em que o fator irregular assume direções opostas para cada juro. O componente irregular adotou valores mais relevantes no ano de 2016 e em julho de 2019, momentos em que se observou valores extremos para as taxas de juros. Assim como observado nos dados de 2 anos, a forte variação das taxas não é acompanhada pelos fatores permanentes do modelo.

Neste caso, a variável inflação tem uma suave queda em seu nível ao longo da amostra. Entretanto, parte relevante de sua dinâmica é explicada por fatores transitórios. Portanto, assim como o resultado apresentado para os dados de 2 anos, há evidência que fortalece o uso do fator transitório.

Figura 15: Resultado Modelo Modificado II - 5 anos

