Escola de Pós-Graduação em Economia – EPGE
Fundação Getulio Vargas

Renegociação, Investimentos Específicos e Contratos sobre Recursos Não-Renováveis

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas como requisito de obtenção do título de mestre em economia.

Aluno: Alexandre Bonnet Rodrigues Costa
Orientador: Humberto Ataíde Moreira

Rio de Janeiro
Dezembro 2008

Escola de Pós-Graduação em Economia – EPGE
Fundação Getulio Vargas

Renegociação, Investimentos Específicos e Contratos sobre Recursos Não-Renováveis

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas como requisito de obtenção do título de mestre em economia.

Aluno: Alexandre Bonnet Rodrigues Costa

Banca Examinadora
Humberto Ataíde Moreira (EPGE/FGV) - Orientador
Afonso Arinos de Mello Franco Neto (EPGE/FGV)
Marcos Hiroyuki Tsuchida (FGV-SP)

Rio de Janeiro
Dezembro 2008

Renegociação, Investimentos Específicos e Contratos sobre Recursos Não-Renováveis

Alexandre Bonnet Rodrigues Costa[1]
EPGE/FGV

Orientador: Humberto Ataíde Moreira
EPGE/FGV

Resumo: Essa dissertação tem como objetivo estudar o modelo de Hart e Moore em um ambiente sem incerteza quando dois países almejam desenhar um contrato para viabilizar um projeto de exploração e fornecimento de certo recurso exaurível. Nesse contexto os agentes devem realizar investimentos específicos de custo afundado. Para determinado nível de investimento, admitimos que o recurso não-renovável seja explorado com custo de extração nulo. Concluímos que mesmo na ausência de incerteza, o *first-best* não necessariamente será alcançado, dependendo de características exógenas dos projetos de exploração dos países, chamadas de custo natural. Também concluímos que o mecanismo de renegociação, nesse contexto, não resolve o problema de ineficiência dos contratos.

Palavras-Chave: Renegociação, investimentos específicos e recursos não-renováveis.

Abstract: The objective of this dissertation is to study the Hart-Moore model of incomplete contracts renegotiation without uncertainty when two countries wish to design an exploration and supply contract of a non-renewable resource. In this setup, the agents must make sunk cost specific investments. For a determined investment level, we allow the non-renewable resource to be explored without extraction costs. We conclude that even in the absence of uncertainties, the first-best result won't necessarily be implemented. This implementation will depends on exogenous characteristics of the exploration projects, henceforth called natural costs. We also conclude that the renegotiation mechanism in this setup don't solve the inefficiency of this kind of contracts.

Key-Words: Renegotiation, specific investments and non-renewable resources.

---

[1] Gostaria de agradecer meu orientador Humberto Moreira pelas diversas sugestões e críticas construtivas apresentadas durante as pesquisas da dissertação. Também sou grato aos professores Afonso Arinos e Marcos Tsuchida, membros de minha Banca Examinadora, por apresentarem suas sinceras e objetivas avaliações de meu trabalho. Por fim, também agradeço à Petrobras pelo apoio durante a conclusão de meu mestrado.

1. Introdução

Considerando que há dezenas de décadas determinados recursos não-renováveis como petróleo, gás natural e carvão mineral são essenciais para a produção energética e crescimento das nações, é natural o questionamento sobre as características dos contratos de produção e fornecimento de tais recursos. Um país pode explorar sua dotação de recursos exauríveis através de uma empresa estatal ou então utilizando concessões para empresas multinacionais. De qualquer forma, a atividade de exploração e produção de tais recursos naturais envolve investimentos específicos com custos afundados. Isso significa que os custos desses investimentos independem do nível de produção e que tais investimentos apresentam pouca ou nenhuma rentabilidade fora do contexto de exploração e produção. Países que demandam esses recursos não-renováveis tipicamente também devem realizar investimentos específicos e de custos afundados. Gasodutos ou oleodutos são exemplos de investimentos em infra-estrutura imprescindíveis para o transporte do gás natural e petróleo até as refinarias. Tais investimentos são chamados de específicos, pois não podem ser utilizados para transportar toda sorte de substâncias. Contratos que envolvem investimentos específicos tipicamente estão sujeitos ao chamado risco de *hold-up*[2]. Uma vez realizado o investimento específico, o agente investidor, por estar de alguma forma preso à relação bilateral, perde poder de barganha e poderá ser prejudicado pelo oportunismo pós-contratual da outra parte.

Assim sendo, caso dois países queiram assinar um contrato de compra e venda de determinado recurso exaurível, faz-se necessário investigar se é possível que os investimentos socialmente ótimos sejam obtidos privadamente. A existência de investimentos específicos representa apenas uma das características dos contratos sobre recursos naturais. Hogan, Sturzenegger e Tai (2007) explicam que investimentos específicos, cláusulas de renegociação dos termos de troca e o risco de expropriação de ativos são três características marcantes dos contratos entre empresas multinacionais de exploração e países detentores dos recursos naturais. Há diversos motivos para a renegociação de termos de troca pré-acordados. Sob incerteza, a renegociação é um

[2] Um dos significados literais do verbo *to hold-up* é impedir ou obstruir.

instrumento para promover melhoras de Pareto *ex post*. Mesmo quando não há incertezas, a renegociação pode ser realizada para garantir que a troca aconteça sempre que for eficiente, mas não necessariamente lucrativa para ambas as partes do contrato. Tais renegociações, no entanto, nem sempre ocorrem com o intuito de buscar a eficiência de Pareto, mas para disputar ganhos de exploração acima do esperado.

Hogan, Sturzenegger e Tai descrevem quatro típicas linhas de pesquisa que versam sobre (i) barganha e divisão de ganhos, esperados ou não, entre as partes; (ii) contratos com incentivos corretos para resolver problemas de *hold up*; (iii) desenho de cláusulas de renegociação de termos de troca e (iv) questões macroeconômicas e financeiras pertinentes aos países envolvidos nos contratos (*e.g.* estratégias de *hedge* contra flutuações nos preços de *commodities*). Aghion (2007) apresenta também alguns importantes *insights* da Teoria de Contratos para questões envolvendo recursos naturais. Em sua apresentação, o autor reforça o problema de países detentores de recursos naturais que forçam a renegociação de seus contratos com empresas extrativistas. Como potenciais fontes de ineficiências nesses contratos, Aghion cita (i) a má distribuição de risco entre as partes, (ii) desequilíbrios entre risco e incentivos, (iii) o clássico problema de *hold-up* e (iv) falta de *enforcement* dos contratos. Sobre o problema de investimentos específicos e o subseqüente risco de *hold-up*, que receberão maior atenção nessa dissertação, o autor nos diz que possíveis soluções seriam o desenho adequado de cláusulas de renegociação ou então a verticalização.

Grande parte da literatura econômica sobre recursos não-renováveis mostra-se focada na determinação do perfil ótimo de extração e na precificação adequada de tais recursos. As diferentes abordagens de custos de extração presentes em tal literatura serão de grande utilidade para essa dissertação. O problema de exploração ótima de um recurso não-renovável foi estudado primeiramente por Hotelling (1931). Segundo a Regra de Hotelling, como ficou conhecido um dos principais resultados do artigo supracitado, se o custo marginal de extração for constante, o preço do recurso exaurível deverá crescer a taxa exponencial igual à taxa de juros da economia. Desde a contribuição de Hotelling, o arcabouço teórico de seu trabalho foi expandido por diversos autores. Em Sollow e Wan (1976) é introduzida a noção de que os depósitos de recursos naturais diferem na qualidade. Pyndick (1977) apresentou uma extensão na qual há custos de exploração que crescem à medida que as reservas são exauridas e

custos de novas descobertas, crescentes no esforço de tal atividade. No arcabouço apresentado nessa dissertação, negligenciarei o custo associado à escassez do recurso natural e focarei no tipo de custo associado ao esforço de exploração e produção.

De acordo a literatura apresentada até o momento, a necessidade de investimentos específicos e a ocorrência de renegociações são duas típicas características dos contratos bilaterais de exploração e fornecimento de recursos não-renováveis. Em seu artigo seminal, Hart e Moore (1988) discutem a influência de cláusulas de renegociação na relação bilateral entre comprador e vendedor, em um mundo no qual é impraticável descrever todos os possíveis estados da natureza. De acordo com o artigo, os investimentos específicos são observáveis, porém não verificáveis. Além disso, assume-se que o *lock-in* entre as partes é completo, ou seja, os investimentos específicos não possuem valor fora da relação bilateral. Antes de fecharem o contrato, no entanto, as partes podem buscar alternativas de contratos no mercado. Assim sendo, a introdução de incertezas torna incompletos contrato que naturalmente envolveriam variáveis não verificáveis. Supõe-se a existência de um terceiro agente, representando a Justiça, que consegue apenas identificar se a troca foi realizada ou não. Há dois tipos de tecnologias disponíveis durante a etapa de renegociação do contrato: os agentes podem se comunicar através de mensagens publicamente observáveis ou não.

Os autores mostram que quando um contrato está sendo utilizado facilitar a transação entre dois agentes que precisam realizar investimentos específicos, de modo geral não é possível obter o resultado de *first-best*, exceto quando não há incerteza na economia. Quando ambas as partes são neutras ao risco e devem incorrer em investimentos específicos, mostra-se a impossibilidade de alcançar o resultado eficiente, mesmo quando a comunicação entre as partes é publicamente observável. Sob determinadas condições, tidas pelos autores como plausíveis, o resultado de *second-best* envolveria subinvestimento. Em outro caso, no qual as partes apresentam aversão ao risco e quando não há investimentos específicos, mostra-se que é possível alcançar o *first-best* dado que as mensagens são publicamente observáveis.

MacLeod e Malcomson (1993) analisam quais modalidades de contratos incompletos conseguem induzir investimentos eficientes em três circunstâncias

distintas. Quando há custos exógenos para trocar de parceiros comerciais e pelo menos uma das partes realiza investimentos não-específicos, é possível alcançar a eficiência através de contratos de preço fixo, renegociáveis consensualmente. No segundo caso, no qual ambas as partes fazem investimentos específicos, a eficiência pode ser obtida por contratos com cláusulas suficientes para evitar renegociações. Por fim, analisa-se a situação em que uma das partes fará investimentos específicos que beneficiam a outra parte. Nessas circunstâncias, os autores mostram que simples contratos de *take-or-pay* são capazes de garantir a eficiências das decisões de investimentos.

Como foi dito, em Hart e Moore os investimentos e estados da natureza embora observáveis *ex post*, não são verificáveis por terceiros. Aghion, Dewatripont e Rey (1994) buscam mostrar que a impossibilidade de verificar tais variáveis não é suficiente para explicar o problema de subinvestimento. Em seu artigo os investimentos eficientes e a divisão ótima de risco podem ser alcançados caso o contrato inicial (i) especifique um preço de *default* caso a renegociação falhe ou não seja necessária e (ii) aloque o poder de barganha da renegociação em apenas uma das partes da transação.

Nöldeke e Schmidt (1995) analisam o clássico modelo de *hold-up* desenvolvido por Hart e Moore sob a hipótese de que a Justiça é capaz de identificar se vendedor entregou ou não o bem contratado. É importante ressaltar que essa é essencialmente a única diferença entre os dois artigos. Os autores argumentam que o resultado de subinvestimento pode ser superado através de contratos de opção. Esses contratos garantem ao vendedor o direito, mas não a obrigação, de vender o bem para o comprador, de modo que há preços associados às decisões de rescindir ou não o contrato. Nöldeke e Schmidt, assim como Hart e Moore, consideram o processo de renegociação exógeno. A utilização de contratos de opção resulta na alocação de todo o poder de barganha da renegociação nas mãos do comprador, diferente de Hart e Moore, onde dependendo de determinados fatores, esse poder poderia ser do comprador ou vendedor. Em suma, os autores mostram que no modelo de *hold-up* apresentado por Hart e Moore é possível alcançar o resultado de *first-best*, caso a Justiça seja capaz de verificar se o vendedor entregou ou não o bem contrato.

Essa dissertação tem como objetivo estudar o modelo de Hart e Moore em um ambiente sem incerteza quando dois países almejam desenhar um contrato para

viabilizar um projeto de exploração e fornecimento de certo recurso exaurível. Versarei sobre países, ao invés de dois agentes genéricos, pelo fato de que um dos agentes detém os direitos de propriedade sobre o recurso natural. Uma vez que o objeto de interesse comercial já existe e não precisa ser produzido, suporei a possibilidade do recurso não-renovável ser extraído da natureza com custo zero. Para tanto, será necessário que o país vendedor faça o maior investimento específico possível. Esse limite superior é determinado pelo custo natural de exploração do projeto. Caso um país possua diversas reservas de petróleo, por exemplo, aquela que estiver em maior profundidade terá o maior custo natural, pois maior será o investimento necessário de modo que o custo de extração seja nulo. O custo natural é, portanto, uma variável exógena que difere entre países e projetos.

Nesse sentido, utilizarei uma estrutura muito semelhante àquela apresentada pelos autores supracitados. Manterei a hipótese, abandonada por Nöldeke e Schmidt, de que a Justiça não é capaz de determinar qual das partes desistiu do contrato. Também tratarei da etapa de renegociação como foi feitos nos dois artigos citados acima. A principal diferença, na realidade, é que a estrutura de custo da parte vendedora trará um fator fixo que poderá ser traduzido como um custo natural de extração. Como resultado, determino que a obtenção do resultado de *first-best* estará intimamente ligada ao tamanho desse custo natural. Como já foi dito, ao contrastarmos Hart e Moore com Nöldeke e Schmidt, podemos perceber que o principal ponto de discordância está na definição do que é verificável na economia. Recuperarei a hipótese de Hart e Moore e veremos que apenas quando o custo natural for suficientemente baixo é que será possível alcançar os investimentos eficientes através das decisões privadas. Utilizarei, portanto, uma versão simplificada do modelo de Hart e Moore e adaptá-la-ei para um mundo no qual dois agentes desejam transacionar algum recurso natural.

Apresento agora como a tese está organizada. Na Seção 1 foi feita uma revisão da literatura, esclarecendo os principais resultados conhecidos e a contribuição que pretendo fazer. Já na Seção 2 apresento a modelagem utilizada e o resultado de *first-best*, enquanto na Seção 3 serão estudados os contratos ótimos dessa economia de recursos naturais. Assim sendo, por fim, a Seção 4 trará a sumarização das conclusões encontradas e também as possíveis extensões do modelo apresentado.

2. O Modelo

Em Hart e Moore, dois agentes neutros ao risco, comprador e vendedor de um bem homogêneo, desejam escrever um contrato no instante $t = 0$ que especifique as condições de troca entre eles no futuro. Na data final, $t = 2$, uma unidade do bem é vendida ou então não há troca. Quando o contrato é assinado em $t = 0$, o estado da natureza do mundo é desconhecido, embora em $t = 1$ sua realização seja publicamente observável. Após a assinatura e antes da realização da incerteza, os agentes deverão realizar investimentos específicos à transação. O valor que o comprador atribui ao bem e o custo unitário do vendedor são representados, respectivamente, pelas variáveis aleatórias *v* e *c*. As realizações de tais variáveis dependem dos investimentos específicos do comprador e vendedor, β e σ, respectivamente, e do estado da natureza ω, de modo que

$$v = v(\omega, \beta) \text{ e } c = c(\omega, \sigma),$$

onde $\omega \in \Omega$, conjunto de possíveis estados da natureza, $\beta, \sigma \in \Gamma$ e *v* e *c* são funções que mapeiam $(\Omega, \Gamma) \rightarrow \Re$. Subjacente a essa formulação das funções valor e custo, está a hipótese de que não há externalidades nos investimentos, ou seja, que o investimento de uma das partes afeta diretamente apenas seu respectivo *payoff*. Devido à complexidade dos tais investimentos e dos estados da natureza, seria impraticável descrevê-los em um contrato.

Os autores supõem que a Justiça, o agente responsável pelo *enforcement* dos contratos, consegue verificar (i) se a troca ocorreu ou não, (ii) o preço pago pelo comprador ao vendedor e (iii) certas mensagens, cartas ou documentos escritos trocados pelo comprador e vendedor entre a data 1 e a data 2. Assim sendo, as duas primeiras suposições implicam a existência de preços contingentes aos resultados de troca e não-troca, enquanto a terceira hipótese significa que tais preços dependerão das mensagens trocadas pelos agentes. De acordo com a metodologia escolhida pelos autores, o tempo entre a data 1 a data 2 é dividido em dias e ao longo de tais dias os agentes trocarão

mensagens, publicamente observáveis ou não, que definirão o rumo do resultado final da troca.

Suporei uma ilha divida entre dois países interessados em estabelecer um contrato de produção e fornecimento para determinado recurso exaurível, representado por um bem unitário e indivisível. Para viabilizar tal contrato, os países, doravante chamados de país comprador e país vendedor, deverão realizar investimentos específicos à relação comercial. Por construção, o país consumidor demanda uma unidade do bem, assim como o país vendedor é capaz de ofertar também uma unidade.

Hipótese 1 (Isolamento tecnológico): Os países não possuem a tecnologia necessária para comprar ou vender o bem unitário no mercado *spot*. No caso, pode-se imaginar que seus portos precisariam de unidades especiais para receber ou enviar tal bem (*e.g.* plantas de regaseificação e liquefação[3]).

Também suporei a existência de um terceiro agente que embora não participe diretamente da transação comercial, ainda assim exercerá grande influência sobre seu resultado. Esse agente será responsável por supervisionar a adoção de acordos multilaterais e implementá-los – incumbências essas muito semelhantes às da Organização Mundial do Comércio. Por simplicidade, e por motivos óbvios, chamarei esse terceiro agente de Justiça.

Hipótese 2 (Limitação informacional da Justiça): A Justiça não observa os níveis de investimentos escolhidos pelos países e consegue determinar apenas se transação foi realizada ou não. Em caso de desistência contratual, a Justiça não é capaz de identificar qual das partes rescindiu.

Quando discutirmos o problema do planejador social, veremos a relevância dessa hipótese para determinação do contrato ótimo. Esse aspecto do problema abre espaço para a criação de contratos que determinam preços contingentes a consumação

[3] Em um projeto de gás natural liquefeito, através de uma unidade de liquefação o gás natural é transformado em líquido, o que facilita o seu transporte marítimo. Por outro lado, através de plantas de regaseificação é possível transformar o gás natural liquefeito em sua forma gasosa, utilizada pelos consumidores finais.

da troca comercial. Utilizo, portanto, a mesma hipótese que Hart e Moore (1998) assumiram em seu modelo e que foi abandonada por Nöldeke e Schmidt (1995).

Descrição da tecnologia:

O país comprador faz o investimento não-negativo β (*e.g.* oleodutos e gasodutos) e tal investimento eleva o valor monetário do recurso não-renovável para a economia. Sua função valor é $V(\beta)$, tal que

$$V' > 0, V'' \leq 0, V(0) = 0 .$$

Nesse tipo específico de transação, o objeto comercial é uma dotação natural de um dos países e não será efetivamente produzido. Suporei a possibilidade do recurso não-renovável ser extraído da natureza com custo zero. Quanto maior for o investimento do país vendedor na estrutura de exploração e produção do recurso natural, menor será seu custo de extração. Nem todas as reservas de recursos naturais, no entanto, são idênticas. Reservas de petróleo, por exemplo, diferem não apenas quanto à qualidade do óleo, mas também em relação à profundidade. Quanto maior a dificuldade imposta pela natureza ao exercício da exploração e produção, maior será a necessidade de novos investimentos do país vendedor.

O vendedor realiza o investimento σ que reduz o custo de extração do recurso natural. Quanto maior for σ, maiores serão as instalações da indústria extrativista e maior será sua capacidade explorar e produzir recursos de difícil acesso. Denominarei de custo natural de um projeto a variável exógena $\hat{\sigma}$. Dado um determinado projeto de exploração e produção, seu custo natural é gasto total necessário para extrair o recurso da natureza. Caso o país vendedor decida não investir em infra-estrutura, seu custo de extração será igual ao custo natural do projeto. Por outro lado, quanto maior o investimento específico σ, maior será o ganho de eficiência do país vendedor na atividade de exploração e produção e menor será seu custo de extração até o ponto em que tal custo seja nulo. Essa abordagem não é análoga à típica literatura, mas é uma simplificação necessária, tendo em vista que trabalharei com um bem unitário e indivisível.

A função de custo de extração unitário é $C(\sigma) = \hat{\sigma} - R(\sigma)$, onde $R(\sigma)$ é função inversível de redução de custo de extração, tal que

$$R' > 0, R'' \leq 0, R(0) = 0 .$$

Como o custo de extração é limitado, *i.e.*,

$$C \in [0, \hat{\sigma}],$$

o próprio investimento σ também é limitado, *i.e.*,

$$\sigma \in \left[0, R^{-1}(\hat{\sigma})\right].$$

Os custos afundados dos investimentos, para ambos os países, são mensurados pela função $H(x)$, tal que

$$H' > 0, H'' \geq 0, H(0) = 0 .$$

Dessa forma, sendo q variável binária que indica se a troca ocorreu ou não, $U_B(\beta, \sigma)$ a utilidade do comprador (*buyer*) e $U_S(\beta, \sigma)$ a utilidade do vendedor (*seller*), escreve-se que[4]:

$$U_B(\beta, \sigma) = (V(\beta) - p_1)q - p_0(1 - q) - H(\beta) \qquad (1)$$

$$U_S(\beta, \sigma) = (p_1 - C(\sigma))q + p_0(1 - q) - H(\sigma) \qquad (2)$$

First-Best:

[4] Não há externalidades nos investimentos, de modo que:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0, \frac{\partial C}{\partial \beta} = 0.$$

Suponhamos que os países sejam unificados. Agora a autoridade central deverá decidir a melhor forma de maximizar o bem-estar agregado. O governo deverá escolher os pares de investimentos específicos que geram excedente não-negativo, com o intuito de maximizar o bem-estar agregado. O problema do planejado central (PPC) é definido abaixo.

$$\max_{(\beta,\sigma)} V(\beta)-\hat{\sigma}+R(\sigma)-H(\beta)-H(\sigma)$$
$$sa:\begin{cases} V(\beta)\geq\hat{\sigma}-R(\sigma) \\ R(\sigma)\leq\hat{\sigma}\end{cases}$$

Definição 1 (Solução do PPC): Dado determinado nível de custo natural $\hat{\sigma}$, define-se como solução do PPC o par $(\beta(\hat{\sigma}),\sigma(\hat{\sigma}))$ tal que

$$(\beta(\hat{\sigma}),\sigma(\hat{\sigma}))\equiv\arg\max_{(\beta,\sigma)} V(\beta)-\hat{\sigma}+R(\sigma)-H(\beta)-H(\sigma)$$
$$sa:\begin{cases} V(\beta)\geq\hat{\sigma}-R(\sigma) \\ R(\sigma)\leq\hat{\sigma}\end{cases}$$

Definição 2: Para as funções, já definidas, $V(\beta)$, $R(\sigma)$ e $H(x)$, chamarei de $\overline{\beta}$ e $\overline{\sigma}$ os pontos tais que

$$V'(\overline{\beta})=H'(\overline{\beta}); \tag{3}$$
$$R'(\overline{\sigma})=H'(\overline{\sigma}). \tag{4}$$

A Definição 2 trata apenas de nomear dois níveis específicos de investimentos. Notaremos, no entanto, que como o conjunto de investimentos do vendedor é limitado, não necessariamente o investimento $\overline{\sigma}$ será factível. Assim sendo, chamarei $R(\overline{\sigma})$ de redução do custo de extração irrestrito e $V(\overline{\beta})+R(\overline{\sigma})$ de benefício social irrestrito. Os investimentos $\overline{\beta}$ e $\overline{\sigma}$ serão úteis para compreendermos a Proposição 1, que versará sobre a relação entre o custo natural e a solução do PPC. Antes de apresentar tal proposição, no entanto, buscarei motivá-la.

Sempre que o custo natural for inferior à redução do custo de extração irrestrita, isso quer dizer que será possível zerar o custo de extração. Como o custo natural é relativamente baixo, aos olhos do planejador central, o país vendedor é capaz de arcar com todo o seu custo.

Caso o custo natural ultrapasse o benefício social irrestrito, ambos os países deverão arcar com o ônus desse custo. Em um mundo onde há altos custos naturais, portanto, o planejador social deverá distorcer o investimento (*i.e.*, custo marginal acima do benefício marginal) dos dois países. A decisão de distorção, no entanto, será tomada de modo igualitário, de acordo com a expressão abaixo (cuja derivação encontra-se no Apêndice A):

$$\frac{H'(\beta)}{V'(\beta)} = \frac{H'(\sigma)}{R'(\sigma)} > 1 \qquad (5)$$

Olhemos agora para o caso intermediário, ou seja, quando $R(\overline{\sigma}) < \hat{\sigma} < V(\overline{\beta}) + R(\overline{\sigma})$. Nesse caso o custo natural excede a redução irrestrita, mas ainda é inferior ao ganho social irrestrito. Agora o contrato $(\overline{\beta}, \overline{\sigma})$ está disponível para o governo central, e caso tal contrato seja escolhido, o valor do excedente será positivo, pois $V(\overline{\beta}) - \hat{\sigma} + R(\overline{\sigma}) > 0$. Qualquer outra escolha, ainda que respeite a restrição de não-negatividade do excedente, não satisfará as condições (3) e (4), sendo assim uma escolha inferior à $(\overline{\beta}, \overline{\sigma})$.

Proposição 1 (Resultado de *first-best* e $\hat{\sigma}$): Sobre a solução do PPC e o custo natural $\hat{\sigma}$, podemos dizer que:

1. $\hat{\sigma} < R(\overline{\sigma})$ se e somente se a solução do PPC satisfizer a equação (3) e as equações abaixo:

$$\sigma = R^{-1}(\hat{\sigma}); \qquad (6)$$

$$H'(\sigma) < R'(\sigma). \qquad (7)$$

2. $R(\overline{\sigma}) < \hat{\sigma} < V(\overline{\beta}) + R(\overline{\sigma})$ se e somente se a solução do PPC satisfizer as equações (3) e (4).

3. $\hat{\sigma} > V(\overline{\beta}) + R(\overline{\sigma})$ se e somente se a solução do PPC satisfizer a equação (5) e as equações abaixo:

$$V(\beta) - \hat{\sigma} + R(\sigma) = 0; \tag{8}$$

$$\sigma < R^{-1}(\hat{\sigma}). \tag{9}$$

Demonstração: Ver Apêndice A.

<u>*Second-Best:*</u>

Se a Justiça conseguisse verificar os níveis de investimentos realizados, para alcançarmos o ótimo social bastaria que as partes contratassem $(\beta^*(\hat{\sigma}), \sigma^*(\hat{\sigma}))$. O preço acertado, portanto, seria aquele que divide igualmente o excedente contratual[5]. Como não é possível contratar os investimentos, estaremos em um mundo de *second-best* no qual os países buscarão contratos que definam preços contingentes à troca ocorrer ou não, de modo a viabilizá-la.

Em um contrato contingente completo, teríamos quatro preços para o bem: p_{11} caso a troca fosse realizada, p_{10} caso o vendedor desistisse da troca, p_{01} caso o comprador rescindisse e p_{00} quando ambas as partes desistem do contrato. De acordo com Nöldeke e Schmidt (1995), um contrato de opções para o vendedor é aquele que determina os preços p_{10} e p_{11}, pois, como foi dito, esse contrato dará ao vendedor o direito, mas não a obrigação, de desistir ou não da troca. Analogamente, um contrato de opções para o comprador definiria os preços p_{11} e p_{01}. Por simplicidade imporei que caso a troca não seja realizada, a Justiça não consegue identificar qual das partes desistiu do contrato.

---

[5] Uma possível alteração no modelo seria supor que o custo natural é desconhecido *a priori*. Nesse caso o contrato deveria especificar os investimentos como função do custo sorteado pela Natureza. Essa situação, no entanto, também dependeria da capacidade da Justiça de verificar o custo natural do país vendedor.

Hipótese 3 (Preços contingentes): O contrato assinado pelos dois países poderá definir apenas dois preços: p_1, caso a troca ocorra e p_0, caso contrário.

A negociação entre os dois países poderá ser dividida em três estágios. Em $t = 0$ cada jogador deverá formular uma proposta de contrato (p_0, p_1) e apresentá-la ao outro jogador. Caso os jogadores não concordarem quanto ao contrato inicial, o jogo termina e os agentes ficam com zero de utilidade. Suporei que os participantes fazem suas propostas buscando dividir igualmente o excedente do contrato. No instante seguinte, $t = 1$, tendo definido o contrato básico no período anterior, agora os países deverão realizar simultaneamente os investimentos específicos à relação comercial. O comprador e o vendedor escolhem, respectivamente, β e σ. Por fim, em $t = 2$ os agentes formularão um novo contrato $(\hat{p}_0, \hat{p}_1)$. Caso uma das partes não tenha interesse em renegociar, o contrato original será mantido.

Definição 3 (Estratégias dos países): Uma estratégia para cada país é uma tripla $((p_0, p_1), I, (\hat{p}_0, \hat{p}_1))$, tal que $I = \beta$ para o país comprador e $I = \sigma$ para o país vendedor.

Hipótese 4 (Formas funcionais particulares): A partir de agora, até o fim da dissertação, considerarei as seguintes forma funcionais particulares: $V(\beta) = \beta$, $R(\sigma) = \sigma$ e $H(x) = x^2$. Essa simplificação será feita para que possamos desenvolver e visualizar melhor os resultados da escolha contrato ótimo por parte dos agentes.

Assim sendo, de acordo com a hipótese acima, como $\overline{\beta} = 0.5$ e $\overline{\sigma} = 0.5$, utilizando a Proposição 1, temos o seguinte resultado:

$$\hat{\sigma} < 0.5 \Leftrightarrow (\beta^*, \sigma^*) = (0.5, \hat{\sigma})$$

$$0.5 \leq \hat{\sigma} \leq 1 \Leftrightarrow (\beta^*, \sigma^*) = (0.5, 0.5)$$

$$\hat{\sigma} > 1 \Leftrightarrow (\beta^*, \sigma^*) = (0.5\hat{\sigma}, 0.5\hat{\sigma})$$

Definição 4 (Investimentos Mínimos de Atratividade): Dado o par de preços (p_0, p_1), definido em $t = 0$, os níveis de investimentos β_{TH} e σ_{TH} são os menores níveis[6] que tornam o contrato lucrativo para o comprador e vendedor, respectivamente

$$\beta_{TH} = p_1 - p_0 \tag{10}$$

$$\sigma_{TH} = \hat{\sigma} - p_1 + p_0 \tag{11}$$

Assim sendo, se $\sigma \geq \sigma_{TH}$, então o vendedor estará interessado em cumprir o contrato, pois seu ganho com a troca será maior do que não a realizando, ou seja, $p_1 - \hat{\sigma} + \sigma \geq p_0$. A interpretação é análoga para β_{TH}. A título de boa notação escreverei

$$p_1 - p_0 \equiv \Delta p\,.$$

Para a troca ocorrer, é necessário e suficiente que $\beta \geq \beta_{TH}$ e $\sigma \geq \sigma_{TH}$. Logo, podemos escrever que

$$q = 1 \Leftrightarrow \beta \geq \Delta p \geq \hat{\sigma} - \sigma \tag{12}$$

Assim sendo, se em $t = 2$ os agentes se depararem com $\beta < \hat{\sigma} - \sigma$ a troca certamente não será realizada, pois uma das desigualdades não será satisfeita. Mesmo se buscarmos um par de preços renegociados, ainda assim não será possível efetivar a transação.

Na próxima seção investigaremos se é possível obter privadamente esses resultados de *first-best*. Veremos que a decisão de investimento de um agente afeta a decisão do outro através da antecipação dos resultados da renegociação. Sabendo isso, podemos tentar intuir se seria possível alcançar o ótimo social quando $\hat{\sigma} > 1$. Como não existem externalidades nos investimentos, não há porque esperar sobreinvestimentos. Naturalmente, portanto, não será possível alcançar o *first-best* nesse caso.

---

[6] Onde o subscrito *TH* representa *threshold* que significa “valor limítrofe”.

3. Contratos Ótimos

De acordo com o que vimos na seção anterior, estamos observando dois países isolados do resto do mundo que desejam estabelecer um contrato comercial sobre determinado recurso natural. Para tanto, tais países deverão realizar investimentos específicos que não-contratáveis, pois falham em ser verificáveis. Nesse mundo de *second-best* os países participarão de um jogo de três estágios: (i) definição do contrato de *default*, (ii) realização dos investimentos específicos e (iii) renegociação do contrato. Após a realização dos investimentos e antes da renegociação, o recurso não-renovável em questão será extraído da natureza e ambos os países estarão aptos a continuar a transação comercial. A linha do tempo abaixo ilustra melhor a seqüencialidade do jogo:

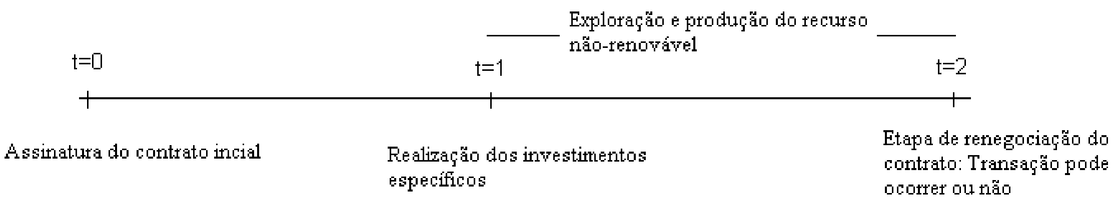

Figura 1: Linha do tempo do jogo

Primeiramente, no instante inicial $t = 0$, os países devem propor simultaneamente um contrato com preços contingentes ao resultado da troca comercial, que será realizada dois períodos à frente. Em $t = 0$, portanto, os agentes escolhem dois preços para a transação comercial em $t = 2$. O contrato definirá um preço caso na data futura alguma das partes rescinda o contrato e outro preço caso a troca seja efetivamente realizada. Preços diferentes gerarão diferentes incentivos na etapa de investimentos e, obviamente, terão conseqüências no jogo de renegociação. Caso os países não concordem com o contrato de *default*, o jogo é encerrado e cada país permanece com zero de utilidade.

Uma vez que os países tenham concordado com o contrato inicial, na segunda etapa do jogo, o instante $t = 1$, as partes deverão decidir, simultaneamente, seus investimentos específicos, sem os quais não será possível explorar, produzir e distribuir o bem não-renovável entre os instantes $t = 1$ e $t = 2$. Assim sendo, dados os preços do

contrato de *default*, cada país escolherá qual investimento maximiza sua utilidade contingente à decisão da outra parte.

Antes de realizarmos a indução retroativa desse jogo, é preciso definir o que caracteriza um equilíbrio em cada um dos subjogos. Na última etapa do jogo em questão, os países revisarão os termos de troca do contrato original. Essa é o chamado subjogo de renegociação, na qual os países escolherão simultaneamente, pares de contratos renegociados, que nada mais são do que novos preços contingentes. O resultado da renegociação dependerá dos preços (p_0, p_1) do contrato de *default*, escolhido em $t = 0$, e do par de investimentos específicos (β, σ), realizado em $t = 1$. Se a troca será realizada, com ou sem renegociação, ou se simplesmente não acontecerá, vai depender das condições (10), (11) e (12).

Definição 5 (Equilíbrio no subjogo de renegociação): Um par de preços $(\hat{p}_0, \hat{p}_1)$ é Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras, doravante chamado de ENEP, do subjogo de renegociação se ambas as partes têm maior utilidade escolhendo $(\hat{p}_0, \hat{p}_1)$ ao invés do contrato de *default*, (p_0, p_1).

Logo, se ocorrer renegociação, vigorará o novo par de preços $(\hat{p}_0, \hat{p}_1)$. Caso a renegociação falhe, teremos $(\hat{p}_0, \hat{p}_1) = (p_0, p_1)$. Com essa definição de equilíbrio da renegociação, podemos antecipar como será o comportamento dos agentes sempre que o contrato de *default* for lucrativo para uma parte, mas não para a outra. Nesse caso, o contrato será renegociado de modo a deixar o país prejudicado indiferente entre participar ou não da troca. Essa renegociação, portanto, aloca todo o poder de barganha nas mãos de apenas uma parte.

Quando os agentes escolhem os seus investimentos específicos, eles antecipam o resultado da renegociação, incorporando-o em seu problema de maximização de utilidade. Pela Definição 4, sabemos que os investimentos mínimos de atratividade mudam quando os preços iniciais também mudam. Como a utilidade de um agente depende não apenas de seu investimento, mas também do investimento da outra parte, e

tais investimentos devem ser feitos simultaneamente, deve-se definir o que é um equilíbrio nessa segunda etapa.

Definição 6 (Equilíbrio do subjogo de investimentos específicos): Um par de investimentos específicos (β^*, σ^*) é ENEP do subjogo de investimentos específicos quando

$$\beta^* \equiv \text{argmax} \quad U_B(\beta, \sigma^*) \tag{13}$$

$$\sigma^* \equiv \text{argmax} \quad U_S(\beta^*, \sigma) \tag{14}$$

Os jogadores, por fim, apresentarão simultaneamente na primeira etapa propostas de contratos iniciais, definidas pelo par de preços (p_0, p_1). Essa etapa será chamada de fase de definição do contrato de *default*.

Definição 7 (Equilíbrio do subjogo de contrato de *default*): Um par de preços (p_0, p_1) é ENEP do Sub-Jogo do contrato de *default* se (i) divide igualmente o excedente contratual entre as partes e (ii) ambas as partes preferem esse contrato à simplesmente nenhum contrato, ou seja, os dois países auferem ganhos estritamente positivos.

Definição 8 (Equilíbrio do jogo): As estratégias do comprador e vendedor, respectivamente, $((p_0, p_1), \beta, (\hat{p}_0, \hat{p}_1))$ e $((p_0, p_1), \sigma, (\hat{p}_0, \hat{p}_1))$, constituem um Equilíbrio de Nash se $(\hat{p}_0, \hat{p}_1)$, (p_0, p_1) e (β, σ) forem ENEPs de acordo com as definições 5, 6 e 7.

Nas próximas subseções descrevei em maiores detalhes os equilíbrios de cada de subjogo, de modo que seja possível caracterizar um Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos do problema em questão.

3.1. Renegociação

Nessa seção estudarei que tipos de contratos serão determinados através das decisões privadas. No último instante do jogo os países deverão renegociar o contrato original. Assim como em Hart e Moore (1988) e Nöldeke e Schmidt (1995), o mecanismo de renegociação aqui apresentado concentra o poder de barganha em um agente, que pode ser o comprador ou o vendedor, dependendo da história do jogo. Sempre que a troca for economicamente eficiente, mas não lucrativa para um dos agentes, a renegociação será feita de modo a tornar tal agente indiferente entre rescindir ou não. Isso significa que esse indivíduo não terá poder de barganha na renegociação, em função da ameaça da troca não ocorrer.

Sendo q e r variáveis binárias que representam, respectivamente, se a troca ocorreu ou não e se a renegociação foi feita ou não[7], abaixo segue uma adaptação da proposição presente em Hart e Moore (1988) que sintetiza a mecânica da renegociação.

Proposição 2: Sejam (p_0, p_1) os preços determinados no contrato de $t=0$ e (β, σ) os investimentos feitos em $t=1$. As regras de troca e respectivos preços em $t=2$ são dados por:

1. Se $\beta < \hat{\sigma} - \sigma$, então $q=0$, $r=0$ e $(\hat{p}_0, \hat{p}_1) = (p_0, p_1)$;
2. Se $\beta \geq \Delta p \geq \hat{\sigma} - \sigma$, então $q=1$, $r=0$ e $(\hat{p}_0, \hat{p}_1) = (p_0, p_1)$;
3. Se $\beta \geq \hat{\sigma} - \sigma > \Delta p$, então $q=1$, $r=1$ e $(\hat{p}_0, \hat{p}_1) = (p_0, p_0 + \hat{\sigma} - \sigma)$;
4. Se $\Delta p > \beta \geq \hat{\sigma} - \sigma$, então $q=1$, $r=1$ e $(\hat{p}_0, \hat{p}_1) = (p_0, p_0 + \beta)$.

Demonstração: Ver o apêndice de Hart e Moore (1998).

Se não existisse a etapa de renegociação, dado um par de preços (p_0, p_1), a troca seria realizada para os investimentos pertencentes ao conjunto

[7] Ambas as variáveis assumem valor 1 em caso positivo e 0 caso negativo.

$$\{(\beta,\sigma): \beta \geq \Delta p \geq \hat{\sigma} - \sigma\}.$$

Esse espaço está claramente contido no conjunto de investimentos economicamente eficientes, ou seja,

$$\{(\beta,\sigma): \beta \geq \hat{\sigma} - \sigma\}.$$

A Proposição 2 nos diz que quando $\beta \geq \hat{\sigma} - \sigma > \Delta p$ e $\Delta p > \beta \geq \hat{\sigma} - \sigma$ é possível obter preços tais que a transação ocorra. Isso significa que conseguimos garantir a troca para todo ponto do conjunto

$$\{(\beta,\sigma): \beta \geq \hat{\sigma} - \sigma\}.$$

Isso não quer dizer, no entanto, que em todos os Equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos a troca será realizada, pois os agentes podem escolher sempre o subinvestimento.

Assim sendo, a Proposição 2 nos ensina que sempre que o contrato satisfizer a restrição de eficiência econômica, mas não a restrição de lucratividade para um dos agentes, será possível renegociar os preços de modo a tornar a parte prejudicada indiferente entre trocar e não trocar, sem interferir na lucratividade do segundo agente. Obviamente forçarei a indiferença em favor do resultado de troca.

A questão pertinente é se dado esse esquema de renegociação os agentes escolherão os investimentos socialmente ótimos e se os preços originais escolhidos serão compatíveis com essas decisões e com a renegociação.

3.2. Investimentos Específicos

Em $t = 1$, comprador e vendedor escolhem β e σ, respectivamente, de modo a maximizar suas utilidades condicionais. O investimento específico do comprador é contingente ao investimento escolhido pelo vendedor e ao diferencial de preços do contrato de $t = 0$.

Nessa etapa os jogadores conhecem o contrato inicial definido em $t = 0$ e, portanto, são conhecidos os valores de σ_{TH} e β_{TH}. Além disso, os agentes também sabem nessa etapa como funcionará a renegociação em $t = 2$. A análise da etapa de investimentos será divida em casos, dependendo dos valores de Δp:

<u>1º Caso:</u> $\Delta p < 0 \Rightarrow \beta_{TH} < 0$, $\sigma_{TH} > \hat{\sigma}$

Considerando esses preços, como o menor investimento que torna o contrato lucrativo para o comprador é negativo, para qualquer investimento β o comprador ganhará aceitando o contrato. O menor preço que torna o lucrativo para o vendedor, no entanto, está acima do seu maior investimento factível. Assim sendo, para todo investimento σ o vendedor não terá lucro aos preços originais.

<u>2º Caso:</u> $0 < \Delta p < \hat{\sigma} \Rightarrow \beta_{TH} > 0$, $0 < \sigma_{TH} < \hat{\sigma}$

Agora os investimentos mínimos de lucratividade são valores intermediários. Isso significa que para alguns valores de investimentos os países terão lucro, mas para outros níveis não.

<u>3º Caso:</u> $\hat{\sigma} < \Delta p \Rightarrow \beta_{TH} > 0$, $\sigma_{TH} < 0$

Nesse último caso o problema do comprador continua o mesmo, pois quando $\beta < \beta_{TH}$ o contrato gera prejuízo e quando $\beta > \beta_{TH}$ o contrato é

lucrativo. Para o vendedor, no entanto, o investimento mínimo de lucratividade é negativo, o que significa que aos preços originais ele sempre ganhará mais aceitando o contrato do que o rejeitando.

Dessa forma, se em $t = 0$ ficou acordado que os preços seriam tais que $\Delta p < 0$, o comprador escolherá seu investimento sabendo que o vendedor, *a priori*, nunca deseja realizar a troca. Agruparei alguns ramos de $t = 0$ (pares de preços), pois acredito que isso facilitará a análise da etapa de investimentos. Os dois pares de preços, por exemplo, $\Delta p^A < \Delta p^B < 0$, geram conseqüências muito parecidas para os agentes. Em ambos os casos, os contratos originais não são economicamente atrativos para o vendedor (se a troca for realizada, será feita mediante a renegociação), embora o comprador sempre tenha lucro ao aceitar tais contratos.

De acordo com o que foi visto até na subseção sobre a renegociação, são quatro os possíveis resultados finais do jogo: troca sem renegociação (T: troca), não troca por ineficiência (NT: não troca), troca com renegociação favorável ao vendedor (RV: renegociação pró-vendedor) e troca com renegociação favorável ao comprador (RC: renegociação pró-comprador). As utilidades dos agentes, portanto, podem ser escritas da seguinte forma:

$$U_B(\beta,\sigma) = -\beta^2 + \begin{cases} -p_0, \text{ se NT ou RV;} \\ -p_0 - \hat{\sigma} + \sigma + \beta, \text{ se RC;} \\ -p_1 + \beta, \text{ se T.} \end{cases} \tag{15}$$

$$U_S(\beta,\sigma) = -\sigma^2 + \begin{cases} p_0, \text{ se NT ou RC;} \\ p_0 - \hat{\sigma} + \sigma + \beta, \text{ se RV;} \\ p_1 - \hat{\sigma} + \sigma, \text{ se T.} \end{cases} \tag{16}$$

O gráfico abaixo sintetiza os resultados da renegociação e como eles estão associados aos investimentos escolhidos.

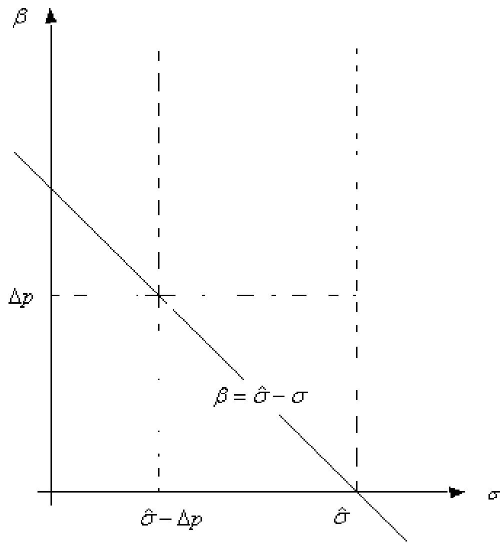

Figura 2: Investimentos e resultados da renegociação

Quando analisarmos a etapa de investimentos, a visualização desse gráfico será muito útil. Obviamente, dado um investimento de uma das partes, a escolha do investimento da outra parte determinará em qual dos quatro casos os agentes estarão. Por exemplo, o comprador sabe que dado σ, para todo β tal que $\beta < \hat{\sigma} - \sigma$, a troca não será realizada e que pagará o preço p_0.

Através desse raciocínio o comprador define o conjunto $[0, \hat{\sigma} - \sigma)$, de modo que para todo investimento a ele pertencente o resultado da transação será o mesmo. É importante ressaltar que essa conclusão não é alterada caso $\beta_{TH} < \hat{\sigma} - \sigma$. Para o intervalo $[\beta_{TH}, \hat{\sigma} - \sigma)$, embora o contrato seja lucrativo para o comprador, em razão do argumento de ineficiência a troca não será realizada.

Antes de entrar em maiores detalhes sobre a intuição das decisões de investimentos, apresento duas proposições sobre os resultados dessa etapa do jogo.

Proposição 3: Os países escolherão os investimentos socialmente ótimos somente quando economia for caracterizada por $0 < \hat{\sigma} < 0.5$ e o diferencial de preços for $\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$.

Demonstração: Ver Apêndice B.

Proposição 4: Quando $\hat{\sigma} > 0.5$, para qualquer diferencial de preços todos os equilíbrios do subjogo de investimentos são ineficientes.

Demonstração: Ver Apêndice B.

Explorarei apenas a intuição da Proposição 3, pois apenas $0 < \hat{\sigma} < 0.5$ é que foi possível encontrar investimentos eficientes. Sendo o diferencial de preços negativo, o comprador sempre tem interesse em adquirir o bem, mas o vendedor nunca quer vendê-lo[8], também para todos os investimentos disponíveis. Quanto o custo natural é suficientemente alto, destaca-se a complementaridade entre os investimentos específicos dos países. Nesse contexto faz-se necessário relembrar a contribuição de Hart (1986), onde o autor explica que na presença de complementaridade entre investimentos específicos, a solução descentralizada é inferior ao resultado da centralização ou integração. De fato, os investimentos ótimos em nosso problema são ineficientes em contraste ao resultado do planejador central, ou seja, do problema de centralização.

<u>1º Caso:</u> $\Delta p < 0$

O vendedor sabe que para $\Delta p < 0$ ou a troca não será realizada ou acontecerá mediante uma revisão que o deixará indiferente entre trocar e não trocar, o que o incentiva a não investir. O comprador sabe como o vendedor se comportará e também entende que para alguns valores de β ele recairá no caso (ii) e para outros estará em (iv). Quando a troca ocorre, a decisão privada de investimento será aquela que iguala ganhos marginais aos benefícios marginais. Essa escolha dependerá do valor de $\hat{\sigma}$, de acordo com a demonstração no apêndice. Intuitivamente, quanto menor o custo natural, menor será o ônus do preço renegociado $\hat{p}_1 = p_0 + \hat{\sigma} - \sigma$ para o comprador. O que determinará a escolha de investimento do comprador é o sinal da diferença entre o ganho líquido do investimento (*i.e.*, o valor do investimento subtraído de seu custo afundado) e o pagamento extra que deverá realizar. Assim sendo, como a renegociação introduz o custo natural no problema do comprador, ele investirá otimamente quando tal custo for pequeno o bastante para não sobrepor-se aos ganhos do contrato.

[8] Note que $\forall \beta \in [0, \infty)$ e $\forall \sigma \in [0, \hat{\sigma}]$ será verdade que $\beta > \beta_{TH}$ e $\sigma < \sigma_{TH}$. Outra leitura: Para o comprador, o menor investimento que torna o contrato atrativo é negativo, de modo que para qualquer investimento factível a troca será lucrativa. Por outro lado, o nível mínimo de atratividade para o vendedor está acima do maior investimento possível. Assim sendo, aos preços originais, o contrato nunca é lucrativo para o vendedor, de modo que se a troca acontecer será mediante renegociação.

Outra observação interessante refere-se aos equilíbrios assimétricos. O que causa essa assimetria para baixos diferenciais de preços é o fator fixo na função custo do vendedor. Intuitivamente, quando $\Delta p < 0$ o contrato original será renegociado de modo que o vendedor participe da transação. O custo natural será incorporado no preço renegociado, aumentando-o. Por esse motivo argumentei que para diferenciais negativos caso o custo natural for suficientemente pequeno, ele será cancelado pelo benefício da negociação (*i.e.*, o valor líquido do investimento ótimo). Esse efeito, no entanto, não existe quando o contrato é renegociado a favor do comprador, pois sua função não exibe nenhum fator fixo que possa cancelar o efeito do custo total ótimo.

2º Caso: $0 < \Delta p < \hat{\sigma}$

Agora, para alguns investimentos o comprador e o vendedor terão lucro e para outros terão prejuízo aceitando o contrato original. Quando o comprador, por exemplo, condiciona sua decisão aos investimentos $\sigma \in [0, \sigma_{TH})$, ele sabe que sabe que seu problema será igual ao caso de diferenciais negativos[9]. E se $\sigma \in [\sigma_{TH}, \hat{\sigma}]$? Basta olhar o Gráfico 1 para descobrir que o comprador deverá comparar seus melhores ganhos quando não há troca (ou quando a troca é realizada mediante renegociação favorável ao vendedor) com o caso no qual a troca ocorre sem renegociação. A função de melhor resposta do comprador, nesse caso, será obtida unindo as conclusões sobre seu comportamento contingente tanto a $\sigma \in [0, \sigma_{TH})$ quanto a $\sigma \in [\sigma_{TH}, \hat{\sigma}]$. O procedimento será completamente análogo para o vendedor.

Já podemos intuir que quando considerarmos diferenciais de preços maiores do que o valor líquido do bem, o comprador considerará a troca desinteressante. Analogamente, também obteremos esse resultado para diferenciais inferiores ao custo

[9] O comprador sabe que

$$\sigma < \hat{\sigma} - \Delta p \Leftrightarrow \hat{\sigma} - \sigma > \Delta p = \beta_{TH}.$$

Essa situação, na qual o *threshold* de eficiência é maior que o *threshold* de lucratividade, assemelha-se ao caso estudado anteriormente. Condicionando sua decisão aos investimentos $\sigma \in [\sigma_{TH}, \hat{\sigma}]$ inverte-se a situação, pois como o *threshold* de eficiência diminuirá, teremos

$$\sigma \geq \hat{\sigma} - \Delta p \Leftrightarrow \hat{\sigma} - \sigma \leq \Delta p = \beta_{TH}.$$

total. O custo total do vendedor e o valor líquido do comprador de *first best* são, respectivamente, $\hat{\sigma}^2$ e 0.25. Quando o custo natural é suficientemente baixo, existe um intervalo de preços que torna a transação factível. Além disso, dentro dessa faixa de preços, são oferecidos os incentivos corretos para que ambas as partes invistam otimamente. Para economias com custos naturais elevados, esse intervalo de preços deixa de existir.

<u>3º Caso:</u> $\Delta p > \hat{\sigma}$

No último caso todo investimento factível do vendedor torna o contrato original para ele lucrativo. Para o comprador, no entanto, continua sendo verdade que o investimento mínimo de lucratividade é um valor que divide o domínio dos investimentos em dois conjuntos.

Quando o comprador escolhe um investimento abaixo do nível mínimo de lucratividade, ele sabe que ou a troca não ocorrerá ou então será realizada ao preço $p_0 + \beta$ que o deixará indiferente entre trocar e não trocar. Por outro lado, quando o comprador investe acima desse nível mínimo, ele sabe que a troca será realizada ao preço previamente acordado, pois o vendedor sempre deseja participar do contrato com preços $\Delta p > \hat{\sigma}$. Intuitivamente, o comprador investigará se o diferencial de preços excede ou não o valor líquido do investimento ótimo.

É interessante notar que quando os custos naturais são suficientemente grandes, $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$, o diferencial de preços nesse terceiro caso será automaticamente maior do que esse valor líquido. Isso significa que o comprador não obterá benefícios ao participar do contrato. Novamente, para custos naturais suficientemente baixos, $0 < \hat{\sigma} < 0.25$, existirá um conjunto de diferenciais de preços inferiores ao valor líquido do investimento ótimo. Nesse caso será possível obter um equilíbrio no qual os agentes investem otimamente.

<u>*Resultados do Subjogo de Investimentos:*</u>

Em $t = 0$ os jogadores escolhem um par de preços, (p_0, p_1), que afetará as decisões de investimentos em $t = 1$. Em nossa investigação também aprendemos que o comportamento do comprador depende se os custos estruturais são suficientemente altos (ou baixos). As tabelas abaixo sumarizam os equilíbrios obtidos, de modo que para cada diferencial de preços determinado em $t = 0$ (primeira coluna) está associado um Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras da forma (β, σ) do subjogo de investimentos específicos (segunda coluna).

$0 < \hat{\sigma} < 0.25$	
$t = 0$	**ENEP**
$\Delta p < \hat{\sigma}^2$	$(0.5,0)$
$\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$	$(0.5,\hat{\sigma})$
$0.25 < \Delta p$	$(0,0)$

Tabela 1: Equilíbrios de Nash em Estratégias Puras

$0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$	
$t = 0$	**ENEP**
$\Delta p < \hat{\sigma}^2$	$(0,0)$
$\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$	$(0.5,\hat{\sigma})$
$0.25 < \Delta p$	$(0,0)$

Tabela 2: Equilíbrios de Nash em Estratégias Puras

Os países escolherão os investimentos socialmente ótimos somente quando economia for caracterizada por $0 < \hat{\sigma} < 0.25$ e o diferencial de preços for $\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$ ou quando a economia apresentar custos naturais tais que $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$ e os diferenciais de preços negociados forem $\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$. Já foi argumentado porque há equilíbrios assimétricos para $0 < \hat{\sigma} < 0.25$ e preços $\Delta p < \hat{\sigma}^2$.

Resta, portanto, analisarmos se em $t = 0$ os países conseguem determinar a dupla de preços (p_0, p_1) que seja um ENEP, de acordo com a Definição 7 . A próxima subseção tratará justamente desse tópico.

3.3. Contrato de *Default*

Custo natural suficientemente baixo:

Vamos considerar primeiramente que estamos em uma economia de baixos custos estruturais. As duas primeiras colunas representam os possíveis diferenciais de preços a ser escolhidos e os equilíbrios do subjogo de $t = 1$ a eles associados. As duas colunas seguintes representam as utilidades dos agentes quando em $t = 0$ firmam um determinado contrato de *default*. Por fim, as duas últimas colunas nos dizem se a troca ocorreu ou não, com ou sem renegociação.

Então, por exemplo: Se em $t = 0$ as partes fecharem um contrato de *default* no qual $\Delta p < 0$, elas sabem que em $t = 1$ o único ENEP será $(\beta, \sigma) = (0.5, 0)$ e que em $t = 2$ a troca acontecerá mediante renegociação, pois $q = r = 1$. Já que os agentes são capazes de antecipar esse resultado, eles também conseguem antecipar que ao escolherem $\Delta p < 0$ suas utilidades serão dadas por

$$U_S(0.5,0) = p_0 \text{ e } U_B(0.5,0) = -p_0 - \hat{\sigma} + 0.25 .$$

$0 < \hat{\sigma} < 0.25$					
$t = 0$	**ENEP**	U_S	U_B	**q**	**r**
$\Delta p < 0$	$(0.5,0)$	p_0	$-p_0 - \hat{\sigma} + 0.25$	1	1
$0 < \Delta p < \hat{\sigma}^2$	$(0.5,0)$	p_0	$-p_0 - \hat{\sigma} + 0.25$	1	1
$\hat{\sigma}^2 < \Delta p < \hat{\sigma}$	$(0.5, \hat{\sigma})$	$p_1 - \hat{\sigma}^2$	$-p_1 + 0.25$	1	0
$\hat{\sigma} < \Delta p < 0.25$	$(0.5, \hat{\sigma})$	$p_1 - \hat{\sigma}^2$	$-p_1 + 0.25$	1	0

$0.25 < \Delta p < 0.5$	$(0,0)$	p_0	$-p_0$	0	0
$0.5 < \Delta p$	$(0,0)$	p_0	$-p_0$	0	0

Tabela 3: Ganhos dos agentes em $t = 0$, dado que $0 < \hat{\sigma} < 0.25$

Suporei que os agentes, em $t = 0$, sempre podem desistir do contrato, obtendo utilidade zero. Assim sendo, observemos primeiramente o caso em que o diferencial de preços é maior do que 0.5, $0.5 < \Delta p$. Para esses preços os agentes sabem que o único Equilíbrio de Nash em estratégias puras é o equilíbrio de subinvestimento. Nesse caso, as utilidades do vendedor e do comprador são, respectivamente, p_0 e $-p_0$. Acontece que um contrato desse tipo nunca é viável, pois para qualquer p_0 real, uma das partes sempre poderá melhorar seu bem-estar evitando o contrato. Esse mesmo raciocínio nos leva a conclusão de que quando os preços são tais que $0.25 < \Delta p < 0.5$, então um dos agentes sempre poderá aumentar sua utilidade evitando o contrato.

O cálculo dos preços será sempre feito então de modo que os agentes tenham utilidades positivas e que o excedente seja divido igualmente. Assim sendo, teremos que quando os preços em $t = 0$ são tais que $p_1 = \frac{0.25 + \hat{\sigma}^2}{2}$, $\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$, então os agentes farão os investimentos eficientes e a troca será realizada sem renegociação. Por outro lado, quando $p_0 = \frac{0.25 - \hat{\sigma}^2}{2}$, $\Delta p < \hat{\sigma}^2$, apenas o comprador investirá de forma eficiente, enquanto o vendedor não investirá, mas mesmo assim a troca será realizada mediante renegociação. A álgebra do ajuste desses preços está no Apêndice C.

<u>*Custo natural suficientemente alto:*</u>

Consideremos agora uma economia de altos custos estruturais.

$0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$					
$t = 0$	**ENEP**	U_S	U_B	**q**	**r**
$\Delta p < 0$	$(0,0)$	p_0	$-p_0$	0	0

$0 < \Delta p < \hat{\sigma}^2$	$(0,0)$	p_0	$-p_0$	0	0
$\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$	$(0.5,\hat{\sigma})$	$p_1 - \hat{\sigma}^2$	$-p_1 + 0.25$	1	0
$0.25 < \Delta p < \hat{\sigma}$	$(0,0)$	p_0	$-p_0$	0	0
$\hat{\sigma} < \Delta p < 0.5$	$(0,0)$	p_0	$-p_0$	0	0
$0.5 < \Delta p$	$(0,0)$	p_0	$-p_0$	0	0

Tabela 4: Ganhos dos agentes em $t = 0$, dado que $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$

Para seguintes intervalos de diferenciais de preços não é possível obter um contrato ótimo: $\Delta p < 0$, $0 < \Delta p < \hat{\sigma}^2$, $0.25 < \Delta p < \hat{\sigma}$, $\hat{\sigma} < \Delta p < 0.5$ e $0.5 < \Delta p$. Nesses casos, a troca nunca ocorre e as utilidades do vendedor e do comprador são, respectivamente, p_0 e $-p_0$. Como antes, para qualquer p_0 real uma das partes sempre estará melhor quando rejeita o participar do contrato.

Se os preços definidos em $t = 0$ são tais que $p_1 = \dfrac{0.25 + \hat{\sigma}^2}{2}$, $\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$, os agentes durante o jogo de investimento escolherão a alocação eficiente $(0.5,\hat{\sigma})$, de modo que a troca entre os países será realizada sem a necessidade de renegociação.

Na seção a seguir, os resultados obtidos serão organizados e comparados com as principais conclusões da literatura.

4. Considerações Finais

No presente trabalho busquei um modelo que unisse alguns elementos pertinentes aos contratos sobre recursos não-renováveis, como investimentos específicos, custos de exploração e cláusulas de renegociação, para então contrapor as conclusões encontradas àquelas presentes na literatura explorada na introdução da dissertação. A investigação do desenho dos contratos sobre recursos não-renováveis é uma tarefa importante, pois tais recursos são até hoje fortes combustíveis para o crescimento e desenvolvimento das nações. Em nossa investigação aprendemos projetos de exploração e produção envolvem diferentes características naturais e que tais variáveis exógenas influenciam profundamente a capacidade dos contratos com preços contingentes de implementar o resultado de *first-best*. De acordo com a modelagem aqui desenvolvida, assim como em Hart (1986), em determinadas condições, associadas ao valor do custo natural do projeto, a solução centralizada é melhor do que a descentralizada.

A contraposição de alguns resultados da literatura sobre subinvestimento e investimentos específicos motivou em grande parte essa dissertação. Por um lado, o modelo de Hart e Moore nos diz que quando a Justiça é capaz unicamente de identificar se a troca foi realizada ou não e na ausência de incertezas, então sempre é possível alcançar o resultado de *first-best*. Por outro lado, caso adicionemos incerteza ao problema, não é possível obter privadamente o ótimo social e o resultado de *second-best* envolve subinvestimento. Nöldeke e Schmidt mostram que no modelo de *hold-up* apresentado por Hart e Moore é possível alcançar o resultado de *first-best*, através de contratos de opção, caso a Justiça seja capaz de verificar se o vendedor entregou ou não o bem contrato. Aghion, Dewatripont e Rey mostram que o desenho adequado da renegociação é importante para alcançar o resultado eficiente, enquanto MacLeod e Malcomson argumentam que quando ambas as partes fazem investimentos específicos, a eficiência pode ser obtida por contratos com cláusulas suficientes para evitar renegociações.

Mantendo a hipótese de Hart e Moore sobre a limitação informacional da Justiça, concluí que nem sempre os agentes investem otimamente. Ambos os países

envolvidos na transação deverão realizar investimentos específicos e, em minha formulação, o investimento do país vendedor pode ser comparado ao esforço de exploração e produção do recurso exaurível. Admito a existência de um nível de esforço máximo que é igual ao custo natural da economia, $\hat{\sigma}$.

Quando o custo natural for pequeno o bastante para que o ótimo social seja caracterizado por custo de extração nulo, então privadamente será possível recuperar o resultado de *first-best*. Talvez seja interessante ressaltar que Hotelling, em seu artigo que motivou grande parte da discussão sobre extração ótima de recursos naturais, supôs custo de extração nulo.

Quando o esforço máximo de exploração e produção é bem pequeno, será possível determinar um intervalo de preços de modo que ambas as partes tenham lucro com o contrato, sendo que são oferecidos os incentivos corretos para que sejam feitos os investimentos eficientes. Para economias caracterizadas por custos naturais altos, ou seja, recursos naturais de custosa extração em relação aos ganhos da sociedade, esse intervalo de preços desaparece e torna-se impossível gerar um contrato com os incentivos adequando.

Em comparação à literatura utilizada na dissertação, algumas considerações devem ser feitas. A implementação do *first-best* depende intimamente do custo natural, que é uma característica exógena do país vendedor. O custo natural deve ser baixo para ser possível implementar o *first-best.* Para reavaliar os resultados de Hart e Moore, não foi preciso abandonar a hipótese de limitação informacional da Justiça, como fizeram Nöldeke e Schmidt. No que tange a renegociação, os resultados aqui encontrados são compatíveis, em certa medida, com Malcomson e MacLeod. Quando o custo natural é muito baixo, há espaço para a renegociação gerar ineficiência. Em todos os equilíbrios nos quais o *first-best* é implementado, a renegociação não acontece. Esse resultado também é interessante sob a perspectiva dos achados de Aghion, Dewatripont e Rey. Segundo os autores, quando o contrato define um ponto de *default* e aloca todo o poder de barganha da renegociação nas mãos de uma das partes, o *first-best* será implementável. No modelo aqui apresentado, há um contrato de *default* e os países nunca dividem o poder de barganha quando chamados a renegociar o contrato. Sendo a

renegociação uma realidade dos contratos sobre recursos naturais, o modelo apresenta uma má notícia, no sentido em que prevê a ineficiência.

Como foi visto na introdução da dissertação, o risco de expropriação e a ocorrência de renegociações são duas constantes na indústria de exploração de recursos exauríveis. Aqui a renegociação não teve papel na obtenção dos investimentos eficientes, embora tenha sido fundamental para obtermos equilíbrios assimétricos nos quais apenas o país comprador investe otimamente, de modo que o país vendedor opera com custo de extração máximo, ou seja, igual ao próprio custo natural.

Caso o contrato em questão apresentasse uma dimensão de quantidade, possivelmente a teoria de extração ótima traria grandes *insights* para o tópico explorado. De acordo com a teoria de extração ótima, o custo de extração depende não apenas do esforço de exploração e produção, mas também do tamanho total das reservas e de seu preço-sombra. Outra possível extensão do modelo é a introdução do mercado *spot*, que ressaltaria o conflito de interesses entre um contrato estável de longo prazo em relação aos ganhos (e perdas) com a volatilidade dos preços no curto-médio prazo.

5. Apêndice

Apêndice A: Ótimo Social

Demonstração da Proposição 1:

Condições de Necessidade:

Escrevamos o PPC como:

$$\max_{(\beta,\sigma)} V(\beta) - \hat{\sigma} + R(\sigma) - H(\beta) - H(\sigma)$$
$$sa: \begin{cases} V(\beta) \geq \hat{\sigma} - R(\sigma) \\ R(\sigma) \leq \hat{\sigma} \end{cases}$$

CPO:

$$\lambda = \frac{H'(\beta)}{V'(\beta)} - 1 \qquad \text{(A)}$$

$$\mu = \frac{H'(\beta)}{V'(\beta)} - \frac{H'(\sigma)}{R'(\sigma)} \qquad \text{(B)}$$

$$\lambda(V(\beta) - \hat{\sigma} + R(\sigma)) = 0 \qquad \text{(C)}$$

$$\mu(\hat{\sigma} - R(\sigma)) = 0 \qquad \text{(D)}$$

$$\begin{array}{ll} i)\lambda, \mu > 0 & ii)\lambda = 0, \mu > 0 \\ \sigma = R^{-1}(\hat{\sigma}) & \sigma = R^{-1}(\hat{\sigma}) \\ V(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 0 & V(\beta) \geq 0 \Rightarrow \beta \geq 0 \\ \lambda = \dfrac{H'(0)}{V'(0)} - 1 \Rightarrow \lambda = -1 & \lambda = 0 \Rightarrow V'(\beta) = H'(\beta) \\ & \mu > 0 \Rightarrow H'(\sigma) < R'(\sigma) \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
iii)\lambda, \mu = 0 & iv)\lambda > 0, \mu = 0 \\
V'(\beta) = H'(\beta) & R(\sigma) \leq \hat{\sigma} \\
R'(\sigma) = H'(\sigma) & V(\beta) - \hat{\sigma} + R(\sigma) = 0 \\
R(\overline{\sigma}) \leq \hat{\sigma} \leq V(\overline{\beta}) + R(\overline{\sigma}) & \lambda > 0 \Rightarrow H'(\beta) > V'(\beta) \\
 & \mu = 0 \Rightarrow H'(\sigma) > R'(\sigma)
\end{array}
$$

Lembrando que a função *V* respeita as condições de Inada, temos que $V(0) = 0$ e $V'(0) = \infty$. Utilizando essa hipótese, mostramos que o caso (i) de fato é impossível. O caso (ii) é a situação na qual o custo unitário é zerado. Uma das condições para esse resultado é $H'(\sigma) < R'(\sigma)$ que é equivalente a $\sigma < \overline{\sigma}$. Logo:

$$\sigma = R^{-1}(\hat{\sigma}) < \overline{\sigma} \Leftrightarrow \hat{\sigma} < R^{-1}(\overline{\sigma}).$$

No terceiro caso, para que encontremos soluções interiores, é necessário que $R(\overline{\sigma}) \leq \hat{\sigma} \leq V(\overline{\beta}) + R(\overline{\sigma})$. Essa condição é obtida apenas manipulando as restrições de desigualdade do problema. Por fim, no caso (iv), estamos interessados em descobrir quais restrições as condições de primeira ordem impõem sobre $\hat{\sigma}$. Fixados os parâmetros do problema, dentre eles $\hat{\sigma}$, os investimentos devem ser tais que zerem o excedente do contrato. Sabemos também que só são válidos $\beta > \overline{\beta}$ e $\sigma > \overline{\sigma}$, pois então obteremos $H'(\beta) > V'(\beta)$ e $H'(\sigma) > R'(\sigma)$. Podemos escrever que:

$$
\begin{array}{l}
V(\overline{\beta}) < V(\beta) \\
R(\overline{\sigma}) < R(\sigma) \\
V(\overline{\beta}) + R(\overline{\sigma}) < V(\beta) + R(\sigma) = \hat{\sigma}
\end{array}
$$

Onde as duas primeiras linhas são conseqüência de *V* e *R* serem crescentes e a última igualdade segue da nulidade do contrato.

Condições de Suficiência:

Suponha que $\hat{\sigma} < R(\overline{\sigma})$. Como $R^{-1}(\hat{\sigma}) < \overline{\sigma}$, segue que $H'(\sigma) < R'(\sigma)$, $\forall \sigma \in [0, R^{-1}(\hat{\sigma})]$. Se para todo ponto do domínio dos investimentos o benefício

marginal excede o custo marginal, o ótimo é uma solução de canto, isto é, $\sigma = R^{-1}(\hat{\sigma})$. Em razão dessa solução de canto, concluímos que $\mu \geq 0$ e $\lambda V(\beta) = 0$. Se $\beta = 0$, então, utilizando a condição de Inada $V'(0) = \infty$, encontramos uma incoerência na equação (A), pois teríamos $\lambda = -1$. Suponhamos então que $\beta > 0$. Nesse caso teremos $\lambda = 0$ e $V'(\beta) = H'(\beta)$. Logo, quando $\hat{\sigma} < R(\overline{\sigma})$, concluímos que o ótimo social é $\left(\overline{\beta}, R^{-1}(\hat{\sigma})\right)$.

Suponhamos agora que $\hat{\sigma} > V(\overline{\beta}) + R(\overline{\sigma})$. Intuitivamente, em razão da restrição de não-negatividade do excedente contratual, sabemos que não é possível que o ótimo desse problema seja $\beta \leq \overline{\beta}$ e $\sigma \leq \overline{\sigma}$. Isso quer dizer que nesse caso o planejador não escolherá os investimentos que igualam custos marginais a benefícios marginais, indicando que encontraremos algum tipo de distorção. O governo central, portanto, deverá aumentar um dos investimentos, ou ambos, para conseguir um contrato de valor não-negativo. Para esse intervalo do custo natural, os investimentos ótimos deverão ser tais que $\beta > \overline{\beta}$ ou $\sigma > \overline{\sigma}$. Para tornar o excedente não-negativo, podemos observar: (i) $\beta > \overline{\beta}$ e $\sigma \leq \overline{\sigma}$, (ii) $\beta > \overline{\beta}$ e $\sigma > \overline{\sigma}$ ou (iii) $\sigma > \overline{\sigma}$ e $\beta \leq \overline{\beta}$.

No caso (i) teremos $\lambda > 0$ e $\mu > 0$. Isso significa que $\sigma = R^{-1}(\hat{\sigma})$ e $V(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 0$ (pelas condições de Inada). Essas duas conclusões, no entanto, no levariam ao absurdo resultado $\lambda = -1$. O caso (iii), através da equação (A), também produz resultados incoerentes:

$$\lambda = \underbrace{\frac{H'(\beta)}{V'(\beta)}}_{<1} - 1 < 0$$

Fica evidente que teremos $H'(\beta) > V'(\beta) \Rightarrow \lambda > 0$ e $H'(\sigma) > R'(\sigma)$. Como o multiplicador de KKT é não negativo, pela equação (B) temos que:

$$\frac{H'(\beta)}{V'(\beta)} \geq \frac{H'(\sigma)}{R'(\sigma)}$$

Já que $\sigma > \overline{\sigma}$, teremos novamente uma solução de canto? Se $R^{-1}(\hat{\sigma}) = \sigma$, teremos que $V(\beta) = 0$, pois $\lambda > 0$. Como definimos $V(0) = 0$, então $\beta = 0$. Isso é impossível se admitirmos que $\overline{\beta}$ é um ponto interior e que $\beta > \overline{\beta}$. Assim sendo, consideremos agora que $R^{-1}(\hat{\sigma}) > \sigma$. Nesse caso, temos que $\mu = 0$ e, portanto,

$$\frac{H'(\beta)}{V'(\beta)} = \frac{H'(\sigma)}{R'(\sigma)} > 1.$$

Por fim, estudaremos as conseqüências de $R(\overline{\sigma}) \leq \hat{\sigma} \leq V(\overline{\beta}) + R(\overline{\sigma})$. Nesse caso, como $\overline{\sigma} \leq R^{-1}(\hat{\sigma})$, isso quer dizer que o nível de investimento que iguala custos marginais a benefícios marginais é factível. O par $(\overline{\beta}, \overline{\sigma})$ satisfaz a restrição de não-negatividade do excedente contratual e também é aquele que iguala benefícios marginais aos custos marginais. Se o planejador central escolher qualquer par $\{(\beta, \sigma) : \beta \geq \overline{\beta}, \sigma \geq \overline{\sigma}\}$, o excedente final será maior, mas o custo marginal de algum dos países será maior do que seu benefício marginal. Isso significa que será possível aumentar o valor da função objetivo escolhendo o par $(\overline{\beta}, \overline{\sigma})$.

■

Apêndice B: Investimentos Ótimos

Demonstração da Proposição 3:

1º Caso: $\Delta p < 0$

Problema do comprador:

Dado $\Delta p < 0$, pela equação (11) segue que $\sigma_{TH} > \hat{\sigma}$ e $\sigma < \sigma_{TH}$. Com pouca álgebra concluímos que $\hat{\sigma} - \sigma > \beta_{TH}$. Pela equação (10) também sabemos que $\beta_{TH} < 0$ e $\beta > \beta_{TH}$.

Quando $\beta \in [0, \hat{\sigma} - \sigma)$, não haverá troca e o preço pago será p_0. Caso $\beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty)$, então a troca será realizada ao preço renegociado será $p_0 + \hat{\sigma} - \sigma$. A utilidade do comprador é escrita como:

$$U_B(\beta, \sigma) = \begin{cases} - p_0 - \beta^2, \beta \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \\ - p_0 - \hat{\sigma} + \sigma + \beta - \beta^2, \beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \end{cases}.$$

Agora estamos interessados em determinar qual β maximiza $U_B(\beta, \sigma)$. Devemos notar que a função acima não é continuamente diferenciável, pois apresenta uma quina no ponto $\beta = \hat{\sigma} - \sigma$. Sabemos que até o ponto $\beta = \hat{\sigma} - \sigma$, a função é decrescente. Por outro lado, a função descrita para $\beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty)$ é uma parábola que pode apresentar um trecho crescente ou não, dependendo do valor de $\max\{\hat{\sigma} - \sigma, 0.5\}$. Como $\hat{\sigma} - \sigma \in [0, \hat{\sigma}]$ e $\hat{\sigma} < 0.5$, conclui-se que $\max\{\hat{\sigma} - \sigma, 0.5\} = 0.5$.

Assim sendo, o comprador comparará sua melhor escolha quando não há troca com o investimento ótimo em caso de troca. Os candidatos a máximo podem ser descritos como:

$$\begin{aligned} &\beta^* \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \Rightarrow \beta^* = 0; \\ &\beta^* \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \Rightarrow \beta^* = 0.5. \end{aligned}$$

Comparando seus ganhos, temos que $U_B(0, \sigma) - U_B(0.5, \sigma) = (\hat{\sigma} - 0.25) - \sigma$. Se os custos naturais forem suficientemente baixos, $0 < \hat{\sigma} < 0.25$, teremos que $U_B(0.5, \sigma) > U_B(0, \sigma)$. Nesse caso, a função de melhor resposta do comprador é dada por $\beta^*(\sigma) = 0.5, \sigma \in [0, \hat{\sigma}]$.

Por outro lado, caso os custos naturais sejam suficientemente altos, $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$, para $\sigma \in [0, \hat{\sigma} - 0.25)$ observamos que $U_B(0.5, \sigma) < U_B(0, \sigma)$ e para $\sigma \in [\hat{\sigma} - 0.25, \hat{\sigma}]$ temos que $U_B(0.5, \sigma) > U_B(0, \sigma)$. Sua função de melhor resposta será escrita como:

$$\beta^*(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma \in [0, \hat{\sigma} - 0.25) \\ 0.5, \sigma \in [\hat{\sigma} - 0.25, \hat{\sigma}] \end{cases}.$$

Problema do vendedor:

Como já foi dito, quanto o diferencial de preços é negativo, o investimento mínimo que torna o contrato lucrativo é maior que $\hat{\sigma}$. Assim sendo, o vendedor sabe que ou a troca não acontecerá, ou então será realizada mediante renegociação. De qualquer jeito, sua utilidade sempre será igual à expressão abaixo:

$$U_S(\beta, \sigma) = p_0 - \sigma^2, \sigma \in [0, \hat{\sigma}].$$

Logo, a função de melhor resposta do vendedor é dada por:

$$\sigma^*(\beta) = 0, \forall \beta \in [0, \infty).$$

Equilíbrio de Nash:

Quando os preços de $t = 0$ são tais que $\Delta p < 0$, vimos que o vendedor sempre escolhe o investimento zero. Dessa forma, quando $0 < \hat{\sigma} < 0.25$, o único ENEP é $(0.5,0)$. Por outro lado, quando $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$, o único ENEP é $(0,0)$.

<u>2º Caso:</u> $0 < \Delta p < \hat{\sigma}$

Problema do comprador:

Dado que o vendedor escolheu $\sigma \in [0, \sigma_{TH})$, sabemos que

$$\sigma < \hat{\sigma} - \Delta p \Leftrightarrow \hat{\sigma} - \sigma > \Delta p = \beta_{TH} .$$

Quando $\beta \in [0, \hat{\sigma} - \sigma)$, não haverá troca e o preço será p_0. Caso $\beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty)$, então a troca será realizada ao preço renegociado $p_0 + \hat{\sigma} - \sigma$. A utilidade é escrita como:

$$U_B(\beta, \sigma) = \begin{cases} -p_0 - \beta^2, \beta \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \\ -p_0 - \hat{\sigma} + \sigma + \beta - \beta^2, \beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \end{cases}.$$

Como antes, a função descrita para $\beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty)$ é uma parábola que já pode ou não ter atingido seu máximo em seu domínio, dependendo do valor de $\max\{\hat{\sigma} - \sigma, 0.5\}$. Sendo $\hat{\sigma} - \sigma \in [0, \hat{\sigma}]$ e $\hat{\sigma} < 0.5$, conclui-se que $\max\{\hat{\sigma} - \sigma, 0.5\} = 0.5$. Os possíveis pontos de ótimo podem ser descritos como:

$$\beta^* \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \Rightarrow \beta^* = 0.5.$$

Comparando seus ganhos, temos que $U_B(0, \sigma) - U_B(0.5, \sigma) = (\hat{\sigma} - 0.25) - \sigma$. Se $0 < \hat{\sigma} < 0.25$, então $U_B(0.5, \sigma) > U_B(0, \sigma)$ e $\beta^*(\sigma) = 0.5$.

Se $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$, a análise deve ser feita de forma mais cautelosa, pois não sabemos se $\hat{\sigma} - 0.25$ é maior ou menor do que σ_{TH}. Isso é importante, pois por enquanto a decisão do comprador está condicionada aos investimentos $\sigma \in [0, \sigma_{TH})$. Se $0.25 < \Delta p < \hat{\sigma}$, então $\hat{\sigma} - 0.25 > \sigma_{TH}$ e $\beta^*(\sigma) = 0$. Por outro lado, se $0 < \Delta p < 0.25$, então $\hat{\sigma} - 0.25 < \sigma_{TH}$ e segue que:

$$\beta^*(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma \in [0, \hat{\sigma} - 0.25) \\ 0.5, \sigma \in [\hat{\sigma} - 0.25, \sigma_{TH}) \end{cases}.$$

Dado que o vendedor escolheu $\sigma \in [\sigma_{TH}, \hat{\sigma}]$, sabemos que

$$\sigma \geq \hat{\sigma} - \Delta p \Leftrightarrow \hat{\sigma} - \sigma \leq \Delta p = \beta_{TH} .$$

Quando $\beta \in [0, \hat{\sigma} - \sigma)$, não haverá troca e o preço vigente será p_0. Caso $\beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \beta_{TH})$, então a troca será realizada ao preço renegociado $p_0 + \beta$, pois o poder de barganha é do vendedor. Por fim, para $\beta \in [\beta_{TH}, \infty)$, a troca será realizada ao preço p_1. A utilidade do comprador é escrita como:

$$U_B(\beta, \sigma) = \begin{cases} -p_0 - \beta^2, \beta \in [0, \beta_{TH}) \\ -p_1 + \beta - \beta^2, \beta \in [\beta_{TH}, \infty) \end{cases}.$$

Para $\beta \in [\beta_{TH}, \infty)$ a função descrita é uma parábola que já pode ou não ter atingido seu máximo em seu domínio, dependendo do valor de $\max\{\beta_{TH}, 0.5\}$. Como $\beta_{TH} = \Delta p$ e $0 < \Delta p < \hat{\sigma} \in [0, 0.5]$, concluímos que esse máximo é igual a 0.5. Os candidatos a máximo da utilidade condicional podem ser descritos como:

$$\beta^* \in [0, \beta_{TH}) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\beta_{TH}, \infty) \Rightarrow \beta^* = 0.5.$$

A diferença entre ganhos é $U_B(0, \sigma) - U_B(0.5, \sigma) = \Delta p - 0.25$. Nesse segundo caso, consideramos apenas os diferenciais tais que $0 < \Delta p < \hat{\sigma}$. Quando a economia do país vendedor é caracterizada por $0 < \hat{\sigma} < 0.25$, os diferenciais de preços também sempre serão menores do que 0.25 e sempre será verdade que $U_B(0.5, \sigma) > U_B(0, \sigma)$.

Assim sendo, unindo esse resultado àquele obtido dado que o vendedor escolheu $\sigma \in [0, \sigma_{TH})$, determinamos que para $0 < \Delta p < \hat{\sigma}$,

$$\beta^*(\sigma) = 0.5 .$$

Por outro lado, consideremos que $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$. Utilizando a mesma lógica do parágrafo anterior, caso $0 < \Delta p < 0.25$, então $\beta^*(\sigma) = 0.5$ e caso $0.25 < \Delta p < \hat{\sigma}$, então $\beta^*(\sigma) = 0$.

A função de melhor resposta em uma economia de custos naturais suficientemente altos é definida como $\beta^*(\sigma) = 0$ para $0.25 < \Delta p < \hat{\sigma}$. Para $0 < \Delta p < 0.25$, escrevemos essa função da forma apresentada abaixo:

$$\beta^*(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma \in [0, \hat{\sigma} - 0.25) \\ 0.5, \sigma \in [\hat{\sigma} - 0.25, \hat{\sigma}] \end{cases}.$$

Problema do vendedor:

Dado que o comprador escolheu $\beta \in [0, \beta_{TH})$, sabemos que

$$\beta < \Delta p \Leftrightarrow \hat{\sigma} - \beta > \hat{\sigma} - \Delta p = \sigma_{TH} .$$

Quando $\sigma \in [0, \hat{\sigma} - \beta)$, não haverá troca e o preço vigente será p_0. Consideremos agora que $\sigma \in [\hat{\sigma} - \beta, \hat{\sigma}]$. Nesse caso a troca será realizada do preço renegociado $p_0 + \beta$. A utilidade do vendedor é escrita como:

$$U_S(\beta, \sigma) = \begin{cases} p_0 - \sigma^2, \sigma \in [0, \hat{\sigma} - \beta) \\ p_0 + \beta - \hat{\sigma} + \sigma - \sigma^2, \sigma \in [\hat{\sigma} - \beta, \hat{\sigma}] \end{cases}.$$

Agora estamos interessados em determinar qual σ maximiza $U_S(\beta, \sigma)$. A função descrita para $\sigma \in [\hat{\sigma} - \beta, \hat{\sigma}]$ é uma parábola convexa cujo máximo, $\sigma = 0.5$, está fora do domínio. Assim sendo, esse trecho da função atinge o máximo no ponto $\sigma = \hat{\sigma}$. Os candidatos a máximo podem ser descritos como:

$$\sigma^* \in [0, \hat{\sigma} - \beta) \Rightarrow \sigma^* = 0;$$
$$\sigma^* \in [\hat{\sigma} - \beta, \hat{\sigma}] \Rightarrow \sigma^* = \hat{\sigma}.$$

Também sabemos que $U_S(\beta,0)-U_S(\beta,\hat{\sigma})=\hat{\sigma}^2-\beta$. Como $0<\hat{\sigma}<0.5$, é verdade que $\hat{\sigma}^2<\hat{\sigma}$. Para $0<\Delta p<\hat{\sigma}^2$, observamos que $\sigma^*(\beta)=0$, pois $\beta<\beta_{TH}<\hat{\sigma}^2$. Por outro lado, para $\hat{\sigma}^2<\Delta p<\hat{\sigma}$ dizemos que:

$$\sigma^*(\beta)=\begin{cases}0, \beta\in\left[0,\hat{\sigma}^2\right)\\ \hat{\sigma}, \beta\in\left[\hat{\sigma}^2,\beta_{TH}\right)\end{cases}.$$

Dado que o comprador escolheu $\beta\in[\beta_{TH},\infty)$, sabemos que

$$\beta\geq\Delta p\Leftrightarrow\hat{\sigma}-\beta\leq\hat{\sigma}-\Delta p=\sigma_{TH}.$$

Já que o comprador deseja realizar a troca, para o vendedor sempre que $\sigma<\sigma_{TH}$ sua utilidade será a mesma. Para compreender com mais facilidade essa conclusão, talvez seja propício observar a Ilustração 1. Quando $\sigma\in[0,\sigma_{TH})$, ou não haverá troca e o preço vigente será p_0 ou então a troca será realizada ao preço renegociado $p_0+\hat{\sigma}-\sigma$. Por fim, para $\sigma\in[\sigma_{TH},\hat{\sigma}]$, realiza-se a troca ao preço p_1. A utilidade do vendedor é escrita como:

$$U_S(\beta,\sigma)=\begin{cases}p_0-\sigma^2, \sigma\in[0,\sigma_{TH})\\ p_1-\hat{\sigma}+\sigma-\sigma^2, \sigma\in[\sigma_{TH},\hat{\sigma}]\end{cases}.$$

Agora estamos interessados em determinar qual σ maximiza $U_S(\beta,\sigma)$. A função descrita para $\sigma\in[\sigma_{TH},\hat{\sigma}]$ é uma parábola convexa cujo máximo, $\sigma=0.5$, está fora do domínio. Assim sendo, esse trecho da função atinge o máximo no ponto $\sigma=\hat{\sigma}$. Os candidatos a máximo podem ser descritos como:

$$\sigma^*\in[0,\sigma_{TH})\Rightarrow\sigma^*=0;$$
$$\sigma^*\in[\sigma_{TH},\hat{\sigma}]\Rightarrow\sigma^*=\hat{\sigma}.$$

Sabemos que $U_S(\beta,0)-U_S(\beta,\hat{\sigma})=\hat{\sigma}^2-\Delta p$. Para os intervalos $0<\Delta p<\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\sigma}^2<\Delta p<\hat{\sigma}$, o vendedor escolhe, respectivamente, $\sigma^*(\beta)=0$ e $\sigma^*(\beta)=\hat{\sigma}$. Assim sendo, escrevemos a função de melhor resposta do vendedor como

$$\sigma^*(\beta)=0, \beta\in[0,\infty),$$

para $0<\Delta p<\hat{\sigma}^2$. Quando $\hat{\sigma}^2<\Delta p<\hat{\sigma}$, temos que:

$$\sigma^*(\beta)=\begin{cases}0, \beta\in[0,\hat{\sigma}^2) \\ \hat{\sigma}, \beta\in[\hat{\sigma}^2,\infty)\end{cases}.$$

Equilíbrio de Nash:

Pelo problema do comprador, sabemos que ele sempre investe otimamente quando $0<\hat{\sigma}<0.25$.

Considerando o intervalo $0<\Delta p<\hat{\sigma}^2$, como o vendedor sempre subinveste, o único ENEP é $(0.5,0)$. Para $\hat{\sigma}^2<\Delta p<\hat{\sigma}$, como $\hat{\sigma}^2<0.5$, a melhor resposta do vendedor ao investimento $\beta^*=0.5$ é $\sigma^*(0.5)=\hat{\sigma}$ e o único ENEP é $(0.5,\hat{\sigma})$.

Consideremos uma economia com $0.25<\hat{\sigma}<0.5$. Agora, estamos atentando para $\hat{\sigma}\in[0.25,0.5]$, o que significa que $\hat{\sigma}^2\in[0.0625,0.25]$. Analisaremos, portanto, os equilíbrios para três subintervalos de diferenciais de preços, a saber: $0<\Delta p<\hat{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}^2<\Delta p<0.25$ e $0.25<\Delta p<\hat{\sigma}$.

Quando os preços são tais que $0<\Delta p<\hat{\sigma}^2$, o vendedor sempre escolhe o investimento zero. Logo, o único ENEP é $(0,0)$. Sendo os diferenciais de preços pertencentes ao intervalo $\hat{\sigma}^2<\Delta p<0.25$, as funções de melhor resposta são apresentadas abaixo:

$$\sigma^*(\beta)=\begin{cases}0, \beta\in\left[0,\hat{\sigma}^2\right) \\ \hat{\sigma}, \beta\in\left[\hat{\sigma}^2,\infty\right)\end{cases} \text{ e } \beta^*(\sigma)=\begin{cases}0, \sigma\in\left[0,\hat{\sigma}-0.25\right) \\ 0.5, \sigma\in\left[\hat{\sigma}-0.25,\hat{\sigma}\right]\end{cases}.$$

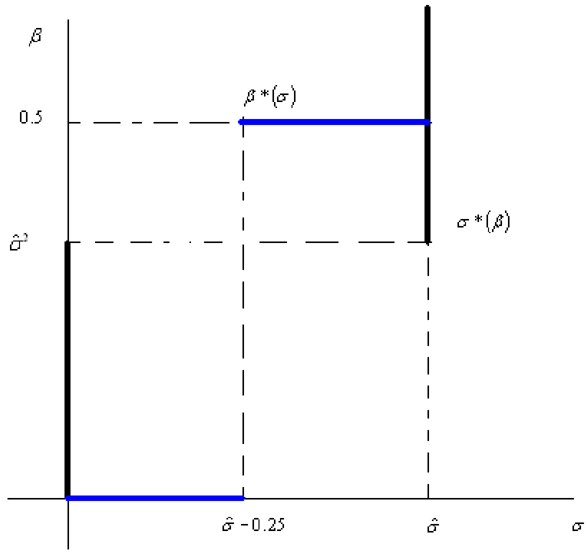

Ilustração 1: Múltiplos equilíbrios

De acordo com a ilustração acima, temos dois equilíbrios em estratégias puras. Por um argumento de superioridade de Pareto, considerarei como equilíbrio, nesse caso, os investimentos socialmente desejáveis.

Quando os preços são tais que $0.25<\Delta p<\hat{\sigma}$, o comprador sempre escolhe o investimento zero. Dessa forma, o vendedor escolhe $\sigma^*(0)=0$ e o único ENEP é $(0{,}0)$.

<u>3º Caso:</u> $\Delta p>\hat{\sigma}$

Como antes, para o comprador o contrato é lucrativo se o investimento for $\beta\in\left[\beta_{TH},\infty\right)$ e dá prejuízo caso $\beta\in\left[0,\beta_{TH}\right)$. Por outro lado, como os preços fazem com que $\sigma_{TH}<0$, $\forall\sigma\in\left[0,\hat{\sigma}\right]$ o contrato sempre será lucrativo para o vendedor. Tem-se que $\sigma>\sigma_{TH}, \forall\sigma\in\left[0,\hat{\sigma}\right]$ e, portanto, $\hat{\sigma}-\sigma<\Delta p=\beta_{TH}$, $\forall\sigma\in\left[0,\hat{\sigma}\right]$.

Problema do comprador:

Dado $\sigma \in [0, \hat{\sigma}]$, como $\sigma_{TH} < 0$, escrevemos que:

$$\hat{\sigma} - \sigma < \Delta p = \beta_{TH} .$$

Quando $\beta \in [0, \hat{\sigma} - \sigma)$, não haverá troca e o preço será p_0. Caso $\beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \beta_{TH})$, então a troca será realizada ao preço renegociado $p_0 + \beta$. Por fim, para $\beta \in [\beta_{TH}, \infty)$, o a troca ocorrerá ao preço p_1. Temos, portanto:

$$U_B(\beta, \sigma) = \begin{cases} -p_0 - \beta^2, \beta \in [0, \beta_{TH}) \\ -p_1 + \beta - \beta^2, \beta \in [\beta_{TH}, \infty) \end{cases} .$$

Agora estamos interessados em determinar qual β maximiza $U_B(\beta, \sigma)$. A função descrita para $\beta \in [\beta_{TH}, \infty)$ é uma parábola que já pode ou não ter atingido seu máximo. Os candidatos a máximo podem ser descritos como:

$$\beta^* \in [0, \beta_{TH}) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\beta_{TH}, \infty) \Rightarrow \beta^* = \max\{\beta_{TH}, 0.5\}.$$

Pela construção desse terceiro caso, temos que $\Delta p > \hat{\sigma} \in [0, 0.5]$. Assim sendo:

$$\max\{\beta_{TH}, 0.5\} = \begin{cases} 0.5, \hat{\sigma} < \beta_{TH} < 0.5 \\ \beta_{TH}, \beta_{TH} > 0.5 \end{cases} .$$

Para $\Delta p > 0.5$, sabemos que $U_B(0, \sigma) - U_B(\beta_{TH}, \sigma) = \beta_{TH}^2 > 0$.

Façamos agora $\hat{\sigma} < \Delta p < 0.5$, de modo que $U_B(0, \sigma) - U_B(0.5, \sigma) = \Delta p - 0.25$. Quando $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$, então automaticamente temos que $\Delta p > 0.25$ e $U_B(0, \sigma) > U_B(0.5, \sigma)$. Quando $0 < \hat{\sigma} < 0.25$, para $\hat{\sigma} < \Delta p < 0.25$, o vendedor escolhe $\beta^* = 0.5$, assim como para $0.25 < \Delta p < 0.5$, o investimento escolhido será $\beta^* = 0$.

Em suma: Dado $0 < \hat{\sigma} < 0.25$, para os intervalos $\hat{\sigma} < \Delta p < 0.25$ e $0.25 < \Delta p$, as funções de melhor resposta do comprador são, respectivamente, $\beta^*(\sigma) = 0.5$ e $\beta^*(\sigma) = 0$. Dado $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$, então $\beta^*(\sigma) = 0$ para $\hat{\sigma} < \Delta p$.

Problema do vendedor:

Dado que o comprador escolheu $\beta \in [0, \beta_{TH})$, sabemos que

$$\beta < \Delta p \Leftrightarrow \hat{\sigma} - \beta > \hat{\sigma} - \Delta p = \sigma_{TH} .$$

Aqui devemos tomar algumas precauções para não sermos displicentes nos cálculos. Quando $\hat{\sigma} < \Delta p$, é verdade que

$$[0, \beta_{TH}) \equiv [0, \hat{\sigma}) \cup [\hat{\sigma}, \beta_{TH}).$$

Se o vendedor imagina que aos preços $\hat{\sigma} < \Delta p$ o comprador investirá $\beta \in [\hat{\sigma}, \beta_{TH})$, ele concluirá que $\sigma > \hat{\sigma} - \beta$. Isso quer dizer que a troca será realizada ao preço renegociado $p_0 + \beta$. A utilidade do vendedor será dada por

$$U_S(\beta, \sigma) = p_0 + \beta - \hat{\sigma} + \sigma - \sigma^2$$

e o investimento que maximiza essa função é $\sigma^* = \hat{\sigma}$.

Atentemos agora para quando $\beta \in [0, \hat{\sigma})$. Continua sendo verdade que $\hat{\sigma} - \beta > \sigma_{TH}$. Quando $\sigma \in [0, \hat{\sigma} - \beta)$, não haverá troca e o preço vigente será p_0. Consideremos agora que $\sigma \in [\hat{\sigma} - \beta, \hat{\sigma}]$. Nesse caso a troca será realizada ao preço renegociado $p_0 + \beta$. A função utilidade do vendedor, portanto, é escrita como

$$U_S(\beta, \sigma) = \begin{cases} p_0 - \sigma^2, \sigma \in [0, \hat{\sigma} - \beta) \\ p_0 + \beta - \hat{\sigma} + \sigma - \sigma^2, \sigma \in [\hat{\sigma} - \beta, \hat{\sigma}] \end{cases}.$$

Agora estamos interessados em determinar qual σ maximiza $U_S(\beta,\sigma)$. A função descrita para $\sigma \in [\hat{\sigma}-\beta,\hat{\sigma}]$ é uma parábola que já pode ou não ter atingido seu máximo, dependendo do valor de $\max\{\hat{\sigma}-\beta,0.5\}$. Como $\beta > 0$ e $0 < \hat{\sigma} < 0.5$, é lógico que $\max\{\hat{\sigma}-\beta,0.5\} = 0.5$. Novamente não podemos esquecer que $\hat{\sigma} \in [0,0.5]$. Os candidatos a máximo podem ser descritos como:

$$\sigma^* \in [0,\hat{\sigma}-\beta) \Rightarrow \sigma^* = 0;$$
$$\sigma^* \in [\hat{\sigma}-\beta,\hat{\sigma}] \Rightarrow \sigma^* = \hat{\sigma}.$$

Temos que $U_S(\beta,0) - U_S(\beta,0.5) = \hat{\sigma}^2 - \beta$. Assim sendo, se $0 < \beta < \hat{\sigma}^2$, então $\sigma^* = 0$. Por outro lado, se $\hat{\sigma}^2 < \beta < \hat{\sigma}$, então $\sigma^* = \hat{\sigma}$. Sobre essa função de melhor resposta "parcial", escrevemos:

$$\sigma^*(\beta) = \begin{cases} 0, \beta \in [0,\hat{\sigma}^2) \\ \hat{\sigma}, \beta \in [\hat{\sigma}^2,\beta_{TH}) \end{cases}.$$

Dado que o comprador escolheu $\beta \in [\beta_{TH},\infty)$, sabemos que

$$\beta \geq \Delta p \Leftrightarrow \hat{\sigma}-\beta \leq \hat{\sigma}-\Delta p = \sigma_{TH}.$$

Como $\sigma_{TH} < 0$, é verdade que $\hat{\sigma}-\beta < 0$. Assim sendo, mantêm-se o contrato original e o bem será transacionado ao preço p_1. A utilidade do vendedor será dada por

$$U_S(\beta,\sigma) = p_1 - \hat{\sigma} + \sigma - \sigma^2$$

e o investimento que maximiza essa função é $\sigma^* = \hat{\sigma}$. Nesse caso, fica claro que a função de melhor resposta do vendedor, quando $\hat{\sigma} < \Delta p$, será dada por:

$$\sigma^*(\beta) = \begin{cases} 0, \beta \in [0,\hat{\sigma}^2) \\ \hat{\sigma}, \beta \in [\hat{\sigma}^2,\infty) \end{cases}.$$

Equilíbrio de Nash:

Para $\Delta p > 0.5$, o comprador sempre escolhe o investimento nulo. Sabendo disso, o vendedor escolhe $\sigma^*(0) = 0$. Assim sendo, para esse intervalo de diferenciais de preços, o único ENEP é $(0,0)$.

Consideremos $0.25 < \hat{\sigma} < 0.5$. Já vimos que o comprador, para $\hat{\sigma} < \Delta p < 0.5$, escolhe $\beta^*(\sigma) = 0$. Assim sendo, o vendedor escolhe $\sigma^*(0) = 0$, de modo que o resultado de subinvestimento é o único ENEP.

Agora vamos observar os resultados para $0 < \hat{\sigma} < 0.25$. Para preços tais que $0.25 < \Delta p < 0.5$, o comprador sempre escolhe o investimento zero, e a melhor resposta do vendedor também é subinvestir. Novamente, o ENEP é $(0,0)$. Por fim, para preços tais que $\hat{\sigma} < \Delta p < 0.25$, as funções de reação dos agentes são

$$\beta^*(\sigma) = 0.5 \quad \text{e} \quad \sigma^*(\beta) = \begin{cases} 0, \beta \in \left[0, \hat{\sigma}^2\right) \\ \hat{\sigma}, \beta \in \left[\hat{\sigma}^2, \infty\right) \end{cases}.$$

Como $0.5 \in \left[\hat{\sigma}^2, \infty\right)$, então $(0.5, \hat{\sigma})$ é o único ENEP.

■

Demonstração da Proposição 4:

Essa demonstração, em grande medida, será semelhante à demonstração da Proposição 3. As principais diferenças estarão quando determinarmos os investimentos que maximizarão as utilidades das partes.

<u>1º Caso:</u> $\Delta p < 0$

Problema do comprador:

Nesse primeiro caso o comprador buscará maximizar a seguinte função:

$$U_B(\beta,\sigma) = \begin{cases} -p_0 - \beta^2, \beta \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \\ -p_0 - \hat{\sigma} + \sigma + \beta - \beta^2, \beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \end{cases}.$$

Embora a função de utilidade do comprador continue igual àquela apresentada no primeiro caso da proposição anterior, agora não sabemos ao certo o valor de $\max\{\hat{\sigma} - \sigma, 0.5\}$. Para $\sigma > \hat{\sigma} - 0.5$ o problema é o mesmo, ou seja:

$$\beta^* \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \Rightarrow \beta^* = 0.5.$$

Comparando os ganhos, temos que $U_B(0,\sigma) - U_B(0.5,\sigma) = (\hat{\sigma} - 0.25) - \sigma$. Logo:

$$\beta^*(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma \in [\hat{\sigma} - 0.5, \hat{\sigma} - 0.25) \\ 0.5, \sigma \in [\hat{\sigma} - 0.25, \hat{\sigma}] \end{cases}.$$

Por outro lado, se $\sigma < \hat{\sigma} - 0.5$, como $\max\{\hat{\sigma} - \sigma, 0.5\} = \hat{\sigma} - \sigma$, os possíveis maximizadores são:

$$\beta^* \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \Rightarrow \beta^* = \hat{\sigma} - \sigma.$$

Sabendo que $U_B(0,\sigma) - U_B(\hat{\sigma} - \sigma, \sigma) = (\hat{\sigma} - \sigma)^2 > 0$, podemos concluir que $\beta^*(\sigma) = 0$. Assim sendo, a função de melhor resposta do comprador é escrita como:

$$\beta^*(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma \in [0, \hat{\sigma} - 0.25) \\ 0.5, \sigma \in [\hat{\sigma} - 0.25, \hat{\sigma}] \end{cases}.$$

Problema do vendedor:

Nada muda no problema do vendedor em relação ao primeiro caso da Proposição 3, de modo que sua função de melhor resposta continua a ser representada por

$$\sigma^*(\beta) = 0, \forall \beta \in [0, \infty).$$

Equilíbrio de Nash:

Nesse primeiro caso o único ENEP é $(0,0)$.

<u>2º Caso:</u> $0 < \Delta p < \hat{\sigma}$

Problema do comprador:

Dado que o vendedor escolheu $\sigma \in [0, \sigma_{TH})$, a utilidade do comprador é

$$U_B(\beta, \sigma) = \begin{cases} -p_0 - \beta^2, \beta \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \\ -p_0 - \hat{\sigma} + \sigma + \beta - \beta^2, \beta \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \end{cases}.$$

Quando $0.5 < \Delta p < \hat{\sigma}$, naturalmente teremos $\sigma < \hat{\sigma} - 0.5$. Logo:

$$\beta^* \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \Rightarrow \beta^* = \hat{\sigma} - \sigma.$$

De modo que $U_B(0, \sigma) > U_B(\hat{\sigma} - \sigma, \sigma)$.

Se $0.25 < \Delta p < 0.5$, então $\hat{\sigma} - 0.5 < \sigma_{TH} < \hat{\sigma} - 0.25$. Logo:

$$\beta^* \in [0, \hat{\sigma} - \sigma) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\hat{\sigma} - \sigma, \infty) \Rightarrow \beta^* = \max\{0.5, \hat{\sigma} - \sigma\}.$$

Para $0 < \sigma < \hat{\sigma} - 0.5$ e $\hat{\sigma} - 0.5 < \sigma < \sigma_{TH}$, concluímos que, respectivamente,

$$U_B(0,\sigma) > U_B(\hat{\sigma}-\sigma,\sigma) \text{ e } U_B(0,\sigma) > U_B(0.5,\sigma).$$

Por fim, se $0 < \Delta p < 0.25$, então $\hat{\sigma} - 0.5 < \hat{\sigma} - 0.25 < \sigma_{TH}$. Teremos, portanto:

$$\beta^* \in [0, \hat{\sigma}-\sigma) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\hat{\sigma}-\sigma, \infty) \Rightarrow \beta^* = \max\{0.5, \hat{\sigma}-\sigma\}.$$

Para os intervalos $0 < \sigma < \hat{\sigma} - 0.5$, $\hat{\sigma} - 0.5 < \sigma < \hat{\sigma} - 0.25$ e $\hat{\sigma} - 0.25 < \sigma < \sigma_{TH}$ temos, respectivamente, que

$$U_B(0,\sigma) > U_B(\hat{\sigma}-\sigma,\sigma),\ U_B(0,\sigma) > U_B(0.5,\sigma) \text{ e } U_B(0,\sigma) < U_B(0.5,\sigma).$$

Agora, dado que $\sigma \in [\sigma_{TH}, \hat{\sigma}]$, a utilidade do comprador é

$$U_B(\beta,\sigma) = \begin{cases} -p_0 - \beta^2, \beta \in [0, \beta_{TH}) \\ -p_1 + \beta - \beta^2, \beta \in [\beta_{TH}, \infty) \end{cases}.$$

Para $0.5 < \Delta p < \hat{\sigma}$, temos que:

$$\beta^* \in [0, \beta_{TH}) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\beta_{TH}, \infty) \Rightarrow \beta^* = \beta_{TH}.$$

De modo que $U_B(0,\sigma) > U_B(\beta_{TH},\sigma)$.

Consideremos agora que $0.25 < \Delta p < 0.5$. Continua verdade que

$$\beta^* \in [0, \beta_{TH}) \Rightarrow \beta^* = 0;$$
$$\beta^* \in [\beta_{TH}, \infty) \Rightarrow \beta^* = 0.5.$$

De modo que $U_B(0,\sigma) > U_B(0.5,\sigma)$.

Resta, portanto, analisarmos $0 < \Delta p < 0.25$. Temos, portanto

$$\begin{aligned}\beta^* &\in [0, \beta_{TH}) \Rightarrow \beta^* = 0;\\ \beta^* &\in [\beta_{TH}, \infty) \Rightarrow \beta^* = 0.5.\end{aligned}$$

De modo que $U_B(0,\sigma) < U_B(0.5,\sigma)$.

Sumarizando:

$$0 < \Delta p < 0.25 \Rightarrow \beta^*(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma \in [0, \hat{\sigma} - 0.25) \\ 0.5, \sigma \in [\hat{\sigma} - 0.25, \hat{\sigma}] \end{cases};$$
$$0.25 < \Delta p < \hat{\sigma} \Rightarrow \beta^*(\sigma) = 0, [0, \hat{\sigma}].$$

Problema do vendedor:

Dado que $\beta \in [0, \beta_{TH})$, a utilidade do vendedor é:

$$U_S(\beta,\sigma) = \begin{cases} p_0 - \sigma^2, \sigma \in [0, \hat{\sigma} - \beta) \\ p_0 + \beta - \hat{\sigma} + \sigma - \sigma^2, \sigma \in [\hat{\sigma} - \beta, \hat{\sigma}] \end{cases}.$$

O vendedor escolherá $\sigma^* = 0$ ou $\sigma^* = \max\{\hat{\sigma} - \beta, 0.5\}$. Sendo $0 < \Delta p < \hat{\sigma} - 0.5$, a decisão será entre $\sigma^* = 0$ e $\sigma^* = 0.5$. Comparando seus ganhos em cada caso, determinamos que $U_S(\beta,0) > U_S(\beta, \hat{\sigma} - \beta)$.

Seja $\hat{\sigma} - 0.5 < \Delta p < \hat{\sigma} - 0.25$. Quando $0 < \beta < \hat{\sigma} - 0.5$, o vendedor investirá $\sigma^* = 0$ ou $\sigma^* = \hat{\sigma} - \beta$. Obtemos que $U_S(\beta,0) > U_S(\beta, \hat{\sigma} - \beta)$. Quando $\hat{\sigma} - 0.5 < \beta < \beta_{TH}$, o investidor escolherá entre $\sigma^* = 0$ e $\sigma^* = 0.5$, concluindo que $U_S(\beta,0) > U_S(\beta,0.5)$.

Seja $\hat{\sigma} - 0.25 < \Delta p < \hat{\sigma}$. Para $0 < \beta < \hat{\sigma} - 0.5$, diremos que o vendedor escolherá entre $\sigma^* = 0$ e $\sigma^* = \hat{\sigma} - \beta$, concluindo que Assim, obtemos a seguinte

expressão $U_S(\beta,0) > U_S(\beta,\hat{\sigma}-\beta)$. Para $\hat{\sigma}-0.5 < \beta < \hat{\sigma}-0.25$, diremos que o vendedor escolherá entre $\sigma^* = 0$ e $\sigma^* = 0.5$, concluindo que Agora temos que $U_S(\beta,0) > U_S(\beta,0.5)$. Para $\hat{\sigma}-0.25 < \beta < \beta_{TH}$, diremos que o vendedor escolherá entre $\sigma^* = 0$ e $\sigma^* = 0.5$, concluindo que $U_S(\beta,0) < U_S\beta,(0.5)$.

Dado que o comprador escolheu $\beta \in [\beta_{TH}, \infty)$, a função utilidade do vendedor é escrita como:

$$U_S(\beta,\sigma) = \begin{cases} p_0 - \sigma^2, \sigma \in [0, \sigma_{TH}) \\ p_1 - \hat{\sigma} + \sigma - \sigma^2, \sigma \in [\sigma_{TH}, \hat{\sigma}] \end{cases}.$$

Como $0 < \Delta p < \hat{\sigma} - 0.5$, temos que $\sigma^* = 0$ ou então $\sigma^* = \sigma_{TH}$. Segue que $U_S(\beta,0) > U_S(\beta,\sigma_{TH})$.

Para $\hat{\sigma} - 0.5 < \Delta p < \hat{\sigma} - 0.25$, então $\sigma^* = 0$ ou $\sigma^* = 0.5$. Concluímos que $U_S(\beta,0) > U_S(\beta,0.5)$.

Por fim, se $\hat{\sigma} - 0.25 < \Delta p < \hat{\sigma}$, então $U_S(\beta,0) < U_S(\beta,0.5)$.

Sumarizando:

$$\begin{aligned} &0 < \Delta p < \hat{\sigma} - 0.25 \Rightarrow \sigma^*(\beta) = 0, \beta \in [0,\infty); \\ &\hat{\sigma} - 0.25 < \Delta p < \hat{\sigma} \Rightarrow \sigma^*(\beta) = \begin{cases} 0, \beta \in [0, \hat{\sigma} - 0.25) \\ 0.5, \beta \in [\hat{\sigma} - 0.25, \infty) \end{cases}. \end{aligned}$$

Equilíbrio de Nash:

Como estamos trabalhando com $0.5 < \hat{\sigma} < 1$, temos que $0.25 < \hat{\sigma} - 0.25$. Para $0 < \Delta p < 0.25$, o vendedor sempre escolhe o investimento zero e o único ENEP é $(0,0)$. Quando $0.25 < \Delta p < \hat{\sigma} - 0.25$, comprador e vendedor sempre escolhem zero, de modo

que o único ENEP é $(0,0)$. Por fim, quando $\hat{\sigma} - 0.25 < \Delta p < \hat{\sigma}$, o comprador sempre escolhe investimento zero e o único ENEP é $(0,0)$.

Em suma, para $0 < \Delta p < \hat{\sigma}$ o único ENEP é o equilíbrio ineficiente.

3º caso: $\Delta p > \hat{\sigma}$

Problema do comprador:

Dado que o comprador sabe que o vendedor sempre deseja ofertar o bem aos preços originais, escrevemos:

$$U_B(\beta,\sigma) = \begin{cases} -p_0 - \beta^2, \beta \in [0, \beta_{TH}) \\ -p_1 + \beta - \beta^2, \beta \in [\beta_{TH}, \infty) \end{cases}.$$

Agora estamos interessados em determinar qual β maximiza $U_B(\beta,\sigma)$. O comprador escolherá $\beta^* = 0$ ou então $\beta^* = \max\{0.5, \beta_{TH}\}$. Como $\Delta p > \hat{\sigma}$, então $\max\{0.5, \beta_{TH}\} = \beta_{TH}$. Assim sendo, segue que $U_B(0,\sigma) > U_B(\beta_{TH},\sigma)$.

Problema do vendedor:

Dado que o comprador escolheu $\beta \in [\hat{\sigma}, \beta_{TH})$, a utilidade do vendedor é

$$U_S(\beta,\sigma) = p_0 + \beta - \hat{\sigma} + \sigma - \sigma^2, \sigma \in [0, \hat{\sigma}]$$

e $\sigma^* = 0.5$ é o investimento que a maximiza.

Por outro lado, dado que o comprador escolheu que $\beta \in [0, \beta_{TH})$, temos que

$$U_S(\beta,\sigma) = \begin{cases} p_0 - \sigma^2, \sigma \in [0, \hat{\sigma} - \beta) \\ p_0 + \beta - \hat{\sigma} + \sigma - \sigma^2, \sigma \in [\hat{\sigma} - \beta, \hat{\sigma}] \end{cases}.$$

O vendedor escolherá entre $\sigma^* = 0$ e $\sigma^* = \max\{\hat{\sigma} - \beta, 0.5\}$. Se $0 < \beta < \hat{\sigma} - 0.5$, então $U_S(\beta, 0) > U_S(\beta, \hat{\sigma} - \beta)$. Se $\hat{\sigma} - 0.5 < \beta < \hat{\sigma} - 0.25$, então $U_S(\beta, 0) > U_S(\beta, 0.5)$. Por fim, se $\hat{\sigma} - 0.25 < \beta < \beta_{TH}$, então $U_S(\beta, 0) < U_S(\beta, 0.5)$.

Dado que o comprador escolheu $\beta \in [\beta_{TH}, \infty)$, a função utilidade do vendedor é

$$U_S(\beta, \sigma) = p_1 - \hat{\sigma} + \sigma - \sigma^2$$

e o investimento que a maximiza é $\sigma^* = 0.5$.

Em suma:

$$\sigma^*(\beta) = \begin{cases} 0, \beta \in [0, \hat{\sigma} - 0.25) \\ 0.5, \beta \in [\hat{\sigma} - 0.25, \infty) \end{cases}$$

Equilíbrio de Nash:

Como o comprador sempre investe zero, o único ENEP é $(0,0)$.

Apêndice C: Determinação dos Preços

Atentemos agora para o intervalo $\hat{\sigma} < \Delta p < 0.25$. Para $\hat{\sigma}^2 < p_1 < 0.25$, então as utilidades dos agentes sempre serão não negativas. Supondo que os agentes dividem igualmente os ganhos de troca, temos que:

$$-p_1 + 0.25 = \frac{0.25 - \hat{\sigma}^2}{2} = p_1 - \hat{\sigma}^2 \Rightarrow p_1 = \frac{0.25 + \hat{\sigma}^2}{2} > 0.$$

Para esse preço, a condição $\hat{\sigma}^2 < p_1 < 0.25$ é claramente satisfeita. Isso quer dizer dado que os agentes dividem igualmente o excedente do contrato, suas utilidades

serão não-negativas. Assim sendo, o preço p_0 deverá ser obtido pela desigualdade $\hat{\sigma} < \Delta p < 0.25$. Obtemos, portanto:

$$\hat{\sigma} < \frac{0.25+\hat{\sigma}^2}{2} - p_0 < 0.25 \Leftrightarrow \frac{\hat{\sigma}^2 - 0.25}{2} < p_0 < \frac{0.25+\hat{\sigma}^2}{2} - \hat{\sigma}.$$

Caso o intervalo do diferencial de preços seja $\hat{\sigma}^2 < \Delta p < \hat{\sigma}$, a análise será feita de forma semelhante à anterior. Supondo que os agentes dividem igualmente os ganhos de troca, temos que:

$$-p_1 + 0.25 = \frac{0.25-\hat{\sigma}^2}{2} = p_1 - \hat{\sigma}^2 \Rightarrow p_1 = \frac{0.25+\hat{\sigma}^2}{2} > 0.$$

Como no caso anterior, dado que os agentes dividem igualmente o excedente do contrato, o preço de troca é tal que a utilidade dos agentes é não-negativa. Assim sendo, o preço p_0 deverá ser obtido pela desigualdade $\hat{\sigma}^2 < \Delta p < \hat{\sigma}$. Obtemos, portanto:

$$\hat{\sigma}^2 < \frac{0.25+\hat{\sigma}^2}{2} - p_0 < \hat{\sigma} \Leftrightarrow \frac{0.25+\hat{\sigma}^2}{2} - \hat{\sigma} < p_0 < \frac{0.25-\hat{\sigma}^2}{2}.$$

Seja $0 < \Delta p < \hat{\sigma}^2$. Caso $0 < p_0 < 0.25 - \hat{\sigma}$, então as utilidades dos jogadores são não negativas. Admitindo que os agentes dividam igualmente os ganhos de troca, temos que:

$$-p_0 - \hat{\sigma} + 0.25 = \frac{0.25-\hat{\sigma}^2}{2} = p_0 \Rightarrow p_0 = \frac{0.25-\hat{\sigma}^2}{2} > 0.$$

O preço obtido obviamente satisfaz $0 < p_0 < 0.25 - \hat{\sigma}$. Assim sendo, o preço p_1 deverá ser obtido pela desigualdade $\hat{\sigma} < \Delta p < 0.25$. Obtemos, portanto:

$$0 < p_1 - \frac{0.25 - \hat{\sigma}^2}{2} < \hat{\sigma} \Leftrightarrow \frac{0.25 - \hat{\sigma}^2}{2} < p_1 < \hat{\sigma} + \frac{0.25 - \hat{\sigma}^2}{2}.$$

Seja $\Delta p < 0$. Caso $0 < p_0 < 0.25 - \hat{\sigma}$, então as utilidades dos jogadores são não negativas. Admitindo que os agentes dividam igualmente os ganhos de troca, temos que:

$$-p_0 - \hat{\sigma} + 0.25 = \frac{0.25 - \hat{\sigma}}{2} = p_0 \Rightarrow p_0 = \frac{0.25 - \hat{\sigma}}{2} > 0.$$

O preço obtido obviamente satisfaz $0 < p_0 < 0.25 - \hat{\sigma}$. Assim sendo, o preço p_1 deverá ser obtido pela desigualdade $\Delta p < 0$. Obtemos, portanto:

$$p_1 - \frac{0.25 - \hat{\sigma}}{2} < 0 \Leftrightarrow p_1 < \frac{0.25 - \hat{\sigma}}{2}.$$

Resta, portando, o caso em $\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$. Como os agentes dividem igualmente os ganhos de troca, temos que:

$$-p_1 + 0.25 = \frac{0.25 - \hat{\sigma}^2}{2} = p_1 - \hat{\sigma}^2 \Rightarrow p_1 = \frac{0.25 + \hat{\sigma}^2}{2} > 0.$$

Como no caso anterior, dado que os agentes dividem igualmente o excedente do contrato, o preço de troca é tal que a utilidade dos agentes é não-negativa. Assim sendo, o preço p_0 deverá ser obtido pela desigualdade $\hat{\sigma}^2 < \Delta p < 0.25$. Obtemos, portanto:

$$\hat{\sigma}^2 < \frac{0.25 + \hat{\sigma}^2}{2} - p_0 < 0.25 \Leftrightarrow \frac{\hat{\sigma}^2 - 0.25}{2} < p_0 < \frac{0.25 - \hat{\sigma}^2}{2}$$

■

6. Referências Bibliográficas

Aghion, P. (2007): *Contracts in Natural Resources: What does Contract Theory tell us?*, Populism and Natural Resources – An Energy Policy Research Project.

Aghion, P., Dewatripont, M. & Rey, P. (1994): *Renegotiation Design Under Unverifiable Information*, Econometrica, Vol. 62, No 2.

Hart, O. & Grossman, J. (1986): *The Costs and Benefits of Ownership: A Theory of Vertical and Lateral Integration*, Journal of Political Economy, Vol. 94, No 4.

Hart, O. & Moore, J. (1998): *Incomplete Contracts and Renegotiation*, Econometrica, Vol. 56, No 4.

Hogan, W., Sturzenegger, F. & Tai, L.: *Contracts in Natural Resources: A primer*, Populism and Natural Resources – An Energy Policy Research Project.

Hotelling, H.: *The Economics of Exhaustible Resources*, The Journal of Political Economy, Vol. 39, No 2.

Malcomson, M. & Bentley, W. (1993): *Investments, Hold-Up and the Form of Markets Contracts*, The American Economic Review, Vol. 83, No 2.

Nöldeke, G. & Schmidt, K. (1995): *Options Contracts and Renegotiation: A Solution to the Hold-Up Problem*, The Rand Journal of Economics, Vol. 26, No 2, Summer 1995.

Pyndick, R.(1977): *Optimal Exploration and Production of a Nonrenewable Resource*, The Journal of Political Economy, Vol. 86, No 5.

Schmidt, R. (1988): *Hotelling's Rule Repealed? An Examination of Exhaustible Resource Pricing*, Economic Review, Federal Reserve Bank of San Francisco, Fall 1988, No 4.

Sollow, R. & Wan, F. (1976): *Extraction costs in the Theory of Exhaustible Resources*, The Bell Journal of Economics, Vol. 7, No 2.