

**FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS  
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO**

**Deborah Zilberman Macret**

**RELAÇÃO ENTRE VOLUME E VOLATILIDADE NO MERCADO ACIONÁRIO  
BRASILEIRO**

**São Paulo  
2018**

**Deborah Zilberman Macret**

**RELAÇÃO ENTRE VOLUME E VOLATILIDADE NO MERCADO ACIONÁRIO  
BRASILEIRO**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia.  
Campo de Conhecimento: Finanças Quantitativas

Orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Ruilova Teran

**São Paulo  
2018**

Macret, Deborah Zilberman.

Relação entre volume e volatilidade no mercado acionário brasileiro /  
Deborah Zilberman Macret. - 2018.  
56 f.

Orientador: Juan Carlos Ruilova Téran.

Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Mercado de opções. 2. Volatilidade (Finanças). 3. Investimentos -  
Análise. 4. Ações (Finanças) - Previsão. I. Téran, Juan Carlos Ruilova. II.  
Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo. III. Título.

CDU 336.764.2

DEBORAH ZILBERMAN MACRET

**RELAÇÃO ENTRE VOLUME E VOLATILIDADE NO MERCADO ACIONÁRIO  
BRASILEIRO**

Dissertação apresentada à Escola de  
Economia de São Paulo da Fundação  
Getulio Vargas, como requisito para  
obtenção do título de Mestre Economia.

Campo do Conhecimento:  
Finanças Quantitativas

Data de Aprovação:  
\_\_\_/\_\_\_/\_\_\_.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Juan Carlos Ruilova Teran  
(Orientador)  
FGV - EESP

---

Prof. Dr. Alessandro Marques  
FGV - EESP

---

Prof. Dr. José Euclides de Melo Ferraz

*À minha família.*

## **Agradecimentos**

Ao Prof. Juan pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, irmã e família pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação,  
o meu muito obrigada.

## Resumo

O presente trabalho procura identificar padrões na volatilidade *intraday* no mercado de ações brasileiro e, em seguida, traçar uma estratégia *trading* baseada neles. Em alguns estudos, o comportamento da volatilidade é associado ao comportamento do volume negociado. Este, por sua vez, segue o formato em 'U' durante o dia - maiores negociações nas horas iniciais e finais, sendo relativamente menor no período intermediário. A partir da análise de ações da carteira Ibovespa, concluímos que o mercado brasileiro segue, também, este comportamento. A estratégia escolhida, então, é vender volatilidade no início do dia e comprá-la no período intermediário. Para isso, utilizamos *strangles*.

**Palavras-chave:** Volatilidade, Opções, Estratégias de *Trading*

## **Abstract**

This work seeks to identify patterns in intraday volatility in the Brazilian stock market and then outline a trading strategy based on them. In some studies, the behavior of volatility is associated with the behavior of the volume traded. This, in turn, follows the 'U' format during the day - larger negotiations in the initial and final hours, being relatively smaller in the intervening period. Based on the analysis of shares of the Ibovespa portfolio, we conclude that the Brazilian market also follows this behavior. The strategy chosen, then, is to sell volatility early in the day and buy it in the intervening period. For this, we use strangles.

**Keywords:** Volatility, Options, Trading Strategies



## **Lista de ilustrações**

Figura 1 – Volume e Volatilidade ABEV3 . . . . .	26
Figura 2 – Volume e Volatilidade BBDC4 . . . . .	27
Figura 3 – Volume e Volatilidade ITUB4 . . . . .	27
Figura 4 – Volume e Volatilidade PETR4 . . . . .	27
Figura 5 – Volume e Volatilidade VALE3 . . . . .	28
Figura 6 – Teste de Granger (Horário de Verão) . . . . .	40
Figura 7 – Teste de Granger (Horário de Inverno) . . . . .	41
Figura 8 – Estratégias de Volatilidade . . . . .	42
Figura 9 – Payoffs Estratégias de Volatilidade . . . . .	43
Figura 10 – Teste de Granger - Volatilidade dos Retornos e Volatilidade Implícita	49

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Peso das ações no Índice Ibovespa . . . . .	26
Tabela 2 – Teste ADF para as séries de volume . . . . .	29
Tabela 3 – Teste ADF para as séries de volatilidade . . . . .	29
Tabela 4 – Volume Padronizado ABEV3 . . . . .	30
Tabela 5 – Volume Padronizado BBDC4 . . . . .	30
Tabela 6 – Volume Padronizado ITUB4 . . . . .	31
Tabela 7 – Volume Padronizado PETR4 . . . . .	31
Tabela 8 – Volume Padronizado VALE3 . . . . .	32
Tabela 9 – Participação por Investidor no Segmento Bovespa . . . . .	33
Tabela 10 – Teste ANOVA para a série de volume . . . . .	34
Tabela 11 – Volatilidade dos Retornos ABEV3 . . . . .	35
Tabela 12 – Volatilidade dos Retornos BBDC4 . . . . .	35
Tabela 13 – Volatilidade dos Retornos ITUB4 . . . . .	36
Tabela 14 – Volatilidade dos Retornos PETR4 . . . . .	36
Tabela 15 – Volatilidade dos Retornos VALE3 . . . . .	37
Tabela 16 – Teste ANOVA para a série de volatilidade . . . . .	38
Tabela 17 – Delta e Vega das Estruturas . . . . .	45
Tabela 18 – P&L e Variação Volatilidade Implícita <i>Back Test</i> . . . . .	50
Tabela 19 – Quebra Lucro Estratégia . . . . .	51

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Evidências Empíricas no Mercado Brasileiro . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Dados . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>3.2</b>	<b>Teste de Raízes Unitárias . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>3.3</b>	<b>Volume . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>3.4</b>	<b>Volatilidade . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.5</b>	<b>Relação Volume e Volatilidade . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>4</b>	<b>Estratégia . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>4.1</b>	<b>Estratégias com Volatilidade . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1.1	<i>Payoff</i> e Preço . . . . .	43
4.1.2	Letras Gregas . . . . .	44
4.1.3	Custos de Transação . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Resultados . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>5.1</b>	<b>Estratégia . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>5.2</b>	<b>Volatilidade Realizada e Volatilidade Implícita . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>5.3</b>	<b>Dados . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>5.4</b>	<b>Resultados . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>52</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>53</b>

## 1 Introdução

O interesse em entender a relação entre a volatilidade dos retornos dos ativos e o seu volume negociado foi, decerto, despertado pela quebra do mercado nos EUA em outubro de 1987 – um período em que a volatilidade e o volume negociado atingiram níveis sem precedentes (Gallant et al. 1992 e Foster, et al. 1993). Mas, mesmo antes, pesquisadores já observavam diferenças entre os retornos e volume ao longo das horas do dia (Foster et al. 1993). Entretanto, não há muitos estudos acerca deste tema em países em desenvolvimento, como o Brasil (Da Costa et al. 2015).

No mercado de países desenvolvidos, o comportamento do volume é representado por uma curva em formato de ‘U’ – isto é, a maior concentração de negócios ocorre no começo e no final do pregão sendo, relativamente, menor no período intermediário do dia. A volatilidade dos retornos segue, por sua vez, o mesmo padrão.

A proposta do presente estudo é a de verificar se estes fatos empíricos são confirmados como padrão do mercado brasileiro atualmente. E, a partir daí, levantarmos uma série de questões para análise. Por que os negócios estão concentrados em determinados períodos do dia ? Existe formato em ‘U’ no Brasil de tal forma a se observar uma volatilidade maior em determinados momentos e menor em outros? Existe alguma relação entre preço, volume negociado e volatilidade? Em caso positivo, como podemos usar isso no *trading*?

A seção 2, de Revisão de Bibliográfica, apresenta estudos que explicam os fatos estilizados relacionados com o volume negociado e a volatilidade no mercado financeiro.

Devido às particularidades e à falta de estudos com dados do mercado brasileiro, não se pode assegurar que estes padrões, também, são observados aqui. A seção 3 faz uma ampla análise com dados recentes de volume e volatilidade das maiores ações que compõem o índice Ibovespa, representando o mercado brasileiro de ações. Verificamos se os padrões observados e documentados nos mercados desenvolvidos estão presentes também aqui. Primeiro, fazemos uma análise do volume separadamente. E, em seguida, analisamos a volatilidade<sup>1</sup>. Na sequência, verificamos se estes dois parâmetros têm alguma relação.

Concluimos, no final desta seção, que o volume negociado *intraday*, assim como a volatilidade obedecem ao formato de ‘U’, se levarmos em consideração algumas características do mercado local. A seção 4 está, então, dedicada a desenvolver uma estratégia de *trading* para explorar estes comportamentos. A estratégia consiste em vender a volatilidade quando esta está no seu máximo, isto é, no início do dia e comprar

---

<sup>1</sup> Desvio Padrão

no período intermediário, quando está no seu mínimo. Trata-se de um *day trade*, ou seja, a posição aberta será encerrada no mesmo dia, não havendo o risco do *overnight*. Optamos por um *short strangle*, ou seja, a venda de uma opção de compra e uma opção de venda. A simplicidade da estratégia foi um fator importante na escolha devido às particularidades – a falta de liquidez – do mercado brasileiro.

Antes de desenvolvê-la, é feita uma análise com a volatilidade implícita no preço das opções e a sua relação com a volatilidade das ações. O objetivo é apurar se o formato de 'U' que se verifica nesta última ao longo do dia são refletidos na volatilidade implícita das opções que serão utilizadas para executar a estratégia.

Por fim, na última seção deste trabalho apresenta-se um *back test* para avaliar a eficácia da estratégia. Esta foi testada com as opções de compra e venda da Petrobrás (PETR4) por ser uma das que apresentam maior liquidez neste mercado. A estratégia avaliada como um todo gerou lucro para a carteira no período analisado.

A motivação para este trabalho decorre da falta de informações para o mercado brasileiro. Nossa proposta consiste em dar uma contribuição para a literatura existente através da análise empírica dos dados de *high frequency* do mercado acionário brasileiro preenchendo, desta forma, uma lacuna.

## 2 Revisão Bibliográfica

Pesquisas acerca dos padrões temporais da volatilidade e do volume no mercado de ações dividem-se em dois grupos – estudos que documentam os parâmetros observados e estudos que desenvolvem modelos para prever o comportamento destes parâmetros. Dentro do primeiro grupo podemos considerar os trabalhos pioneiros de Ying (1966), Crouch (1970), Jain et al (1988), Gallant et al (1992) e Foster et al (1993), nos quais documentam o mercado americano. E estudos mais recentes, que analisam outros mercados, como Andersen et al (1998), Eaves et al (2010), Lu et al (2010), Nishimura et al (2012), Tilak et al (2013) e Da Costa et al (2015). Já, no segundo conjunto, podemos incluir o trabalho de Clark (1973), Epps et al (1976), Copeland (1973), Tauchen et al (1983) e Pfleiderer et al (1988).

Estudos da década de 60 estavam voltados, principalmente, para a análise da série de preços isolados como algo gerado seja por um passeio aleatório puro ou um processo estocástico mais sistemático. No último artigo de Osborne (1959), os dados de volume foram analisados, porém, apenas como uma série isolada da série de preços.

A primeira tentativa de relacionar preço e volume no mercado de ações foi feita por Granger et al (1963). Após aplicarem uma análise espectral nos dados de preço e volume da *New York Stock Exchange (NYSE)*, não conseguiram encontrar uma conexão entre a série de preços com a série de volumes correspondentes. Os autores confirmaram, assim, que as duas séries seguem um passeio aleatório independente.

No artigo de Godfrey et al (1964), foi estendida a investigação anterior. Apesar de serem encontradas evidências de que a série de volumes tem correlação positiva com a diferença entre os preços máximo e mínimo, a coerência deste resultado era muito baixa para atribuir qualquer significância. Novamente, demonstram que os retornos dos ativos não estão correlacionados com o volume das negociações dos mesmos.

Considerando os resultados anteriores, surge uma pergunta ‘*O que determina o preço e o que determina o volume?*’. Em seu artigo, Ying (1966) deu o primeiro passo para responder a esta questão. Neste, é examinada a relação entre preço e volume negociado de ações, com a visão de que ambos são um produto conjunto de um mecanismo único de mercado. As informações escolhidas para a análise dos preços consistiam nos dados de fechamento do índice *Standard and Poor's 500* e, para o volume, os volumes diários dos negócios realizados na *New York Stock Exchange (NYSE)*, ambos de janeiro de 1957 até dezembro de 1962. Duas distribuições conjuntas foram analisadas: a primeira, a variação dos preços e o volume e, a segunda, a variação dos preços e a variação do volume. Em seguida, realizou-se um teste qui-quadrado para avaliar a independência. Em ambos os casos foi rejeitada.

A partir daí, com a análise das distribuições, Ying obteve três conclusões: 1) um volume pequeno é, usualmente, acompanhado por uma queda nos preços, 2) um volume grande é, geralmente, acompanhado por um aumento nos preços e 3) um grande aumento no volume é, usualmente, acompanhado ou por um grande aumento nos preços ou por uma grande queda nos preços.

Além do trabalho Ying (1966), Crouch (1970) também foi motivado pelas conclusões obtidas por Godfrey et al (1964). A partir de seus resultados, estes autores inferiram que é questionável quando '*a aplicação da teoria de oferta e demanda seria útil no estudo do comportamento do mercado de ações*'. O objetivo de Crouch é mostrar que tal inferência não está correta.

O autor desenvolve a hipótese de que a variação absoluta do preço está correlacionada com o volume e o coeficiente é menor que uma unidade. Partindo de um mercado em equilíbrio, se há um aumento líquido na demanda, o mercado só voltará ao equilíbrio em um preço acima do anterior (no caso de aumento da oferta, o equilíbrio se dará com um preço abaixo). Portanto, pode-se concluir que o volume das transações e a diferença entre os preços de equilíbrio serão função do aumento da demanda ou da oferta.

Para analisar a sua teoria, Crouch realiza cinco regressões, onde a variável dependente é a variação absoluta do preço e a variável independente, o volume. Na primeira delas, usou a variação do preço de fechamento contra fechamento do índice de *Dow Jones* e o volume diário de ações negociadas. Neste caso, nenhuma correlação foi encontrada. O autor explica que isto se deve ao fato da 'precificação antecipatória', ou seja, ao ajuste dos preços que os agentes realizam devido às novas informações recebidas quando o mercado está fechado. Isto faz com que o preço de fechamento do dia anterior seja, significativamente, diferente do preço da abertura do dia seguinte, sem afetar o volume negociado. Para controlar este erro, na segunda regressão, é utilizada a variação de preço no *intraday*, isto é, abertura contra fechamento. Neste caso, a relação entre as variáveis é significativa.

A terceira regressão considerada utiliza dados de hora em hora, ainda se valendo do índice *Dow Jones*. Este modelo representa uma melhora em relação ao anterior, na medida em que pode haver grandes movimentos no preço em resposta ao grande volume em determinado momento do dia; no entanto, ao avaliar o preço de abertura contra o de fechamento, a variação não é tão grande. Por fim, nas duas últimas regressões, o autor utiliza, para a variação dos preços, primeiramente, o índice *Standard & Poor's 500* e, em seguida, o *New York Stock Exchange (NYSE)*. Estes dois, por serem mais abrangentes que o índice *Dow Jones*, têm uma correlação maior com o volume negociado.

Clark (1973), no seu artigo, também acredita que o volume das transações é

positivamente correlacionado com a volatilidade dos preços. O autor propõe um modelo de Mistura de Distribuições (MDH) para explicar essa relação. Essa hipótese assume que os retornos são gerados por uma mistura de distribuições na qual o número de informações que chegam ao mercado representa a variável de mistura estocástica. Os dados do retorno podem ser vistos como um processo estocástico, condicional ao fluxo de informações, com um momento de segunda ordem refletindo a intensidade das informações recebidas. O volume, neste modelo, é usado como *proxy* das informações que são disponibilizadas ao mercado em determinado momento.

Considerando  $X(t)$  como o preço no momento  $t$  e  $T(t)$  um processo estocástico positivo, um novo processo  $X(T(t))$  pode ser formado. Este processo é dito subordinado a  $X(t)$ ;  $T(t)$  é chamado de *directing process*. A distribuição de  $\Delta X(T(t))$  é, por sua vez, subordinada a distribuição de  $\Delta X(t)$ .

No modelo proposto,  $\Delta X(t)$  corresponde aos efeitos individuais de cada instante na evolução da série de preços, enquanto,  $T(t)$  mede a velocidade desta evolução, representado, no modelo, pelo volume.  $\Delta X(T(t))$  é, portanto, a própria série de preço.

Para testar a hipótese de que  $T(t)$ , o volume negociado, pode representar a velocidade da evolução dos preços, a relação entre ele e a variância dos preços é examinada. Se, de fato, o volume pode simular o *directing process*, a relação deve ser linear. Para sua investigação, Clark realiza três regressões. Os resultados mostram que duas delas, tanto a relação  $\sigma^2 = Ae^{av}$ , quanto  $\sigma^2 = Bv^\beta$ , onde  $v$  representa o volume, são satisfatórias para explicar o movimento da variância do preço,  $\sigma^2$ .

Para ilustrar, o autor utiliza dados de contratos futuros de algodão e considera o funcionamento deste mercado. Em qualquer instante, há um número de *traders* no mercado que têm expectativas sobre o preço de um dado contrato de algodão. Alguns terão posições compradas, alguns terão posições vendidas e outros podem estar sem posição alguma, se estiverem esperando por condições mais favoráveis (volume escondido). Quando há um fluxo de novas informações relevantes, tanto o preço quanto as expectativas dos participantes deste mercado irão se alterar. Se a informação é incerta, isto é, alguns *traders* aumentam sua expectativa, enquanto outros diminuem, ou apenas alguns a recebem, então grandes volumes serão coincidentes com grandes variações no preço.

No artigo de Epps et al (1976), é fornecido suporte teórico e evidências empíricas adicionais para sustentar a tese de Clark de que a variância dos retornos é função do volume transacionado. Na parte teórica, os autores propõem um modelo de formação de preço que implica uma dependência estocástica entre o volume e a variação nos preços de um negócio para o outro. Em seguida, realizam testes com 20 ações para obterem o resultado empírico de sua hipótese.



Em seu modelo, os autores supõem que cada agente do mercado escolhe seu portfólio, sujeito a sua restrição orçamentária, de modo a maximizar uma função de utilidade. Esta depende da expectativa do valor final dos ativos que compõem o portfólio e da sua variância,  $u = u(qx, q'sq)$ , onde  $q$  representa o vetor de quantidades,  $x$ , o valor final esperado e  $s$  equivale a matriz de covariância dos valores finais esperados. Através da maximização desta função, conseguem determinar a regra para a formação dos preços de cada ativo,  $p_{i-1} = \mu_{i-1,j} - \lambda q_{i-1,j}$ . Dada a sua expectativa para o preço final de determinado ativo e sua aversão a risco,  $\lambda$ , cada agente atribui um 'preço nulo' a ele - isto é, não há excesso de demanda. Caso uma nova informação chegue ao mercado, alterará o valor final atribuído a cada ativo, gerando um excesso de oferta ou demanda,  $v_{i-1,j}$ , obtendo  $p_{i-1} = \mu_{i-1,j} - \lambda(q_{i-1,j} + v_{i-1,j})$ .

Em seguida, os autores dividem os agentes em dois grupos, compradores e vendedores. Deste modo, a cada transação que se segue após a divulgação de uma nova informação, cada participante do mercado pode ser designado a um deles. A quantidade transacionada no momento seguinte à divulgação deve ser igual entre os dois grupos para se atingir novamente o equilíbrio. A quantidade de ações negociadas é, portanto,  $v_i = q_{i,I} - q_{i-1,I} = q_{i,II} - q_{i-1,II}$ .

A partir deste ponto, os autores conseguem desenvolver um modelo para a variação dos preços em função do volume negociado. Eles assumem que há uma relação positiva entre a discordância dos *traders*, quando revisam seu 'preço nulo', e o valor absoluto da variação do preço do mercado. Isto é, quanto maior a discordância entre os agentes, maior a variação no preço. A relação entre preço e volume, então, surge uma vez que o volume está positivamente relacionado com esse desacordo em relação aos novos preços. E, neste modelo, a variância dos preços é dada por  $\sigma^2 = b^2 v_k^{2\gamma}$ . Para testá-lo, 20 ações retiradas da *New York Stock Exchange (NYSE)* são utilizadas. O resultado de 16 destas se comportou conforme o esperado.

Os artigos de Clark (1973) e Epps et al (1976) são complementares e dão uma visão considerável sobre os mercados especulativos. No entanto, Tauchen et al (1983), afirmam que ambos os modelos estão incompletos e podem ser desenvolvidos em duas frentes. Primeiro, eles eliminam necessidade de se achar uma fórmula específica para a variância nos preços, uma vez que a teoria desenvolvida fornece uma expressão explícita para a distribuição conjunta de probabilidade da variação dos preços e do volume. Segundo, em nenhum dos modelos anteriores é considerado o crescimento do tamanho do mercado, que pode afetar a variância nos preços. Eles consideram como a distribuição conjunta se modifica com a entrada de novos *traders*.

Do mesmo modo que Epps et al (1976), o modelo deste artigo começa com uma teoria de equilíbrio para determinar o preço. O mercado consiste em  $J$  *traders* ativos que tomam posições compradas ou vendidas em contratos futuros. A mudança de um

estado para o outro é iniciado com a chegada de uma nova informação. A posição desejada de determinado agente, no momento  $i$ , é dada por  $Q_{ij} = \alpha[P_{ij}^* - P_i]$ , onde  $\alpha > 0$  é constante e  $P_{ij}^*$  é o preço de reserva de cada agente. As diferenças neste preço surgem das diferentes expectativas em relação ao futuro e de diferentes necessidades de transferência de risco através do mercado.

O equilíbrio de mercado requer que  $\sum_{j=1}^J Q_{ij} = 0$ . Tal fato implica que a média dos preços de reserva,  $P_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J P_{ij}^*$  equilibre o mercado. Considerando a chegada de uma nova informação, há uma alteração nos preços de reserva e a variação no preço de mercado,  $\Delta P_i$ , é a média da variação do preço de reserva de cada *trader*,  $\Delta P_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \Delta P_{ij}^*$ . O volume associado a esta mudança,  $V_i$ , é por definição metade da quantidade absoluta negociada por cada participante,  $V_i \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J |Q_{ij} - Q_{i-1,j}| = \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^J |\Delta P_{ij}^* - \Delta P_i|$ . Desse modo, especificar a distribuição de probabilidade conjunta de  $\Delta P_{ij}^*$  implica especificar, também, a distribuição de probabilidade conjunta da variação dos preços e do volume negociado.

Os autores assumem que o modelo  $\Delta P_{ij}^* = \phi_i + \psi_{ij}$  para a variância, onde  $E[\phi_i] = E[\psi_{ij}] = 0$ ,  $var[\phi_i] \equiv \sigma_\phi^2$  e  $var[\psi_{ij}] \equiv \sigma_\psi^2$ . O componente  $\phi_i$  é comum a todos os *traders*, de forma que, um valor relativo maior representa uma situação em que os participantes reagem de maneira unânime a nova informação. Já o componente  $\psi_{ij}$  é específico, de modo que, um valor maior significa que os agentes reagem de formas distintas.

Para modelar a distribuição conjunta, os autores assumem que tanto  $\Delta P = \sum_{i=1}^I \Delta P_i$ , quanto  $\Delta V = \sum_{i=1}^I \Delta V_i$  seguem distribuições normais  $\Delta P_i \sim N(0, \sigma_1^2)$  e  $\Delta V_i \sim N(\mu, \sigma_2^2)$  e  $I$ , a quantidade de equilíbrios diários, é aleatória, já que o número de novas informações a cada dia varia significativamente. Assim, ambas as distribuições, a variação do preço e do volume, são misturas de normais independentes com a mesma *mixing variable*,  $I$ .

Com dados dos preços das *Treasuries* de 90 dias, do período de janeiro de 1976 até junho de 1979, os autores aplicam o seu modelo. O modelo estimado pode explicar os resultados de estudos anteriores. Se o número de participantes é fixo, hipótese razoável para mercados maduros, o modelo prevê que a distribuição diária dos retornos é leptocúrtica e a sua volatilidade é positivamente relacionada ao volume diário. Se, por outro lado, o número de participantes é crescente, então o modelo prevê que o volume aumenta linearmente com o número de *traders*. Além disso, o modelo também prevê que a volatilidade dos retornos diminui neste caso. A razão para isso é que a variação nos preços é igual à média da variação do preço de reserva dos *traders*. E mais termos na média tendem a eliminar os efeitos das diferenças entre os *traders*.

Por fim, para avaliar o modelo, Tauchen et al contrastam as estatísticas da amos-

tra com aquelas que são previstas pelo modelo. Os números preditos são bastantes consistentes com aqueles calculados pela amostra. Deste modo, demonstram que não há necessidade de numerosas regressões exploratórias para determinar a forma funcional correta entre volume e volatilidade.

Outra teoria para explicar a relação volume e volatilidade é desenvolvida por Copeland (1976), a hipótese da *Sequential Information Arrival* (SIAH), em oposição a teoria da Mistura de Distribuição, inicialmente desenvolvida por Clark (1973). Neste modelo, a informação é disseminada para um *trader* de cada vez e ele implica uma correlação positiva entre  $V$ , o volume e  $|\Delta p|$ , a variação absoluta dos preços.

A chegada da informação faz com que cada agente altere a sua curva de demanda. Os otimistas alterarão por um valor fixo  $\delta$  positivo, enquanto os pessimistas por um valor  $\delta$  negativo. A negociação ocorre depois que cada *trader* recebe a informação, entretanto os *traders* desinformados não inferem o conteúdo desta informação. Além disso, *short sales* são proibidos.

Com  $N$  traders, geralmente haverá  $k$  otimistas,  $r$  pessimistas e  $N - k - r$  investidores desinformados, em qualquer momento, antes que todos os *traders* se tornem informados. Os valores de  $k$  e  $r$  dependem da ordem em que os investidores recebem a informação. Como os *short sales* são proibidos, o volume gerado por um agente pessimista é, geralmente, menor do que aquele gerado por um otimista. Assim, a variação de preço e o volume negociado quando um *trader* se torna informado depende: 1) do último padrão observado e 2) se o próximo *trader* é otimista ou pessimista. Da mesma forma, o volume total depois que a informação foi totalmente disseminada depende do caminho seguido até o equilíbrio. O volume será uma variável aleatória portanto. Testes feitos indicam que  $V$  é maior quando todos os investidores são pessimistas ou otimistas. Além disso, indicam que  $|\Delta p|$  aumenta com  $V$ . Isso sustenta a correlação positiva entre estas duas variáveis.

A proposta do estudo de Jain et al (1988) é analisar o processo de geração conjunto, a cada hora, do volume negociado e do retorno. Os dados de volume são da *New York Stock Exchange (NYSE)*, já o ativo usado é o *Standard & Poor's 500*, ambos do período de 1979 a 1983. Nos resultados obtidos pelos autores, a média do volume negociado e dos retornos apresentam diferenças significativas em todas as horas de negociação durante o dia.

Analisando o volume, os autores concluíram que a média negociada é maior durante a primeira hora do dia. Esta média é pelo menos 50% maior do que a média durante as demais horas. Até a quarta hora, a média do volume decai monotonicamente e aumenta na quinta e sexta hora. Para os retornos, chegaram à conclusão de que, na média, o maior retorno é obtido na primeira e última hora do dia. Já o menor, ocorre na quinta hora.

Ao avaliar os dados em conjunto, encontra-se uma forte relação entre o volume negociado e o retorno absoluto contemporâneos. Este resultado é consistente com a hipótese da Mistura de Distribuições como desenvolvido por Clark (1973). O resultado obtido também indica que esta relação é diferente quando os retornos são positivos e quando são não positivos. Este efeito é consistente com a hipótese desenvolvida por Karpoff (1987).

Analizando os padrões de preços e volume negociado – o formato em ‘U’, evidenciado no trabalho anterior, Pfleiderer et al (1988) procuram responder três questões em seu artigo. Primeiro, por que as negociações estão concentradas em determinados períodos do dia. Em seguida, por que os retornos variam mais em determinados momentos. E, por fim, por que períodos com intensa negociação tendem a ser períodos com maior volatilidade. Para responder a estas perguntas, os autores desenvolvem modelos em que os *traders* determinam quando operar e quando adquirir informações privadas sobre o retorno futuro dos ativos. Os padrões observados podem, então, ser explicados através das decisões destes participantes.

Os autores dividem os participantes do mercado em dois grupos: *informed traders* e *liquidity traders*. Os primeiros realizam suas operações com base nas informações privadas que detêm. Já os *liquidity traders*, executam seus negócios por razões que não estão relacionadas diretamente com o *payoff* futuro do ativo financeiro. Eles têm liberdade de escolher o momento do dia para operar; no equilíbrio, todos os *liquidity traders* optam por operar no mesmo momento. Enquanto essa concentração de negócios atrai os *informed traders*, os autores mostram que essa estratégia reduz os custos de transação dos primeiros. Além disso, mostram também, que para as transações durante o dia, períodos com esta concentração de volume têm preços mais informativos.

Gallant et al (1992) iniciam uma investigação empírica da relação entre o movimento dos preços e do volume negociado. Os autores são motivados pelo objetivo de fornecer um conjunto completo dos fatos estilizados. No artigo, argumentam que os modelos existentes são mais estatísticos do que econômicos, e, tipicamente, como visto nos modelos anteriores, nem o problema de otimização enfrentado pelos agentes, nem a estrutura da chegada de informação são totalmente especificadas.

Valendo-se dos dados diários do índice *Standard & Poor's 500* e do volume total operado na *New York Stock Exchange (NYSE)* de 1928 a 1987, os autores chegam a duas conclusões relevantes. Utilizando uma estimação não paramétrica da distribuição de densidade conjunta da variação dos preços e do volume condicionada a variações e volumes passados, concluem que 1) há uma correlação positiva entre volatilidade e volume na distribuição condicional e não condicional e 2) grandes movimentos são seguidos por grandes volumes.

No trabalho de Foster et al (1993), a parte mais relevante são os testes feitos para determinar as variações no volume negociado e as variações dos preços dos ativos durante o dia. Pfleiderer et al (1988) mostraram que os padrões das negociações surgem dos agrupamentos das operações feitas pelos *discretionary liquidity traders*, porém, não há nenhuma previsão se esta concentração de volume ocorre na abertura, no meio do dia ou no fechamento. Assim, os autores testam se em algum momento do dia há um número maior de ações sendo negociados.

Os testes são realizados utilizando os dados de preço e volume das ações operadas na *New York Stock Exchange* (NYSE). Os autores dividem as empresas em dez decis, sendo o primeiro composto pelas ações menos negociadas e o último, pelas ações mais negociadas. Os resultados são reportados apenas para o primeiro, quinto e último decil.

Os autores encontram forte evidência de que há variação no volume durante o dia. Para as ações com maior liquidez (quinto e décimo decis) o maior volume foi negociado nos primeiros 30 minutos de mercado. No meio do dia, o volume foi menor quando comparado ao início do dia para todos os decis. Tal fato confirma o padrão de negociação observado por Jain et al (1988).

Para a variância, os testes são realizados da mesma forma que foram feitos para o volume. Os autores encontram variações significativas na volatilidade dos retornos ao longo do dia. Além disso, os testes mostram que os primeiros 30 minutos são sempre mais voláteis que os demais períodos do dia para todos os decis.

No artigo de Chan et al (2000), eles alegam que apesar de muitos estudos sobre a relação volume – volatilidade, não se chegou a um consenso sobre o que, de fato, conduz esta relação. Para complementar estes estudos, os autores examinam os papéis da quantidade de ordens, do tamanho de cada ordem e do desequilíbrio entre ordens de compra e venda.

Utilizando dados da *New York Stock Exchange* (NYSE) e do *NASDAQ*, os autores propõem um objetivo duplo para o estudo. Primeiro, eles fornecem uma análise abrangente para o papel do tamanho da ordem (financeiro), ao invés, da quantidade, para explicar a relação volatilidade – volume. Esta análise examina se a volatilidade diária dos preços aumenta mais com o número de operações de determinado tamanho. Em seguida, os autores exploram se os desequilíbrios entre ordens de compra e venda também exercem influência sobre a relação volatilidade – volume.

O resultado da primeira análise mostra que o retorno diário aumenta com o tamanho da ordem apenas quando essa se altera de pequena para média. No entanto, não há aumento ou redução quando esta mudança é de média para grande. Assim, o tamanho representa um papel significativo na relação volatilidade – volume,

porém, esta relação não é monotônica. A segunda análise, por sua vez, mostra que os desequilíbrios entre compra e venda conseguem explicar bem os retornos diários. Os autores concluem, portanto, que a quantidade de ordens, o seu tamanho e o desequilíbrio entre compra e venda exercem papéis na relação volatilidade - volume.

A partir de 1998, a pesquisa acerca dos padrões de volume e volatilidade e as suas interações é estendida para outros mercados além do americano. Buckle et al (1998) investigam o padrão intradiário do volume e da volatilidade no mercado de juros e de ações inglês. O objetivo dos autores é expandir a compreensão destes padrões para o mercado europeu. Eles argumentam que a maior parte dos estudos foi feita com dados do mercado americano, onde o formato de 'U' das duas variáveis é considerado um fato estilizado.

A análise é feita para o mercado de juros, utilizando contratos futuros de *Short Sterling*, e para o mercado acionário, utilizando contratos futuros de *FTSE100*, para o período de um ano, novembro de 1992 a outubro de 1993. A volatilidade é calculada como o desvio padrão dos retornos, a cada 5 minutos, ao longo do dia. Buckle et al encontram o padrão em 'L' para representar a volatilidade intradiária tanto para os juros quanto para a bolsa. O volume dos dois mercados também apresenta este formato, com níveis mais altos na abertura e no fechamento, porém a abertura sendo mais alta que o fechamento. Os autores, então, concluem que este comportamento é consistente com as teorias desenvolvidas por Karpoff (1987) e Pfliderer et al (1988).

Andersen et al (1999) caracterizam a volatilidade no mercado acionário japonês. Eles utilizam uma amostra de quatro anos, de 1994 a 1997, de retornos a cada cinco minutos. Os autores pontuam que um dos motivos para esta investigação é a diferença entre os arranjos institucionais da Bolsa de Valores de Tóquio (TSE) e aqueles da bolsa americana. A TSE abre às 09:00, fecha para almoço, entre às 11:00 até às 12:30, e por fim, o fechamento do dia é às 15:00. Assim, é questionado se o típico formato em 'U' encontrado no mercado acionário dos Estados Unidos se aplica ao mercado acionário do Japão também.

A volatilidade intradiária é caracterizada por duas curvas em formato de 'U'. Uma no período da manhã e outra, no período da tarde. Este resultado, então, é consistente com as previsões dos modelos teóricos para a microestrutura do mercado.

Lee et al (2002), além de verificar o comportamento dos parâmetros de retorno, volatilidade dos retornos e volume em três diferentes mercados, Nova York, Tóquio e Londres, analisam a interação entre eles. O artigo examina as relações dinâmicas – relações causais e a direção e a magnitude dos efeitos dinâmicos – entre as variáveis. As suas principais descobertas foram: primeiro, o volume não Granger-causa os retornos em nenhum dos mercados estudados. Segundo, há uma relação positiva entre volume e volatilidade dos retornos nos três mercados. Por fim, considerando a relação entre

eles, as variáveis do mercado americano, em particular o volume, contém um poderoso poder preditivo das variáveis financeiras no Japão e na Inglaterra.

Com dados do mercado americano novamente, Darrat et al (2003) testam as duas teorias usadas pelo mercado para explicar a relação entre volume e volatilidade, *Sequential Information Arrival Hypothesis* (SIAH) e *Mixture of Distribution Hypothesis* (MDH). A investigação é feita com dados *intraday*, a cada 5 minutos, de volume e volatilidade das 30 ações que compõem o *Dow Jones Industrial Average* (DJIA) no período de abril a junho de 1998. Para calcular a volatilidade, os autores utilizam o modelo EGARCH (*Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*).

Os resultados sugerem que a relação contemporânea é positiva e estatisticamente significativa apenas para 3 das 30 ações analisadas. Esta fraca evidência de relação contemporânea contraria a MDH. Entretanto, em grande parte das ações estudadas, a relação volume-volatilidade segue um padrão *lead-lag*, sustentando a teoria da SIAH.

O estudo de Mestel et al (2003) investiga a relação empírica entre retornos, volatilidade dos retornos e volume das ações negociadas no mercado austríaco. A investigação contempla não só a relação contemporânea entre as variáveis como a relação dinâmica (causal). A volatilidade dos retornos e o volume apresentam estes dois tipos de associação. Além disso, os autores chegam a conclusão de que a volatilidade precede o volume em pelo menos metade dos casos, uma indicação de que o fluxo de informação ao mercado é sequencial ao invés de simultâneo. Tal evidência está de acordo com o estudo anterior de Darrat et al (2003).

Eaves et al (2010) estudam o mercado de milho norte americano. Os autores pontuam que este mercado é um exemplo do fato estilizado descrito por vários autores, o duplo padrão em 'U' do volume e da volatilidade. Esta similaridade nos padrões intradiários é explicado por vários economistas pelo fluxo de informações privadas ao mercado como visto anteriormente. Os autores, então, testam se esse padrão se deve ao fluxo de informação privada ou ao fluxo de informações públicas.

Depois de contabilizar a informação pública em leilões imediatamente anteriores para a mesma mercadoria, para negociação anterior em outras commodities, e para negociação em mercados estrangeiros abertos durante a noite em Tóquio, Eaves et al mostram que os padrões intradiários são efetivamente estáveis. Isto significa que os padrões observados se devem, principalmente, as informações públicas.

O trabalho de Lu et al (2010) investiga a relação dinâmica entre a volatilidade dos retornos e o volume negociado no mercado acionário taiwanês. A análise foi feita com dados do índice do mercado para o período de janeiro de 2005 a dezembro de 2007. Para medir a volatilidade diária, os autores seguiram Andersen et al (1999) e

Martens (2001), calculando a partir da soma dos retornos ao quadrado a cada um minuto.

Inicialmente, utilizam o modelo VAR para investigar a relação entre as duas variáveis. Os resultados indicaram que valores passados de volume e volatilidade afetam significativamente valores atuais de ambos. Assim, os autores afirmam que no mercado taiwanês, o volume Granger-causa a volatilidade, ao mesmo tempo que, a volatilidade Granger-causa o volume.

Nishimura et al (2012) investigam o *spillover* dos retornos e da volatilidade entre o mercado acionário chinês e o mercado acionário japonês. Para isso, os autores utilizam dados do *Nikkei 225 Index* (NKY) para o Japão e do *Shanghai Composite Index* (SHCOMP) para a China no período de janeiro de 2008 até final de novembro de 2010.

Para realizar o estudo proposto, inicialmente, com observações a cada cinco minutos, Nishimura et al caracterizam as propriedades da volatilidade para os dois índices. Assim, encontram uma curva com formato em ‘U’ para o SHCOMP, em contrapartida, para o NKY, a volatilidade é representada por uma curva com formato em ‘W’.

Por fim, Tilak et al (2013) analisaram o mercado acionário francês. Com dados *intraday* do índice CAC40 no período de março de 2011 e utilizando o desvio padrão como *proxy* para a volatilidade, encontraram o *U-shape* tanto para os retornos quanto para a volatilidade.

No mercado brasileiro, há dois principais trabalhos que usam dados de volume e volatilidade. Primeiramente, Medeiros et al (2006) investigam a relação empírica entre retorno acionário, volatilidade dos retornos e volume de negócios no mercado de ações local. A amostra utilizada compreende dados de retorno acionário e volume de negócios de uma carteira teórica envolvendo ações participantes do Ibovespa.

Inicialmente, os autores realizaram uma análise de correlação cruzada entre as variáveis,  $\rho_t(R_t, V_t) = \frac{Cov(R_t, V_t)}{\sigma(R_t)\sigma(V_t)}$ , onde  $R_t$  e  $V_t$  representam retorno acionário e volume dos negócios, respectivamente, na data  $t$ ,  $Cov(., .)$  denota co-variação e  $\sigma(.)$  é o desvio padrão. Nesta análise, encontraram uma correlação positiva entre o volume de negócios e a volatilidade dos retornos. Esta foi uma primeira indicação de que pode haver uma relação causal entre essas duas variáveis.

Em seguida, a partir de um modelo que relaciona volume de negócios com o quadrado dos retornos acionários investigou-se mais a fundo esta relação. Foi feita a seguinte regressão (Brailsford, 1996),  $V_t = \alpha_0 + \phi_1 V_{t-1} + \phi_2 V_{t-2} + \alpha_1 R_t^2 + \alpha_2 D_t R_t^2 + e_t$ , em que  $D_t$  denota uma variável *dummy* que é igual a 1 se o retorno correspondente  $R_t$  for negativo e 0 se positivo. Descobriu-se que o parâmetro  $\alpha_1$  é positivo e significativo e que o parâmetro  $\alpha_2$  é negativo e significativo. Essas descobertas dão



forte suporte à hipótese de que um volume de negócios maior está associado com um aumento na volatilidade de retornos e que essa relação se torna mais pronunciada à medida que os preços das ações sobem.

Por fim, os autores testaram a causalidade com o modelo de Granger. Como resultado mostraram que a volatilidade dos retornos Granger-cause o volume dos negócios e que o volume dos negócios Granger-cause a volatilidade dos retornos com maior intensidade ainda. Este resultado corroborou as descobertas anteriores.

Da Costa et al (2015), por sua vez, investigam a microestrutura do mercado brasileiro com dados de alta frequência de volume e volatilidade, com o objetivo de encontrar padrões durante os pregões. A motivação dos autores foi a falta de estudos com este tipo de dado no mercado local, embora esta investigação tenha sido amplamente estudada nos mercados desenvolvidos.

Os autores utilizaram os dados de todas as ações que compunham o índice Ibovespa no período de janeiro a março de 2013. Coletaram as informações de volume e volatilidade a cada 10 minutos durante este período. E, em seguida, dividiram o pregão em 4 intervalos: abertura, almoço, tarde e fechamento. Para a volatilidade, calcularam a média do desvio padrão para cada um destes períodos e para o volume, somaram o total em reais negociado.

A análise encontrou um padrão em 'L' para a volatilidade e um padrão em 'U' para o volume. O valor máximo da volatilidade foi no período de abertura, diminuindo ao longo do dia, porém com um pequeno aumento no período da tarde. Já para o volume, as negociações mais intensas ocorreram no período de abertura e no período de fechamento, entretanto, com um pequeno aumento, também, no período da tarde.

### 3 Evidências Empíricas no Mercado Brasileiro

#### 3.1 Dados

Os dados consistem no volume negociado e na volatilidade dos retornos por hora de cinco papéis líquidos que fazem parte da carteira do índice Ibovespa. Neste caso, temos uma análise mais detalhada da microestrutura do mercado quando comparamos com o trabalho de Da Costa et al (2015). Estes autores analisaram estes parâmetros somente em 4 momentos do dia.

O período analisado começa em dezembro de 2017 até maio de 2018, abrangendo 121 dias de pregão. Este período foi selecionado devido a disponibilidade dos dados. Dado que o pregão ocorre das 09:00:00 às 18:00:00 durante o horário de verão (no período considerado, de dezembro de 2017 até 09 de março de 2018) e das 09:00:00 às 17:00:00 durante o horário de inverno, temos 1033 observações de volume e de volatilidade para cada ativo.

Para medir o volume negociado, consideramos a soma da quantidade dos papéis operados a cada hora. A volatilidade por hora, por sua vez, é calculada como o desvio padrão dos log-retornos a cada cinco minutos.

O procedimento adotado para este cálculo é descrito a seguir. A cada dia, obtivemos os dados dos preços de cada ação a cada cinco minutos. Em seguida, com as observações dentro de cada hora, calculamos o log-retorno dos preços,  $r_i = \ln P_t - \ln P_{t-5}$ . Deste modo, para cada intervalo de uma hora de pregão, tínhamos um conjunto de 12 observações de log-retornos,  $[\ln r_1; \ln r_2; \dots; \ln r_{12}]$ . Ao final de cada dia, dispunhamos de 9 conjuntos destes para os pregões ocorridos no horário de verão e 8 conjuntos para os pregões ocorridos no horário de inverno.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln r_1 & \ln r_2 & \dots & \ln r_{12} \\ \ln r_1 & \ln r_2 & \dots & \ln r_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ln r_1 & \ln r_2 & \dots & \ln r_{12} \end{bmatrix}$$

Para chegarmos, então, na volatilidade dos retornos, calculamos o desvio padrão de cada um destes conjuntos.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\text{Var}(R_1)} \\ \sqrt{\text{Var}(R_2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\text{Var}(R_9)} \end{bmatrix}$$

As ações escolhidas foram retiradas do índice Ibovespa pois este é o principal

índice de referência do mercado brasileiro. Ele representa o desempenho médio das ações com maior volume negociado a cada quadrimestre. O peso de cada papel no índice está, desse modo, relacionado com a sua liquidez. As ações selecionadas representam os papéis com os cinco maiores pesos nos períodos analisados: Vale S.A. (VALE3), Itaú Unibanco Holding S.A (ITUB4), Bradesco S.A. (BBDC4), AmBev (ABEV3) e Petrobrás (PETR4). Assim, espera-se que a análise não seja afetada pela falta de liquidez, que poderia distorcer os resultados. Na tabela 1 abaixo estão o peso de cada ação no Ibovespa para o período estudado:

Tabela 1 – Peso das ações no Índice Ibovespa

Carteiras			
	Set/17 - Dez/17	Jan/18 - Abr/18	Mai/18 - Ago/18
ABEV3	7,04%	6,88%	7,06%
BBDC4	8,46%	8,49%	7,74%
ITUB4	10,81%	10,51%	10,44%
PETR4	4,84%	5,24%	6,67%
VALE3	9,04%	9,99%	11,36%

Elaboração própria

As figuras 01 – 05 ilustram os padrões de volume e volatilidade observados para VALE3, ITUB4, BBDC4, ABEV3 e PETR4 para o período mencionado. Para obter os dados por mês, para cada um calculamos a média do volume e da volatilidade dos retornos a cada hora do dia.

Figura 1 – Volume e Volatilidade ABEV3



Figura 2 – Volume e Volatilidade BBDC4



Figura 3 – Volume e Volatilidade ITUB4



Figura 4 – Volume e Volatilidade PETR4



Figura 5 – Volume e Volatilidade VALE3



### 3.2 Teste de Raízes Unitárias

Para testar a relação contemporânea e causal entre o volume dos negócios e a volatilidade dos retornos, utilizamos o modelo VAR (Vetor Auto-Regressivo) irrestrito, que é sensível à não-estacionariedade. Desse modo, primeiramente, avaliamos a hipótese das séries temporais de volume e volatilidade serem estacionárias aplicando o teste ampliado de *Dickey-Fuller* (ADF).

Antes de realizar o teste, inspecionamos as séries e optamos pela utilização da regressão com constante e sem tendência.

$$\Delta y_t = \mu + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Onde  $y$  é a variável testada quanto a raízes unitárias (volume e volatilidade),  $\mu$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são parâmetros do modelo e  $\varepsilon_t$  é um termo de erro do tipo ruído branco I.I.D. com distribuição normal  $(0, \sigma^2)$ . A escolha dos *lags* do modelo foi feita com base no critério de informação de *Akaike* (AIC). Os *lags* são escolhidos de modo que os resíduos da regressão não sejam serialmente correlacionados.

O teste de raiz unitária, então, é feito testando-se a hipótese nula  $\gamma = 0$  contra a alternativa unilateral  $\gamma < 0$ . A estatística *t-Student* do parâmetro estimado  $\gamma$  não possui uma distribuição *t* convencional na hipótese nula de raiz unitária. Ao invés disso, utilizam-se valores críticos recomendados por *Mackinnon* (1991). Se a estatística *t* do teste ADF para  $\gamma$  fica à esquerda destes valores, a hipótese nula deve ser rejeitada.

Os resultados para as séries de volume e volatilidade de cada ação podem ser vistos a seguir nas tabelas 2 e 3. Para todas as ações, tanto para a série de volume quanto para a série de volatilidade rejeitamos a hipótese de raiz unitária.

**Tabela 2 – Teste ADF para as séries de volume**

	<i>Lag</i>	Estatística ADF	Valor Crítico (1%)
ABEV3	7	-5,791774	-3,4377
BBDC4	8	-6,130168	-3,4377
ITUB4	3	-10,69205	-3,4377
PETR4	12	-13,77339	-3,4377
VALE3	9	-7,184475	-3,4377

**Tabela 3 – Teste ADF para as séries de volatilidade**

	<i>Lag</i>	Estatística ADF	Valor Crítico (1%)
ABEV3	6	-4,986997	-3,4377
BBDC4	6	-5,646774	-3,4377
ITUB4	6	-5,184277	-3,4377
PETR4	6	-3,673447	-3,4377
VALE3	6	-5,585109	-3,4377

### 3.3 Volume

As tabelas 04 - 08 mostram as médias do volume negociado para cada ação em cada hora do dia. Como a quantidade de ações *outstanding* para cada papel é diferente, a análise foi realizada dividindo o volume negociado por essa quantidade, tornando os valores, assim, comparáveis. Em vermelho estão destacados os picos dos negócios ao longo do dia.

Tabela 4 – Volume Padronizado ABEV3

<b>ABEV3</b>			
<b>Início</b>	<b>Fim</b>	<b>Horário de Verão</b>	<b>Horário de Inverno</b>
10:00:00	11:00:00	0,022	<b>0,046</b>
11:00:01	12:00:00	0,028	<b>0,048</b>
12:00:01	13:00:00	<b>0,036</b>	0,040
13:00:01	14:00:00	0,031	0,029
14:00:01	15:00:00	0,036	0,032
15:00:01	16:00:00	0,036	0,046
16:00:01	17:00:00	0,041	<b>0,115</b>
17:00:01	18:00:00	<b>0,103</b>	

Tabela 5 – Volume Padronizado BBDC4

<b>BBDC4</b>			
<b>Início</b>	<b>Fim</b>	<b>Horário de Verão</b>	<b>Horário de Inverno</b>
10:00:00	11:00:00	0,030	<b>0,049</b>
11:00:01	12:00:00	0,033	<b>0,051</b>
12:00:01	13:00:00	<b>0,042</b>	0,040
13:00:01	14:00:00	0,035	0,033
14:00:01	15:00:00	0,030	0,036
15:00:01	16:00:00	0,032	0,046
16:00:01	17:00:00	0,037	<b>0,105</b>
17:00:01	18:00:00	<b>0,086</b>	

Tabela 6 – Volume Padronizado ITUB4

ITUB4			
Início	Fim	Horário de Verão	Horário de Inverno
10:00:00	11:00:00	0,037	<b>0,054</b>
11:00:01	12:00:00	0,040	<b>0,058</b>
12:00:01	13:00:00	<b>0,060</b>	0,038
13:00:01	14:00:00	0,051	0,035
14:00:01	15:00:00	0,041	0,036
15:00:01	16:00:00	0,047	0,049
16:00:01	17:00:00	0,043	<b>0,106</b>
17:00:01	18:00:00	<b>0,112</b>	

Tabela 7 – Volume Padronizado PETR4

PETR4			
Início	Fim	Horário de Verão	Horário de Inverno
10:00:00	11:00:00	0,030	<b>0,049</b>
11:00:01	12:00:00	0,033	<b>0,051</b>
12:00:01	13:00:00	<b>0,042</b>	0,040
13:00:01	14:00:00	0,035	0,033
14:00:01	15:00:00	0,030	0,036
15:00:01	16:00:00	0,032	0,046
16:00:01	17:00:00	0,037	<b>0,105</b>
17:00:01	18:00:00	<b>0,086</b>	



Tabela 8 – Volume Padronizado VALE3

VALE3			
Início	Fim	Horário de Verão	Horário de Inverno
10:00:00	11:00:00	0,056	<b>0,083</b>
11:00:01	12:00:00	0,056	0,060
12:00:01	13:00:00	<b>0,066</b>	0,045
13:00:01	14:00:00	0,053	0,034
14:00:01	15:00:00	0,046	0,033
15:00:01	16:00:00	0,042	0,042
16:00:01	17:00:00	0,044	<b>0,091</b>
17:00:01	18:00:00	<b>0,102</b>	

Uma série de observações podem ser feitas a partir da análise das tabelas. Na média, 0,077% das ações *outstanding* destes papéis trocam de mãos a cada hora. É possível notar uma diferença no volume negociado por hora entre os horários de verão e inverno. Tal fato pode ser atribuído à abertura dos mercados de Nova York, em vista da forte presença dos investidores estrangeiros na Bolsa de Valores. O comportamento dos estrangeiros é determinante para o mercado de ações brasileiro pois eles representam por volta de metade do volume negociado, como pode ser observado na tabela 09:

**Tabela 9 – Participação por Investidor no Segmento Bovespa**

	<b>Pessoa Física</b>	<b>Institucionais</b>	<b>Estrangeiros</b>
dez/18	15,50%	27,50%	<b>46,70%</b>
jan/18	18,80%	27,20%	<b>48,50%</b>
fev/18	17,00%	27,90%	<b>49,40%</b>
mar/18	18,10%	26,40%	<b>50,50%</b>
abr/18	17,00%	20,80%	<b>55,60%</b>
mai/18	17,30%	27,80%	<b>50,00%</b>

Durante o horário de verão, a abertura da bolsa americana corresponde às 12:30:00 do mercado local. O período das 12:00:00 às 13:00:00, assim, é quando ocorre o primeiro pico nos negócios. Em média, para todos os papéis analisados, o volume negociado é 25% maior quando comparado às horas intermediárias. A média do volume negociado, então, decresce, nas duas horas seguintes no caso de ABEV3, BBDC4 e ITUB4 e nas três horas seguintes no caso de PETR4 e VALE3.

Já durante o horário de inverno, há uma alteração do horário de abertura dos mercados de Nova York para às 10:30:00 do horário local. Para ABEV3, BBDC4 e ITUB4, os primeiros horários de maior negociação são a primeira e a segunda horas de pregão, das 10:00:00 às 12:00:00, um volume pelo menos 35% maior do que nas horas intermediárias. Após esse período, o volume diminui nas duas horas seguintes.

Para PETR4 e VALE3, a primeira hora do pregão, 10:00:00 às 11:00:00, é a mais intensa, 80% maior que as demais. O volume negociado, então, diminui durante as três horas seguintes.

Em ambos os horários, os negócios aumentam nas duas horas finais do pregão, com o maior volume observado na última hora.

Tal padrão de comportamento, conhecido como *U-shape* na literatura, encontra algumas explicações. Maiores volumes nas primeiras horas ocorrem porque os investidores transacionam com base em informações reunidas durante a noite e nas primeiras horas do dia, por exemplo, como informações obtidas com a divulgação de balanços. Além disso, a recuperação dos negócios nas últimas horas pode refletir investidores fechando posições ou fazendo *hedge* de posições em aberto que eles não podem monitorar durante a noite. Também há o leilão de fechamento, no qual, geralmente, um volume grande é negociado todos os dias.

É importante ressaltar a peculiaridade do mercado brasileiro. Durante o horário

de verão, o *U-shape* é apenas constatado considerando a terceira hora do pregão em diante. Tal fato se deve a composição do mercado brasileiro, onde, praticamente, metade dos participantes são estrangeiros, como descrito acima.

Em seguida, uma série de análises de variâncias foram realizadas para avaliar as médias do volume negociado a cada hora. Os resultados destes testes F estão apresentados na tabela 10. A estatística *F-Hora* examina se a média do volume de cada hora é igual; *F-1* e *F-6* testam se a primeira hora de negociação, assim como a última são iguais às médias durante o período intermediário (no horário de verão, *F-1* corresponde a terceira hora do pregão, 12:00:00 às 13:00:00). Todas as estatísticas *F-Hora*, *F-1* e *F-6* são grandes indicando que o volume entre as horas é diferente com 5% de significância (apenas o teste *F-Hora* para o ITUB4 supera este nível). Portanto, estes resultados indicam que a média negociada é função do período do dia, sendo assim, a primeira e últimas horas do dia tem o maior volume negociado.

**Tabela 10 – Teste ANOVA para a série de volume**

Valor-p			
	<b>F-Hora</b>	<b>F-1</b>	<b>F-6</b>
ABEV3	0,01	0,00	0,01
BBDC4	0,00	0,00	0,03
ITUB4	0,06	0,03	0,05
PETR4	0,05	0,00	0,00
VALE3	0,01	0,01	0,01

### 3.4 Volatilidade

A mesma análise feita para os dados do volume negociado é conduzida para a volatilidade dos retornos das cinco ações analisadas. As tabelas 11 - 15 mostram o desvio padrão dos retornos a cada hora do dia. Neste caso, a amostra, também, foi dividida em duas, uma com o período que abrange os negócios do horário de verão e outra com os negócios realizados no horário de inverno. Em vermelho estão destacados os picos de volatilidade ao longo do dia.

Tabela 11 – Volatilidade dos Retornos ABEV3

<b>ABEV3</b>			
<b>Início</b>	<b>Fim</b>	<b>Horário Verão</b>	<b>Horário Inverno</b>
10:00:00	11:00:00	<b>0,17%</b>	<b>0,20%</b>
11:00:01	12:00:00	<b>0,15%</b>	0,15%
12:00:01	13:00:00	<b>0,14%</b>	0,12%
13:00:01	14:00:00	0,11%	0,11%
14:00:01	15:00:00	0,11%	0,10%
15:00:01	16:00:00	0,10%	0,12%
16:00:01	17:00:00	0,13%	<b>0,14%</b>
17:00:01	18:00:00	<b>0,14%</b>	

Tabela 12 – Volatilidade dos Retornos BBDC4

<b>BBDC4</b>			
<b>Início</b>	<b>Fim</b>	<b>Horário Verão</b>	<b>Horário Inverno</b>
10:00:00	11:00:00	<b>0,18%</b>	<b>0,25%</b>
11:00:01	12:00:00	<b>0,15%</b>	0,18%
12:00:01	13:00:00	<b>0,17%</b>	0,15%
13:00:01	14:00:00	0,14%	0,14%
14:00:01	15:00:00	0,14%	0,13%
15:00:01	16:00:00	0,14%	0,14%
16:00:01	17:00:00	0,14%	<b>0,18%</b>
17:00:01	18:00:00	<b>0,17%</b>	

Tabela 13 – Volatilidade dos Retornos ITUB4

ITUB4			
Início	Fim	Horário Verão	Horário Inverno
10:00:00	11:00:00	0,17%	0,23%
11:00:01	12:00:00	0,14%	0,15%
12:00:01	13:00:00	0,14%	0,13%
13:00:01	14:00:00	0,13%	0,12%
14:00:01	15:00:00	0,12%	0,11%
15:00:01	16:00:00	0,11%	0,13%
16:00:01	17:00:00	0,12%	0,15%
17:00:01	18:00:00	0,15%	

Tabela 14 – Volatilidade dos Retornos PETR4

PETR4			
Início	Fim	Horário Verão	Horário Inverno
10:00:00	11:00:00	0,20%	0,30%
11:00:01	12:00:00	0,18%	0,21%
12:00:01	13:00:00	0,18%	0,19%
13:00:01	14:00:00	0,15%	0,17%
14:00:01	15:00:00	0,14%	0,17%
15:00:01	16:00:00	0,14%	0,20%
16:00:01	17:00:00	0,16%	0,20%
17:00:01	18:00:00	0,17%	

Tabela 15 – Volatilidade dos Retornos VALE3

VALE3			
Início	Fim	Horário Verão	Horário Inverno
10:00:00	11:00:00	0,16%	0,13%
11:00:01	12:00:00	0,16%	0,21%
12:00:01	13:00:00	0,16%	0,21%
13:00:01	14:00:00	0,19%	0,16%
14:00:01	15:00:00	0,15%	0,13%
15:00:01	16:00:00	0,13%	0,12%
16:00:01	17:00:00	0,12%	0,13%
17:00:01	18:00:00	0,13%	

A partir da análise dos números calculados, podem-se observar alguns padrões. Primeiro, os papeis, exceto a VALE3, apresentam uma maior volatilidade na primeira hora de negociação, das 10:00:00 às 11:00:00. Em alguns casos, sendo 40% maior que a volatilidade das demais horas. Durante o horário de verão, a volatilidade permanece elevada até o período das 12:00:00 às 13:00:00, que corresponde à abertura do mercado de Nova York. Na sequência, a volatilidade dos papeis diminui e volta a aumentar apenas nos dois últimos períodos, isto é, nas duas últimas horas de negociação. Porém, não atinge o nível de variação observado no primeiro período do dia. Este comportamento pode ser associado, em parte, ao comportamento do volume negociado. Ambos os parâmetros formam o *U-shape* durante o período de negociações.

Por fim, utilizando os dados de volatilidade dos retornos a cada hora, é realizado, também, o teste F para avaliar se estes diferem, de fato, ao longo das horas de negociação. Os resultados estão evidenciados na tabela 16. As estatísticas *F-Hora*, *F-1* e *F-6* indicam que a volatilidade média é, significativamente, distinta entre as horas. As primeiras e últimas horas do dia tem a maior variação nos preços.

Tabela 16 – Teste ANOVA para a série de volatilidade

Valor-p			
	F-Hora	F-1	F-6
ABEV3	0,00	0,00	0,01
BBDG4	0,01	0,00	0,02
ITUB4	0,07	0,03	0,04
PETR4	0,05	0,02	0,00
VALE3	0,01	0,01	0,01

### 3.5 Relação Volume e Volatilidade

Os padrões observados no comportamento do volume e da volatilidade das cinco ações analisadas indicam haver alguma relação entre os dois. Para testar esta interação durante o período de negociação será realizado o teste de causalidade de Granger.

Neste teste, temos duas séries temporais A e B e o objetivo consiste em saber se A precede B, ou B precede A, ou se A e B ocorrem simultaneamente. Considerando as duas séries de tempo  $V_t$  (volume) e  $R_t$  (volatilidade), o teste de causalidade de Granger assume que a informação relevante para a predição das respectivas variáveis  $V$  e  $R$  está contida apenas nas séries de tempo sobre essas duas variáveis. Dessa forma, uma série de tempo estacionária  $V$  causa, no sentido de Granger, uma outra série estacionária  $R$  se melhores predições estatisticamente significantes de  $R$  podem ser obtidas ao incluirmos valores defasados de  $V$  aos valores defasados de  $R$ . Em termos mais formais, o teste envolve estimar as seguintes regressões:

$$V_t = \sum_{i=1}^p a_i R_{t-i} + \sum_{i=1}^p b_i V_{t-i} + u_{1t} \quad (1)$$

$$R_t = \sum_{i=1}^p c_i R_{t-i} + \sum_{i=1}^p d_i V_{t-i} + u_{2t} \quad (2)$$

Onde  $u_{it}$  são os resíduos que assume-se serem não-correlacionados.

As hipóteses nulas de que  $R$  não Granger-causa  $V$  e que  $V$  não Granger-causa  $R$  são testadas a partir de uma estatística  $F$ :

$$F = \frac{SSE_r - SSE_u}{SSE_u} \times \frac{N-2p-1}{p}$$

onde  $SSE_r$  representa a soma dos quadrados dos resíduos da regressão restrita ( $a_1 = \dots = a_p = 0$  para a equação do volume e  $d_1 = \dots = d_p = 0$  para a equação da volatilidade),  $SSE_u$  é a soma dos quadrados dos resíduos da equação

irrestrita, e  $N$  é o número de observações. A estatística dada por esta equação tem, assintoticamente, distribuição  $F$  sob a hipótese nula com  $p$  graus de liberdade no numerador e  $(N - 2p - 1)$  no denominador. Os parâmetros  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  são estimados por mínimos quadrados. Para decidir o *lag*  $p$  adequado do VAR utilizamos o critério de *Akaike* (AIC).

Após a estimação, podemos distinguir quatro casos diferentes:

- 1) Causalidade unilateral de  $R$  para  $V$  quando os coeficientes estimados em (1) para a variável defasada  $R$  são conjuntamente diferentes de zero ( $\sum a_i \neq 0$ ), e quando o conjunto de coeficientes estimados em (2) para a variável  $V$  não forem estatisticamente diferentes de zero ( $\sum d_i \neq 0$ ).
- 2) Causalidade unilateral de  $V$  para  $R$ : quando o conjunto de coeficientes defasados para a variável  $R$  na equação (1) não for estatisticamente diferente de zero ( $\sum a_i \neq 0$ ) e o conjunto de coeficientes defasados para a variável  $V$  em (2) for ( $\sum d_i \neq 0$ ).
- 3) Bicausalidade ou simultaneidade: quando os conjuntos de coeficientes defasados de  $V$  e  $R$  forem estatisticamente diferentes de zero em ambas as regressões.
- 4) Independência: quando, em ambas as regressões, os conjuntos de coeficientes defasados de  $V$  e  $R$  não forem estatisticamente diferentes de zero.

O teste de Granger foi realizado utilizando-se os dados de volume e volatilidade dos retornos de cada uma das cinco ações, separando-se a amostra em horário de verão e em horário de inverno. A ordem do VAR foi escolhida minimizando o critério de *Akaike* (AIC), em todos os casos estimamos um VAR(8).

Levando-se em conta o exposto acima, o objetivo é verificar se o volume de negócios causa a volatilidade, ou se a volatilidade causa o volume, ou se ambas as afirmações são verdadeiras. Obtivemos o seguinte resultado ilustrados nas figuras 6 e 7:



Figura 6 – Teste de Granger (Horário de Verão)

<b>ABEV3</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	485	2,14443	0,0306
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		2,96392	0,0030
<b>BBDC4</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	509	2,90664	0,0036
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		1,86559	0,0633
<b>ITUB4</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	509	3,38764	0,0008
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		4,34876	4.E-05
<b>PETR4</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	509	22,2688	5.E-29
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		1,58689	0,1260
<b>VALE3</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	509	2,70152	0,0064
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		4,63067	2.E-05

**Figura 7 – Teste de Granger (Horário de Inverno)**

<b>ABEV3</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	356	2,91905	0,0037
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		5,99969	3.E-07
<b>BBDC4</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	377	5,94168	4.E-07
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		5,00181	7.E-08
<b>ITUB4</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	377	2,44774	0,0137
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		6,8747	2.E-08
<b>PETR4</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	377	1,88632	0,0611
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		37,3129	1.E-42
<b>VALE3</b>			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
VOLUME does not Granger cause VOLATILIDADE	377	4,28934	6.E-05
VOLATILIDADE does not Granger cause VOLUME		2,56858	0,0098

Os testes mostram que ao nível de 5%, o volume Granger causa a volatilidade em 9 dos 10 casos apresentados. Já em 8 dos 10 casos estudados, a volatilidade Granger causa o volume. Isto significa que a causalidade entre volume negociado e volatilidade dos retornos ocorre em ambas as direções, entretanto, mais intensamente do volume para a volatilidade. Esse resultado corrobora os achados de Medeiros et al (2006).

## 4 Estratégia

Na seção anterior, chegamos a conclusão de que o volume Granger-causa a volatilidade nas ações analisadas. Também, pudemos observar que o primeiro pico do volume negociado coincide com o horário da abertura do mercado de Nova York, devido a forte presença de estrangeiros no mercado local. Dada a causalidade observada, estes períodos também são os períodos com maior volatilidade.

Com base neste padrão, desenhamos uma estratégia de *trading* para aproveitar estes formatos observados. O intuito é vender a volatilidade no início do pregão, quando atinge o máximo do dia, e comprar no período intermediário, quando está no mínimo do dia.

### 4.1 Estratégias com Volatilidade

Neste trabalho, exploramos o que é chamado de *trade* puramente de volatilidade (ou simétrico): *straddles*, *strangles*, *butterflies*, *condors*, *iron butterflies* e *guts*. A definição de cada um está na figura 8.

Figura 8 – Estratégias de Volatilidade

Estratégia	Definição
Straddle	Comprar uma call e uma put com mesmo strike
Strangle	Comprar uma put e comprar uma call com strike maior
Gut	Comprar uma call e comprar uma put com strike maior
Butterfly	Comprar uma call (put), vender duas calls (puts) com strike maior e comprar uma call (put) com strike ainda maior
Condor	Comprar uma call (put), vender duas calls (puts) com dois strikes maiores e comprar uma call (put) com strike ainda
Iron Butterfly	Vender um straddle e comprar um strangle

*Straddles*, *strangles* e *guts* são, usualmente, chamados de combinações uma vez que são compradas (ou vendidas) tanto calls quanto puts. Já *butterflies*, *iron butterflies* e *condors* são denominados *spreads* já que é preciso comprar opções e vender ou escrever outras.

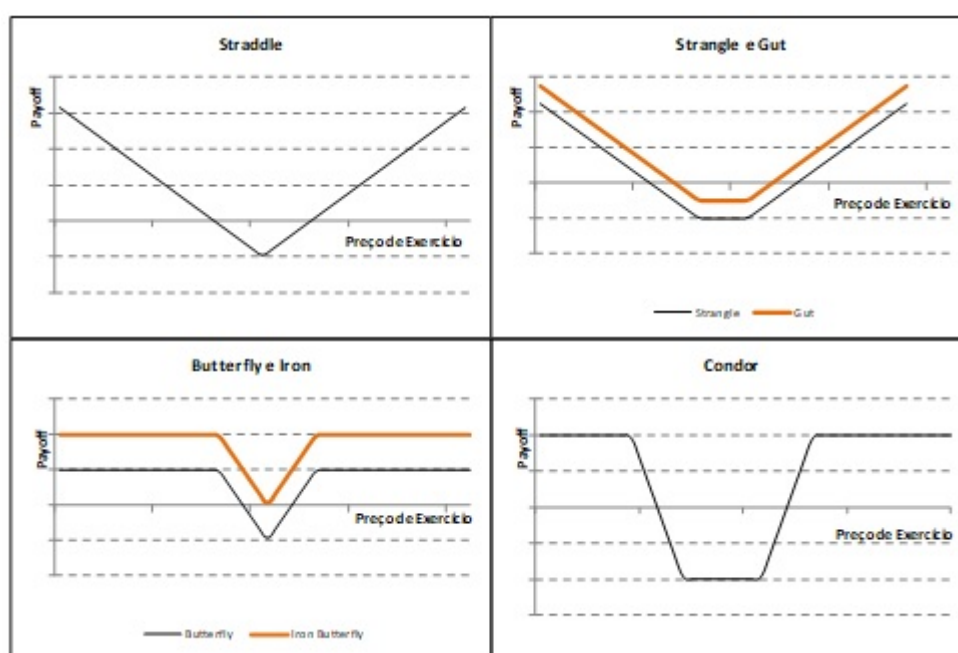
Comparamos as seis estratégias, as vantagens e desvantagens, com relação às seguintes dimensões: os padrões de *payoff*, preço, o *payout* esperado, suas gregas – neste caso, delta e vega – e os custos de transação. A partir desta comparação, elegemos as estruturas de *straddle* e *strangle* para empregar neste trabalho, igual em Chaput et al (2002). Além da vantagem comparativa sobre as demais, optamos por estas estratégias por serem de fácil implementação no mercado brasileiro dada a liquidez dos ativos.

Os *straddles* e *strangles* são mais atrativos quando comparados com as demais estratégias em relação às suas letras gregas e aos seus custos de transação. A composição destas duas estruturas permite maximizar os seus vegas e, ao mesmo tempo, minimizar os seus deltas. Além disso, por serem compostas apenas por duas opções, enquanto os *spreads* são compostos por três ou mais, faz com que os seus custos de transação sejam menores. Por isso, são escolhidos para execução da estratégia deste trabalho.

#### 4.1.1 Payoff e Preço

Os *payoffs* no vencimento, em função do preço do ativo, para as seis estratégias estão ilustrados na figura 9 para posições compradas em volatilidade. A partir da ilustração, podemos observar que para as combinações (*straddle*, *strangle* e *gut*) o prejuízo da estratégia não está limitado, enquanto o seu lucro é limitado ao preço recebido inicialmente. No caso dos *spreads*, tanto o lucro quanto o prejuízo são determinados.

**Figura 9 – Payoffs Estratégias de Volatilidade**



De modo a classificar as seis estratégias em termos de preço (e *payout* esperado) é necessário fazer certas hipóteses sobre como estas são construídas. Então, assumimos que todas estão centradas em torno do preço do ativo subjacente. Esse pressuposto é feito já que é o esperado para *trades* com volatilidade.

Considerando, primeiramente, as combinações que envolvem apenas duas opções, quando seus *strikes* estão próximos ao preço do ativo objeto, os *guts* tem ambas as opções dentro do dinheiro, os *straddles*, uma e os *strangles* nenhuma. Como consequência, os *guts* têm os maiores preços, seguidos pelos *straddles* e, por fim, os *strangles*. Nas *butterflies*, *iron butterflies* e *condors*, algumas opções são compradas, enquanto outras, vendidas; desse modo, os preços tendem a ser baixos, dada a compensação entre compra e venda. Quando centradas no dinheiro, os seus preços serão menores do que os preços dos *guts* e *straddles*, porém, com relação aos *strangles* dependerá da forma como foram construídos.

Como a estratégia é vender volatilidade, os maiores preços das combinações são mais atrativos neste caso. No entanto, é necessário levar em consideração que nestas estratégias o prejuízo é ilimitado.

#### 4.1.2 Letras Gregas

Em todos os *spreads* ou combinações, duas ou mais opções são combinadas de modo a explorar as mudanças esperadas em um ou mais determinantes do seu valor: o preço do ativo objeto, a volatilidade, o tempo até o vencimento ou a taxa de juros, enquanto minimizando a exposição aos outros riscos. Da mesma forma que o preço, as letras gregas de um *spread* ou de uma combinação – delta, gamma, vega, theta e rho – são, simplesmente, combinações lineares das gregas das opções que os compõem.

Por definição, *traders* de volatilidade procuram explorar mudanças previstas na volatilidade implícita fazendo com que eles devam buscar posições com grandes vegas. Se, ao mesmo tempo, desejarem minimizar o risco do preço, as posições, também, devem ser delta neutras. Em todas as seis estratégias, os deltas das opções que as compõem têm sinais opostos, de modo que podem ser estruturadas como delta neutras. Por exemplo, no *straddle*, *strangle* ou *gut*, compra-se (ou vende-se) tanto uma *call* quanto uma *put*. Como a *call* tem delta positivo e a *put*, negativo, os deltas se compensam e o delta da combinação é normalmente pequeno. Este delta pode, por sua vez, ser zerado, comprando-se ou vendendo-se o ativo objeto. Por outro lado, o gamma, o vega e o theta tem o mesmo sinal para *calls* e *puts*, assim estas gregas são maiores nas combinações. No caso dos *spreads*, há uma compensação de todas as quatro gregas mencionadas.

O delta e o vega das estratégias, calculados a partir do modelo de *Black and Scholes*, estão na tabela 17.

Tabela 17 – Delta e Vega das Estruturas

	Delta	Vega
<i>Call</i>	$e^{-qT} N(d)$	$e^{-qT} S\sqrt{T} N'(d)$
<i>Put</i>	$e^{-qT} [N(d) - 1]$	$e^{-qT} S\sqrt{T} N'(d)$
<i>Straddle</i>	$e^{-qT} [2N(d) - 1]$	$2 \times e^{-qT} S\sqrt{T} N'(d)$
<i>Strangle</i> (e <i>Gut</i> )	$e^{-qT} [N(d_c) + N(d_p) - 1]$	$e^{-qT} S\sqrt{T} [N'(d_c) + N'(d_p)]$
<i>Butterfly</i> (e <i>Iron</i> )	$e^{-qT} [-N(d_1) + 2N(d_2) - N(d_3)]$	$e^{-qT} S\sqrt{T} [-N'(d_1) + 2N'(d_2) - N'(d_3)]$

Entre as seis estruturas, o *straddle* delta neutro é a que apresenta o maior valor para o vega. O delta neutro implica que  $N(d) = 0,5$  ou  $d = 0$ . Como  $d = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ ,  $d$  é igual a zero quando o preço de exercício  $K$  for  $K^* = Se^{(r + \frac{\sigma^2}{2})T}$ , onde  $S$  é o preço do ativo subjacente,  $\sigma$  é a volatilidade e  $T$  é o prazo até o vencimento. Neste *strike*, o vega será maximizado já que a densidade da normal  $N(d)$  atinge seu máximo quando  $d = 0$ . Para os *strangles*, pelo menos um dos *strikes* tem que ser diferente de  $K^*$ , de forma que o vega dessa estratégia será menor do que o vega do *straddle*. Para as *flies*, é necessário comprar e vender opções, de forma que os sinais do vega serão contrários, assim este será ainda menor que os demais.

Portanto, a análise das gregas mostra que as melhores estruturas para a nossa estratégia são os *straddles* e *strangles*. Com elas conseguimos maximizar o vega e, assim, capturar melhor os movimentos da volatilidade, e, ao mesmo tempo, minimizar o delta, reduzindo o impacto da movimentação do ativo objeto.

#### 4.1.3 Custos de Transação

Consideramos aqui, como custos de transação, o *spread bid/ask*. Estes, também, devem ser levados em consideração ao se montar a estratégia, principalmente no mercado brasileiro, onde a liquidez é baixa.

Em primeiro lugar, avaliamos o número de opções que é necessário para executar a estratégia. Para um *straddle*, *strangle* ou *gut*, há custos de transação para duas opções: uma *call* e uma *put*. Já para as *butterflies*, há o custo de três opções diferentes enquanto que *iron flies* e *condors* envolvem quatro. Deste modo, neste

quesito, as estratégias mais baratas são os *straddles*, *strangles* e *guts*, seguidos pela *butterfly* e, por últimos, os *iron flies* e os *condors*.

Apesar das três combinações envolverem duas opções, os custos de transação podem diferir se algumas opções são mais negociadas que outras. No mercado brasileiro, há mais negócio nas opções no dinheiro e fora do dinheiro. Para os mesmos *strikes*, *guts* e *strangles* têm o mesmo *payoff* e as mesmas gregas, porém o primeiro tem, pelo menos, uma (normalmente duas) das opções dentro do dinheiro. Já o segundo tem uma delas fora do dinheiro. Assim, é esperado que o custo de transação no *strangle* seja menor.

Desse modo, considerando os custos quando se contrói a estrutura, as combinações são mais vantajosas, já que são mais baratas. Além disso, dada a falta de liquidez no mercado de opções brasileiro, elas se tornam ainda mais atrativas por serem compostas apenas por duas opções.

## 5 Resultados

### 5.1 Estratégia

Como mencionado anteriormente, a estratégia adotada neste trabalho é o *strangle*. Vale ressaltar que apesar do *straddle* também mostrar vantagens comparativas com relação às demais estratégias, como explicado na seção anterior, a sua execução não foi bem sucedida. A estrutura exige a venda de uma *put* e uma *call* com o mesmo preço de exercício. Dada a falta de liquidez do mercado brasileiro, principalmente das *puts*, encontramos situações em que um dos derivativos estava sem negócios. Tal fato prejudicou a aplicação e, então, a estrutura foi descartada.

O método aqui adotado é o *day trade*. A estrutura é vendida no início do dia, quando há maior volume e, conseqüentemente, maior volatilidade, como mostrado na seção 3 e, comprada no período intermediário de negociação, quando há menor volatilidade. A estratégia é capturar os prêmios (preços a mercado) maiores das opções, tanto da *call* quanto da *put*, quando a maior volatilidade está embutida no preço. E, em seguida, vendê-las no período de menor volatilidade, condição que reduz seus preços.

Considerando todos os parâmetros que impactam o prêmio da opção, mostrados na seção anterior, a atenção é voltada ao preço do ativo objeto e a volatilidade. Como se trata de uma estratégia de *day trade*, em que vendemos uma estrutura e, em seguida, compramos a mesma estrutura, fatores como preço de exercício e prazo até o vencimento não afetam os prêmios, pois são os mesmos nas duas operações. Em relação à taxa de juros, sua movimentação não afeta, consideravelmente, o prêmio da opção; deste modo, não é neutralizada na estratégia. Assim, criamos uma estratégia delta neutra, com o *strangle* centrado em  $K^*$  (preço de exercício no qual o delta é zero, mostrado na seção 4) e comprando ou vendendo o ativo objeto, caso necessário. Como o objetivo é capturar as diferenças na volatilidade durante o dia, qualquer movimento do preço do ativo não poderá ter influência no valor da carteira. Além disso, a estrutura delta neutra maximiza o vega, contribuindo para maximizar o *P&L* da estratégia.

A execução da estratégia é simplificada, de modo que é construída vendendo 1 *put* e 1 *call*. O ativo objeto é comprado ou vendido, dependendo do delta resultante da estrutura, supondo que a quantidade de ações é infinitamente divisível. Entretanto, a estratégia poderia ser, facilmente, empregada na prática. Embora, este *back test* é feito com a venda de apenas 1 *call* e 1 *put*, quantidades maiores também poderiam ter sido negociadas. Analisando o livro de ofertas, as quantidades nas posições de melhor compra e melhor venda superam o valor de 100 mil, normalmente. Além disso, os negócios podem ser realizados com um *market maker*, o que não impõe um limite de quantidade. Por sua vez, a quantidade necessária do ativo objeto para zerar o delta



poderia ser arredondada sem maiores implicações para a estratégia.

No mercado brasileiro, há contratos de opções de ações abertos com vencimento todo mês, na terceira segunda feira correspondente. No entanto, os contratos com maior liquidez são aqueles com o vencimento mais próximo. Deste modo, o *back test* da estratégia é feita utilizando sempre o contrato com maior liquidez para a ação. A troca para o próximo vencimento é feita quando o seu volume negociado é superior ao volume do primeiro vencimento.

A execução das operações seguirá o padrão observado nas evidências empíricas ilustradas na seção 3. Como a amostra contém dados a partir de junho até agosto, horário de inverno, a estrutura será vendida na primeira hora do pregão (10:00:00 às 11:00:00) e comprada três horas depois (13:00:00 às 14:00:00). Deste modo, o objetivo será capturar o momento de maior volatilidade na venda e menor volatilidade da compra.

## 5.2 Volatilidade Realizada e Volatilidade Implícita

Antes de executar a estratégia, checamos se o padrão observado na volatilidade do ativo objeto – a curva em formato ‘U’ - também é observado na volatilidade implícita nas opções. Novamente, usaremos o teste de Granger, agora para verificar a relação de causalidade entre as duas volatilidades.

Três testes foram realizados, usando opções com delta de 45%, 50% e 55%. Estas foram escolhidas por serem as mais líquidas. Para cada hora do dia, durante o período de janeiro de 2018 a maio de 2018, pegamos a volatilidade dos retornos do ativo e a volatilidade implícita na opção com o vencimento mais próximo. Para realizar o teste, calculamos a primeira diferença das séries, para torná-las estacionárias. Em seguida, a ordem do VAR foi escolhida minimizando o critério de *Akaike* (AIC), em todos os casos selecionou-se o VAR(7). Os resultados estão ilustrados a seguir na figura 10:

Figura 10 – Teste de Granger - Volatilidade dos Retornos e Volatilidade Implícita

45 DC			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
$\Delta$ VOL RETORNOS does not Granger Cause $\Delta$ VOL IMPLÍCITA	530	5,8582	1.E-06
$\Delta$ VOL IMPLÍCITA does not Granger Cause $\Delta$ VOL RETORNOS		3,53213	0,0010
50 DC			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
$\Delta$ VOL RETORNOS does not Granger Cause $\Delta$ VOL IMPLÍCITA	530	5,0670	1.E-05
$\Delta$ VOL IMPLÍCITA does not Granger Cause $\Delta$ VOL RETORNOS		3,2268	0,0023
55 DC			
Hipótese Nula	Observações	Estatística F	Prob
$\Delta$ VOL RETORNOS does not Granger Cause $\Delta$ VOL IMPLÍCITA	530	4,9351	2.E-05
$\Delta$ VOL IMPLÍCITA does not Granger Cause $\Delta$ VOL RETORNOS		1,9025	0,0671

Estes resultados mostram uma forte relação de causalidade entre ambas em todos os casos. Podemos afirmar que a volatilidade dos retornos causa a volatilidade implícita e, também, que a volatilidade implícita causa a volatilidade dos retornos. Este teste, assim, dá suporte a estratégia desenhada.

### 5.3 Dados

Para realizar o *back test*, foram selecionados os dados das opções de compra e venda da Petrobrás (PETR4). O mercado brasileiro de opções, ainda, não é bastante desenvolvido, sendo certo impeditivo para a estratégia ser bem executada. Analisamos, também, os dados da Vale (VALE3), a falta de negócios inviabilizou a estratégia. As opções de PETR4 são, por outro lado, bastante negociadas quando comparada às demais, por isso, foram escolhidas.

Os dados mais recentes dos últimos três meses foram selecionados de forma que eles estejam fora da amostra utilizada para verificar os padrões do mercado na seção 3. Eles correspondem aos vencimentos de junho de 2018 até agosto de 2018. Para cada mês foram escolhidas *calls* e *puts* com uma série de *strikes* de modo que a base contemple opções de variados deltas.

A base foi construída da seguinte forma. Para cada opção, de cada preço de exercício, obtiveram-se os dados de *bid* e *ask* a cada minuto do dia. Para cada observação, também, foi atribuído o preço do ativo objeto no instante. Isto é, o preço negociado de PETR4 a cada minuto. Em seguida, com os dados dos negócios de DI futuro, calculou-se a taxa pré que corresponde a cada observação. Por fim, computaram-se os dias até o vencimento correspondentes. A partir destes dados, foi possível calcular

a volatilidade implícita no preço de cada opção, tanto para o *bid* quanto para o *ask*. Para isso, utilizamos o método da bisseção. Em seguida, com os dados de volatilidade e os demais, obtiveram-se as letras gregas, delta, gamma e vega para cada observação, calculadas a partir da fórmula de *Black and Scholes*. Com esta base foi feito um *back test* para a estratégia proposta.

## 5.4 Resultados

A estratégia consistiu em vender *strangles* delta neutros, isto é, vendeu-se uma *call* e uma *put* e com o delta resultante desta estrutura comprou-se ou vendeu-se o ativo objeto. Deste modo, é esperado que apenas as diferenças nas volatilidades afetem o valor da carteira. Utilizamos aqui o delta estático, ou seja, o delta *hedge* foi feito apenas na montagem da estrutura.

Os custos de transação (*bid/ask*) foram considerados neste *back test*. Ao vender a estrutura do *strangle*, consideraram-se os preços do *bid* das opções no horário da execução. Em contrapartida, ao zerar a estrutura, considerou-se o preço do *ask*. O mesmo foi feito com o ativo objeto.

No período analisado, obteve-se lucro com a estratégia. O P&L e a variação da volatilidade implícita de cada mês estão ilustrados na tabela 18.

**Tabela 18 – P&L e Variação Volatilidade Implícita *Back Test***

	P&L	$\Delta$ Volatilidade Implícita
junho/18	R\$ 2,19	- 3,01%
julho/18	R\$ 0,50	- 1,05%
agosto/18	R\$ 0,18	- 0,43%
	<b>R\$ 2,87</b>	

Nota-se que em todos os meses analisados, a variação da volatilidade implícita da estrutura foi negativa, como era esperado. Esta variação corresponde a média diária da diferença entre a volatilidade implícita no momento da compra e volatilidade implícita no momento da venda de cada mês. Isto significa que logo após a abertura do mercado, quando efetuamos a venda, a volatilidade estava maior do que no período intermediário do pregão, quando foi feita a compra.

A maior variação ocorreu no mês de julho, em média, a volatilidade implícita dos *strangles* estavam 3,01% menor no momento da compra. Neste mês, no Brasil, ocorreu a greve dos caminhoneiros, fato que causou grande volatilidade no mercado,

principalmente nas ações da Petrobrás. Nos meses seguintes, a volatilidade das estruturas também caíram durante o dia, em julho, em média 1,05% e em agosto 0,43%.

Podemos separar o lucro da estratégia em dois componentes: o lucro/prejuízo obtido com o *strangle* e o lucro/prejuízo obtido com o ativo objeto. A tabela 19 mostra estas quebras.

**Tabela 19 – Quebra Lucro Estratégia**

	<b>P&amp;L Total</b>	<b><i>Strangle</i></b>	<b>PETR4</b>
junho/18	<b>R\$ 2,19</b>	R\$ 1,29	R\$ 0,90
julho/18	<b>R\$ 0,50</b>	R\$ 0,16	R\$ 0,34
agosto/18	<b>R\$ 0,18</b>	R\$ 0,11	R\$ 0,07
	<b>R\$ 2,87</b>	<b>R\$ 1,56</b>	<b>R\$ 1,31</b>

O *strangle* teve lucro em todos os meses. Tal fato mostra que foi possível capturar a variação da volatilidade entre o período de abertura e o período intermediário do pregão. Em junho, período com maior volatilidade, o lucro com o *strangle* também foi o maior, de R\$ 1,29. Em agosto, período com a menor volatilidade da amostra, o lucro foi o menor, de R\$ 0,11. E, em julho, a volatilidade foi menor do que em junho, porém maior do que agosto, assim como o lucro da estrutura, que foi R\$ 0,16.

Adotar o *delta hedge* se mostrou uma boa estratégia. Em todos os meses, a compra e venda do ativo objeto gerou lucro, R\$ 0,90 em junho, R\$ 0,34 em julho e R\$ 0,07 em agosto. Tal fato mostra que conseguimos, com o *delta hedge* estático, compensar o efeito da variação no preço do ativo objeto sobre o *strangle*.

## 6 Conclusão

De maneira geral, os padrões de volume e volatilidade observados nos mercados desenvolvidos, que foram documentados na literatura, também, estão presentes no mercado acionário brasileiro. Concluimos que estas duas variáveis seguem o formato 'U' durante o dia, com algumas particularidades. Como o mercado brasileiro conta com a intensa participação de estrangeiros, a primeira hora, com mais intensa negociação e maior volatilidade, coincide com a abertura do mercado americano, variando, assim, com os horários de verão e inverno. Desse modo, se considerarmos os padrões exibidos pelo volume e pela volatilidade apenas a partir da abertura dos mercados em Nova York, é possível observar o formato 'U'.

Baseando-se nestes padrões, a estratégia traçada, vender volatilidade no início do dia e comprar, em seguida, no período intermediário, de fato, funciona. Durante os meses testados, conseguimos capturar estas variações usando o *strangle*. No entanto, cabem algumas ressalvas. O *back test* só pode ser realizado com ações da Petrobrás (PETR4). Isso porque o mercado brasileiro de opções ainda é muito pouco desenvolvido e a falta de negociação das opções dos demais papeis avaliados inviabilizou o *back test*. Além disso, mesmo com as opções de PETR4, as mais líquidas do mercado, encontramos algumas dificuldades. A falta de liquidez em alguns *strikes* impossibilitou o uso do *straddle* como estratégia.

## Referências

Agarwalla S. K.; Pandey, A. "Expiration-day effects and the impact of short trading breaks on intraday volatility: Evidence from the Indian market." *Journal of Futures Markets*, v. 33, n. 11, p. 1046 - 1070, 2013.

Andersen, T. G.; Bollerslev, T.; Cai, J. "Intraday and interday volatility in the Japanese stock market." *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, v. 10, n. 2, p.107 - 130, 2000.

Brailsford, T.J. "The empirical relationship between trading volume, returns and volatility." *Accounting and Finance*, v. 35, p. 89 - 111, 1996

Buckle, M.; Gwilym, O.; Thomas, S. H.; Woodhams, M. S. "Intraday empirical regularities in interest rate and equity index futures markets, and the effect of macroeconomic announcements. " *Journal of Business Finance & Accounting*, v. 25, n. 7-8, p. 921 - 944, 1998.

Chan, K.; W. M. Fong. "Trade Size, Order Imbalance, and the Volatility-Volume Relation." *Journal of Financial Economics*, v. 57, Issue 2, p. 247 – 273, 2000.

Chaput, J. S.; L. H. E. "Volatility Trade Design." *Wiley Periodicals, Inc. Jrl Fut Mark* 25, p. 243 – 279, 2005.

Clark, P. K. "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices." *Econometrica*, v. 41, p. 135 – 155, 1973.

Copeland, T. E. "A Model of Asset Trading under the Assumption of Sequential Information Arrival." *Journal of Finance*, v. 31, p. 1149 - 1168, 1976.

Crouch, R. L. "The Volume of Transactions and Price Changes on the New York Stock Exchange." *Financial Analysts Journal*, v. 26, p. 104 – 109, 1970.

Da Costa, A. S.; Ceretta, P. S.; Müller, F. M. "Market Microstructure - A high Frequency Analysis of Volume and Volatility Intraday Patterns Across the Brazilian Stock Market." *Revista de Administração da Universidade Federal de Santa Maria*, v. 8, n. 3, p. 455 - 462, 2015.

Darrat, A. F.; Rahman, S.; Zhong, M. "Intraday trading volume and return volatility of the DJIA stocks: a note." *Journal of Banking & Finance*, v. 27, n. 10, p. 2035 - 2043, 2003.

Eaves, J.; Williams, J. "Are Intraday Volume and Volatility U-Shaped After Accounting for Public Information?" *American Journal of Agricultural Economics*, v. 92, n. 1, p. 212 - 227, 2010.

Epps, T. W.; M. L. Epps. "The Stochastic Dependence of a Security Price Chan-

ges and Transaction Volumes: Implications for The Mixture-of-Distributions Hypothesis.” *Econometrica*, v. 44, p. 305 – 321, 1976.

Foster, F. D.; Viswanathan S. “Variations in Trading Volume, Return Volatility, and Trading Costs: Evidence on Recent Price Formation Models.” *The Journal of Finance*, v. 48, n. 1, 187 – 211, 1993.

Gallant, A. R.; Rossi, P. E.; G. Tauchen. “Stock Prices and Volume.” *The Review of Financial Studies*, v. 5, n. 2, p. 199 – 242, 1992.

Godfrey, M. D.; Granger, C. W. J.; Morgenstern, O. “The Random Walk Hypothesis of Stock Market Behaviour.” *Kyklos*, v. 17, p. 1 - 30, 1964,

Granger, C. W. J., and O. Morgenstern. “Spectral Analysis of New York Stock Market Prices.” *Kyklos*, v. 16, p. 1 - 27, 1963.

Jain, P. C.; Joh, G. “The Dependence between Hourly Prices and Trading Volume.” *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 23, n. 3, p. 269 – 283, 1988.

Karpoff, J. M., “The relation between price changes and trading volume: A survey”, *Journal of Financial and quantitative Analysis*, v. 22, n. 1, p. 109 - 126, 1987.

Lee, B.; Rui, O. “The Dynamic Relationship between Stock Returns and Trading Volume: Domestic and Cross-Country Evidence.”, *Journal of Banking and Finance*, v. 26, p. 52 -78.

Lu, W. C.; Lin, F. J. “An Empirical Study of Volatility and Trading Volume Dynamics Using High-Frequency Data”, *The International Journal of Business and Finance Research*, v. 4, n. 3, 2010.

Martens, M. “Forecasting Daily Exchange Rate Volatility using Intraday Returns Model Incorporating Systematic and Unique Risks.” *Journal of International Money and Finance*, v. 20, p. 1 - 23, 2001.

Medeiros, O. R.; Van Doornik, B. F. N. “The empirical relationship between stock returns, return volatility and trading volume in the brazilian stock market”, *Working Paper*, 2006.

Mestel, R.; Gurgul, H.; Majdosz, P. “The Empirical Relationship Between Stock Returns, Return Volatility and Trading Volume on the Austrian Stock Market”, *Research Paper*, 2003.

Nishimura, Y.; Tsutsui, Y.; Hirayama, K. “Return and Volatility Spillovers between Japanese and Chinese Stock Markets FAn Analysis of Overlapping Trading Hours with High-frequency Data,” *Discussion Papers in Economics and Business 12-01*, Osaka University, Graduate School of Economics and Osaka School of International Public Policy (OSIPP).

Osborne, M. F. M. "Brownian Motion in the Stock Market." *Operations Research*, v. 7, p.145 - 173, 1959.

Pfleiderer, P.; Admati, A. R. "A Theory of Intraday Patterns: Volume and Price Variability." *The Review of Financial Studies*, v. 1, n. 1, p. 3 – 40, 1988.

Tauchen, G.; M. Pitts. "The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets." *Econometrica*, v. 51, p. 485 – 505, 1983.

Tilak, G.; Széll, T.; Chicheportiche, R.; Chakraborti, A. "Study of statistical correlations in intraday and daily financial return time series." *Econophysics of Systemic Risk and Network Dynamics*, p. 77 - 104, 2013.

Ying, C. C. "Stock Market Prices and Volumes of Sales." *Econometrica*, v. 34, p. 676 - 686, 1966.