FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA – FGV/EMAp
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

APLICAÇÕES DO MOVIMENTO BROWNIANO EM ANÁLISE COMPLEXA

por VINÍCIUS SOUSA DA SILVA FERREIRA

Rio de Janeiro
2017

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA – FGV/EMAp
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

APLICAÇÃO DO MOVIMENTO BROWNIANO EM ANÁLISE COMPLEXA

"Declaro ser o único autor do presente projeto de monografia que se refere ao plano de trabalho a ser executado para continuidade da monografia e ressalto que não recorri a qualquer forma de colaboração ou auxílio de terceiros para realizá-lo a não ser nos casos e para os fins autorizados pelo professor orientador".

Vinícius Sousa da Silva Ferreira

Orientador: Yuri Fahham Saporito

Rio de Janeiro
2017

VINÍCIUS SOUSA DA SILVA FERREIRA

APLICAÇÃO DO MOVIMENTO BROWNIANO EM ANÁLISE COMPLEXA

"Projeto de Monografia apresentado à Escola de Matemática Aplicada – FGV/EMAp como requisito parcial para continuidade ao trabalho de monografia."

Aprovado em _____de ______________de _______.

Grau atribuído ao Projeto de Monografia: _______.

____

Professor Orientador: Yuri Fahham Saporito
Escola de Matemática Aplicada - FGV/EMAp
Fundação Getulio Vargas

Sumário

1 Introdução

O movimento Browniano (ou processo de Wiener), que além de sua riqueza como um objeto central na teoria dos processos estocásticos, tem propriedades interessantes relacionadas à análise complexa, que estudamos neste trabalho.

Começamos com uma revisão sobre propriedades básicas de espaços de Hilbert, necessárias para a seção seguinte, onde demonstramos a existência do movimento Browniano através de uma representação num espaço L^2. Depois vemos algumas propriedades básicas sobre distribuições e (ir)regularidades nas trajetórias do movimento Browniano.

Em seguida, fazemos a construção da integral de Itô e provamos a fórmula de Itô, que é o resultdo anàlogo ao teorema fundamental do cálculo para esta integral.

Finalmente, estudamos a relação entre o movimento Browniano e o problema de Dirichlet através de seu tempo de saída de conjuntos abertos, o que permite também analisar sua recorrência/transiência. E através da fórmula de Itô, vemos uma relação entre o movimento Browniano e funções holomorfas, o que torna possível a demonstração de teoremas clássicos da análise complexa com ferramentas da probabilidade.

2 Espaços de Hilbert

A construção do movimento Browniano apresentada na próxima seção usa o fato de que o espaço de funções $\mathcal{L}^2[0,1]$ é um espaço de Hilbert. Por isso, nesta seção estudamos as propriedades básicas desses espaços.

Definição: Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que é completo em relação à norma induzida por esse produto interno.

Sabemos que num espaço de dimensão finita, $\mathbb{R}^n$ por exemplo, se temos um conjunto ortonormal de vetores $w_1, w_2, ..., w_n$, então $\forall v \in \mathbb{R}^n$: $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i\rangle w_i$. Uma característica boa dos espaços de Hilbert é que também é possível obter uma base, mas como em geral a dimensão não é finita, cada vetor pode ser representado por uma combinação linear infinita dos vetores da base.

Começamos com uma desigualdade fundamental, que é válida em qualquer espaço vetorial com produto interno (mesmo não sendo completo).

Desigualdade de Bessel: Se $\phi_1, ..., \phi_N$ são vetores ortonormais, então $\forall v \in \mathcal{H}$, temos:

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle v, \phi_n\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

Prova:

$$0 \leq \left\| v - \sum_{n=1}^{N} \langle v, \phi_n\rangle \phi_n \right\|^2 = \langle v - \sum_{n=1}^{N} \langle v, \phi_n\rangle \phi_n, v - \sum_{n=1}^{N} \langle v, \phi_n\rangle \phi_n\rangle =$$

$$\langle v, v\rangle - 2\sum_{n=1}^{N} |\langle v, \phi_n\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle v, \phi_n\rangle|^2 = \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle v, \phi_n\rangle|^2$$

Agora vamos à proposição principal, que será importante na próxima seção.

Proposição: Se $\mathcal{H}$ é espaço de Hilbert e $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um conjunto de vetores ortonormais cujo espaço gerado é denso em $\mathcal{H}$, então $\forall v \in \mathcal{H}$:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, \phi_n\rangle \phi_n$$

Prova: Vamos provar primeiro 3 afirmações.

I: A proposição vale para todos vetor v no espaço gerado por $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Se v está no espaço gerado, então ele é combinação linear finita de alguma subcoleção de vetores de $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja, existem $n_1 < ... < n_k$ tais que $v = \sum_{i=1}^{k} c_i\phi_{n_i}$, onde $c_1, ..., c_k$ são números complexos. Tomando produto interno, temos que $\forall n$:

$$\langle v, \phi_n\rangle = \langle\sum_{i=1}^{k} c_i\phi_{n_i}, \phi_n\rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i\langle\phi_{n_i}, \phi_n\rangle = \begin{cases} c_n, \text{ se } n \in \{n_1, ..., n_k\} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

pois os ϕ_n são ortonormais. Então temos de fato que $v = \sum_{n=1}^{\infty}\langle v, \phi_n\rangle\phi_n$

II: $\forall w \in \mathcal{H}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n \in \mathcal{H}$ e vale a igualdade $\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle w, \phi_n\rangle|^2$:

Primeiro, observamos que $\forall w \in \mathcal{H}$ e $N \geq 1$, $\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N}|\langle w, \phi_n\rangle|^2$ por ortonormalidade e pelo teorema de Pitágoras. E tomando $N \to \infty$ na desigualdade de Bessel, temos: $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle w, \phi_n\rangle|^2 \leq \|w\|^2$. Então, pela convergência dessa série, para $M \geq N \geq 1$:

$$\left\|\sum_{n=1}^{M}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n - \sum_{n=1}^{N}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n\right\|^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{M}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n\right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M}|\langle w, \phi_n\rangle|^2 \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$$

Isso mostra que $\left(\sum_{n=1}^{N}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n\right)_{N\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy, logo pela completude de $\mathcal{H}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n \in \mathcal{H}$.

E para provar que $\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle w, \phi_n\rangle|^2$, basta tomar $N \to \infty$ em $\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle w, \phi_n\rangle\phi_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N}|\langle w, \phi_n\rangle|^2$.

III: A aplicação $w \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \langle w, \phi_n \rangle \phi_n$ é contínua:

De fato, $\forall w \in \mathcal{H}$: $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle w, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle w, \phi_n \rangle|^2 \leq \|w\|^2$. Agora, se $w_1, w_2 \in \mathcal{H}$, aplicando essa desigualdade para $w_1 - w_2$: $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle w_1 - w_2, \phi_n \rangle \phi_n \right\| \leq \|w_1 - w_2\|$. Logo, a aplicação $w \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \langle w, \phi_n \rangle \phi_n$ é Lipschitz, portanto contínua.

Para terminar a proposição, seja $w \in \mathcal{H}$. Existe uma sequência $(w_m)_{m \in \mathbb{N}} \xrightarrow[m \to \infty]{} w$ onde (w_m) está no espaço gerado por $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pois este é denso em $\mathcal{H}$. Temos que $\|w_m\| \xrightarrow[m \to \infty]{} \|w\|$, e por outro lado:

$$\|w_m\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle w_m, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 \xrightarrow[m \to \infty]{} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle w, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle w, \phi_n \rangle|^2$$

Onde a primeira igualdade é justificada por **I**, o limite por **III** e a última igualdade por **II**. Logo $\|w\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle w, \phi_n \rangle|^2$, essa igualdade é conhecida como **identidade de Parseval**. Agora para provar que $w = \sum_{n=1}^{\infty} \langle w, \phi_n \rangle \phi_n$, vemos que assim como na demonstração da desigualdade de Bessel, para $N \geq 1$:

$$\left\| w - \sum_{n=1}^{N} \langle w, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \|w\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle w, \phi_n \rangle|^2 \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

o que conclui a prova.

A partir de agora, quando tivermos uma coleção $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormal com espaço gerado denso no espaço total, chamaremos essa conjunto de base (apesar das combinações lineares serem infinitas). $\square$

Podemos obter ainda uma generalização da identidade de Parseval mencionada acima: $\langle v, w\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle v, \phi_n\rangle\overline{\langle w, \phi_n\rangle}$. Para provar ela, primeiro justificamos que podemos passar o somatório para fora do produto interno: $\langle\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n, w\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle c_n v_n, w\rangle$, onde $c_n \in \mathbb{C}$ e $v_n, w \in \mathcal{H}$.

De fato, como $\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$ converge, temos que $\left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n v_n\right\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\left|\langle\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n, w\rangle - \sum_{n=1}^{N}\langle c_n v_n, w\rangle\right| = \left|\langle \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n v_n, w\rangle\right| \leq \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n v_n\right\| \|w\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Agora usando esse fato e a proposição anterior temos $\forall v, w \in \mathcal{H}$:

$$\langle v, w\rangle = \langle\sum_{n=1}^{\infty}\langle v, \phi_n\rangle\phi_n, \sum_{m=1}^{\infty}\langle w, \phi_m\rangle\phi_m\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle\langle v, \phi_n\rangle\phi_n, \langle w, \phi_m\rangle\phi_m\rangle$$

Por ortonormalidade, os produtos internos acima são zero quando $n \neq m$, logo:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\langle v, \phi_n\rangle\phi_n, \langle w, \phi_n\rangle\phi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle v, \phi_n\rangle\overline{\langle w, \phi_n\rangle}\langle\phi_n, \phi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle v, \phi_n\rangle\overline{\langle w, \phi_n\rangle}$$

o que conclui a demonstração.

3 Movimento Browniano

3.1 Construção

O movimento Browniano é um processo estocástico $(B_t)_{t\geq 0}$, tal que:
I) $B_0 = 0$
II) $\forall\ 0 \leq t_0 < ... < t_n$: os incrementos $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ têm distribuição $\mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$ e são independentes.
III) B_t é contínuo em t.

Definimos as sigma-álgebras $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s; s \leq t)$, e $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, será denotada como a filtração natural do movimento Browniano.

As coleções $B_{t_0}, ..., B_{t_n}$ são denominadas **projeções finito-dimensionais** e a propriedade II implica que o movimento Browniano é um processos Gaussiano, ou seja, suas projeções finito-dimensionais sempre formam um vetor Gaussiano. Uma propriedade importante da distribuição normal é que sua média e matriz de covariância determinam completamente a distribuição e no caso do movimento Browniano é bem simples calculá-las.

Dados $0 \leq t_0 < ... < t_n$, diretamente da propriedade II, temos: $\mathbb{E}\left[B_{t_i}\right] = 0\ \forall i$ e para $i \leq j$: $\mathbb{E}\left[B_{t_i} B_{t_j}\right] = \mathbb{E}\left[B_{t_i}(B_{t_i} + B_{t_j} - B_{t_i})\right] = \mathbb{E}\left[B_{t_i}^2\right] + \mathbb{E}\left[B_{t_i}\right]\mathbb{E}\left[B_{t_j} - B_{t_i}\right] = t_i$. Logo para i, j quaisquer, temos $Cov(B_{t_i}, B_{t_j}) = t_i \wedge t_j$.

Reciprocamente, se $(B_{t_0}, ..., B_{t_n})$ tem média zero e matriz de covariância $t_i \wedge t_j$, então para $i < j$, temos $t_i < t_{i+1} \leq t_j < t_{j+1}$, logo:

$$
\begin{aligned}
&Cov(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}, B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) = \\
&Cov(B_{t_{i+1}}, B_{t_{j+1}}) - Cov(B_{t_{i+1}}, B_{t_j}) - Cov(B_{t_i}, B_{t_{j+1}}) + Cov(B_{t_i}, B_{t_j}) = \\
&t_{i+1} - t_{i+1} + t_i - t_i = 0
\end{aligned}
$$

E a partir disso, temos $Var(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = Cov(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}, B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = t_{i+1} - t_i$. Logo o vetor gaussiano $(B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_{n+1}} - B_{t_n})$ tem a distribuição descrita na propriedade II. Portanto uma definição equivalente do movimento Browniano é trocarmos a propriedade II por:
II') $\forall\ 0 \leq t_0 < ... < t_n$: $(B_{t_0}, ..., B_{t_n})$ é um vetor gaussiano com média $(0, ..., 0)$ e $Cov(B_{t_i}, B_{t_j}) = t_i \wedge t_j$

A ideia para construirmos o movimento Browniano primeiro no intervalo $[0,1]$ é fazer uma ligação entre a função de covariância e o produto interno natural do espaço $L^2[0,1]$ $\left(\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx\right)$, e obtermos uma representação do movimento Browniano através de um conjunto ortonormal.

Mais precisamente, observe que se $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base para $L^2[0,1]$, então pela identidade de Parseval: $t\wedge s = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t]}(x)\mathbb{1}_{[0,s]}(x)dx = \sum_{n\geq 0}\int_0^t \phi_n(x)dx\int_0^s \phi_n(x)dx$. Se definirmos $B_t = \sum_{n\geq 0} Z_n \int_0^t \phi_n dx$ de forma que a convergência da soma seja uniforme, podemos provar que B_t é um movimento Browniano.

De fato, vemos trivialmente que $B_0 = 0$ e que como cada ϕ_n é integrável, $Z_n\int_0^t \phi_n dx$ é contínuo em t, logo por convergência uniforme, o limite também é contínuo. Falta checar somente as distribuições finito dimensionais. Seja $0\leq t_0 < ... < t_m \leq 1$. Lembramos que a função característica de uma distribuição normal multivariada de dimensão m com média μ e covariância Σ é $\xi(y) := \exp\left(iy^T\mu - \frac{1}{2}y^T\Sigma y\right)$ e que a função característica determina a distribuição. Logo para provar que $\tilde{X} := (X_{t_0},...,X_{t_m})$ é um vetor Gaussiano com matriz de covariância $\Sigma_{i,j} = t_i\wedge t_j$, e média $\mu = (0,...,0)$, basta mostrarmos que
$\forall\ y = (y_0,...,y_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$: $\mathbb{E}\left[e^{iy\cdot\tilde{X}}\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{1\leq j,k\leq m} y_jy_kt_j\wedge t_k\right]$. De fato, temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{iy\cdot\tilde{X}}\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{j=0}^m iy_jX_{t_j}\right)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=0}^m y_j\sum_{n\geq 0} Z_n\int_0^{t_j}\phi_n dx\right)\right] = \\ &= \prod_{n\geq 0}\mathbb{E}\left[\exp\left(iZ_n\sum_{j=0}^m y_j\int_0^{t_j}\phi_n dx\right)\right]\end{aligned}$$

Mas note que o termo geral deste produtório é a função característica da variável $Z_n\sim\mathcal{N}(0,1)$ aplicada em $\sum_{j=0}^m y_j\int_0^{t_j}\phi_n dx$, que é igual a:

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^m y_j\int_0^{t_j}\phi_n dx\right)^2\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{0\leq j,k\leq m} y_jy_k\int_0^{t_j}\phi_n dx\int_0^{t_k}\phi_n dx\right]$$

.

Substituindo acima, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iy\cdot\tilde{X}}\right] &= \prod_{n\geq 0}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{0\leq j,k\leq m} y_j y_k \int_0^{t_j}\phi_n dx\int_0^{t_k}\phi_n dx\right] = \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{0\leq j,k\leq m} y_j y_k \sum_{n\geq 0}\int_0^{t_j}\phi_n dx\int_0^{t_k}\phi_n dx\right] = \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{1\leq j,k\leq m} y_j y_k t_j\wedge t_k\right],
\end{aligned}$$

assim como queríamos. $\square$

Agora para concluir a construção do movimento Browniano, basta acharmos uma base $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n\geq 0} Z_n \int_0^t \psi_n dx$ converge uniformemente. De fato, a base mais simples possível para $L^2[0,1]$ já resolve o problema. Definimos a sequência $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por: $\psi_0(t) = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}(t) - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t)$ e $\psi_n(t) = 2^{\frac{k}{2}}\phi_0(2^k t - r)$, onde $n = 2^k + r$ com $0 \leq r < 2^k$. Vemos que é possível aproximar qualquer indicadora de um intervalo diádico usando a sequência ψ_n, logo seu espaço gerado é denso em $L^2[0,1]$. Também temos que $\int_0^1 \psi_n^2 dx = 1$ e se $n < m$, então $\{\phi_n \neq 0\} \cap \{\phi_m \neq 0\} = \emptyset$ o que nos dá $\phi_n\phi_m = 0$ ou então temos $\{\phi_n \neq 0\} \subset \{\phi_m = 1\}$ ou $\{\phi_n \neq 0\} \subset \{\phi_m = -1\}$, o que nos dá $\phi_n\phi_m = \pm\phi_n$, logo em qualquer caso temos $\int_0^1 \phi_n\phi_m dx = 0$, já que $\int_0^1 \phi_n dx = 0$. Portanto a sequência $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fato forma uma base para $L^2[0,1]$, e ela é conhecida como os Wavelets de Haar.

Agora estudamos o comportamento assintótico de $Z_n \int_0^t \psi_n dx$ para concluir. Primeiro começamos com um limite superior para $\int_0^t \psi_n dx$:

$$\int_0^t \psi_n dx = \int_0^t 2^{\frac{k}{2}}\psi_0(2^k s - r)ds = \int_{-r}^{2^k t - r} 2^{\frac{k}{2}}\psi_0(s)2^{-k}ds = 2^{-\frac{k}{2}}\int_{-r}^{2^k t - r}\psi_0(s)ds \leq 2^{-\frac{k}{2}}$$

Finalmente, com uma cota simples na distribuição gaussiana e uma aplicação do lema de Borel-Cantelli, provaremos a seguinte propriedade da sequência Z_n:

$$\exists\ C \text{ finita quase certamente, tal que } Z_n \leq C\sqrt{\log n}\ \forall n \geq 1.$$

Para $t \geq 1$, temos:

$$\mathbb{P}(|Z_n| \geq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Podemos tomar valores de t adequados de forma que a $\mathbb{P}(|Z_n| \geq t)$ fique somável, por exemplo, fazendo $t = \sqrt{2a \log n}$ com $a > 1$, temos $\mathbb{P}(|Z_n| \geq t) \leq \frac{2}{n^a \sqrt{2\pi}}$

Logo, pelo lema de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\frac{|Z_n|}{\sqrt{2a \log n}} \geq 1$ infinitas vezes$) = 0$. Então, definindo $C := \sup_{n \geq 2} \frac{|Z_n|}{\sqrt{2a \log n}}$, temos as propriedades desejadas.

Aplicandos essas desigualdades, temos para $N \geq 2$:

$$\sum_{n > 2^N} Z_n \int_0^t \psi_n dx = \sum_{k > N} \sum_{r=0}^{k} Z_{2^k + r} \int_0^t \psi_{2^k + r} dx \leq C \sum_{k > N} \sum_{r=0}^{k} 2^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\log (2^k + r)} \leq$$

$$\leq C \sum_{k > N} 2^{-\frac{k}{2}} \sum_{r=0}^{k} \sqrt{\log 2^{k+1}} = C \sqrt{\log 2} \sum_{k > N} 2^{-\frac{k}{2}} (k+1) \sqrt{k+1} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

O que conclui a prova de que a soma converge uniformemente e portanto $B_t := \sum_{n \geq 0} Z_n \int_0^t \psi_n dx$ é um movimento Browniano. $\square$

3.2 Algumas propriedades

Primeiro observamos que também existe o movimento Browniano em $d \geq 2$ dimensões. Na definição, mantemos as propriedades I e III, ou seja, ele começa na origem e é contínuo em t e basta modificarmos a propriedade II para uma distribuição multivariada:

II") Para quaisquer $0 \leq t_0 < ... < t_n$, os vetores $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ são gaussianos com covariância $(t_{i+1} - t_i)Id$ e são independentes.

Ou seja, um movimento Browniano em $\mathbb{R}^d$ é basicamente um processo cujas coordenadas são d movimentos Brownianos independentes.

Temos três propriedades importantes do movimento Browniano que seguem direto da definição:

1) Markov simples: $\forall a \in \mathbb{R} : (B_{t+a} - B_t)_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano independente de $\mathcal{F}_a$.

2) Invariância por isometria: Se ϕ é uma transformação linear que preserva distância, então $\phi(B_t)_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano

3) Invariância por mudança de escala: $\forall \delta > 0$, $(\frac{1}{\delta} B_{\delta^2 t})_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano.

Uma versão bem mais forte da propriedade 1, conhecida como propriedade forte de Markov, também é válida para o movimento Browniano (ver [3],[4]).

Lembrando que T é um tempo de parada em relação à uma filtração $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, se $\forall t \geq 0$: o evento $\{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$. A propriedade de Markov forte para o movimento Browniano diz que se T é um tempo de parada em relação à filtração natural $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ finito quase certamente, então $(B_{t+T} - B_T)_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano independente de $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty;\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\ \forall t \geq 0\}$.

Outra propriedade relacionada a mudança de tempo, assim como a 3 é a inversão de tempo do movimento Browniano, que diz que $tB_{1/t}$ também é um movimento Browniano.

Agora, sobre a suavidade do movimento Browniano, veremos algumas propriedades sobre seu módulo de continuidade e sobre sua variação. Vamos demonstrar o seguinte resultado sobre sua variação quadrática.

Proposição: O movimento Browniano tem variação quadrática finita, no sentido que se $P = \{0 = t_0 < ... < t_n = t\}$, então:

$$\sum_{i=1}^{n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow[|P| \to 0]{} t \text{ em } L^2$$

Prova: Veja que como $(B_s)_{s \geq 0}$ é um martingal e $\mathbb{E}\left[B_s\right] = s$, temos que $(B_s^2 - s)_{s \geq 0}$ também é um martingal, logo:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - t\right)^2\right] = \\
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\right)^2\right] = \\
&\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})^2\right] = \\
&\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4 - 2(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2(t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})^2\right] = \\
&\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4\right] - (t_i - t_{i-1})^2\right) = \\
&\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2\left(\mathbb{E}\left[\frac{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4}{(t_i - t_{i-1})^2}\right] - 1\right)
\end{aligned}$$

Agora, vemos que $(t_i - t_{i-1})^2 \leq |P|(t_i - t_{i-1})$, e como $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$, temos $\forall i : \mathbb{E}\left[\frac{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4}{(t_i - t_{i-1})^2}\right] = \alpha$, onde $\alpha = \mathbb{E}\left[N^4\right]$, para $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, logo este último termo é limitado por:

$$|P| \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})(\alpha - 1) = |P| t(\alpha - 1) \xrightarrow[|P| \to 0]{} 0,$$

o que nos permite concluir a convergência em L^2.

A convergência da variação quadrática implica por exemplo que o movimento Browniano tem p-variação infinita para todo $1 \leq p < 2$. Para mostrar isso, veja que como a convergência da variação quadrática é em L^2, ela também converge em probabilidade, logo existe uma sequência de partições $P_k = \{0 = t_0^k < ... < t_{n_k}^k = t\}$ com $|P_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ tal que a variação converge quase certamente para t. Também veja que o movimento Browniano é uniformemente contínuo em $[0,t]$ quase certamente, logo para $\delta > 0$, o módulo de continuidade $\omega(\delta, t) = \sup_{s,s' \leq t,\ |s-s'|<\delta} |B_s - B_{s'}|$ é quase certamente finito e $\omega_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$. Logo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n_k} (B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^2 &= \sum_{i=1}^{n_k} (B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^p (B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^{2-p} \\ &\leq \omega(|P_k|, t)^{2-p} \sum_{i=1}^{n_k} (B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^p\end{aligned}$$

Veja que mandando $k \to \infty$ temos $\sum_{i=1}^{n_k} (B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} t$, enquanto $\omega_{|P_k|}^{2-p} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, logo devemos ter que $\sum_{i=1}^{n_k} (B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^p \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, portanto a p-variação é infinita quase certamente.

Uma outra propriedade de irregularidade do movimento Browniano, além da variação infinita, é que ele quase certamente não é diferenciável em nenhum ponto. Por outro lado temos o fato que ele é α-Holder contínuo para $\alpha < 1/2$ (ver [1]) e essa propriedade da variação quadrática finita, que tem uma versão ainda mais forte que será importante na próxima seção para a fórmula de Itô (ver [2]): se $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\sum_{i=1}^{n} f(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow[|P|\to 0]{} \int_0^t f(B_s)ds$ em L^2.

4 Integral de Itô

4.1 Construção da integral

A estratégia para construírmos a integral de Itô é semelhante à da integral de Lebesgue. Primeiro definimos qual a classe de processos que estamos interessados em integrar, depois definimos a integral para uma classe menor análoga a funções simples que provaremos ser densa na classe inicial e extenderemos a definição tomando limites.

Como os processos estocásticos são funções do tipo $X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, devemos impor alguma condição de mensurabilidade em nossas funções a serem integradas. Definimos um processo ser **adaptado** a uma filtração $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ em Ω se $X_t(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{G}_t$ mensurável $\forall t \geq 0$.

A classe dos processos a serem integrados será então $\mathcal{H}^2$, que é definida pelos processos $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ mensuráveis, tais que $\mathbb{E} \displaystyle\int_0^\infty X(s,\omega)^2 ds < \infty$ e que são adaptados a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Onde $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; s \leq t)$ é a filtração natural do movimento Browniano e $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\displaystyle\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$

Consideramos inicialmente a classe $\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2$ que são os processos da forma $X(t,\omega) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)$, onde $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ e a_i é $\mathcal{F}_{t_i}$-mensurável $\forall i$ (essa última condição é o que garante que X é adaptado).

Para essa classe $\mathcal{H}_0^2$, definimos a integral de Itô, que inicialmente denotaremos por I, como $I(X)(\omega) := \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$, (note que dessa forma estamos definindo uma variável aleatória). Agora para extendermos a integral para $\mathcal{H}^2$ vamos provar que $\mathcal{H}_0^2$ é denso em $\mathcal{H}^2$ na norma $L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$.

Vamos provar o resultado desejado em 3 passos:

I) Os processos adaptados e limitados são densos em $\mathcal{H}^2$

II) Os processos adaptados limitados e contínuos q.c são densos nos adaptados e limitados.

III) $\mathcal{H}_0^2$ é denso nos processos adaptados limitados e contínuos q.c.

Prova de I: Seja $X \in \mathcal{H}^2$. Definimos a sequência limitada X_n truncando X: $X_n(t,\omega) := X(t,\omega) \wedge n$. Vemos que X_n é adaptados pois é o mínimo entre dois processos adaptados. Como $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ pontualmente e $X \in L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$ pela definição de $\mathcal{H}^2$, temos $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ em $L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$ por convergência dominada.

Prova de II: Seja X adaptado e limitado. Tomamos agora nossa sequência X_n como a média de X apenas por valores "no passado": $X_n(t,\omega) := n \displaystyle\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} X(s,\omega)ds$. Vemos que cada soma de Riemann $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X(t_i,\omega)(t_i - t_{i-1})$ onde $t - \frac{1}{n} = t_0 < t_1 < ... < t_k = t$, é adaptada pois X é adaptados e em cada parcela da soma só tomamos $t_i < t$, logo o limite das somas, que é X_n também é P.M. Agora para ver que X_n é contínuo, tome $M > 0$ tal que $|X| < M$, então:

$$|X_n(t+\delta,\omega) - X_n(t,\omega)| = n \left| \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\delta+\frac{1}{n}} X(s,\omega)ds + \int_{t}^{t+\delta} X(s,\omega)ds \right| \leq 2n\delta M \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

Finalmente para provar a convergência, temos que $X \in L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$, pois é limitado, logo: $n \displaystyle\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} X(s,\omega)ds \xrightarrow[n\to\infty]{} X(t,\omega)$ quase certamente, e portanto novamente por convergência dominada temos a convergência em L^2 também.

Prova de III: Por último, se X é adaptado contínuo e limitado, basta tomarmos X_n como funções simples na variável real assim como as funções escada que usamos para somas de Riemann: $X_n(t,\omega) := \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} X\left(\frac{i}{n},\omega\right) \mathbb{1}_{[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n})}(t)$. Vemos direto da definição que $X_n \in \mathcal{H}_0^2$ e novamente temos $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ pontualmente e em L^2.

Agora que sabemos que $\mathcal{H}_0^2$ é denso em $\mathcal{H}^2$, podemos definir para $X \in \mathcal{H}^2$ como $I(X) = \lim_{n\to\infty} I(X_n)$ (limite em $L^2(d\mathbb{P})$ onde X_n é uma sequência em $\mathcal{H}_0^2$ que converge para X. Para que essa definição faça sentido, precisamos provar antes que quando uma sequência X_n em $\mathcal{H}_0^2$ converge, $I(X_n)$ também converge e que para $X \in \mathcal{H}^2$ a definição de $I(X)$ não dependa da escolha da sequência em $\mathcal{H}_0^2$ convergindo para X. A demonstração desses fatos se torna bastante simples com a isometria de Itô.

Isometria de Itô: Se $X \in \mathcal{H}_0^2$, então $\mathbb{E}[I(X)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty X(s,\omega)^2 ds\right]$

Prova: Temos que X é da forma: $X(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})(t)}$, com $a_i \in \mathcal{F}_{t_i}$. Então $\mathbb{E}\left[I(X)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2\right]$. Mas pela propriedade dos incrementos independentes, para $i \neq j : (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) = 0$ $\mathbb{P}$-quase certamente, pois sua esperança é zero, logo $\mathbb{E}\left[a_i a_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] = 0$. Então a esperança se reduz a $\mathbb{E}\left[I(X)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[a_i^2\right](t_{i+1} - t_i)$. Por outro lado, temos: $X(s,\omega)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})(t)}$, logo $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty X(s,\omega)^2 ds\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[a_i^2\right](t_{i+1} - t_i)$ e obtemos a igualdade.

Agora, para terminar a definição de $I(X)$, provamos o seguinte resultado:

Proposição: Se $X \in \mathcal{H}^2$ e $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_0^2$, tal que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ em $L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$. Então $I(X_n)$ é uma sequência convergente em $L^2(d\mathbb{P})$ e se $\{X'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é outra sequência em $\mathcal{H}_0^2$ convergindo para X em $L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$, então $\|I(X_n) - I(X'_n)\|_{L^2(d\mathbb{P})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Prova: Como a convergência ocorre na norma $L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$, temos que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência Cauchy na norma $L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$, e pela isometria de Itô, temos: $\|I(X_m) - I(X_n)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = \|X_m - X_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\otimes dt)} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$, ou seja, $\{I(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(d\mathbb{P})$ e portanto converge nessa norma.

Agora seja $\{X'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ outra sequência em $\mathcal{H}_0^2$ convergindo para X em $L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$, assim: $\|X_n - X'_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\otimes dt)} \leq \|X_n - X\|_{L^2(d\mathbb{P}\otimes dt)} + \|X'_n - X\|_{L^2(d\mathbb{P}\otimes dt)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e usando novamente a Isometria de Itô, concluímos: $\|I(X_n) - I(X'_n)\|_{L^2(d\mathbb{P})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

A integral de Itô de um processo X_s num intervalo, por exemplo a integral de 0 a t, naturalmente é dada por $I(X^{(t)})$, onde $X_s^{(t)}(\omega) = X_s \mathbb{1}_{s \leq t}$. Note que dessa forma, para cada t construímos uma variável aleatória, mas estamos interessados em um processos estocástico que engloba todas essas integrais, ou seja, tal que $H_t(\omega) = I(X^t(\omega))$. O problema é que como a integral é definida como um limite em L^2, ela só é bem definida quase certamente, logo se declaramos H_t diretamente como $H_t(\omega) = I(X^t(\omega))$, isso não estaria bem definido pois estamos tomando um conjunto não enumerável de variáveis. Mas é possível provar (ver [1],[2],[3]) que de fato existe um martingal com respeito à filtração do movimento Browniano, contínuo tal que $H_t(\omega) = I(X^t(\omega))$

Uma outra propriedade interessante da integral de Itô é que para f contínua, a integral admite uma representação como limite de somas de Riemann (ver [1]):

$$\sum_{i=1}^{n} f(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \xrightarrow[|P|\to 0]{} \int_0^t f(B_s)dB_s \text{ em probabilidade}$$

(como sempre $P = \{0 = t_0 < ... < t_n = t\}$).

4.2 Fórmula de Itô

Agora mostramos o resultado equivalente ao teorema fundamental do cálculo para a integral de Itô. Neste caso não temos a fórmula tradicional $\int_0^t f'(B_s)dB_s = f(B_t) - f(0)$. Para a integral de Itô, um termo envolvendo a segunda derivada de f também aparece, devido à variação quadrática do movimento Browniano.

Fórmula de Itô: Se $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então:

$$f(B_t) - f(0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$$

Prova: Pelos resultados anteriores, sabemos que existe uma sequência de partições $P_k = \{0 = t_0^k < ... < t_{n_k}^k = t\}$, tal que:

$$\sum_{i=1}^{n_k} f'(B_{t_{i-1}^k})(B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^t f(B_s)dB_s$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} f''(B_{t_{i-1}^k})(B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^t f''(B_s)ds$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} (B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} t$$

Agora lembrando da fórmula de Taylor com resto integral:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(x)}{2}(y-x)^2 + \int_x^y (y-v)(f''(u) - f''(x))dv,$$

o que nos dá $\left| f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) - \frac{f''(x)}{2}(y-x)^2 \right| \leq (y-x)^2\omega(\delta, y)$ para $|x-y| \leq \delta$, onde $\omega(\delta, y) = \sup_{u,v\in[0,t],\ |u-v|\leq\delta} |f(u) - f(v)|$.

E escrevendo $f(B_t) - f(0)$ como soma telescópica sobre as partições P_k, temos:

$$\left| f(B_t) - f(0) - \sum_{i=1}^{n_k} f'(B_{t_{i-1}^k})(B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}) - \sum_{i=1}^{n_k} \frac{f''(B_{t_{i-1}^k})}{2}(B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^2 \right| =$$
$$\left| \sum_{i=1}^{n_k} f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}}) - f'(B_{t_{i-1}^k})(B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}) - \frac{f''(B_{t_{i-1}^k})}{2}(B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^2 \right| \leq$$
$$\sum_{i=1}^{n_k} \omega(|P_k|, B_{t_i})(B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^2 \leq \omega\left(|P_k|, \sup_{1\leq i\leq n_k} |B_i|\right) \sum_{i=1}^{n_k} (B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k})^2$$

Mandando $k \to \infty$, temos que a primeira expressão converge quase certamente para $\left|f(B_t) - f(0) - \int_0^t f'(B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds\right|$. Já essa última converge para zero, pois o somatório converge para t (variação quadrática) e o módulo converge para zero por causa da continuidade de f e do movimento Browniano. Logo concluímos que $\left|f(B_t) - f(0) - \int_0^t f'(B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds\right| = 0$, o que prova a fórmula de Itô.

A fórmula de Itô admite extensão para dimensões maiores. Para $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ e $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ o movimento Browniano em d dimensões, temos:

$$f(B_t) - f(0) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(B_s) dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(B_s) ds$$

Ou usando a notação do gradiente e Laplaciano:

$$f(B_t) - f(0) = \int_0^t \nabla f(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B_s) ds$$

5 Algumas aplicações

5.1 Problema de Dirichlet e funções harmônicas

Lembrando que uma função $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é dita harmônia se seu Laplaciano é zero, ou seja, $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$. Outras duas formulações equivalentes dessa propriedade são:

i) Se $\bar{B}(x,r) \subset U$: $f(x) = \dfrac{1}{\lambda(B(x,r))} \displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)dy$

ii) Se $\bar{B}(x,r) \subset U$: $f(x) = \displaystyle\int_{\partial B(x,r)} f(y)d\sigma_{x,r}(y)$

Onde λ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ e $\sigma_{x,r}$ é a probabilidade uniforme na esfera $\partial B(x,r)$, mais precisamente:

$$\text{Para } A \in \partial(B(x,r)) : \sigma_{x,r}(A) = \frac{\lambda\{y \in B(x,r);\ \exists t \in [0,r] :\ x + t(y-x) \in A\}}{\lambda(B(x,r))}$$

O problema de Dirichlet é: Dado $U \subset \mathbb{R}^d$ um aberto conexo limitado e uma função $g : \partial U \to R$ contínua, achar uma função $h : \bar{U} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $h|_{\partial U} = g$ e $h|_U$ é harmônica.

Uma propriedade interessante é que a solução pode ser descrita em termos do movimento Browniano:

Proposição: Dados U e g como no enunciado acima: Seja $T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin U\}$, então $h : U \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \mathbb{E}_x [g(B_T)]$ é harmônica.

(Aqui $\mathbb{E}_x$, significa que estamos tomando a esperança em relação ao movimento Browniano começando em x).

Prova: A ideia da prova é ver que pela invariância por isometria, o valor do movimento Browniano na primeira vez que ele toca um círculo centrado no ponto de partida tem distribuição uniforme, o que nos permitirá usar a última caracterização das funções harmônicas.

Mais precisamente, para $x \in U$, tome $r > 0$ tal que $\bar{B}(x,r) \subset U$ e defina o tempo de parada $S := \inf\{t \geq 0; B_t \notin B(x,r)\} = \inf\{t \geq 0; B_t \in \partial B(x,r)\}$ (para o movimento Browniano saindo de x).

Veja que pela invariância por isometria do movimento Browniano, B_S tem distribuição invariante por isometrias na esfera $\partial B(x,r)$, mas a única distribuição com essa propriedade é justamente $\sigma_{x,r}$. E como $B(x,r) \subset U$, temos que $S < T$ e pela propriedade forte de Markov, $(B_{S+t})_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano saindo de B_S, logo pela definição de h, temos que $\mathbb{E}_x\left[g(B_T)|\mathcal{F}_S\right] = h(B_S)$. Tomando esperança dos dois lados temos então:

$$h(x) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[g(B_T)|\mathcal{F}_S\right]\right] = \mathbb{E}_x\left[h(B_S)\right] = \int_{\partial B(x,r)} h(y)d\sigma_{x,r}(y)$$

Portanto h satisfaz a propriedade do valor médio (iii) descrita acima, logo é harmônica. $\square$

OBS: Na proposição acima mostramos apenas que h é harmônica, mas é possível também mostrar (ver [2],[4]) que com algumas condições de regularidade no bordo de U, temos que para $x \in \partial U$: $\lim_{y\to x, y\in U} \mathbb{E}_y\left[g(B_T)\right] = g(x)$, o que mostra que a função h se extende continuamente para ∂U e coincide com g, logo h dá de fato uma solução para o problema.

Podemos aplicar esse resultado para estudar a recorrência/transiência do movimento Browniano. Considere o aberto $U = \{x \in \mathbb{R}^d; r < \|x\| < R\}$ e a função $g : \partial U \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \mathbb{1}_{\partial B(0,r)}(x)$. Seja $T_r = \inf\{t \geq; B_t \in \partial B(0,r)\}$, $T_R = \inf\{t \geq; B_t \in \partial B(0,R)\}$ e $T_U = \inf\{t \geq; B_t \in \partial U\}$. Como $\partial U = \partial B(0,r) \cup \partial B(0,R)$, temos que $T_U = T_r \wedge T_R$ e pelo resultado anterior, a solução para o problema de Dirichlet em relação a U e g é $h(x) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\partial B(0,r)}(B_{T_U})\right] = \mathbb{P}_x\left[T_r < T_R\right]$.
Por outro lado, é possível obter a solução explícita para esse problema (ver [2],[4]), que é:

$$\mathbb{P}_x\left[T_r < T_R\right] = \begin{cases} \frac{R-|x|}{R-r}, \text{ se } d = 1 \\ \frac{\log R - \log\|x\|}{\log R - \log r}, \text{ se } d = 2 \\ \frac{R^{2-d} - \|x\|^{2-d}}{R^{2-d} - r^{2-d}}, \text{ se } d > 3 \end{cases}$$

E mandando $R \to \infty$, temos:

$$\mathbb{P}_=\left[T_r < \infty\right] \begin{cases} 1, \text{ se } d = 1 \text{ ou } 2 \\ \frac{r^{d-2}}{\|x\|^{d-2}}, \text{ se } d > 2 \end{cases}$$

Portanto, o movimento Browniano é recorrente em dimensões 1 e 2, e transiente em dimensões $d > 2$.

5.2 Funções holomorfas

Uma outra propriedade importante relacionando funções harmônicas e o movimento Browniano é que $(h(B_t))_{t\geq 0}$ é um martingal. Dessa vez o fato que nos ajuda a provar essa propriedade é que as funções harmônicas anulam o termo de segunda ordem na fórmula multidimensional de Itô, o que nos deixa com:

$$h(B_t) - h(B_0) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} h(B_v) dB_v^{(i)}$$

Logo, para $s \leq t : h(B_t) - h(B_s) = \sum_{i=1}^{d} \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} h(B_v) dB_v^{(i)} - \int_0^s \frac{\partial}{\partial x_i} h(B_v) dB_v^{(i)} \right)$.
Lembrando que a integral de Itô é um martingal com respeito à filtração do movimento Browniano, temos $\mathbb{E}\left[h(B_t) - h(B_s) | \mathcal{F}_s\right] = 0$, o que prova que $h(B_t)$ é um martingal.

Para o movimento Browniano em duas dimensões e f uma função holomorfa, temos algo ainda mais forte. Neste caso, é possível provar que se f é holomorfa, então $(f(B_t))_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano com uma mudança de tempo (ver [2],[8]). Mais precisamente, temos que existe outro movimento Browniano B'_t tal que $f(B_t) = B'_{\zeta(t)}$, onde $\zeta(t) = \int_0^t |f'(B_t)|^2 dt$

Com essa propriedade conseguimos provar um teorema importante da Análise complexa.

Teorema de Liouville: Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e limitada, então f é constante.

Prova: Escreva $f = u + iv$. Suponha que f não é constante. Então, temos que u ou v não é constante, suponha sem perda de generalidade que seja u. Como u é harmônica e f é limitada, temos que $u(B_t)$ é um martingal limitado, logo converge quase certamente.

Por outro lado, como u não é constante podemos tomar $a, b \in u(\mathbb{C})$ com $a < b$. Tome ϵ tal que $a + \epsilon < b - \epsilon$ e defina os abertos $U_1 = \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) < a + \epsilon\}$ e $U_2 = \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) > b + \epsilon\}$. Assim temos que pela recorrência do movimento Browniano, $f(B_t)$ vai de U_1 para U_2 infinitas vezes, logo $u(B_t)$ cruza o intervalo

$(a+\epsilon, b-\epsilon)$ infinitas vezes, o que contradiz a convergência do martingal $u(B_t)$. Portanto, f deve ser constante.

Um corolário desse teorema é o teorema fundamental da álgebra, pois se p é um polinômio não trivial de coeficientes complexos temos $p(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \infty$, logo se p não tivesse raízes, então p seria limitado por baixo e $1/p$ seria limitada por cima, portanto constante.

Com uma demonstração semelhante, mostra-se também que a imagem de uma funçao inteira não constante é densa em $\mathbb{C}$ e uma versão ainda mais forte desse fato é o teorema de Picard que também pode ser demonstrado com o movimento Browniano: Se f é uma função inteira não constante, então existe no máximo um ponto que não está na imagem de f. Isso pode ser demonstrado estudando a variável $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{B_s} dB_s$, para um movimento Browniano que não começa no zero (mais detalhes podem ser encontrados em [7]).

References

[1] J. Michael Steele

`Stochastic Calculus and Financial Applications`

[2] Peter Mörters e Yuval Peres

`Brownian Motion`

[3] Ioannis Karatzas e Steven E. Shreve

`Brownian Motion and Stochastic Calculus`

[4] Jean-François Le Gall

`Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires`

[5] David Williams

`Probability with martingales`

[6] Yuxuan Zhang

`Complex Analysis and Brownian Motion`

[7] T. Cass

`Brownian Motion in Complex Analysis`

[8] Sam Watson

`Brownian Motion, complex analysis, and the dimension of the Bronwnian frontier`