

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

RAUL DO VALE FONSECA

**REPLICANDO ESTRATÉGIAS DE *TRADING*
SINTÉTICAS UTILIZANDO REDES NEURAIS**

SÃO PAULO

2018

RAUL DO VALE FONSECA

REPLICANDO ESTRATÉGIAS DE *TRADING* SINTÉTICAS UTILIZANDO REDES NEURAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração:
Finanças Quantitativas.

Orientador:
Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

SÃO PAULO

2018

Fonseca, Raul do Vale.

Replicando estratégias de trading sintéticas utilizando redes neurais / Raul do Vale Fonseca. - 2018.

60 f.

Orientador: Afonso de Campos Pinto

Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Redes neurais (Computação). 2. Finanças – Métodos de simulação. 3. Mercado de capitais – Simulação por computador. I. Pinto, Afonso Campos. II. Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo. III. Título.

CDU 336.76

RAUL DO VALE FONSECA

REPLICANDO ESTRATÉGIAS DE *TRADING* SINTÉTICAS UTILIZANDO REDES NEURAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração:
Finanças Quantitativas.

Data da Aprovação: 20/08/2018

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto
(Orientador)
FGV - EESP

Prof. Dr. Ricardo Ratner Rochman
FGV - EESP

Profa. Dra. Élia Yathie Matsumoto
POLI - USP

À minha mãe, Leila, ao meu pai, Luciano e à minha irmã, Elisa.

Agradecimentos

Agradeço especialmente à Élia Yathie Matsumoto e ao Prof. Afonso de Campos Pinto pelas várias reuniões de orientação atenciosa e pelo grande apoio. Agradeço também aos meus colegas da turma do MPEFQ-2016 com os quais aprendi muito nesses dois anos. E por fim, agradeço à minha família e meus amigos pelo suporte nesse período.

RESUMO

Este trabalho constrói estratégias de *trading* sistemáticas e sintéticas com o objetivo de procurar ferramentas para replicá-las. São testados três modelos de regressão: regressão linear, regressão logística e um tipo de redes neurais artificiais, o *multilayer perceptron* (MLP). Para comparar a performance das regressões foram usadas três métricas de desvio do valor verdadeiro: diferenças absolutas, diferenças absolutas discretizadas e acurácia. A MLP é mais bem sucedida que as regressões logística e linear ao replicar uma estratégia *trend following* que usa como parâmetros médias móveis simples. Tentou-se replicar estratégias *mean reversion* que usam como parâmetros desvios padrão e preços máximos e mínimos num período. Nesses casos não houve clara distinção entre qual regressão foi mais bem sucedida. A acurácia dos modelos ao tentar replicar as estratégias foi maior que o sorteio aleatório em todos os casos.

Palavras-chave: Estratégia de *trading*. Redes neurais. Replicação.

ABSTRACT

In this text, systematic trading strategies are manufactured with the goal of finding tools to replicate it. Three regression models are tested: linear regression, logistic regression and one type of artificial neural networks, the multilayer perceptron (MLP). Three measures of the true value deviation were used to compare the performance of the regressions: absolute differences, discretized absolute differences and accuracy. The MLP is best between the three models to replicate one type of trend following strategy that uses simple moving average as parameter. It was attempted to replicate mean reversion strategies that uses standard deviation, maximum and minimum prices of a period as parameters. In this cases, there was no outperforming model to replicate the strategies. The accuracy of the models were better than the random guess in every test.

Keywords: Trading strategy. Neural networks. Mimic.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de gráfico do resultado de um dos modelos em comparação com o valor verdadeiro dado pela estratégia de <i>trading</i> sintética #1 . . .	30
Figura 2 – Exemplo de gráfico do resultado de um dos modelos discretizadas em comparação com o valor verdadeiro dado pela estratégia de <i>trading</i> sintética #1	31
Figura 3 – Histograma com as acurácias, no período de avaliação, de 100 treinamentos de MLPs para a estratégia #1	33
Figura 4 – Estratégia 1: Resultado das regressões treinadas usando a série de SPY, mas aplicada à série de IBOV, no período de avaliação.	38
Figura 5 – Estratégia 1: Resultado das regressões discretizadas treinadas usando a série de SPY, mas aplicada à série de IBOV, no período de avaliação. . .	39
Figura 6 – Estratégia 1: Histograma com as acurácias de 100 treinamentos de MLPs que foram treinadas nas série de SPY, mas projetadas no período de avaliação da série de IBOV.	40
Figura 7 – Modelo de neurônio artificial	47
Figura 8 – Função degrau	48
Figura 9 – Funções de ativação usadas nesse trabalho	48
Figura 10 – Exemplo de rede <i>fully connected feedforward</i> com três neurônios em cada uma de suas duas camadas escondidas e um neurônio na camada de saída	49
Figura 11 – Notação para os pesos dos neurônios	49
Figura 12 – Notação para a saída dos neurônios e para z	50
Figura 13 – Exemplo de como a estratégia sintética #1 monta posição	59
Figura 14 – Exemplo de como a estratégia sintética #2 monta posição	60
Figura 15 – Exemplo de como a estratégia sintética #3 monta posição	60

Lista de tabelas

Tabela 1	– Estatísticas da acurácia das MLPs no período de avaliação	33
Tabela 2	– Acurácia das previsões para a estratégia #1 no período de controle para diferentes valores de N	34
Tabela 3	– Comparação entre as previsões das regressões para a estratégia sintética #1 no período de avaliação.	36
Tabela 4	– Comparação entre as previsões das regressões para a estratégia sintética #2 no período de avaliação.	37
Tabela 5	– Comparação entre as previsões das regressões para a estratégia sintética #3 no período de avaliação.	38
Tabela 6	– Comparação entre as previsões das regressões aplicadas ao período de avaliação na série do IBOV para a estratégia sintética #1	40
Tabela 7	– Comparação entre as previsões das regressões aplicadas ao período de avaliação na série do IBOV para a estratégia sintética #2	41
Tabela 8	– Comparação entre as previsões das regressões aplicadas ao período de avaliação na série do IBOV para a estratégia sintética #3	41

Lista de abreviaturas e siglas

BSM	Modelo de Black-Scholes-Merton
DMM	Desvio entre Máximo e Mínimo
DPA	Desvio Padrão Amostral
ETF	<i>Exchange Traded Funds</i>
HME	Hipótese dos Mercados Eficientes
MLP	<i>Multilayer Perceptron</i>
MMS	Média Móvel Simples
RLM	Regressão Linear Múltipla
RLgM	Regressão Linear Múltipla
RNA	Redes Neurais Artificiais
VECM	<i>Vector Error Correction Models</i>

Sumário

1	Introdução	13
2	Revisão Bibliográfica	15
2.1	Mercados eficientes e adaptativos	15
2.2	Trabalhos com estratégias de <i>trading</i>	16
3	Metodologia	19
3.1	Estratégias de <i>trading</i>	19
3.2	Modelos de Predição	20
3.2.1	Regressão linear múltipla	21
3.2.2	Regressão logística múltipla	21
3.2.3	<i>Multi-layer perceptron</i>	21
3.3	Problema	22
3.4	Método	23
4	Experimentos	25
4.1	Implementação	25
4.2	Dados	25
4.3	Estratégias de <i>trading</i> sintéticas	27
4.3.1	Estratégia #1	27
4.3.2	Estratégia #2	28
4.3.3	Estratégia #3	29
4.4	Previsões	29
4.5	Previsões Discretizadas	30
4.6	Métricas de acerto das previsões	31
4.7	Estabilidade da MLP	32
4.8	Critério para o número de <i>inputs</i>	34
5	Resultados	36
5.1	Comparação das previsões	36
5.2	Extensão dos resultados a outros ativos	38
6	Conclusão	42
	Referências	44
	Apêndices	46
	APÊNDICE A <i>Multi-layer Perceptron</i>	47

APÊNDICE B	Regressão linear múltipla	53
APÊNDICE C	Regressão logística múltipla	55
APÊNDICE D	Teste do sinal	57
Anexos		58
ANEXO A	Gráficos das estratégias sintéticas	59

1 Introdução

Durante a negociação no mercado de ações brasileiro, quando um ativo é operado, há a identificação da corretora compradora e da corretora vendedora, o que não acontece no mercado de ações norte americano. Usando essa sequência de negociações com a identificação dos compradores e vendedores, em alguns casos, seria possível tirar informações sobre a atuação de agentes de mercado a partir da sequência desses negócios.

A identificação da corretora não garante a identificação de um agente do mercado, mas em alguns casos é possível assumir que há um determinado agente operando pela corretora. É o caso de ativos ilíquidos, ou de uma atuação frequentemente observada em determinados horários do dia.

Há também um mercado de venda de sinais de estratégias de *trading*, isto é, agentes que têm uma determinada estratégia (ou sistema) de *trading*, cujo funcionamento não é disponível ao público, mas são usados para vender os sinais (*outputs*). O cliente recebe sinais de compra e venda aplicada a um determinado ativo. O usuário poderia guardar a sequência de sinais que essa estratégia gerou para procurar entender como essa estratégia funciona.

Ser capaz de identificar comportamentos de determinados participantes de mercado é uma habilidade que poderia gerar valor econômico para um gestor de investimentos. É nesse contexto que esse trabalho se insere.

Esse trabalho modela a ação (compra/venda/neutralidade) de um tipo específico de agentes de mercado. Nessa análise, será considerado que o agente atua somente em um ativo, e que sua atuação é dada por um conjunto de regras que usa como informação somente o histórico de preços do ativo em questão. Esse conjunto de regras será chamado de estratégia de *trading*.

Estratégias de *trading* podem ser entendidas de maneira mais ampla. Uma discussão mais detalhada pode ser encontrada no item 3.1. Faz parte da modelagem desse trabalho o uso de estratégias de *trading* sintéticas, ou seja, antes de tentar replicar estratégias de *trading*, elas serão fabricadas para esse fim.

O objetivo desse trabalho é replicar estratégias de *trading* sintéticas. Para isso serão considerados três modelos: regressão linear múltipla (RLM), regressão logística múltipla (RLgM) e redes neurais artificiais (RNA).

O escopo das estratégias que serão tratadas é o das estratégias sistemáticas sobre um ativo, ou seja, algoritmos que usam apenas o histórico de preços do ativo para tomar a decisão de compra ou venda sobre esse ativo. Essas estratégias sintéticas farão uso de regras

e indicadores empregados no mercado justamente para se aproximar de uma situação real.

Pela modelagem abordada por [Maymin e Maymin \(2011\)](#), esse tipo de estratégia pode ser entendida como uma função matemática que tem como argumento o histórico de preços do ativo. Dado o histórico de preços do ativo até um determinado instante de tempo, a função devolve qual será a posição da estratégia no próximo instante de tempo, isto é, a estratégia pode estar *long* (comprada), *short* (vendida) ou neutra (zerada). Mais detalhes dessa modelagem podem ser encontrados no capítulo 3, de metodologia.

Usando essa abordagem de função matemática, é possível aplicar modelos de predição à estratégia permitindo que se obtenha informações quando determinadas formas funcionais (para a posição da estratégia) são regredidas na série de preços. Nesse trabalho serão feitas três regressões com esse objetivo. A primeira será a regressão linear, a segunda será a regressão logística, e a terceira será um treinamento de uma rede neural artificial.

O tipo de rede neural usada nesse trabalho é uma *multi-layer perceptron* (MLP). Mais detalhes sobre o funcionamento da MLP podem ser vistos no capítulo 3 e no apêndice A. Uma RNA tem uma forma funcional adaptável e não linear, o que a torna bem flexível ao se aproximar de outras funções.

Nesse trabalho serão construídas três estratégias de *trading* sintéticas para as quais serão feitas as regressões. Cada estratégia é construída de maneira que os indicadores usados para tomar decisões sejam indicadores utilizados no mercado, como médias móveis, bandas de desvios padrão em torno da a média, e preços máximos e mínimos numa janela de tempo.

Para avaliar a capacidade dos modelos reproduzirem o comportamento das estratégias, serão feitas previsões em períodos fora do treinamento. Além de testar as projeções na série do ativo para o qual elas foram regredidas, também será testada a capacidade de cada modelo reproduzir o comportamento das estratégias em outros ativos, cujas séries não foram usadas nas regressões.

Esse trabalho tem seis capítulos. No capítulo 2 de revisão bibliográfica, é feita a localização na literatura acadêmica. Em seguida, o problema e a forma de abordagem são formalizados no capítulo 3 de metodologia. Testes de aplicação do método estão no capítulo 4 de experimentos, e a análise dos resultados no capítulo 5. A conclusão é apresentada no capítulo 6.

2 Revisão Bibliográfica

Esse trabalho trata sobre o tema de replicar estratégias de *trading*, porém os textos relacionados a esse assunto, encontrados durante a pesquisa realizada neste trabalho, fazem uma abordagem diferente do que está sendo proposto nesse trabalho.

A revisão bibliográfica a seguir faz uma discussão sobre a evolução das pesquisas entorno do tema de estratégias de *trading*. No item de Mercados eficientes e adaptativos, há uma discussão sobre o impacto da formulação da Hipótese dos Mercados Eficientes (HME). No item de Trabalhos com estratégias de *trading*, são mostrados exemplos desse tipo na literatura.

2.1 Mercados eficientes e adaptativos

A Hipótese dos Mercados Eficientes (HME) surgiu cercado de trabalhos que procuravam estratégias de obter retornos anormais em ativos financeiros. A HME (FAMA, 1970) defende que os preços no mercado refletem toda a informação disponível. Há 3 variantes dessa hipótese, a 'fraca', 'semi forte' e a 'forte'. A 'fraca' afirma que preços futuros não podem ser previstos analisando os preços do passado. A 'semi forte' afirma que toda informação pública disponível já está refletida nos preços dos ativos. E a 'forte' afirma que toda informação pública e privada estão refletidas nos preços.

Após a publicação do trabalho de Fama, outros trabalhos que se propõem a criar estratégias de *trading* foram publicados. Porém, é observada uma mudança na forma como esses trabalhos foram apresentados. Artigos passaram a ser publicados de maneira que: ao invés de se colocarem à procura de estratégias que geram lucros, se colocavam à procura de anomalias de mercado, que violavam a HME.

Tentando encontrar uma conciliação entre os adeptos da HME e os *traders*, Lo (2004) formulou a Hipótese dos Mercados Adaptativos, que sugere que estratégias de *trading* performam bem num determinado ambiente e mal em outros. Consequentemente, uma estratégia pode perder rentabilidade por um tempo, mas voltar a dar lucro quando as condições de mercado voltarem a ser favoráveis. De fato essa adaptatividade dos mercados foi testada e verificada por Taylor (2014) e Urquhart, Gebka e Hudson (2015).

Taylor (2014) verificou que a lucratividade de estratégias de *momentum* no mercado americano evolui lentamente, e está confinada a alguns períodos de tempo, dependendo da aptidão do mercado de realizar vendas a descoberto. Urquhart, Gebka e Hudson (2015) mostraram que estratégias que se verificaram lucrativas até 1987 no mercado norte americano, inglês e japonês, perderam performance durante a década de 1990. Os autores

constatarem que os sinais de compra e venda passaram a serem antecipados pelo mercado em um dia.

2.2 Trabalhos com estratégias de *trading*

Não é o objetivo desse trabalho fazer um levantamento completo de textos sobre estratégias de *trading*. Os trabalhos listados a seguir representam uma pequena amostra das possibilidades que são exploradas na literatura.

Na década de 1980, houve a discussão sobre o quanto estratégias *contrarian* seriam lucrativas e porquê. Lo e MacKinlay (1990) investigaram quanto estratégias *contrarian* se beneficiam do *overreaction* do mercado de ações. Encontraram evidências empíricas de que menos de 50% do retorno de estratégias *contrarian* seriam devido ao *overreaction*, sendo que o principal componente do resultado positivo dessas estratégias é a auto-correlação positiva nas séries de preços de ações.

Conrad e Kaul (1998) vão além ao verificar períodos do século XX em que estratégias *momentum* performaram melhor, e momentos que estratégia *contrarian* performaram melhor. O autor observou que estratégias *momentum* performaram melhor no médio prazo (3 a 12 meses). Estratégias *contrarian* performaram melhor no longo prazo (de 1 a 3 anos), mas somente no período de 1926-1947.

Boainain e Pereira (2009) analisaram a performance de ações no mercado brasileiro condicionada à aparição de um padrão de análise técnica conhecido como Ombro-Cabeça-Ombro e Ombro-Cabeça-Ombro Invertido. De maneira geral, o autor verificou que é possível criar estratégias lucrativas (dependendo dos custos de transação) condicionadas à realização do padrão Ombro-Cabeça-Ombro, porém, o mesmo não foi verificado para o padrão invertido. Para que essa análise fosse possível, o autor usa o algoritmo de Osler e Chang (1995) para reconhecer os padrões Ombro-Cabeça-Ombro. Esse algoritmo poderia ser utilizado para replicar alguns tipos de estratégias de *trading*, algo parecido com o que esse trabalho se propõe a fazer.

No Brasil são encontrados trabalhos na área de *pairs trading* (*long/short*), que é um tipo de estratégia de *trading* que busca encontrar oportunidades de investimento através de testes de cointegração entre pares de ativos.

Macedo (2017) aplicou uma estratégia de *pairs trading* baseada no modelo de mudança de regime *markoviano* (o que ainda não tinha sido feito no Brasil) e encontrou um par (ITUB4 x IBOV) com um retorno que considerou satisfatório no período de 250 dias analisado. O autor também propõe uma nova maneira de operacionalizar estratégias de *pair trading*.

O primeiro a implementar o modelo de Triantafyllopoulos e Montana para *pairs*

trading no Brasil foi Pucciarelli (2014). Um dos diferenciais desse modelo é que ele utiliza cointegração dinâmica. Nessa aplicação, o autor encontrou vários pares de ações brasileiras onde seria possível a arbitragem.

O método de distância da estratégia de *pairs trading* foi aplicado por Oliveira (2017) no mercado brasileiro de ações, onde verificou o comportamento da estratégia antes e depois de momentos de crises externas. No período analisado, de 2004 a 2017, foram separados 4 momentos de crise. Em 3 deles a estratégia não mostrou retornos médios diários estatisticamente diferentes antes e depois da crise. Apenas no caso da crise de 2008, observou-se um retorno médio diário maior depois da crise em relação a antes da crise.

Usando a técnica VECM (*Vector Error Correction Models*), Soto (2016) propôs estratégias de *long-short* onde os pesos de alocação são determinados pelos vetores de cointegração. O VECM é uma adaptação do modelo VAR (*Vector Autoregression*) para séries cointegradas que inclui um termo de correção para a tendência das séries. A autora observa que as estratégias que usam VECM performaram melhor que outros tipos de estratégia.

Um método no qual são testadas todas as possibilidades de pares nas ações que compõem o Índice Bovespa (IBOV) foi implementado por Caldeira (2010). O teste aplicado foi o de Johansen e Engle-Granger. De todas as possibilidades, o autor montou uma carteira com os 20 pares que tinham os melhores indicadores. A carteira alcançou um índice sharpe de 1,29 no período fora da amostra, e apresentou correlação de apenas 0,10 com o IBOV.

No Brasil, também são encontrados trabalhos que abordam estratégias de *trading* usando técnicas de inteligência artificial. Há trabalhos que tentam gerar lucros no *trading*, trabalhos que tentam projetar os retornos futuros de ações, e trabalhos que buscam procurar as melhores técnicas de *machine learning* para fazer essas projeções.

Técnicas de *reinforcement learning* foram aplicadas por Castro (2017), em que o autor recriou e simulou o *book* de ofertas de derivativos de juros no mercado brasileiro. Nesse mercado artificial, um agente foi treinado para gerar lucros usando técnicas de *reinforcement learning*. Considerando custos de transação, e problemas na execução do *trade* (como tempo para que a ordem chegue à bolsa), o autor verificou que o agente conseguiu superar o *benchmark* proposto (trades aleatórios), mas não conseguiu gerar lucros. O autor vê muitas possibilidades de avanços nessa área, tanto dos testes quanto da performance do agente, como por exemplo, uma das sugestões é o uso do *feedback* humano durante o treinamento para que a função de recompensa seja adaptada. Esse tipo de aplicação era inédita no mercado brasileiro.

Alvim (2013) propõe um método de construção de estratégias de *trading* que são aplicadas em diferentes escalas de tempo intradiárias de um ou mais ativos. Esse método

busca maximizar o retorno acumulado e maximizar o retorno acumulado ajustado ao risco. Foram usadas técnicas de *machine learning* nesse processo. O autor também propõe uma outra abordagem de seleção de carteira eficiente usando a informação das decisões das estratégias sobre vários ativos. E por fim, propõe um sistema de *trading* onde várias etapas são elaboradas, desde a seleção das estratégias por ativo, até a seleção da carteira de ativos e estratégias.

Uma rede neural para operar o índice S&P 500 como um sistema *trend following* foi construída por Gambogi (2013). No treinamento da rede, o autor usou uma função de custo diferente do convencional: a função de raiz quadrada da média dos desvios quadráticos relativos (definida pelo autor como, **RMSE_R**). Nessa função, os desvios do valor verdadeiro são calculados como percentuais do valor previsto, esses percentuais são elevados ao quadrado, é feita uma média, e então tira-se a raiz quadrada. O autor verificou que o acerto da rede usando essa função sobre a oscilação do S&P 500 foi de 60% nas amostras utilizadas, sobressaindo à estratégia *buy-and-hold* no período de avaliação.

Pardo (2008) descreve um método para validação de estratégias de trading. De acordo com o autor, há basicamente duas abordagens no processo de desenvolvimento de uma estratégia. A abordagem científica e a abordagem empírica. Na abordagem científica o *trader* aplica o método científico, isto é, a partir de uma hipótese de comportamento do mercado, testa-se através de *backtests* se é possível lucrar com esse comportamento. Na abordagem empírica não há teste de hipótese ou racionalização do fundamento do *trade*. O *trader* testa, através de um processo iterativo, inúmeras possibilidades de estratégias de *trading* definidas de diferentes formas. Em alguns casos, as estratégias são formuladas pelo próprio algoritmo. Nessa abordagem (empírica), as estratégias escolhidas são aquelas que têm melhor performance.

De acordo com o autor, a abordagem científica oferece vantagens em relação à empírica por dar ao *trader* completo entendimento sobre a estratégia. Na abordagem empírica, muitas vezes o *trader* não consegue inferir sobre como a estratégia está tomando decisões.

Embora todos esses testes e diferentes estratégias tenham sido abordadas nesse capítulo, não faz parte do escopo desse trabalho formular estratégias de *trading* que gerem lucros.

3 Metodologia

Para que o problema e o método proposto para resolução sejam enunciados, faz-se necessária a apresentação de alguns conceitos gerais. Esses conceitos estão apresentados nos itens: Estratégias de *trading* e Modelos de Predição. O enunciado do problema e o método para resolução estão apresentados nos itens: Problema e Método.

3.1 Estratégias de *trading*

Estratégias de *trading* são um conjunto de regras desenhadas para operar um ou mais ativos com um determinado objetivo. Esse objetivo pode ser gerar lucro ou algum outro, como por exemplo, reduzir a volatilidade de um portfolio, reduzir o *drawdown* máximo em *backtests* ou em cenários de *stress*, etc.

Uma estratégia pode ser discricionária ou sistemática. Em ambas, os *inputs* podem ser informações como o histórico de preços de um ou mais ativos, notícias e/ou outras fontes. Numa estratégia discricionária, a tomada de decisões (compra ou venda) é feita por um humano. Numa estratégia sistemática, a tomada de decisões é feita automaticamente por regras pré-definidas. Nesse trabalho serão usadas apenas estratégias sistemáticas.

Uma estratégia de *trading* deve tomar três decisões: qual o momento de montar posição, quanto deve alocar na posição, e qual o momento de sair da posição. Na modelagem desse trabalho, o problema de escolher o tamanho da posição será desconsiderado, de maneira que a posição sempre terá o mesmo tamanho, que poderá ser comprada ou vendida em uma unidade do ativo.

Portanto, pode-se considerar que as estratégias usadas nesse trabalho serão compostas essencialmente por duas regras: abertura de posição e fechamento de posição. Na abertura de posição, é feito um filtro do mercado. Através de avaliações, análises, ou uso de indicadores, define-se em qual situação a estratégia fica *long* ou *short* (comprado ou vendido) num determinado ativo. O critério para o fechamento de posição também pode ser estabelecido por meio de avaliações, análises ou uso de indicadores, ou até a própria performance da posição (este trabalho adota outra abordagem).

A definição de estratégia de *trading* que mais se adequa ao uso desse trabalho é a definição matemática abaixo proposta por [Maymin e Maymin \(2011\)](#).

Definição. *Seja uma estratégia de trading dada pelo par: indicador histórico, H ; e uma função notional, $f = f(H)$.*

O valor f representa o quanto a estratégia investirá no ativo. Pode ser o *notional*

da posição, quantidade de contratos, ou outra unidade do ativo em questão. Se $f > 0$ a estratégia está *long* (comprada) no ativo, e se $f < 0$ a estratégia está *short* (vendida) no ativo.

O indicador histórico H pode ser uma função de histórico de preços do ativo ou uma função de qualquer informação histórica de um conjunto de ativos, mercados, índices, ou qualquer outro parâmetro. O objetivo de H é reunir informações históricas antes de investir no ativo.

3.2 Modelos de Predição

Kuhn e Johnson (2013) definem modelos de predição como: o processo de desenvolver ferramentas matemáticas ou modelo cujo resultado é uma predição acurada. De acordo com Hastie, Tibshirani e Friedman (2008), num modelo de predição há *inputs* (entradas), classicamente chamados de variáveis independentes, e *outputs* (saídas), classicamente chamados de variáveis dependentes. Este último difere os tipos de *outputs* de uma predição entre quantitativos e qualitativos. Um *output* quantitativo é um número real, enquanto um *output* qualitativo é separado em categorias ou números discretos.

Essas diferenças no tipo de *output* levou a uma convenção em que, quando o *output* é quantitativo, então o modelo de predição é chamado de regressão. Quando o *output* é qualitativo, então o modelo de predição é chamado de classificação.

Nesse trabalho, a quantidade que se procurará prever será a posição de uma estratégia de *trading*, cuja saída são apenas três: ou a estratégia está *long* (comprada) no ativo, ou está *short* (vendida), ou não tem alocação no ativo (zerada).

Embora o tipo de variável que se procura prever seja uma variável discreta, serão usados modelos de predição cuja saída é quantitativa, ou seja, regressões. Após obter a saída dos modelos de regressão, os valores serão tratados para que sejam discretizados.

Modelos de regressão têm os seguintes coeficientes e variáveis: coeficientes desconhecidos normalmente representados por β ; variáveis independentes \mathbf{X} ; e variável dependente Y .

O modelo relaciona Y a uma função de \mathbf{X} e β conforme,

$$Y \approx \varphi(\mathbf{X}, \beta), \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ e $\varphi(\cdot)$ é a função que representa o modelo.

Essa aproximação é formalizada como $E(Y|\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}, \beta)$.

Nesse trabalho serão usadas três funções φ para regressão: linear, logística e redes neurais artificiais.

3.2.1 Regressão linear múltipla

Uma regressão linear onde a variável dependente é explicada por várias variáveis é chamada regressão linear múltipla (RLM). Segue abaixo uma descrição do modelo usando a notação de Heij et al. (2004). O modelo RLM relaciona uma variável dependente y com várias variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_k , $k > 0$, conforme,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon, \quad (3.2)$$

em que β_i , $i = 1, 2, \dots, k$. β_1 é o termo constante e ε são fatores residuais que não estão incluídos no modelo.

Nesse trabalho, para encontrar os coeficientes β_i será usado o método dos mínimos quadrados (MMQ) que está descrito no apêndice B.

3.2.2 Regressão logística múltipla

A função logística relaciona uma variável independente y com variáveis independentes x_i , $i = 1, 2, \dots, k$, conforme o modelo,

$$y = \frac{1}{1 + e^{-z}}, \quad (3.3)$$

$$z = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k, \quad (3.4)$$

em que k é o número de variáveis independentes.

O modelo descreve uma função de probabilidade acumulada até o ponto z , que é dado pelas variáveis independentes. Usando essa modelagem é possível maximizar a equação de log-verossimilhança para encontrar os coeficientes β_i . Nesse trabalho a maximização da equação de log-verossimilhança é feita numericamente usando o método de Newton Raphson. Mais detalhes sobre a RLGM podem ser encontrados no apêndice C, ou em Hosmer e Lemeshow (2000).

3.2.3 Multi-layer perceptron

O Multi-layer Perceptron (MLP) é um tipo de rede neural artificial (RNA) *fully connected feedforward*. Na MLP, os neurônios são separados em camadas. São passados

sinais da camada de *input* para a camada de *output*. Os neurônios de uma camada estão todos conectados com os neurônios da próxima camada.

Cada neurônio tem uma função de ativação e pesos característicos w_{ij}^l (vide notação no apêndice A) que são combinados com os sinais que chegam até esse neurônio.

Para fazer o treinamento da MLP, é definida uma função de custo sobre o *output* da rede. A cada iteração do treinamento passa-se o sinal desde o *input* até o *output*. A diferença entre o valor verdadeiro e o *output* é usado para computar o gradiente da função de custo em relação aos pesos w_{ij}^l . Para melhorar os pesos de maneira que a função de custo diminua uma quantidade η , calcula-se um valor numérico δ_{ij}^l para cada peso w_{ij}^l . Para diminuir a função de custo em η soma-se δ_{ij}^l aos pesos w_{ij}^l desde o *output* até a primeira camada. Esse algoritmo é conhecido como *backpropagation*. Uma descrição completa do *backpropagation* pode ser encontrada no apêndice A.

Devido ao algoritmo de *backpropagation* ser um método numérico que muda os pesos w_{ij}^l dos neurônios, e devido ao fato das funções de ativação serem não-lineares, treinar uma rede neural é um problema de regressão não-linear. É por essa razão que, nesse trabalho, o treinamento da MLP será referido algumas vezes como 'regressão da MLP'.

No início do algoritmo de *backpropagation*, os pesos w_{ij}^l são inicializados usando um número pseudoaleatório com distribuição normal, média zero e variância $1/n_{l-1}$ (em que n_{l-1} é o número de neurônios na camada $l - 1$). Por essa razão cada treinamento resultará numa combinação de pesos diferente e, portanto, uma rede diferente. Consequentemente, para analisar resultados de previsões de MLPs é preciso fazer um número estatisticamente significativo de treinamentos.

3.3 Problema

O objetivo do trabalho é replicar estratégias de *trading* sistemáticas e sintéticas que serão definidas no capítulo 4, de experimentos. Essas estratégias terão como argumentos indicadores empregados no mercado para se aproximar de situações reais.

Considere que a estratégia pode ser representada pela função *notional* $f = f(H)$ conforme descrito no item 3.1. O objetivo é reproduzir f , cuja implementação será feita por meio de modelos de regressão.

A estratégia representada pela função *notional* $f = f(H)$ será construída de tal maneira que o indicador H dependa somente dos $N+1$ valores de S_t anteriores a $t + 1$, onde S_t representa o preço do ativo.

Portanto, a função *notional* em $t + 1$ pode ser escrita como,

$$f_{t+1} = f_{t+1}(S_{t-N}, S_{t-N+1}, \dots, S_{t-1}, S_t) . \quad (3.5)$$

Para fazer as regressões, f_{t+1} será aproximada pela regressão de uma função φ_{t+1} conforme observado no item 3.2,

$$f_{t+1} \approx \varphi_{t+1}(S_{t-N}, S_{t-N+1}, \dots, S_{t-1}, S_t) . \quad (3.6)$$

As regressões que serão usadas para aproximar $\varphi(\cdot)$ serão: regressão linear múltipla (RLM), regressão logística múltipla (RLgM), e uma regressão usando redes neurais artificiais (RNA), onde a rede usada será uma *multilayer perceptron* (MLP).

O número N é desconhecido numa situação real, portanto, é preciso estabelecer um método para definir qual N será usado.

É importante observar que cada treinamento de MLP resulta numa rede diferente conforme discutido no item 3.2.3, portanto será preciso estabelecer o número de treinamentos que será feito antes de analisar as previsões.

3.4 Método

Para cada estratégia, os passos para alcançar o objetivo podem ser resumidos da seguinte maneira:

1. Encontrar o mais adequado número de preços ($N + 1$) anteriores a $t + 1$ para usar como *input* nas regressões.

É estabelecido um conjunto incremental $\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$. Rodam-se todas as regressões para cada N_i , em que $i = 1, \dots, n$, desse conjunto. Avalia-se o resultado das previsões geradas por essas regressões, e para isso, define-se algumas métricas de acerto. Um exemplo de como o melhor N_i deve ser escolhido está apresentado no item 4.8.

2. Fazer as regressões linear e logística, e treinamento das MLPs.

Dado o conjunto de dados de treinamento, são realizadas as regressões linear e logística, considerando que os *inputs* das regressões são os $N + 1$ valores de s_t anteriores a $t + 1$ (onde N foi determinado na etapa anterior). Os mesmos *inputs* são usados para treinamento das MLPs. Conforme já foi discutido no item 3.2.3, são necessários vários treinamentos com a mesma arquitetura de MLP para mostrar a consistência dos resultados fornecidos por essa arquitetura.

3. Comparar o nível de acerto de cada regressão.

Antes de fazer essa comparação, é preciso estabelecer métricas para o grau de acerto das previsões de cada regressão. Lembrando que no caso da MLP, como são feitos vários treinamentos, será preciso analisar os resultados das várias previsões das MLPs e compará-los com o resultado da regressão linear e logística.

4. Testar se uma das regressões supera as outras

Dadas as métricas usadas, é executada-se testes estatísticos para verificar se a previsão com os melhores resultados nas métricas supera as outras de maneira consistente.

5. Testar se um modelo, treinado com dados históricos de um ativo, pode ser aplicado a outros ativos.

Testa-se a capacidade dos modelos, que foram treinados com a série de preços de um ativo, gerar boas previsões quando aplicados à série de preços de outros ativos, em outros períodos.

No próximo capítulo, são detalhados os experimentos realizados para testar a metodologia apresentada neste capítulo.

4 Experimentos

Este capítulo descreve como os experimentos desenvolvidos nesta pesquisa foram realizados. Nos itens Implementação, Dados e Estratégias de *trading* sintéticas são feitas definições necessárias para a condução dos experimentos. Nos itens Previsões, Previsões Discretizadas, Métricas de acerto das previsões e Estabilidade da MLP são mostrados os primeiros resultados dos experimentos. No item Teste, para o número de *inputs* é apresentado um método para determinação da quantidade de informação usada como *input* nas regressões.

Nessas seções, os resultados apresentados não devem ser vistos como parte da análise, ou de avaliação sobre os experimentos. Trata-se de uma primeira apresentação com o propósito de mostrar qual a forma dos resultados que são produzidos por esses experimentos. Os resultados e avaliações estão no capítulo 5.

4.1 Implementação

Para implementar as regressões, foi usada a linguagem de programação Python. Para fazer as regressões lineares e as regressões logísticas, foi usada a biblioteca Statsmodels. Para implementar a MLP, não foi usada nenhuma biblioteca. O algoritmo foi construído baseado na teoria descrita no apêndice A e nos exemplos de Nielsen (2015).

O computador utilizado tem as seguintes especificações: processador Intel(R) Core(TM) i7-4500U CPU @ 1.80 GHz, 16.0 GB de memória RAM, unidade de memória SAMSUNG SSD SM841 256GB, placa mãe Dell desenhada para o modelo Inspiron 7537, e sistema operacional Windows 8 64-bits.

4.2 Dados

O tipo de dado usado nesse trabalho são séries temporais (diárias) de preços. Foram considerados somente dias com negociação do ativo. O preço do ativo no instante t será referido como S_t .

Para realizar as regressões, será considerado um conjunto de $N + 1$ preços anteriores ao dia $t + 1$. Esse conjunto será chamado de janela móvel de $N + 1$ preços, em que o último dia da janela é o dia definido por t . A janela móvel pode ser representada como,

$$\{S_{t-N-1}, S_{t-N}, S_{t-N+1}, \dots, S_t\}. \quad (4.1)$$

Os *inputs* das regressões serão os retornos acumulados desde o primeiro dia da janela, até o dia $t - i$ (em que $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$), pertencente à janela móvel. A janela tem $N + 1$ preços, pois dessa maneira, o número de *inputs* nas regressões será N retornos.

Os retornos acumulados até o dia $t - i$, interno à janela, pode ser representado pela seguinte equação:

$$r_{t-i} = \frac{S_{t-i}}{S_{t-N-1}} - 1, \quad (4.2)$$

em que S_{t-i} representa o preço do ativo no dia $t - i$. S_{t-N-1} é o preço do ativo no primeiro dia da janela, ou seja, r_{t-i} é o retorno acumulado do primeiro dia da janela, $t - N - 1$, até o i -ésimo dia, $t - i$.

A equação 3.6, que representa o modelo usado na regressão da posição f_{t+1} por uma função φ_{t+1} , pode ser reescrita como:

$$f_{t+1} \approx \varphi_{t+1}(r_{t-N}, r_{t-N+1}, \dots, r_{t-1}, r_t). \quad (4.3)$$

As variáveis independentes do modelo são os retornos acumulados dentro das janelas. A primeira variável independente, r_{t-N} , representa o retorno de um dia (entre o segundo e o primeiro dia da janela móvel). A segunda variável independente representa o retorno de dois dias (entre o terceiro e o primeiro dia da janela móvel). E assim sucessivamente até o último dia da janela. Portanto, a série de variáveis que está sendo usada como o primeiro argumento no modelo é a série de retornos de um dia. A série de variáveis que está sendo usada como segundo argumento do modelo é a série de retornos de dois dias. E assim sucessivamente, até que o último argumento do modelo é formado pela série de retornos de N dias. Dessa forma, é possível testar a estacionariedade de cada série.

A estacionariedade dos retornos r_{t-i} foi testada para as séries usadas nesse trabalho, durante o período de treinamento, aplicando o teste de Dick-Fuller aumentado. As séries se mostraram estacionárias para um nível de significância de 1%.

Para os experimentos a seguir, foi usada a série de preços de fechamento (corrigido por dividendos) do ETF (*Exchanged Traded Fund*) SPDR SP 500, que será referido aqui como SPY, negociado na bolsa de valores de Nova York (NYSE) e o índice Bovespa (IBOV), no período de 2/jun/2008 a 31/dez/2014. O SPY foi escolhido devido à série ser longa o suficiente. O IBOV foi escolhido por ser uma série da mesma classe de ativos que o SPY (índices de ações).

Esse período foi separado em 3 partes: período de treinamento, período de controle e período de avaliação. O período de treinamento contém 1461 dias de mercado e vai de 2/jun/2008 a 19/mar/2014. O período de controle contém 200 dias de mercado e vai de

20/mar/2014 a 31/dez/2014. O período de avaliação contém 200 dias de mercado e vai de 2/jan/2015 a 20/out/2015.

4.3 Estratégias de *trading* sintéticas

Nas seções a seguir, serão definidas as estratégias de *trading* sintéticas às quais serão aplicadas o método definido no item 3.4.

A posição da estratégia será representada por f_t , usando a nomenclatura definida no item 3.1 para a função *notional*. f_t poderá assumir 3 valores: -1, 0 e 1, e o índice t representa o dia para o qual vale essa posição.

Observe que as estratégias a seguir usam as informações obtidas até t para decidir qual será a posição em $t + 1$, portanto são usados somente dados do passado para decidir a posição do futuro.

As estratégias não foram escolhidas com o objetivo de gerar lucro. Foram escolhidas arbitrariamente para avaliar a potencialidade do método proposto em situações em que há o uso de alguns tipos de indicadores históricos, como média móvel simples, desvio padrão do preço, e preços máximos e mínimos.

4.3.1 Estratégia #1

A primeira estratégia definida nesse trabalho é uma estratégia do tipo *trend following*. A estratégia usará indicadores para definir se o preço está numa tendência de alta ou baixa, e então tomará uma posição: comprada, se estiver em tendência de alta, e vendida, se estiver em tendência de baixa.

São usados como indicadores históricos médias móveis simples (MMS) de S_t de n dias anteriores a t conforme,

$$MMS(S_t, n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t-i} , \quad (4.4)$$

em que o índice $t - i$ significa i dias anteriores a t .

A estratégia #1 pode ser escrita como um algoritmo e está apresentada abaixo. Se o preço estiver acima da MMS de 20 dias e a MMS de 20 dias estiver acima da MMS de 100 dias, então será considerado que há uma tendência de alta e a estratégia deve ficar comprada. Se o preço estiver abaixo da MMS de 20 dias e a MMS de 20 dias estiver abaixo da MMS de 100 dias, então será considerado que há uma tendência de baixa e a estratégia deve ficar vendida. Se essas condições não forem alcançadas, então a estratégia não toma

posição. Na Figura 13 do anexo A, há uma representação gráfica de como a estratégia monta as posições no tempo.

Estratégia de *trading* #1

- 1: **Se** $S_t > MMS(S_t, 20)$ & $MMS(S_t, 20) > MMS(S_t, 100)$ **Então**
 - 2: $f_{t+1} = 1$
 - 3: **Senão Se** $S_t < MMS(S_t, 20)$ & $MMS(S_t, 20) < MMS(S_t, 100)$ **Então**
 - 4: $f_{t+1} = -1$
 - 5: **Senão**
 - 6: $f_{t+1} = 0$
-

4.3.2 Estratégia #2

A estratégia #2 é uma estratégia do tipo *mean reversion*, isto é, procura os momentos de reversão de tendência nos preços. Essa estratégia faz uso das bandas de Bollinger, onde são construídas bandas de um desvio padrão amostral do preço numa janela de 20 dias.

O desvio padrão amostral (DPA) é definido como:

$$DPA(S_t, n) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^n (S_{t-i} - MMS(S_t, n))^2} . \quad (4.5)$$

Nessa estratégia, $n = 20$ dias. As bandas superiores (b_s) e inferiores (b_i) são construídas somando-se e subtraindo-se um desvio padrão da média conforme,

$$b_i = MMS(S_t, 20) - DPA(S_t, 20) , \quad (4.6)$$

$$b_s = MMS(S_t, 20) + DPA(S_t, 20) , \quad (4.7)$$

a janela de 20 dias foi escolhida arbitrariamente.

A posição é tomada quando o preço (S_t) está acima ou abaixo das bandas. Se estiver acima, a estratégia fica vendida. Se estiver abaixo, a estratégia fica comprada. Se estiver entre as bandas, a estratégia não toma posição. O algoritmo da estratégia #2 pode ser escrito conforme abaixo. Na Figura 14 do anexo A, há uma representação gráfica de como a estratégia monta as posições no tempo.

Estratégia de *trading* #2

- 1: **Se** $S_t < b_i$ **Então**
 - 2: $f_{t+1} = 1$
 - 3: **Senão Se** $S_t > b_s$ **Então**
 - 4: $f_{t+1} = -1$
 - 5: **Senão**
 - 6: $f_{t+1} = 0$
-

4.3.3 Estratégia #3

A estratégia #3 é uma estratégia *mean reversion* parecida com a estratégia #2, porém as bandas em relação à média são construídas baseadas nos valores máximos e mínimos alcançado por S_t na janela de 40 dias. Essa janela foi escolhida arbitrariamente.

Para a construção das bandas, foi criada uma medida de desvio baseada nos valores máximos e mínimos do preço numa janela de n dias. Esse desvio, chamado aqui de Desvio entre Máximo e Mínimo (DMM), está definido conforme a equação 4.8.

$$DMM(S_t, n) = \frac{1}{6}(MAX(S_t, n) - MIN(S_t, n)) . \quad (4.8)$$

O DMM é uma fração de 1/6 da diferença entre S_t máximo e mínimo numa janela de n dias. A fração de 1/6 foi escolhida arbitrariamente apenas para gerar um número de posições suficiente para que as regressões pudessem ser realizadas.

As bandas em relação à média são construídas conforme,

$$b_i = MMS(S_t, 40) - DMM(S_t, 40) , \quad (4.9)$$

$$b_s = MMS(S_t, 40) + DMM(S_t, 40) , \quad (4.10)$$

a janela de 40 dias foi escolhida arbitrariamente.

O algoritmo dessa estratégia segue o mesmo princípio do algoritmo da estratégia #2, porém as bandas (b_i e b_s) são construídas de maneira diferente. Na Figura 15 do anexo A, há uma representação gráfica de como a estratégia monta as posições no tempo.

O algoritmo da estratégia #3 está apresentado a seguir.

4.4 Previsões

Tanto nesse item, quanto no próximo (4.5), os gráficos são apresentados somente com o objetivo de ilustrar o tipo de resultado obtido ao fazer as previsões. A avaliação sobre as previsões será feita no capítulo 5.

Estratégia de *trading* #3

- 1: **Se** $S_t < b_i$ **Então**
- 2: $f_{t+1} = 1$
- 3: **Senão Se** $S_t > b_s$ **Então**
- 4: $f_{t+1} = -1$
- 5: **Senão**
- 6: $f_{t+1} = 0$

Após ter sido implementadas as regressões, os coeficientes dos modelos linear, logístico e MLP são usados para prever o valor da função *notional* f_{t+1} definida no item 3.1.

As previsões geradas pela regressão linear e pela MLP são números reais. As previsões geradas pela regressão logística são números reais no intervalo $(0, 1)$, porém foram transformados para um número real no intervalo $(-1, 1)$ conforme a seguinte regra: $\tilde{\varphi} = 2\varphi - 1$, onde φ é o resultado da previsão feita pelo modelo logístico.

A seguir, na Figura 1, estão apresentados os gráficos das previsões de um dos modelos aplicadas nos 200 dias do período de controle da estratégia #1.

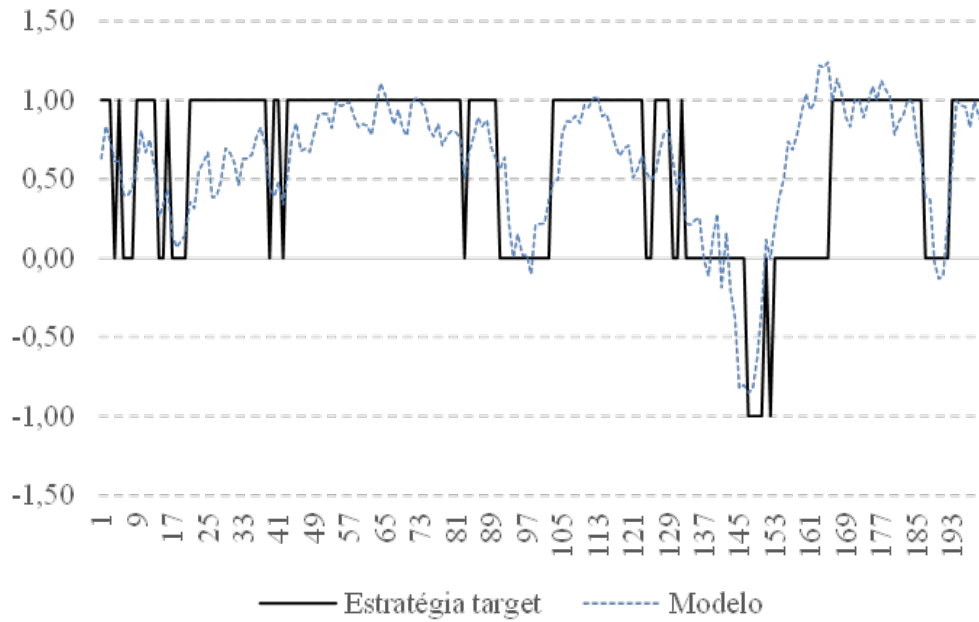


Figura 1 – Exemplo de gráfico do resultado de um dos modelos em comparação com o valor verdadeiro dado pela estratégia de *trading* sintética #1

4.5 Previsões Discretizadas

As saídas das regressões são números reais e serão discretizadas com o objetivo de colocá-las na mesma base que a saída da estratégia. Ou seja, a saída deverá pertencer

ao conjunto $\{-1, 0, 1\}$. Em que -1 representa a posição vendida (short), 0 representa a posição neutra (zerada) e 1 representa a posição comprada (long).

Foi usada a seguinte transformação para discretizar a saída das regressões:

$$\tilde{\varphi} = \text{Min}(\text{Max}(\text{Round}(\varphi), -1), 1) , \quad (4.11)$$

ou seja, a saída φ das regressões é arredondada para um número inteiro, em seguida limitada aos valores -1 e 1 . Somente no caso do modelo logístico, φ sofre uma transformação antes de ser discretizada. Essa transformação está descrita acima no item 4.4.

Na Figura 2 a seguir, está representada a saída de uma das regressões discretizadas nos 200 dias do período de controle para a estratégia #1.

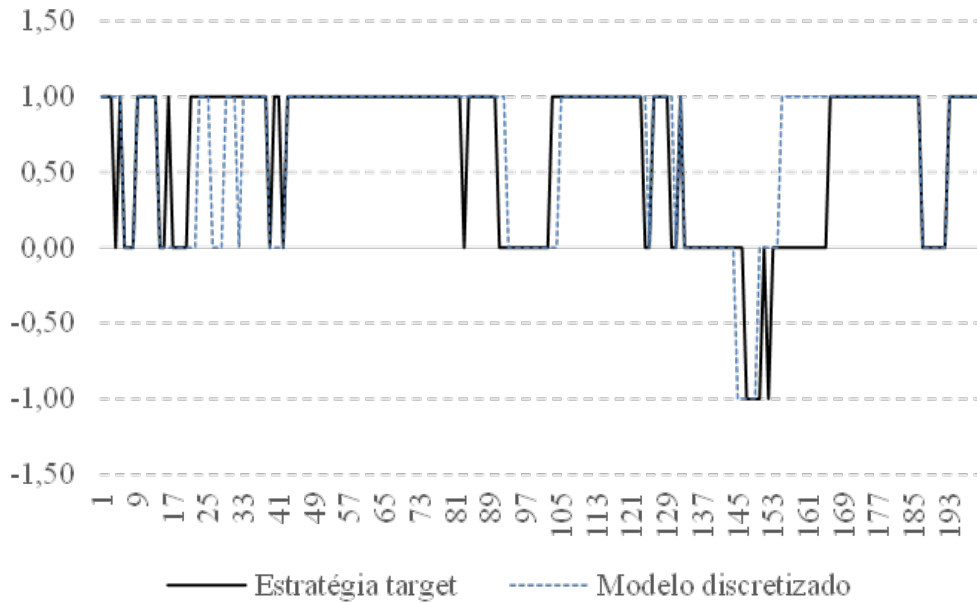


Figura 2 – Exemplo de gráfico do resultado de um dos modelos discretizados em comparação com o valor verdadeiro dado pela estratégia de *trading* sintética #1

4.6 Métricas de acerto das previsões

Para comparar os resultados serão apresentadas a seguir as métricas usadas nesse trabalho para medir o grau de acerto das previsões dos modelos.

Seja f_t a posição dada pela estratégia no instante t . Seja φ_t o resultado de uma das regressões no instante t , e seja $\tilde{\varphi}_t$ o resultado discretizado da regressão em t . Considere o

número de dias n em que a métrica irá se aplicar. As métricas serão: diferença absoluta D_t^n , diferença absoluta discretizada DA_t^n e acurácia A_t^n , conforme,

$$D_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |f_{t-i} - \varphi_{t-i}|, \quad (4.12)$$

$$DA_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |f_{t-i} - \tilde{\varphi}_{t-i}|, \quad (4.13)$$

$$A_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n a_{t-i}, \quad (4.14)$$

em que a_{t-i} é 1 quando $\tilde{\varphi}_{t-i} = f_{t-i}$, e a_{t-i} é 0 quando $\tilde{\varphi}_{t-i} \neq f_{t-i}$.

Ou seja, D_t^n é a média da diferença absoluta entre o resultado da previsão e a posição da estratégia, DA_t^n é a média da diferença absoluta entre o resultado da previsão discretizada e a posição da estratégia e A_t^n é a taxa (de 0 a 1) de acerto da previsão discretizada (acurácia). O número n será o número de dias do período em questão.

4.7 Estabilidade da MLP

Devido à inicialização aleatória dos pesos da MLP (descrito no item 3.2.3), cada treinamento gera uma rede diferente. Portanto, o resultado das previsões de redes que receberam o mesmo tipo de treinamento pode variar. Foram feitos treinamentos procurando testar a capacidade de uma MLP dar um resultado consistente.

Para cada estratégia, foram feitos 100 treinamentos. Esse número de treinamentos foi escolhido, pois essa é considerada uma quantidade estatisticamente representativa. O número de iterações foi escolhido através de testes no treinamento em que se observou a evolução da função de custo no período de controle. O critério é procurar o número de iterações que, em geral, apresenta um valor de custo baixo o suficiente, na tentativa de evitar *overfitting*.

A Figura 3 exibe o histograma da distribuição dos valores da métrica de acurácia (calculada conforme a equação 4.14) produzidos pelos dados do período de controle aplicado às 100 MLPs treinadas.

Essa distribuição é assimétrica, e embora não tenham sido apresentadas, as distribuições das outras métricas para a todas as estratégias também são assimétricas. Além disso, observa-se também a presença de *outliers* (valores muito diferentes da média). Devido a essas características, para comparar os resultados das previsões das MLPs com as outras regressões, o valor que será usado como referência será a mediana (e não a média). A

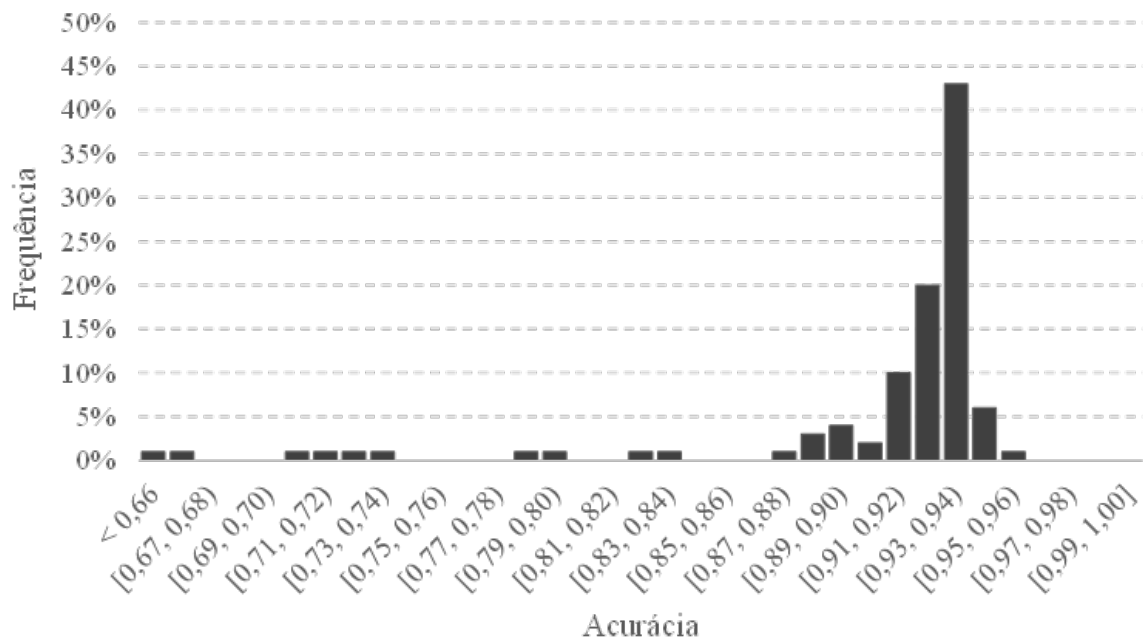


Figura 3 – Histograma com as acurácias, no período de avaliação, de 100 treinamentos de MLPs para a estratégia #1

Estatística	valor
Média amostral	86,19%
Mediana amostral	92,50%
Desvio padrão amostral	14,07%

Tabela 1 – Estatísticas da acurácia das MLPs no período de avaliação

motivação de usar uma referência como essa é ter uma estatística que represente os valores intermediários de uma amostra. Isto é, supondo que foram feitos vários treinamentos e pra cada um deles foi medida a acurácia no período de controle, o valor intermediário das acurácias estará mais provavelmente perto da mediana da população, e não da média (por definição de mediana).

Também devido a essas características, quando houver a necessidade se referir a intervalos de confiança, serão usados percentis. Portanto, a média e desvio padrão que estão apresentados acima só serão mostrados nessa ocasião. Adiante só serão trabalhados com mediana e percentis.

As métricas de diferença absoluta estão definidas no intervalo $[0, +\infty)$ e também apresentam assimetria e presença de *outliers*, portanto, toda discussão feita para a distribuição das acurácias também vale para as outras métricas.

4.8 Critério para o número de *inputs*

Numa situação em que um indivíduo A busca replicar a estratégia de um indivíduo B, o indivíduo A não tem informações para escolher qual o melhor número de dias $N + 1$ que devem ser usados como *inputs* nas regressões. Por essa razão é preciso estabelecer um critério para encontrar o N mais adequado.

O critério elaborado tem 5 etapas:

1. Estabelecer um conjunto de N 's para serem testados. Nesse caso foram usados os valores $\{20, 60, 100, 200, 600\}$. Essa escolha foi arbitrária apenas para representar janelas de tempo de magnitudes diferentes.
2. Os três tipos de regressões são modelados usando os dados do período de treinamento, para cada N do conjunto estabelecido anteriormente.
3. Para cada N do conjunto, são feitas previsões no período de controle. São usadas para comparar os resultados as métricas que estão definidas no item 4.6.
4. Considerando que existem várias métricas para as previsões, calcula-se a média das métricas para cada N . Essas médias estão apresentadas na Tabela 2.
5. O N escolhido será aquele em que a média tem valor mais alto.

N	MLP	RLM	RLgM	Média
20	87,8%	82,5%	79,5%	83,3%
60	84,7%	85,5%	81,0%	83,7%
100	91,7%	84,0%	80,5%	85,4%
200	91,2%	81,5%	82,0%	84,9%
600	62,8%	79,0%	68,0%	69,9%

Tabela 2 – Acurácia das previsões para a estratégia #1 no período de controle para diferentes valores de N .

Para cada N testado, a Tabela 2 mostra os valores da métrica de acurácia produzidos pelos dados do período de controle aplicados aos modelos MLP. As outras métricas também foram computadas, mas não foram apresentadas. O objetivo de mostrar essa tabela é exibir o tipo de resultado que se obtém com esse teste. Observando os valores da média, conclui-se que os valores mais altos são produzidos quando $N = 100$. Embora o resultado das outras métricas não sejam mostrados, eles também indicam $N = 100$ como o melhor valor.

Para as estratégias #2 e #3 os melhores valores para N foram 20 e 60, respectivamente. Todos esses resultados são compreensíveis, pois a estratégia #1, #2 e #3 usam 100,

20 e 40 valores como input respectivamente, ou seja, os valores de N para as estratégias #1 e #2 coincidem com as janelas móveis das estratégias, e no caso estratégia #3, $N = 60$ é o menor N , que inclui toda a informação da janela móvel da estratégia.

Para essa etapa, o treinamento das MLPs foi feito à parte. Para cada N foram realizados 5 treinamentos, e usando essas MLPs são feitas previsões no período de controle. Dos 5 treinamentos, o valor usado será a média das 3 melhores acurácias. Portanto, na Tabela 2, o valor correspondente à MLP é a média dos 3 melhores treinamentos.

5 Resultados

No capítulo anterior, foi apresentado o procedimento de como as regressões foram realizadas, qual a forma dos resultados, e quais passos são necessários para que o método definido no capítulo de Metodologia seja executado.

Nesse capítulo, estão compilados os resultados referentes aos itens 3, 4 e 5 do método (item 3.4). Resultados estes que serão apresentados para cada estratégia sintética definida.

O propósito desse capítulo é verificar se o método escolhido é capaz de alcançar o objetivo (item 3.3) de replicar estratégias de *trading* sintéticas e avaliar o método.

5.1 Comparação das previsões

Considere as métricas de diferença absoluta D_t^n , diferença absoluta discretizada DA_t^n e acurácia A_t^n definidas no item 4.6. Nessa notação, t é o dia no qual se calcula a métrica, n é o número de dias passados que define a janela de tempo à qual a métrica se refere. Em todos os experimentos $t = T$ é o fim do período de avaliação e $n = 200$ são os 200 dias do período de avaliação.

Regressão / Métrica	D_T^{200}	DA_T^{200}	A_T^{200}
Regressão Linear	0,418	0,460	54,00%
Regressão Logística	0,367	0,305	69,50%
MLP (mediana)	0,927	0,075	92,50%

Tabela 3 – Comparação entre as previsões das regressões para a estratégia sintética #1 no período de avaliação.

A Tabela 3 mostra as métricas por previsão no período de avaliação. O valor de referência para as MLPs é a mediana dos 100 treinamentos conforme discutido no item 4.7. As métricas mostram uma vantagem da mediana das MLPs sobre as outras regressões.

Embora o valor da mediana das MLPs seja maior que as outras regressões, será aplicado um teste estatístico para avaliar o grau de significância dessa vantagem. O teste escolhido foi o teste do sinal descrito no apêndice D e também em Siegel e Castellan (1988).

Em todos os casos em que se compara as métricas dos treinamentos das MLPs, são comparados os valores das métricas de cada regressão contra os valores dos 100 treinamentos das MLPs. Por exemplo, considere a comparação entre a acurácia das MLPs e a regressão linear. Considere também a notação do apêndice D. O conjunto de valores

de Y são os 100 valores de acurácia das MLPs. O conjunto de valores de X é o valor da acurácia da regressão linear repetido 100 vezes. Ou seja, Y terá 100 valores distintos e independentes de acurácia referente aos treinamentos da MLP, mas X terá 100 valores de acurácia repetidos.

No teste do sinal, são formados pares entre cada um dos valores de Y e os valores de X , ou seja, pares entre a acurácia das MLPs e o valor da acurácia da regressão linear. A estatística W é montada contando-se quantas vezes $y_i - x_i > 0$ para cada $i = 1, \dots, 100$. Para a estratégia #1, e no caso da acurácia das MLPs em comparação com a acurácia da regressão linear obtém-se que $y_i - x_i > 0$ num total de 3 vezes. O p -valor do teste é $1,32 \times 10^{-25}$. Para uma significância de 5%, a hipótese nula, H_0 , de que a acurácia das MLPs é o mesmo valor que a acurácia da regressão linear, é rejeitada.

O teste descrito acima foi feito comparando apenas a acurácia das MLPs contra a acurácia da regressão linear, porém é preciso ainda aplicar o mesmo teste para os valores das outras métricas das MLPs em comparação com as outras regressões. Para a estratégia #1, o que se observa é que o p -valor para o mesmo teste, comparando a MLP e as outras regressões, em todas as métricas é menor ou igual a: $p\text{-valor} = 3,22 \times 10^{-24}$. Portanto, no caso da estratégia #1, pode-se concluir que a MLP supera as outras regressões em quaisquer das três métricas, para um grau de significância de até $3,22 \times 10^{-24}$.

Foram feitos os mesmos testes para a estratégia #2 e #3. Os resultados estão apresentados a seguir.

O resultado das métricas das previsões da estratégia #2, aplicadas ao período de avaliação, estão apresentados na tabela 4. O mesmo teste foi empregado para testar se as MLPs tem o mesmo valor que a regressão linear e a regressão logística. O maior p -valor verificado ($1,53 \times 10^{-17}$) foi quando a comparação ocorre entre a acurácia da MLP e da regressão logística.

Regressão / Métrica	D_T^{200}	DA_T^{200}	A_T^{200}
Regressão Linear	0,358	0,295	70,50%
Regressão Logística	0,319	0,215	78,50%
MLP (mediana)	0,258	0,175	82,50%

Tabela 4 – Comparação entre as previsões das regressões para a estratégia sintética #2 no período de avaliação.

A comparação das métricas das previsões da estratégia #3 no período de avaliação estão apresentadas na Tabela 5. Observa-se que a regressão com melhores resultados foi a regressão logística. De fato, quando aplica-se o teste do sinal para comparar as métricas das previsões da regressão logística com as MLPs, o p -valor obtido é 1,00 em todas as métricas. Isto significa que o resultado das métricas para a regressão logística é diferente dos resultados das MLPs para qualquer grau de significância.

Regressão / Métrica	D_T^{200}	DA_T^{200}	A_T^{200}
Regressão Linear	0,447	0,395	60,50%
Regressão Logística	0,239	0,115	88,50%
MLP (mediana)	0,267	0,140	86,00%

Tabela 5 – Comparação entre as previsões das regressões para a estratégia sintética #3 no período de avaliação.

5.2 Extensão dos resultados a outros ativos

As estratégias sintéticas elaboradas nesse trabalho podem ser aplicadas a qualquer ativo. Até esse ponto, testou-se a capacidade dos modelos de replicar as estratégias aplicadas à série do ETF SPY.

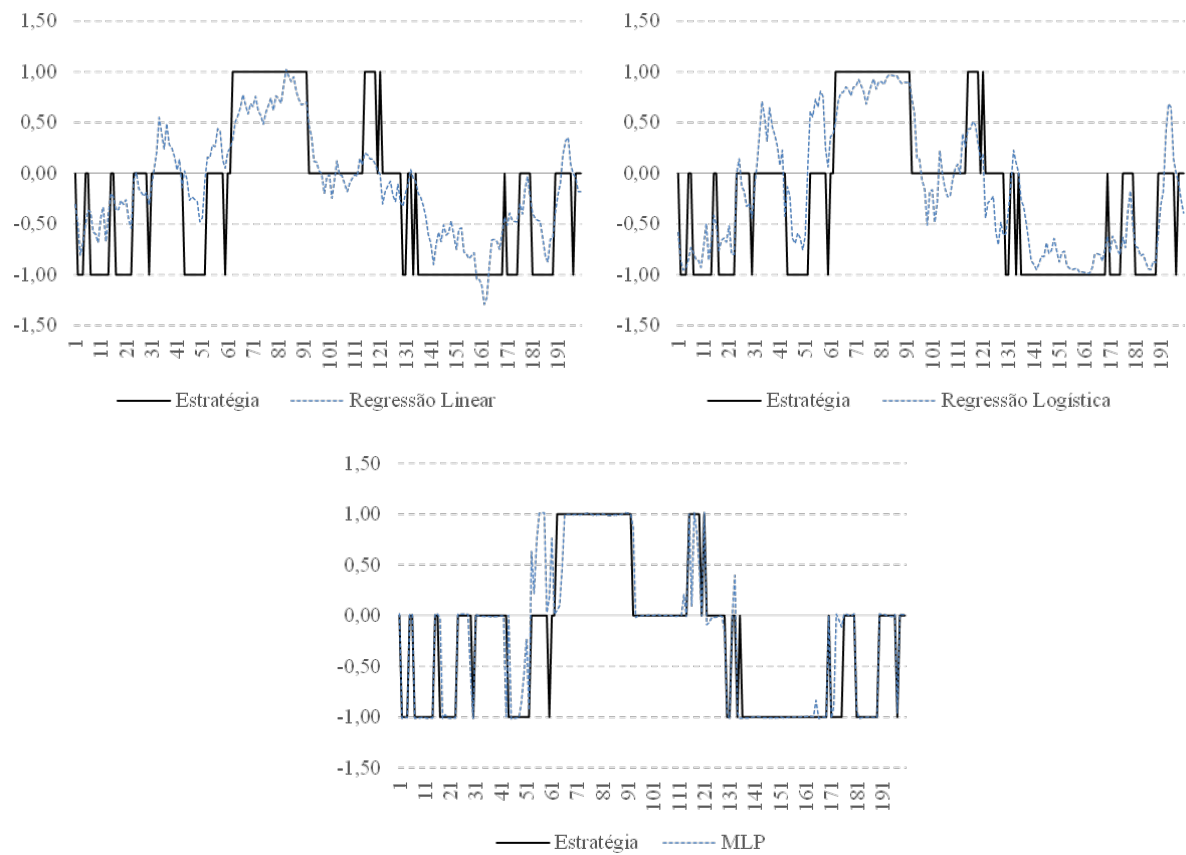


Figura 4 – Estratégia 1: Resultado das regressões treinadas usando a série de SPY, mas aplicada à série de IBOV, no período de avaliação.

As regressões foram implementadas usando a série do SPY e foram analisadas no período de avaliação também usando a série do SPY. Nesse item, será testada a capacidade dos modelos replicarem as estratégias quando aplicadas a outros ativos, que não foram usados no treinamento.

Colocando de outra maneira, considere que as posições da estratégia de *trading* são montadas em outro ativo. O que foi testado nesse item é a capacidade das previsões de reproduzirem o comportamento da estratégia em outros ativos (IBOV), no período de avaliação.

Os resultados das previsões para a estratégia #1, regredidas com o SPY, mas aplicadas ao período de avaliação na série de Ibovespa, estão apresentados nos gráficos da Figura 4.

Nos gráficos da Figura 5, estão apresentadas as previsões discretizadas sobre a série do IBOV, no período de avaliação. O método de discretização foi o mesmo utilizado no item 4.5.

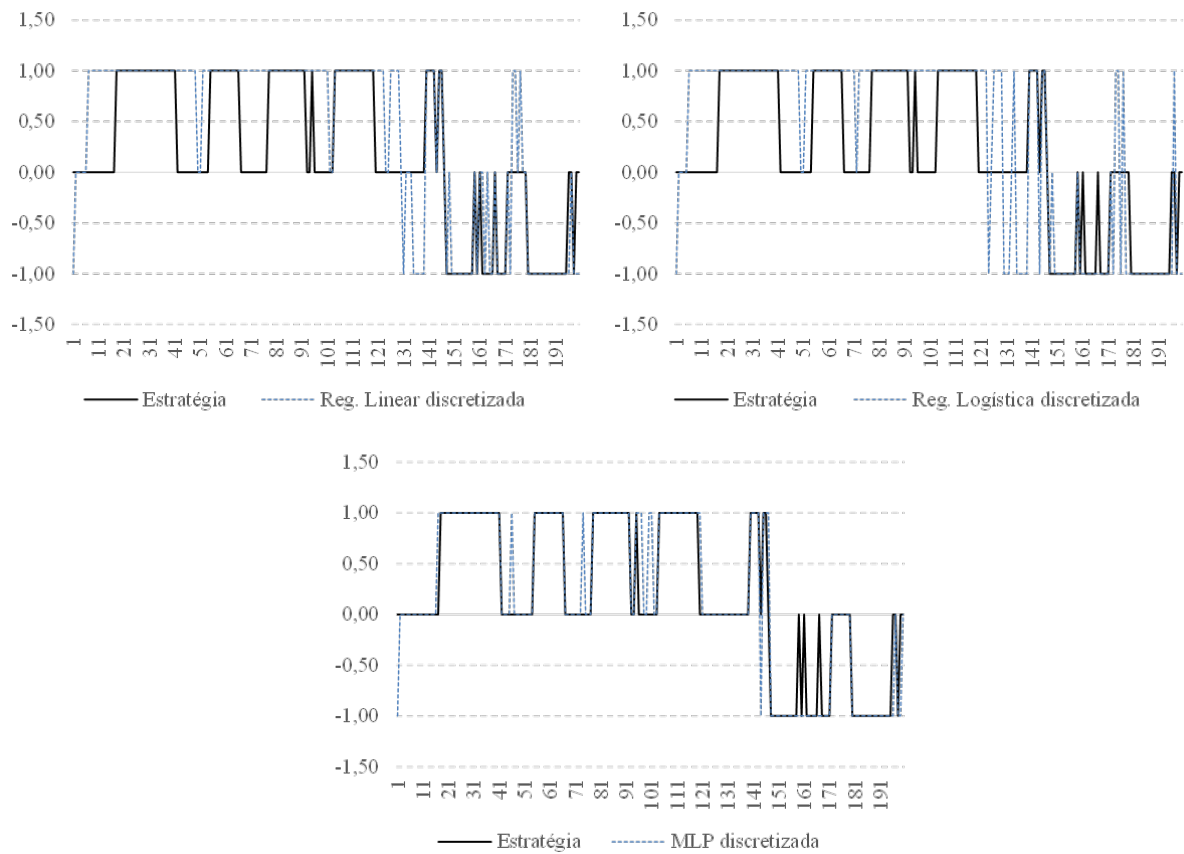


Figura 5 – Estratégia 1: Resultado das regressões discretizadas treinadas usando a série de SPY, mas aplicada à série de IBOV, no período de avaliação.

O histograma na Figura 6 foi construído para mostrar a acurácia das 100 redes treinadas sobre a série de SPY, mas agora medindo a acurácia no período de avaliação da série de IBOV.

O 10-percentil da distribuição do histograma da Figura 3 (acurácia das previsões das MLPs aplicadas à série do SPY) é de 87%. Na distribuição do histograma da Figura 6, o 10-percentil das acurácias é de 85%. Esse resultado mostra deterioração de 2% da

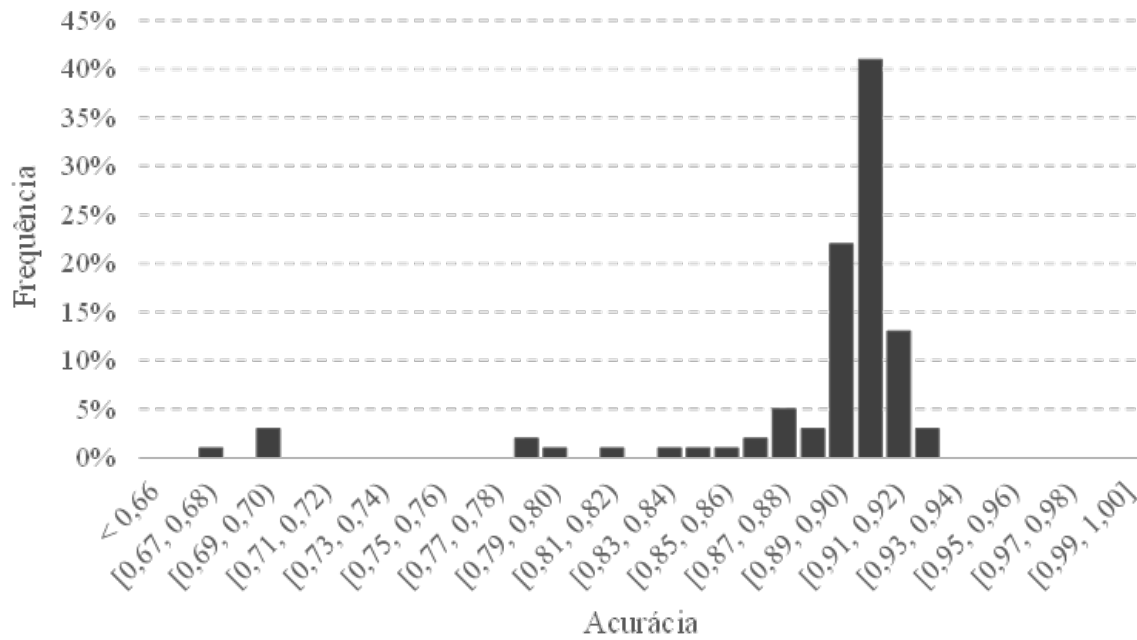


Figura 6 – Estratégia 1: Histograma com as acurácias de 100 treinamentos de MLPs que foram treinadas nas série de SPY, mas projetadas no período de avaliação da série de IBOV.

acurácia (do 10-percentil) quando as MLPs são aplicadas à série de IBOV, quando o treinamento ocorreu na série de SPY.

O 90-percentil nas previsões sobre o IBOV tem uma acurácia de 91%, enquanto que nas previsões sobre o SPY tinha 93,5%, o que mostra uma diferença de 2,5% entre os dois valores. Essa diferença é consistente com a diferença observada no 10-percentil.

A Tabela 6 mostra o resultado das métricas das previsões dos modelos, para a estratégia #1 aplicadas à série do IBOV (treinadas na série do SPY), no período de avaliação.

Regressão / Métrica	D_T^{200}	DA_T^{200}	A_T^{200}
Regressão Linear	0,347	0,245	75,50%
Regressão Logística	0,305	0,215	78,50%
MLP (mediana)	0,111	0,100	90,00%

Tabela 6 – Comparação entre as previsões das regressões aplicadas ao período de avaliação na série do IBOV para a estratégia sintética #1

Comparando as Tabelas 3 e 6 observa-se que houve deterioração das previsões das MLPs quando aplicadas à série do IBOV, o que é consistente com as observações anteriores referentes aos valores da acurácia do 10-percentil e 90-percentil das MLPs. Porém, observa-se que as regressões linear e logística mostram maior grau de acerto quando aplicadas à

série de IBOV.

Para analisar se as métricas das previsões das MLPs superam as outras regressões, foram feitos os mesmos testes do item 5.1. Para a estratégia #1, todos os p -valores de todas as comparações entre as MLPs e as outras regressões, em todas as métricas, no período de avaliação foram menores que 10^{-20} . O que mostra que a MLP mantém sua vantagem quando aplicada à série IBOV.

A seguir estão apresentados os resultados das estratégias #2 e #3 para as previsões período de avaliação da série do IBOV. Observa-se, nas tabelas 7 e 8, que a regressão logística teve melhor resultado em todas as métricas.

Regressão / Métrica	D_T^{200}	DA_T^{200}	A_T^{200}
Regressão Linear	0,306	0,225	77,50%
Regressão Logística	0,259	0,115	88,50%
MLP (mediana)	0,189	0,145	85,50%

Tabela 7 – Comparação entre as previsões das regressões aplicadas ao período de avaliação na série do IBOV para a estratégia sintética #2

Regressão / Métrica	D_T^{200}	DA_T^{200}	A_T^{200}
Regressão Linear	0,371	0,310	69,00%
Regressão Logística	0,168	0,110	89,00%
MLP (mediana)	0,199	0,135	86,50%

Tabela 8 – Comparação entre as previsões das regressões aplicadas ao período de avaliação na série do IBOV para a estratégia sintética #3

Observa-se que há melhora no grau de acerto das regressões linear e logística, quando aplicadas ao IBOV (em relação à aplicação no SPY). É possível que isso se deva às diferentes magnitudes dos retornos das duas séries. A série de retornos do IBOV, em geral, apresenta maior volatilidade (desvio padrão) que a série do SPY. Verifica-se empiricamente que essa diferença faz com que as previsões geradas pelas regressões linear e logística se tornem mais exageradas na série de IBOV, isto é, os valores fiquem mais próximos de -1 e 1 .

Somente na estratégia #1, a MLP foi capaz de estender para a série de IBOV, a vantagem verificada na série de SPY. Na estratégia #2, a MLP tem maior grau de acerto quando aplicada à série de SPY, e a regressão logística é superior quando aplicada ao IBOV. Na estratégia #3, a regressão logística mostra maior grau de acerto quando aplicada às duas séries, SPY e IBOV.

6 Conclusão

Esse trabalho avaliou a capacidade de três modelos reproduzirem os sinais de estratégias de *trading* sintéticas por meio de regressões. Foram comparadas: regressão linear, regressão logística e um tipo de redes neurais artificiais, a MLP. Essas regressões foram treinadas para replicar as três estratégias de *trading* sintéticas definidas nesse estudo.

Os resultados apresentados no capítulo 5 mostram que, para a estratégia #1, a MLP produziu melhores valores de grau de acerto para replicar a estratégia que as outras regressões.

Também foi observado que, para a estratégia #1, depois de as redes serem treinadas no período de treinamento da série de SPY, as redes resultantes foram bem sucedidas em projetar a posição da estratégia no período de avaliação da série de IBOV. Mais uma vez, as MLPs tiveram maior grau de acerto que as regressões linear e logística.

Essa vantagem consistente da MLP na estratégia #1 não é verificada nas estratégias #2 e #3. Na estratégia #2, a MLP teve melhor performance quando aplicada à série para a qual foi treinada (série de SPY), porém, ao tentar prever as posições numa série de outro ativo (IBOV) a regressão logística teve melhor resultado.

Na estratégia #3, a regressão logística teve maior grau de acerto ao prever as posições da estratégia no período de avaliação, tanto para a série para a qual foi treinada (série de SPY), quanto para a série de outro ativo (IBOV).

A vantagem da MLP para reproduzir a estratégia #1 mostra que as características do algoritmo da estratégia são melhor capturados pela MLP, porém essa habilidade não foi observada nas estratégias #2 e #3. O principal indicador usado na estratégia #1 são médias móveis simples, um indicador linear. No caso das estratégias #2 e #3, são usados indicadores não lineares, como desvio padrão e máximos e mínimos. Essas diferenças possivelmente levaram a alguma dificuldade para a MLP capturar as características dessas funções. Uma investigação de como as características das estratégias podem ser melhor capturadas pelos modelos (RLM, RLgM e MLP) fica como sugestão de pesquisa futura.

Após fazer as regressões usando como treinamento a série de SPY, foram feitas previsões sobre o período de avaliação da série de IBOV, isto é, as regressões são treinadas na série de SPY, mas as previsões são feitas na série de IBOV. Ao analisar os dados das previsões sobre a série de IBOV, foi observado que o grau de acerto dos modelos linear e logístico foram maiores na série de IBOV, em comparação com a série para as quais as regressões foram treinadas (SPY). Possivelmente isso ocorre, pois, em geral, a volatilidade

(desvio padrão) das séries de retornos do IBOV é maior que na série do SPY. Verifica-se empiricamente que as previsões desses modelos exageram as previsões para a estratégia, isto é, os valores fiquem mais próximos de -1 e 1 .

Se fossem feitos sorteios aleatórios para tentar prever as posições das estratégias, a acurácia esperada seria de $1/3$ (são três possibilidades de posição). Observa-se em todos os testes, que os modelos tiveram acurácia maior que esse valor, o que indica que as regressões são capazes de capturar características próprias das estratégias.

O método proposto nesse trabalho pode ser estendido a vários outros tipos de análises semelhantes. Nesse contexto, são sugestões de pesquisas futuras: (i)- testar a capacidade dos modelos (RLM, RLgM e MLP) replicarem outras estratégias de *trading* sistemáticas e sintéticas que usam outros indicadores de preço clássicos; (ii)- testar a capacidade de outros modelos de *machine learning* de replicarem estratégias de *trading* sintéticas; (iii)- testar a capacidade dos modelos (RLM, RLgM e MLP) replicarem estratégias de *trading* sistemáticas e sintéticas que usam como *inputs* indicadores que não dependem dos preços, como por exemplo, indicadores de sentimento alimentados por notícias; (iv)- testar a capacidade dos modelos (RLM, RLgM e MLP) de reproduzir o comportamento humano, isto é, como um ser humano toma decisões de compra e venda ao se deparar com gráficos de preço; (v)- testar a capacidade dos modelos (RLM, RLgM e MLP) de imitar uma estratégia de *trading* sistemática real, que esteja sendo aplicada no mercado, mas cuja forma e *inputs* não sejam conhecidos.

Referências

- ALVIM, L. G. M. Estratégias de trading e lucros estatisticamente positivos no mercado de ações do Brasil. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2013.
- BLACK, F. The pricing of commodity contracts. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 167–179, 1976.
- BOAINAIN, P. G.; PEREIRA, P. L. V. "ombro-cabeça-ombro": Testando a lucratividade do padrão gráfico de análise técnica no mercado de ações brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 7, n. 3, p. 265–303, 2009.
- CALDEIRA, J. F. Arbitragem estatística e estratégia long-short pairs trading, abordagem da cointegração aplicada a dados do mercado brasileiro. Departamento de Economia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.
- CASTRO, U. C. de. Derivação de modelos de trading de alta frequência em juros utilizando aprendizado por reforço. Fundação Getúlio Vargas, 2017.
- CONRAD, J.; KAUL, G. An anatomy of trading strategies. *The Review of Financial Studies*, The Society for Financial Studies, v. 11, n. 3, p. 489–519, 1998.
- FAMA, E. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970.
- GAMBOGI, J. A. Aplicação de redes neurais na tomada de decisão no mercado de ações. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle da USP, 2013.
- HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; FRIEDMAN, J. *The Elements of Statistical Learning*. [S.l.]: Springer, 2008.
- HEIJ, C. et al. *Econometric Methods with Applications in Business and Economics*. [S.l.]: Oxford University Press, 2004. ISBN 0199268010.
- HOSMER, D. W.; LEMESHOW, S. *Applied Logistic Regression*. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc, 2000. ISBN 0471356328.
- KUHN, M.; JOHNSON, K. *Applied Predictive Modeling*. [S.l.]: Springer, 2013. ISBN 9781461468486.
- LO, A.; MACKINLAY, C. When are contrarian profits due to stock market overreaction? *Review of Financial Studies*, v. 3, p. 175–206, 1990.
- LO, A. W. The adaptive markets hypothesis. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals, v. 30, n. 5, p. 15–29, 2004.
- MACEDO, M. V. de C. Investigação sobre o desempenho da regra de negociação de pairs trading utilizando o modelo de mudança de regime no mercado de ações brasileiro. Fundação Getúlio Vargas, 2017.
- MAYMIN, P.; MAYMIN, Z. G. Constructing the best trading strategy: a new general framework. *The Journal of Investment Strategies*, Risk Journals, v. 1, n. 1, p. 1–22, 2011.

- MCCULLOCH, W. S.; PITTS, W. H. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, Kluwer Academic Publishers, v. 5, p. 115–133, 1943.
- NIELSEN, M. *Neural Networks and Deep Learning*. [S.l.]: <http://neuralnetworksanddeeplearning.com/index.html>, 2015.
- OLIVEIRA, A. G. de. Análise do efeito de crises sobre estratégias de pairs trading no brasil. Fundação Getúlio Vargas, 2017.
- OSLER, C. L.; CHANG, P. H. K. Head and shoulders: Not just a flaky pattern. *Staff Reports*, Federal Reserve Bank of New York, n. 4, 1995.
- PARDO, R. *The Evaluation and Optimization of Trading Strategies*. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc, 2008. ISBN 9780470128015.
- PUCCIARELLI, A. J. Estratégia de cointegração dinâmica empírica para arbitragem estatística e trading. Fundação Getúlio Vargas, 2014.
- RUMELHART, D. E.; HINTON, G. E.; WILLIAMS, R. J. Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 323, p. 533–536, 1986.
- SIEGEL, S.; CASTELLAN, N. J. *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1988. ISBN 9780070573574.
- SOTO, P. A. Arbitragem estatística no mercado brasileiro de ações: uma abordagem por vecm. Fundação Getúlio Vargas, 2016.
- TAYLOR, N. The rise and fall of technical trading rule success. *Journal of Banking Finance*, Elsevier, v. 40, p. 286–302, 2014.
- URQUHART, A.; GEBKA, B.; HUDSON, R. How exactly do markets adapt? evidence from the moving average rule in three developed markets. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, Elsevier, v. 38, p. 127–147, 2015.

Apêndices

APÊNDICE A – *Multi-layer Perceptron*

Este apêndice tem por objetivo explicar detalhadamente o funcionamento do algoritmo de *backpropagation* num tipo de rede neural *fullyconnected feedforward*, que também é chamada de *multi-layer perceptron*.

Baseados em estudos sobre os neurônios nos cérebros humanos, [McCulloch e Pitts \(1943\)](#) foram os primeiros a formular um modelo matemático de neurônio artificial. Em seu modelo, o neurônio artificial é uma função conhecida como *threshold logic unit*. Os argumentos dessa função são chamados de sinais de entrada (*inputs*), e o valor da função é chamado de sinal de saída (*output*). O diagrama abaixo é usado para representar um neurônio artificial.

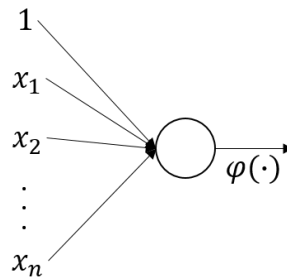


Figura 7 – Modelo de neurônio artificial

Uma característica dos neurônios são os pesos com os quais os *inputs* são combinados. Os *inputs* são combinados linearmente com os pesos antes de se aplicar a função $\varphi(\cdot)$. No modelo de McCulloch-Pitts, $\varphi(\cdot)$ é a 'função degrau', ou *threshold logic unit*.

$$z = \sum_{i=0}^n w_i \cdot x_i \quad , x_0 = 1 \quad (\text{A.1})$$

O conjunto $\{1, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ são os *inputs* e o conjunto $\{w_0, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ são os pesos do neurônio. A saída é dada pela função $\varphi(\cdot)$ aplicada a z .

No modelo de McCulloch-Pitts, $\varphi(\cdot)$ é:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z \leq 0 \\ 0, & \text{se } z > 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

A função $\varphi(\cdot)$ é conhecida como função de ativação. É desejável que essa função seja diferenciável. Há várias possibilidades de funções de ativação. As que foram usadas

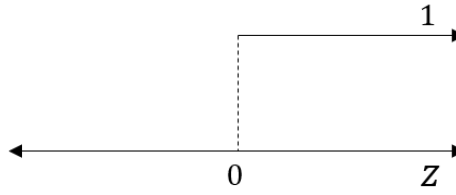
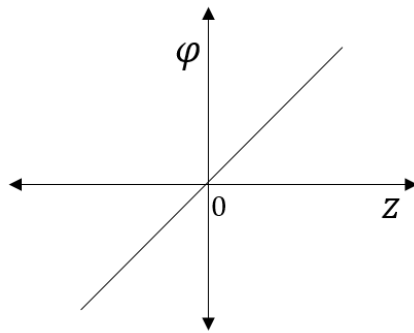


Figura 8 – Função degrau

nesse trabalho foram: tangente hiperbólica e linear.

$$\text{linear} : \quad \varphi(z) = z \quad (\text{A.3})$$

$$\text{tanh} : \quad \varphi(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad (\text{A.4})$$



(a) Função de ativação linear

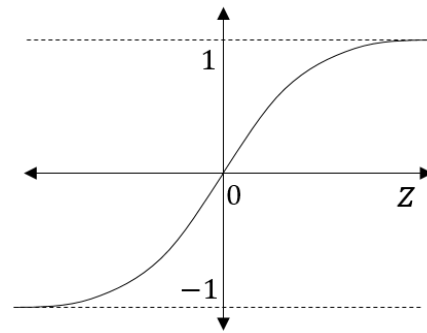
(b) Função de ativação *tanh*

Figura 9 – Funções de ativação usadas nesse trabalho

Para construir uma rede neural *fully connected feedforward*, usa-se vários neurônios artificiais conectados de maneira que os sinais são propagados a partir da entrada e seguem 'para frente' até a saída. A seguir, na figura 10, está um exemplo de rede desse tipo com 3 *inputs*, 2 camadas escondidas, com 3 neurônios em cada, e um neurônio na camada de saída. O número de neurônios em cada camada e o número de camadas é arbitrário.

Pode-se representar o *output* da rede neural como: $\hat{y} = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $\Phi(\cdot)$ é uma função composta de várias funções não-lineares.

Durante o treinamento de uma rede, o *output* é comparado com o valor de uma outra função. Função esta que a rede é treinada para reproduzir o resultado.

Seja $f(\cdot)$ a função que se deseja reproduzir o resultado com o uso de uma rede neural. Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$. Para uma rede com apenas um neurônio na camada de

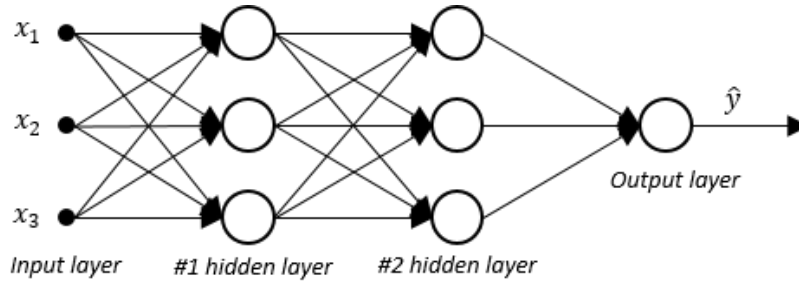


Figura 10 – Exemplo de rede *fully connected feedforward* com três neurônios em cada uma de suas duas camadas escondidas e um neurônio na camada de saída

saída, pode-se definir o erro da rede como $e = y - \hat{y}$ e a função de custo como:

$$C = \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2 \quad (\text{A.5})$$

No processo de treinamento da rede procura-se uma combinação de pesos (dos neurônios) que minimizam a função custo. Para isso Rumelhart, Hinton e Williams (1986) desenvolveram o algoritmo de *backpropagation*.

A idéia do *backpropagation* é que os pesos dos neurônios sofram pequenos ajustes partindo da saída da rede para a entrada.

Para explicar o funcionamento do *backpropagation* serão usadas as notações de Nielsen (2015). Considere a seguinte notação para os pesos dos neurônios. Seja w_{jk}^l o peso da ligação entre o k -ésimo neurônio da camada $(l - 1)$ para a camada l . Segue exemplo na figura 11.

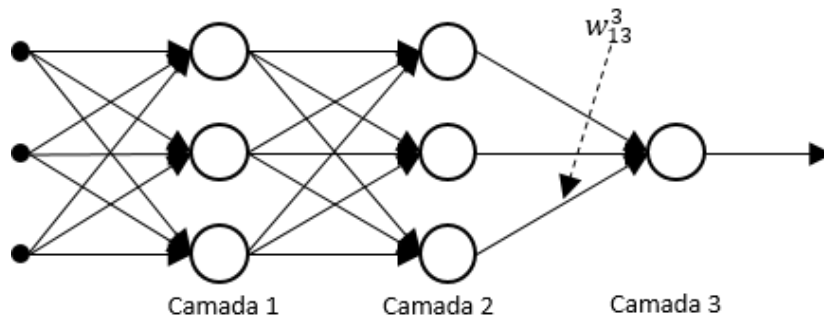
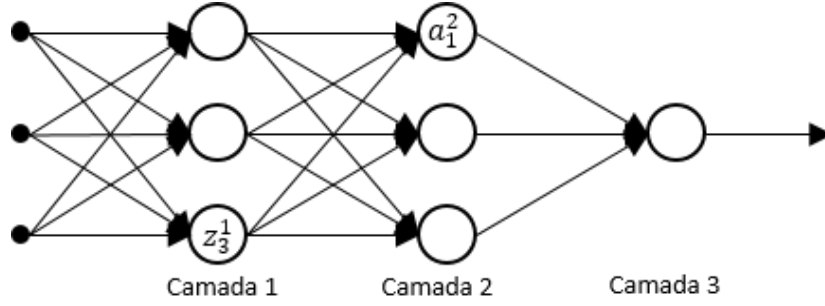


Figura 11 – Notação para os pesos dos neurônios

Considere também a notação a_j^l para a saída (função de ativação) do j -ésimo neurônio na l -ésima camada. Podemos usar a mesma notação para designar os z 's da equação A.1. Segue exemplo na figura 12.

Figura 12 – Notação para a saída dos neurônios e para z

Temos então a notação:

$$z_j^l = \sum_{k=0}^n w_{jk}^l a_k^{l-1} \quad (\text{A.6})$$

$$a_j^l = \varphi(z_j^l) = \varphi\left(\sum_{k=0}^n w_{jk}^l a_k^{l-1}\right) \quad (\text{A.7})$$

A soma é sobre todos os n neurônios da camada $l - 1$ quando $k \geq 1$. Não existe neurônio em $k = 0$. Para simplificar a notação, fica estabelecido que nesse trabalho $a_0^l = 1$. O valor w_{j0}^l é o viés do neurônio, denotado em vários livros pela letra b .

Seja L a última camada da rede (*output layer*). Generalizando a função custo da na equação A.5 para uma rede com vários neurônios na última camada, temos:

$$C = \frac{1}{2} \sum_j (y_j - a_j^L)^2, \quad (\text{A.8})$$

em que a soma é sobre todos os neurônios na última camada, mais o viés.

Com toda notação definida, o objetivo agora será desenvolver um algoritmo capaz de encontrar numericamente uma combinação de pesos dos neurônios que minimize a função custo. Uma maneira de iterar sobre os pesos seria usando o método do gradiente descendente:

$$w_{jk}^l(n+1) = w_{jk}^l(n) - \eta \frac{\partial C}{\partial w_{jk}^l}, \quad (\text{A.9})$$

em que n é a n -ésima iteração e η é um parâmetro arbitrário conhecido como taxa de aprendizado.

Para executar um passo do gradiente descendente, é preciso calcular a derivada parcial da função custo em relação a todos os pesos. Para isso, é conveniente fazer a seguinte definição:

$$\delta_j^l \equiv \frac{\partial C}{\partial z_j^l} . \quad (\text{A.10})$$

Para a última camada da rede:

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^L} = \sum_p \frac{\partial C}{\partial z_p^L} \frac{\partial z_p^L}{\partial w_{jk}^L} , \quad (\text{A.11})$$

em que a soma é sobre todos os neurônios na última camada. Como não há dependência de w_{jk}^L em z_p^L quando $p \neq j$, então,

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^L} = \frac{\partial C}{\partial z_j^L} \frac{\partial z_j^L}{\partial w_{jk}^L} = \delta_j^L \frac{\partial z_j^L}{\partial w_{jk}^L} = \delta_j^L a_k^{L-1} . \quad (\text{A.12})$$

Observe que:

$$\delta_j^L = \frac{\partial C}{\partial a_j^L} \varphi'(z_j^L) . \quad (\text{A.13})$$

Para a camada l anterior à última, a derivada parcial da função custo em relação a um peso será:

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^l} = \sum_p \frac{\partial C}{\partial z_p^{l+1}} \frac{\partial z_p^{l+1}}{\partial w_{jk}^l} = \sum_p \frac{\partial C}{\partial z_p^{l+1}} \frac{\partial z_p^{l+1}}{\partial z_j^l} \frac{\partial z_j^l}{\partial w_{jk}^l} = \sum_p \delta_p^{l+1} w_{pj}^{l+1} \varphi'(z_p^l) a_k^{l-1} . \quad (\text{A.14})$$

Observe que:

$$\frac{\partial z_p^{l+1}}{\partial z_j^l} = w_{pj}^{l+1} \varphi'(z_p^l) \quad e \quad \frac{\partial z_j^l}{\partial w_{jk}^l} = a_k^{l-1} . \quad (\text{A.15})$$

Também é possível mostrar que:

$$\delta_j^l = \sum_p \delta_p^{l+1} w_{pj}^{l+1} \varphi'(z_p^l) . \quad (\text{A.16})$$

Simplificando a equação A.14,

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^l} = \delta_j^l a_k^{l-1} . \quad (\text{A.17})$$

Portanto, sempre é possível calcular as derivadas parciais da função custo em relação ao peso usando o δ_j^l apropriado.

Resumindo, as equações necessárias para calcular as derivadas e executar o *back-propagation* são:

$$\delta_j^L = \frac{\partial C}{\partial a_j^L} \varphi'(z_j^L) \quad (\text{A.18a})$$

$$\delta_j^l = \sum_p \delta_p^{l+1} w_{pj}^{l+1} \varphi'(z_p^l) \quad (\text{A.18b})$$

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^l} = \delta_j^l a_k^{l-1} \quad (\text{A.18c})$$

$$w_{jk}^l(n+1) = w_{jk}^l(n) - \eta \frac{\partial C}{\partial w_{jk}^l} \quad (\text{A.18d})$$

Usando essas equações é possível escrever o algoritmo de treinamento de uma rede neural *fully connected feedforward*. Esse algoritmo, aplicado a uma rede de várias camadas também é chamado de *multilayer perceptron* (MLP).

Treinamento *Multilayer Perceptron*

Para cada iteração do treinamento:

loop

- Propague os sinais da entrada para a saída da rede armazenando os z_j^l e a_j^l
 - Usando *backpropagation*, calcule e armazene os δ_j^l pelas equações A.18a e A.18b
 - Aplique o gradiente descendente descrito na equação A.18d
-

APÊNDICE B – Regressão linear múltipla

Uma regressão linear onde a variável dependente é explicada por várias variáveis é chamada regressão linear múltipla (RLM). Segue abaixo uma descrição do modelo usando a notação de Heij et al. (2004). O modelo RLM relaciona uma variável dependente y_i com várias variáveis independentes $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}$ conforme:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{B.1})$$

β_1 é o termo constante. A primeira variável explicativa x_1 é definida como $x_{1i} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. ε_i são fatores residuais que não estão incluídos no modelo.

Para fazer a regressão, usa-se o método dos mínimos quadrados (MMQ). Para deduzi-lo será usada a notação matricial.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Na notação matricial pode-se reescrever o modelo B.1 como:

$$y = X\beta + \varepsilon. \quad (\text{B.3})$$

Considerando que b seja um vetor $k \times 1$ de estimadores para β , então,

$$y = Xb + e \quad \Rightarrow \quad e = y - Xb, \quad (\text{B.4})$$

em que e é o vetor $n \times 1$ de resíduos.

Pode-se escrever a soma dos quadrados dos resíduos como:

$$S(b) = \sum e_i^2 = e'e = (y - Xb)'(y - Xb) = y'y - y'Xb - b'X'y + b'X'Xb, \quad (\text{B.5})$$

em que a notação $(')$ significa transposta da matriz.

Para encontrar b , procura-se minimizar $S(b)$ (Método dos Mínimos Quadrados).

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2X' + 2X'Xb = 0 . \quad (\text{B.6})$$

Tem-se portanto,

$$b = (X'X)^{-1}X'y \quad (\text{B.7})$$

As regressões lineares múltiplas usadas nesse trabalho foram realizadas usando o Método dos Mínimos Quadrados.

APÊNDICE C – Regressão logística múltipla

Quem faz uma regressão logística múltipla (RLgM) tem um conjunto de dados (descritos pela variável y) que podem assumir dois valores, 0 ou 1, e quer explicá-los usando um conjunto de variáveis independentes x_i . Atribui-se uma probabilidade de $\pi(z)$ para que a saída seja 1. Essa probabilidade tem a distribuição descrita como:

$$\pi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} , \quad (\text{C.1})$$

$$z = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n , \quad (\text{C.2})$$

em que n é o número de variáveis independentes, x_i são as variáveis independentes. Nessa notação $x_0 = 1$.

Se $\pi(z)$ é a probabilidade de y ser 1, então $1 - \pi(x)$ é a probabilidade de y ser 0. Assumindo que as observações são independentes, podemos escrever a função de verossimilhança como:

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{j=1}^N \pi(z_j)^{y_j} [1 - \pi(z_j)]^{1-y_j} , \quad (\text{C.3})$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ e N é o número de observações.

É mais fácil trabalhar com o logarítmo da verossimilhança,

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \ln[l(\boldsymbol{\beta})] = \sum_{j=1}^N \{y_j \ln[\pi(z_j)] + (1 - y_j) \ln[1 - \pi(z_j)]\} . \quad (\text{C.4})$$

Para estimar $\boldsymbol{\beta}$ maximiza-se $L(\boldsymbol{\beta})$. Ao fazer as derivadas e igualar a zero, tem-se as *equações de verossimilhança* (HOSMER; LEMESHOW, 2000).

$$\sum_{j=0}^N [y_j - \pi(z_j)] = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\sum_{j=0}^N x_{ji} [y_j - \pi(z_j)] = 0 \quad (\text{C.6})$$

Para resolver essas equações são usados métodos numéricos. O método empregado nesse trabalho foi o Newton Raphson.

APÊNDICE D – Teste do sinal

O teste do sinal é um teste estatístico não-paramétrico aplicado a pares de observações.

Assuma que há dois tipos de observações de uma população com n elementos. A primeira série de observações será denominada x_i , e a segunda y_i , para cada elemento i na população. Isso resulta em duas amostras pareadas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Considere o valor z_i da diferença entre cada valor dessas amostras, em que $z_i = y_i - x_i$ para todos $i = 1, \dots, n$.

Os requisitos para o teste do sinal são:

1. z_i são independentes
2. z_i é contínuo e vem de uma mesma população
3. x_i e y_i são valores que podem ser ordenados

A hipótese nula será formulada de maneira que será testado se na média um valor de X é maior que um valor de Y conforme descrito por [Siegel e Castellan \(1988\)](#).

Seja $p = P(X > Y)$ e a hipótese nula $H_0 : p = 50\%$. Suponha que foi construída uma amostra de pares (x_i, y_i) independentes com m elementos. Para testar H_0 será criada uma estatística W que será o número de pares onde $z_i > 0$. Assumindo que H_0 seja verdadeira, então W segue uma distribuição binomial $W \sim B(m, 50\%)$.

A partir desses parâmetros, pode-se calcular o p -valor do W observado. Para um dado nível de significância α , testa-se se $p\text{-valor} < \alpha$. Se isso for verdade, então a H_0 é rejeitada, isto é, X é um valor diferente de Y para o nível de significância α .

Anexos

ANEXO A – Gráficos das estratégias sintéticas

Em todos os gráficos apresentados nesse anexo a área pintada de cinza representa a posição da estratégia f_t . Só há três valores possíveis (-1, 0 e 1) e a escala está do lado direito. Os valores referentes aos preços s_t , as médias e as bandas (inferior e superior) estão plotados com os eixos do lado esquerdo.

Os valores s_t que representam o preço foram transformados em retornos acumulados desde o dia 3/jan/2000, por isso aparecem percentuais no lado esquerdo do eixo vertical. O propósito dos gráficos nesse anexo é ilustrar o funcionamento das estratégias de *trading*, essa transformação não impacta sua representação.

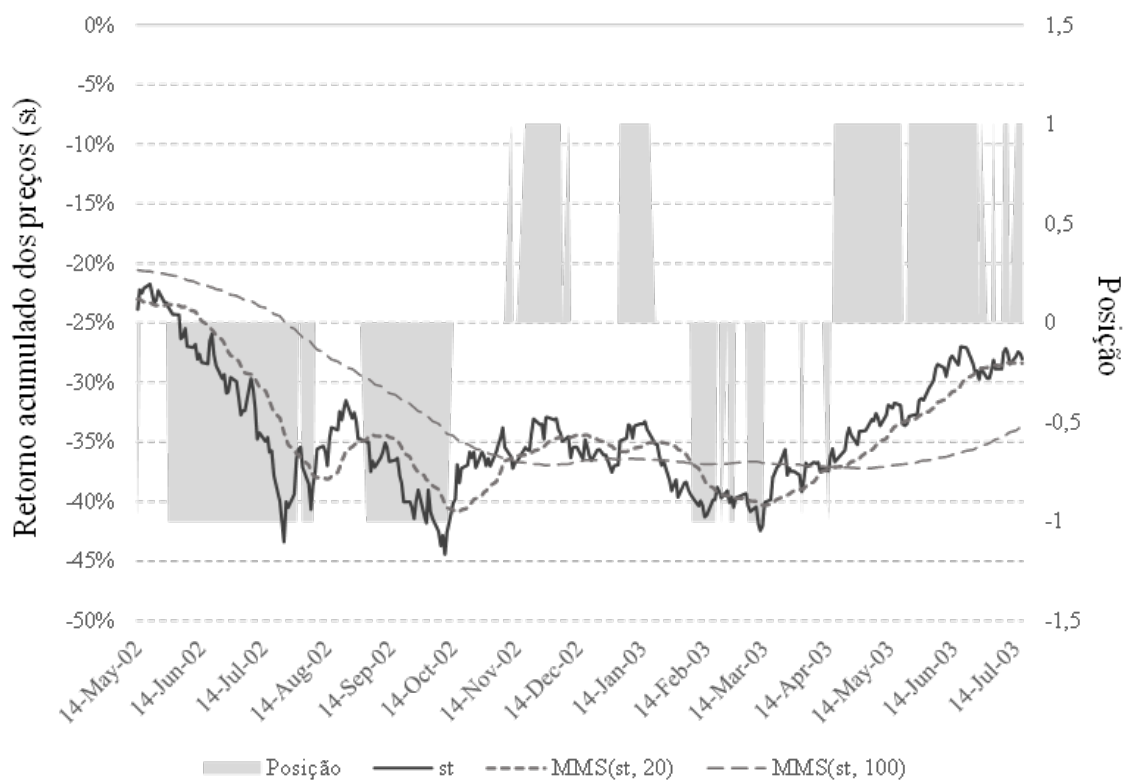


Figura 13 – Exemplo de como a estratégia sintética #1 monta posição

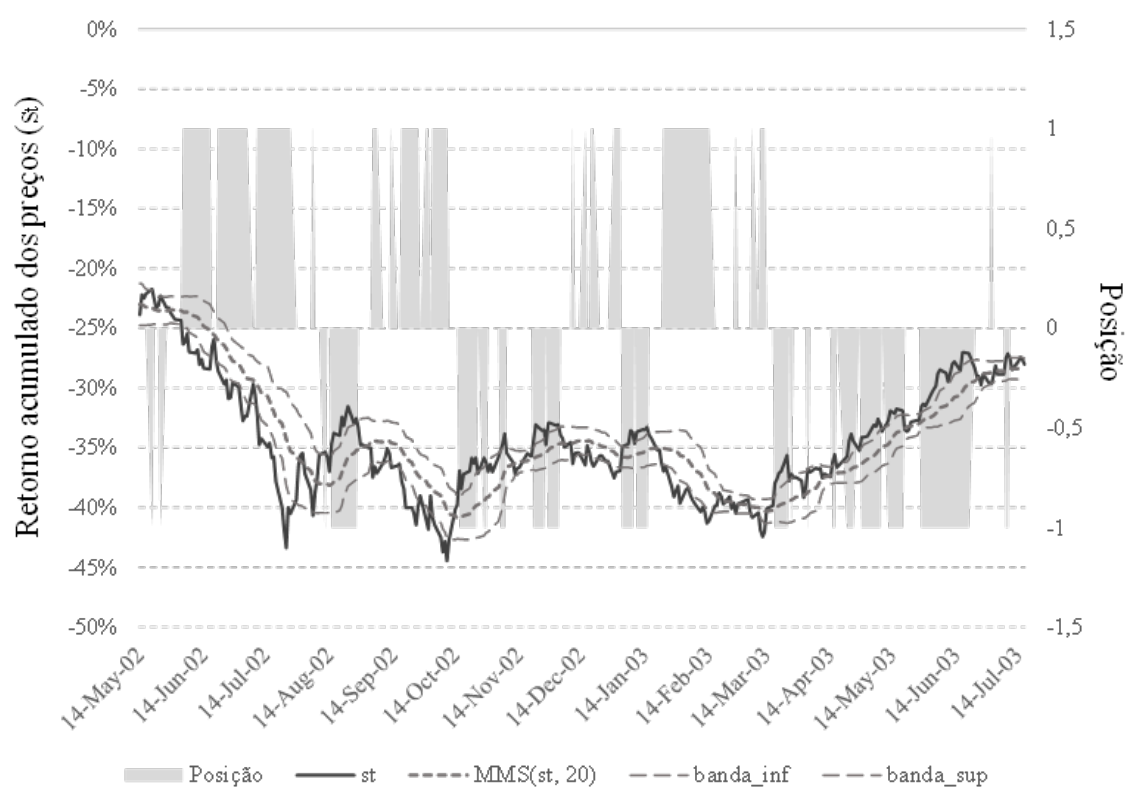


Figura 14 – Exemplo de como a estratégia sintética #2 monta posição

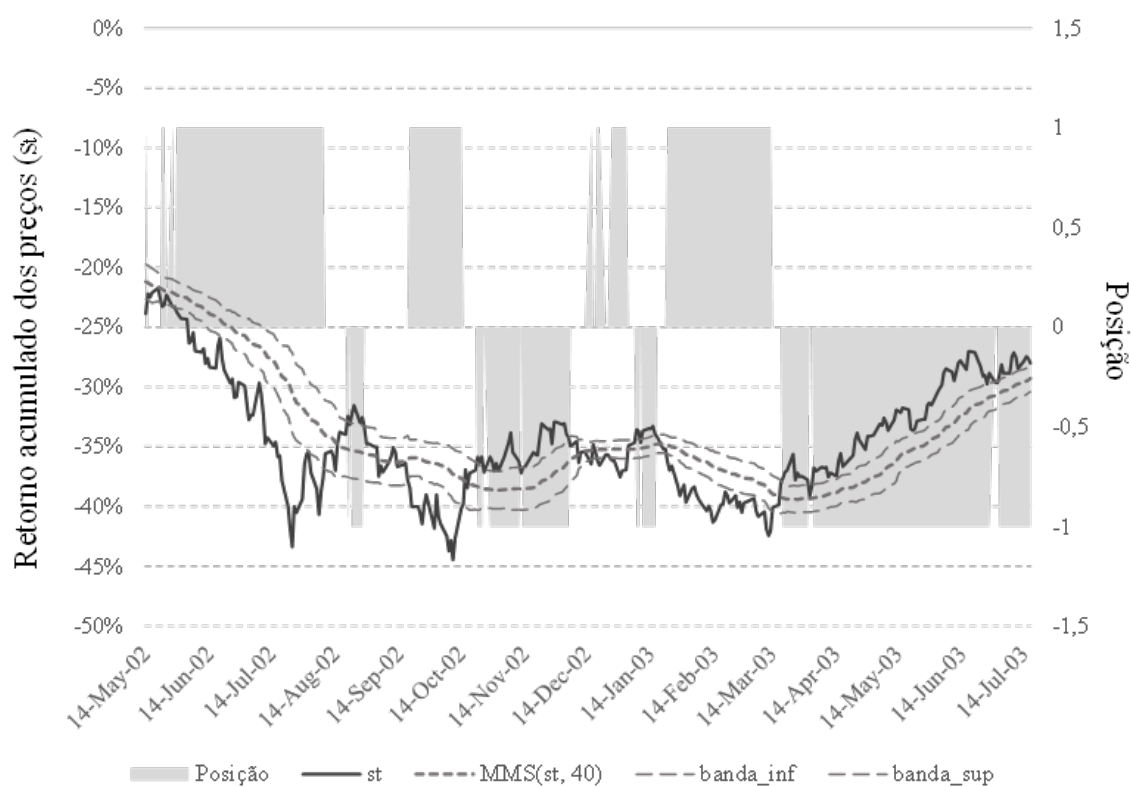


Figura 15 – Exemplo de como a estratégia sintética #3 monta posição