

Gabriel Hidequi Erbano

Análise de Séries de Tempo Financeiras
Uma Aplicação da Teoria do Caos em
Finanças Empíricas

São Paulo, São Paulo

2004

Gabriel Hidequi Erbano

Análise de Séries de Tempo Financeiras
Uma Aplicação da Teoria do Caos em
Finanças Empíricas

Através do uso de técnicas originalmente empregadas pela Física, busca-se identificar características de comportamento determinístico em séries de tempo financeiras.

Orientador:
Prof. Dr. William Eid Jr.

ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO
FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

São Paulo, São Paulo

2004

Dissertação de Mestrado sob o título *Análise de Séries de Tempo Financeiras – Uma Aplicação da Teoria do Caos em Finanças Empíricas*, defendida por Gabriel Hidequi Erbano e aprovada em 15 de dezembro de 2004, em São Paulo, Estado de São Paulo, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

Prof. Dr. William Eid Jr.
Orientador

Prof. Dr. Abraão Laredo Sicsu
Fundação Getúlio Vargas

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld
Universidade do Estado de São Paulo

*Dedico esta dissertação a minha mãe,
cujo exemplo de honestidade, simplicidade e
trabalho tem sido uma constante presença
na minha vida.*

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos para:

- o professor doutor William Eid Jr., pelo seu apoio e encorajamento;
- o professor doutor Ricardo Rochman, pela sugestão do tema;
- ao Centro de Estudos em Finanças da Fundação Getulio Vargas pelo apoio financeiro e acadêmico.

"O Algoritmo Feynman de Solução de Problemas:

- i. escreva o problema;*
- ii. pense muito sobre ele;*
- iii. escreva a solução."*

Murray Gell-mann

Resumo

A dissertação tem como principal objetivo a busca de evidências da existência de um componente determinístico no comportamento dos preços de certas ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) e em índices amplos do mercado, tais como o Ibovespa e IBX e, como consequência, determinar se a Hipótese de Mercado Eficiente é válida para o mercado financeiro brasileiro. Um objetivo secundário é mostrar a aplicabilidade de técnicas interdisciplinares ao estudo de finanças empíricas, técnicas essas que, desde sua inepção, já levam em consideração o fato de que os dados estudados não atendem ao requisito de normalidade e que as observações não são independentes entre si. Essa aplicabilidade já é largamente demonstrada em inúmeros estudos internacionais e diversas publicações no Brasil. Porém, o presente trabalho tentará aplicar uma estrutura analítica mais flexível e computacionalmente mais eficiente, utilizando ferramentas trazidas do campo da Teoria da Informação e avanços relativamente recentes da área.

Abstract

The present work has as the main objective to search evidence towards the existence of a deterministic chaotic component in the behavior of the prices of certain stocks negotiated in the São Paulo Stock Exchange (BOVESPA) and important market indexes, as the Ibovespa and the IBX and, as a consequence, to verify the validity of the Efficient Market Hypothesis for the Brazilian financial market. A secondary objective is to show the viability of interdisciplinary techniques to the study of empirical financial data. Since their inception, those techniques were developed considering the fact that the studied series would not be compliant to the normality and independence assumptions. Even as the secondary objective is already met by a large number of academic literature, including some important Brazilian papers, the present work will try to apply a more up-to-date and efficient analytical structure, using tools brought from the field of Information Theory and relatively recent published results.

Sumário

1	Objetivos e Justificativas	p. 10
1.1	Conceitos Fundamentais da Teoria do Caos	p. 14
1.1.1	Caos e Comportamento Caótico	p. 14
1.1.2	Atratores Estranhos	p. 14
2	Hipóteses e Metodologia	p. 16
	<i>Hipótese 1:</i>	p. 16
2.1	Dados	p. 17
3	Reconstrução do espaço de fase	p. 23
3.1	Determinando a defasagem	p. 25
3.1.1	Expansão e Contração do Atrator	p. 26
3.1.2	Informação mútua média	p. 26
3.2	Determinando a dimensão do espaço de fase	p. 31
3.2.1	O problema dos falsos vizinhos	p. 32
4	Classificando o Sistema Dinâmico	p. 35
4.1	Dimensões Fractais	p. 35
4.1.1	Correlações temporais e gráficos de separação espaço-temporal .	p. 39
4.2	Expoentes de Lyapunov	p. 40
4.3	Entropia	p. 43
4.3.1	A Entropia de Kolmogorov-Sinai e a Entropia de Correlação . .	p. 44

5	Análise das Séries	p. 46
5.1	Ibovespa	p. 47
5.2	IBrX-50	p. 50
5.3	Petrobrás PN	p. 55
5.4	Embratel Participações PN	p. 59
5.5	Câmbio Real-Dólar	p. 62
6	Conclusão	p. 65
7	Glossário	p. 67
	Atrator.	p. 67
	Caos.	p. 67
	Dimensão de imersão.	p. 67
	Dimensão fractal.	p. 67
	Espaço de fase/estado.	p. 67
	Expoentes de Lyapunov.	p. 67
	Falsos vizinhos.	p. 68
	Informação mútua média.	p. 68
	Referências	p. 69

1 *Objetivos e Justificativas*

A dissertação tem como principal objetivo a busca de evidências da existência de um componente determinístico no comportamento dos preços de certas ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) e em índices amplos do mercado, tais como o Ibovespa e IBX e, como consequência, determinar se a Hipótese de Mercado Eficiente é válida para o mercado acionário brasileiro.

É necessária uma rápida apresentação da Hipótese de Mercado Eficiente (HME), introduzida por Fama (1965) para que a discussão tenha continuidade. Ela afirma, de forma simplificada que:

- Movimentos sucessivos nos preços de um ativo são estatisticamente independentes, ou seja, o preço de uma ação hoje, por exemplo, não influenciará o seu preço amanhã. Outra forma de se colocar essa premissa é afirmar que os retornos de um ativo são normalmente distribuídos.
- Em um mercado eficiente, todas as informações disponíveis são instantaneamente incorporadas ao preço da ação. De acordo com Fama, três "versões" possíveis da HME, dependendo de quão restrita é essa condição:
 - Hipótese *fraca*: toda informação disponível ao público é contabilizada no preço da ação.
 - Hipótese *semi-forte*: toda informação disponível ao público e *insiders* da empresa já se encontra no preço da ação.
 - Hipótese *forte*: toda informação disponível ao público e *insiders*, além de informações desconhecidas a ambos, é instantaneamente incorporada no preço da ação.

Além disso, um sistema que apresente um componente determinístico é caracterizado

de forma que, em uma série de tempo x_t , existe uma função determinística f tal que

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, \dots, e_{t-1}, e_{t-2}, e_{t-3}) + e_t, \quad (1.1)$$

onde e_t são erros observados com média zero, mas não necessariamente independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) distribuídos.

Ora, um sistema que apresente um componente determinístico, por exemplo, se assumirmos o preço de uma ação, terá como principal característica o fato de que seu preço hoje influenciará o seu comportamento futuro, mesmo que tal relação encontre-se "mascarada" por sinais estocásticos. A existência dessa dependência é uma clara violação da HME, tal como apresentada por Fama.

Assim, uma maneira potencial de determinar a existência de evidências da eficiência de um mercado é seria através da identificação de possíveis componentes determinísticos no seu comportamento. Tradicionalmente, isso é feito através da aplicação de técnicas econométricas tais como a análise de rescalonamento ou R/S, como inicialmente realizado por Lo (1991) e replicado por Lima e Xiao (2004), a análise da função de autocorrelação de uma série, ou ainda, através do uso de modelos estocásticos lineares, como apresentado por Leal e Ribeiro (2000), Cavalcanti (2003). Porém, o problema de dependência de observações passadas já é objeto de estudo há muito tempo na análise de sistemas dinâmicos não-lineares, com técnicas particularmente desenvolvidas a partir da teoria do caos, geralmente originadas para a resolução de problemas da Física, técnicas essas que serão utilizadas neste trabalho.

Já foi mencionado que a HME assume como uma das suas hipóteses mais fundamentais sua dependência da distribuição normal dos retornos dos ativos, ou seja, os eventos medidos são *independentes*, não influenciando uns aos outros e com a mesma probabilidade de ocorrência. Essa premissa de independência, ou normalidade dos retornos, é extremamente importante no estudo acadêmico de finanças, uma vez que ela permite a aplicação de um vasto arsenal estatístico sobre os problemas estudados.

Inicialmente, essa premissa era considerada como algo extremamente sólido, tanto em termos teóricos como empíricos. Tanto que diversos autores importantes chegaram a declarar que

"... não há evidência de dependências significativas¹, tanto de um ponto de vista de investimento ou estatístico. (FAMA, 1965)

¹Fama detectou evidências de uma autocorrelação de primeira ordem de cerca de apenas 0,03 em seu artigo de 1965.

ou ainda:

"... não há outra proposição em toda a Economia que possua tamanha evidência empírica a seu favor quanto a Hipótese de Mercados Eficientes. (JENSEN, 1978, p. 96)"

Porém, Fama (1970) já começa a acumular resultados contrários à hipótese de independência dos retornos e, a partir do trabalho de Jensen, a quantidade de evidências contrárias publicadas por diversos trabalhos, destacando-se os de Watts (1978), Ball (1978), Keim e Staumbaugh (1986), French e Roll (1986), Lo e MacKinlay (1988), Fama e French (1988), Lo e MacKinlay (1990), Fama (1991) mostrou a necessidade inadiável de uma ampla revisão dessa premissa. Minardi (2002), procurou e encontrou, evidências nesse sentido no mercado brasileiro.

Como o mercado financeiro não atende a essa restrição de normalidade – problema muito provavelmente identificado inicialmente por Mandelbrot (1963b, 1963a), Fama (1965), mas só notadamente popularizado pelo artigo de Lo e MacKinlay (1988) – foram desenvolvidos diversos ajustes que criam estruturas estatísticas que, mesmo não sendo normais e independentes, são próximas o bastante para permitir o uso do ferramental estatístico tradicional, mesmo que com algumas adaptações. Mas essa lógica, aliada ao fato de que a análise estatística dos mercados veio antes do surgimento da HME, tem nos levado a um processo de racionalização que tenta justificar o uso de técnicas estatísticas em um ambiente impróprio, mas que tem sido tão usadas nos últimos 30 anos de pesquisa acadêmica que elas se tornaram quase um vício, sendo cada vez mais difícil deixá-las de lado.

Combinado a esse problema, ainda temos a relativamente recente atenção dada às distribuições estáveis, desenvolvidas por Lévy (1925), que têm consistentemente demonstrado uma melhor capacidade de descrição do comportamento dos retornos dos preços de ações Leal e Ribeiro (2000), Romanovsky (2000), Mantegna e Stanley (1994), Gopikrishnan et al. (1999), Viswanathan et al. (2002), Cavalcanti (2003), uma vez que elas apresentam as conhecidas "caudas gordas" empiricamente observadas, ou seja, uma curtose mais próxima à realidade. O problema da frequência excessiva de eventos extremos, uma crítica bastante comum à aplicação de distribuições estáveis, também foi resolvida Mantegna e Stanley (1994), o que torna ainda mais visível a não-normalidade das séries de tempo financeiras.

Temos então um objetivo secundário, que é mostrar a aplicabilidade de técnicas interdisciplinares ao estudo de finanças empíricas, técnicas essas que, desde sua inepção,

já levam em consideração o fato de que os dados estudados não atendem ao requisito de normalidade e que seus eventos não são independentes entre si. Essa aplicabilidade já é largamente demonstrada em inúmeros estudos internacionais Scheinkman e Lebaron (1989), Hsieh (1991), Lebaron (1994), Abhyankar, Copeland e Wong (1995), Mantegna e Stanley (1995), Schittenkopf, Dorffner e Dockner (2001), Garrett e Taylor (2001) e diversas publicações no Brasil Brundo (1998), Francisco, Paiva e Rosenfeld (2002), Cavalcanti (2003) . Porém, em um artigo recentemente publicado, Small e Tse (2003) mostraram que, na maioria dos estudos, tal análise é feita de forma arbitrariamente rígida, no sentido de que apenas duas classificações eram possíveis às séries analisadas: ou a série apresentava comportamento caótico, ou não. Mas, como é sabido da experiência empírica em Finanças e Economia, séries de tempo financeiras apresentam, simultaneamente, componentes estocásticos (aleatórios) e caóticos (determinísticos). Dessa forma, esse trabalho tentará introduzir uma estrutura de análise mais flexível e com técnicas um pouco mais atualizadas do que artigos já publicados até o momento no Brasil.

Por exemplo, Brundo (1998) descreveu a aplicação de uma das estatísticas de uso mais amplo na detecção de comportamento não-linear, a estatística BDS, introduzida por Brock et al. (1995), que tem como objetivo verificar se as observações analisadas têm como processo gerador um sistema caótico. Tal estatística representa um teste rigoroso para caos determinístico, porém, não se sabia na data de publicação do trabalho, os efeitos da aplicação de filtros lineares sobre essa estatística. Esses efeitos serão discutidos na seção (2.1).

Outros autores brasileiros, notadamente Francisco, Paiva e Rosenfeld (2002), Rochman (2002), também já aplicaram técnicas originadas da Física sobre séries temporais econômicas e financeiras, mostrando que o uso do ferramental proveniente do caos determinístico pode ser facilmente aplicado aos dados brasileiros com resultados dignos de maior estudo e aprofundamento.

Em termos de similaridade, a metodologia usada por Francisco, Paiva e Rosenfeld (2002) se aproxima do presente trabalho no que se refere à reconstrução do espaço de fase, mas com diferenças importantes. Primeiro, calculamos a defasagem de tempo para a reconstrução dos espaços de fase utilizando o método da informação mútua média sugerido por Abarbanel (1995), ao invés de assumirmos $T = 1$. Segundo, definimos o número de dimensões necessárias ao desdobramento do atrator através do método de falsos vizinhos, desenvolvido por Kennel, R. e Abarbanel (1992). Finalmente, o cálculo do expoente de Lyapunov será feito através do algoritmo desenvolvido por Rosenstein, Collins e Luca

(1993), Kantz (1994) que, ao contrário daquele originalmente proposto por Wolf et al. (1985) e empregado por Francisco, Paiva e Rosenfeld (2002), *não* assume a presença de determinismo na série.

1.1 Conceitos Fundamentais da Teoria do Caos

Para um melhor entendimento do trabalho, tentaremos apresentar de maneira intuitiva e, conseqüentemente, um tanto informal alguns conceitos fundamentais da Teoria do Caos. Uma vez que o presente trabalho tem como foco séries de tempo financeiros, evitaremos discussões detalhadas dos conceitos matemáticos envolvidos, focando a discussão nos passos mais importantes e conseqüências das mesmas ao trabalho.

1.1.1 Caos e Comportamento Caótico

Formalmente, não há definição para o termo *caos*, porém, diversos autores, tais como Strogatz (1994), Abarbanel (1995), Kantz e Schreiber (2004) mencionam três características que acabam compondo a seguinte definição:

Caos é o *comportamento aperiódico de longo prazo* em um sistema *determinístico* que *exibe sensibilidade às condições iniciais*.

- i A expressão *comportamento aperiódico de longo prazo* refere-se às trajetórias que não convergem a pontos fixos, órbitas periódicas ou quase-periódicas quanto $t \rightarrow \infty$. Não seria exagerado afirmar que tais trajetórias ocorreriam com uma probabilidade diferente de zero, dadas condições iniciais aleatórias.
- ii O termo *determinístico* diz respeito ao fato de que o sistema não é alimentado com dados ou parâmetros aleatórios, ou seja, "ruídos". O comportamento irregular origina-se da não-linearidade intrínseca ao próprio sistema.
- iii A *sensibilidade às condições iniciais* significa que trajetórias inicialmente próximas umas das outras se afastam de acordo com taxas exponenciais.

1.1.2 Atratores Estranhos

Outro conceito fundamental ao trabalho é o do *atrator*, que também não possui uma definição formal, sendo o conceito em si repleto de sutilezas que dificultam uma explicação

simples. Assim, enquanto a seguinte definição, dada por Strogatz (1994) e complementada por Sprott (2003) possa ser considerada um tanto informal, ela contém as principais características de um atrator. Seja um conjunto fechado A com as seguintes propriedades:

- i A é um *conjunto invariante*: qualquer trajetória $\mathbf{x}(t)$ que comece em A , permanecerá em A indefinidamente.
- ii A *atrai um conjunto aberto de condições iniciais*, ou seja, existe um conjunto aberto U contendo A tal que se $\mathbf{x}(0) \in U$, então a distância de $\mathbf{x}(t)$ para A tenderá a 0 quanto $t \rightarrow \infty$. Assim, A atrairá todas as trajetórias que comecem suficientemente perto dele.
- iii A é *mínimo*: não há nenhum subconjunto de A que satisfaça as condições (i) e (ii), ou seja, ele é *ergódico*.

Além dessas características básicas, um *atrator estranho* exhibe condições adicionais

- i Ele é um *fractal*, objetos geométricos com estruturas *auto-similares* em qualquer escala de tamanho e, geralmente, com dimensões não-inteiras.
- ii Normalmente, ele será *caótico*, apresentando sensibilidade às condições iniciais.

2 *Hipóteses e Metodologia*

Ao contrário do que tem sido feito em termos de identificação de comportamento caótico determinístico em séries de tempo financeiras, como foi mencionado na seção anterior, a dissertação verificará a validade de uma hipótese mais abrangente e, assim, mais flexível e compatível com a realidade observada na análise desse tipo de série de tempo.

Hipótese 1: *Não há evidência de existência de um componente determinístico na série de tempo analisada.*

Assim, classificamos o comportamento de uma série de tempo como contendo um componente determinístico ou não. É importante notar que tal hipótese não leva em consideração a existência ou não de componentes não-lineares na série, fato comum quando tratamos do caso de séries temporais financeiras.

Com isso, havendo evidências de componentes determinísticos na série, segue como consequência natural a conclusão de que o preço do ativo hoje mantém algum tipo de relação com seu comportamento passado. Caso existam indicações nesse sentido, teremos um forte indício de que aquele ativo em particular não seria compatível com, nem ao menos, a versão "fraca" da HME.

A verificação dessa hipótese será feita através do uso de técnicas originadas do estudo de sistemas dinâmicos não-lineares e que, apesar de todas elas poderem ser utilizadas para detectar *evidências*¹ de comportamento caótico, algumas delas foram especificamente desenvolvidos para testar a não-linearidade de uma série, condição necessária (mas não suficiente) para o caos.

O primeiro (e talvez, o mais importante) passo no trabalho consiste na reconstrução do espaço de fase para que então possamos estudar a dinâmica das séries. Uma descrição

¹no caso de séries temporais financeiras, freqüentemente é impossível afirmar com certeza a existência de um componente determinístico

detalhada dos conceitos e técnicas envolvidas é dado no capítulo 3. Aqui basta dizer que, fundamental para essa tarefa é o teorema de *embedding*, atribuído a Takens (1981) e que garante a transição de observações escalares $s(k) = s(t_0 + k\tau_s)$ a um espaço de fase multivariado. Para a aplicação desse teorema, é necessária a determinação adequada de dois parâmetros, o **lag de tempo** (τ) e o **número de dimensões** (d).

Uma vez feito isso, passamos à busca de evidências de comportamento determinístico nas séries. Isso será realizado através do cálculo de valores que nos quantifiquem certas propriedades, mais especificamente a dimensão de correlação e os expoentes de Lyapunov, escolhidas por dependerem significativamente dos procedimentos de mensuração, sistema de coordenadas escolhido etc., sendo quantidades *invariantes*.

Como se tornou necessária a implementação de grande parte dos algoritmos usados no presente, a fim de testar sua validade e introduzir os conceitos usados, inicialmente serão utilizados como dados de análise as observações do componente $x(t)$ do modelo de Lorenz, descrito pelo sistema de equações (3.9), sendo o mesmo um sistema caótico com características extensivamente estudadas e freqüentemente usado como referência no estudo de aplicações de novas técnicas não-lineares.

Assim, após a apresentação teórica e validação dos algoritmos, o capítulo 5 será dedicado exclusivamente à análise dos dados empíricos com o uso desse ferramental, permitindo um estudo mais aprofundado das vantagens e problemas específicos relacionados ao seu uso às séries temporais financeiras.

2.1 Dados

As séries temporais analisadas no trabalho foram escolhidas pela sua representatividade no mercado financeiro brasileiro, assim como pelas suas características de liquidez (o que nos possibilita uma maior quantidade de observações) e freqüência. Dentro do período compreendido entre março de 1994 e julho de 2004 foram coletadas as séries diárias correspondentes ao índice Ibovespa e IBrX, o câmbio real-dólar (PTAX), assim como os preços das ações da Petrobrás PN (PETR4) e Embratel Participações PN (EBTP4).

Todas as séries contém os valores de fechamento dos ativos, sendo obtidas a partir da base de dados Economática, tendo sua consistência verificada para eventuais erros da base. A partir delas, foram calculados os retornos diários, sobre os quais as análises foram realizadas, dados por

$$r_t = \log \left(\frac{p_{t+1}}{p_t} \right). \quad (2.1)$$

onde p_{t+1} e p_t correspondem aos preços do ativo nas datas $t + 1$ e t , respectivamente.

Tabela 2.1. Descrição resumida das séries de tempo analisadas.

Série	Símbolo	Primeira Data	Última Data	Observações
Ibovespa	IBOV	03/01/1994	15/10/2004	2.634
IBrX-50	IBRX	30/12/1997	15/10/2004	1.684
Câmbio Real-Dólar	PTAX	01/04/1999	15/10/2004	1.369
Petrobrás PN	PETR4	01/03/1994	15/10/2004	2.629
Embratel Participações PN	EBTP4	21/09/1998	15/10/2004	1.506

O número de observações de cada série é mostrado na tabela (2.1). Vale notar que, na prática, teremos $n - 1$ observações disponíveis devido ao cálculo dos retornos diários.

Podemos observar graficamente a evolução dos preços desses ativos a seguir:

Como Scheinkman e Lebaron (1989) chamam a atenção para o fato de que dados diários de preços de ativos financeiros são sensíveis a fenômenos de mercado, tais como efeitos de fim de semana, por exemplo, sendo assim, mais ruidosos. Diante disso, eles recomendam o uso de dados semanais, mas, diante do número bastante limitado de observações, seguiremos a linha de Brundo (1998), que utiliza séries diárias devido à mesma limitação.

É importante notar que, ao contrário do tradicionalmente feito na literatura estatística e econômica, como aplicado, por exemplo, por Brundo (1998) e por Rochman (2002), *não* aplicaremos filtros lineares sobre os dados da forma como normalmente isso é feito, ou seja, aplicando-se o branqueamento total da série.

O uso desses filtros deve-se ao fato, bastante conhecido, de que correlações lineares simples podem levar algoritmos de cálculo de quantidades invariantes (tais como a dimensão fractal e os expoentes de Lyapunov) a resultados espúrios e, assim, pelo menos teoricamente, o seu uso evitaria esse tipo de problema, tornando a série espectralmente mais plana ao mesmo tempo em que as estruturas determinísticas de um processo caótico subjacente permaneceriam inalteradas. Porém, na prática, isso freqüentemente não ocorre e, como demonstrado por Theiler et al. (1992), Theiler e Eubank (1993), Sauer e Yorke (1993), esse processo tem o potencial de degradar seriamente as estatísticas BDS, McLeod-Li e, muito provavelmente, a dimensão de correlação quando utilizado indiscriminada-

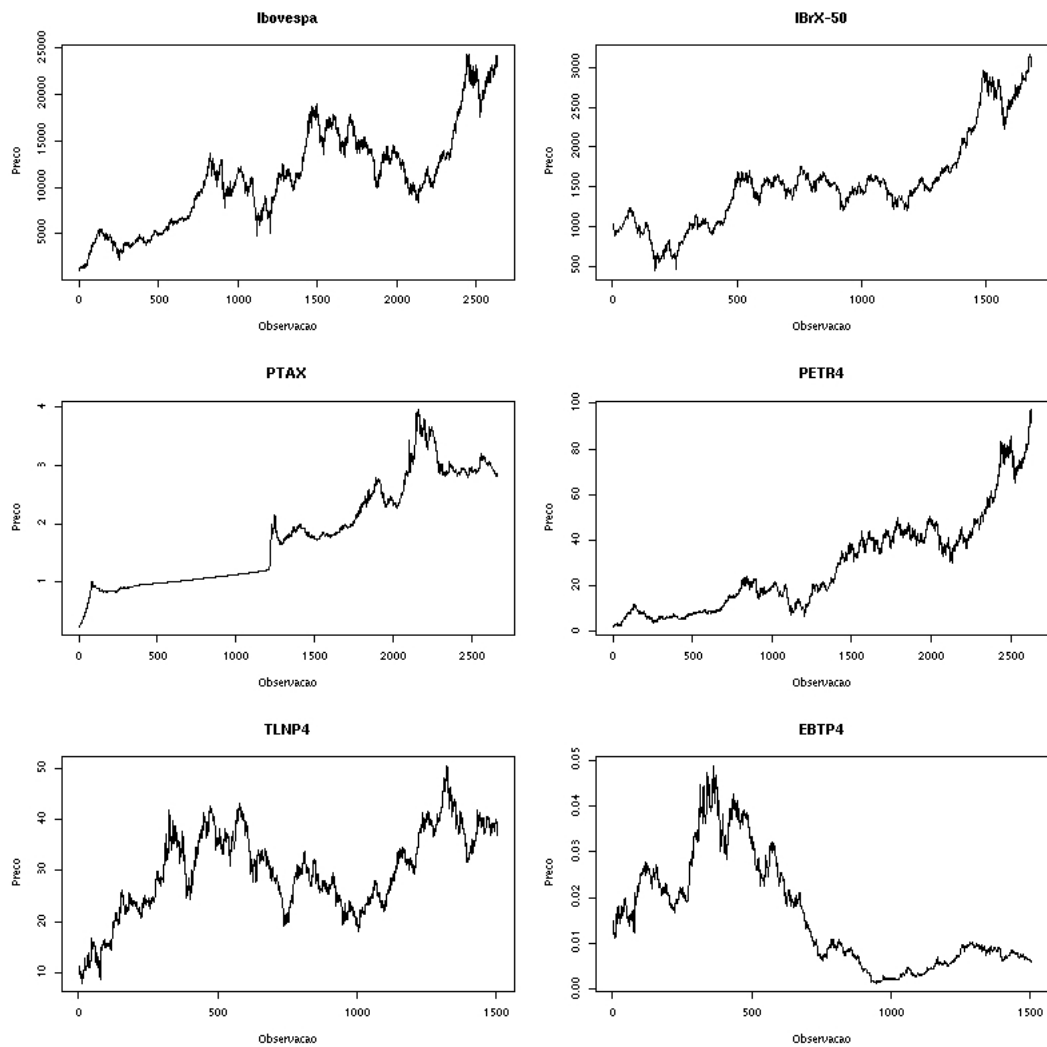


Figura 1: Evolução dos preços dos ativos analisados.

mente.

(...) [particularmente] o uso de filtros lineares relacionados ao processo de branqueamento raramente é ótimo e, usualmente, degrada a qualidade dos dados. (...) [em alguns casos] a filtragem linear é vantajosa, mas um branqueamento *completo* não é recomendado. (THEILER, 1993, p. 6).

O processo em si é bastante simples. Dada uma série temporal x_t , sabemos que o melhor previsor linear \hat{x}_t é dado pelo modelo

$$\hat{x}_t = a_0 + \sum_{k=1}^q a_k x_{t-k} \quad (2.2)$$

e que os seus resíduos $e_t = x_t - \hat{x}_t$, ou seja, aquilo que não foi capturado pelo modelo é dado por

$$e_t = x_t - \left[a_0 + \sum_{k=1}^q a_k x_{t-k} \right], \quad (2.3)$$

onde q é a ordem do modelo e os coeficiente a_k são obtidos por mínimos quadrados.

Uma amostra bastante simples do efeito da aplicação de um filtro linear é dado por Theiler e Eubank (1993) e reproduzido aqui. Utilizando o componente $x(t)$ de um mapa de Hénon e passando seus valores por um filtro de ordem $q = 6$, escolhido com base no critério de informação de Akaike (AIC). Fica evidente pelas Figuras (2) e (3) que o atrator é completamente distorcido pela aplicação do filtro, escondendo consideravelmente seu determinismo.

É importante discorrer rapidamente sobre os efeitos da aplicação de filtros lineares especificamente sobre a estatística BDS. A filtragem fornece uma solução simples para se testar a não-linearidade de uma série temporal. Ora, como os resíduos de uma série filtrada não terão correlações lineares, então quaisquer correlação encontradas neles deverão ter origem não-linear. Diante disso, a estatística BDS é equivalente a um teste de independência dos resíduos. Mas, Theiler e Eubank (1993) mostra que testes cujo primeiro passo consiste nessa filtragem apresentarão um desempenho degradado quando os dados são caóticos, sugerindo sua aplicação sobre os dados originais e comparada contra conjuntos de surrogates apropriados.

Porém, o uso adequado de filtros lineares ainda pode ser uma ferramenta valiosa no caso de séries temporais financeiras, uma vez que esse tipo de dado contém uma quantidade significativa de correlações lineares. O ponto a ser lembrado está no fato de que *não* se deve utilizar critérios lineares, tais como o AIC ou Schwartz, para determinar a ordem

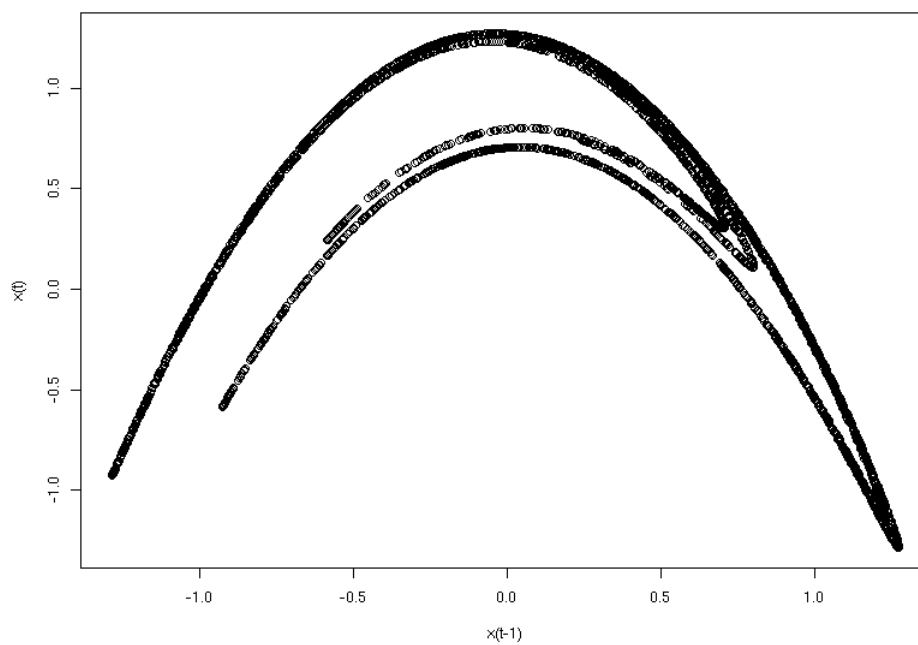


Figura 2: Componente $x(t)$ do atrator de Hénon.

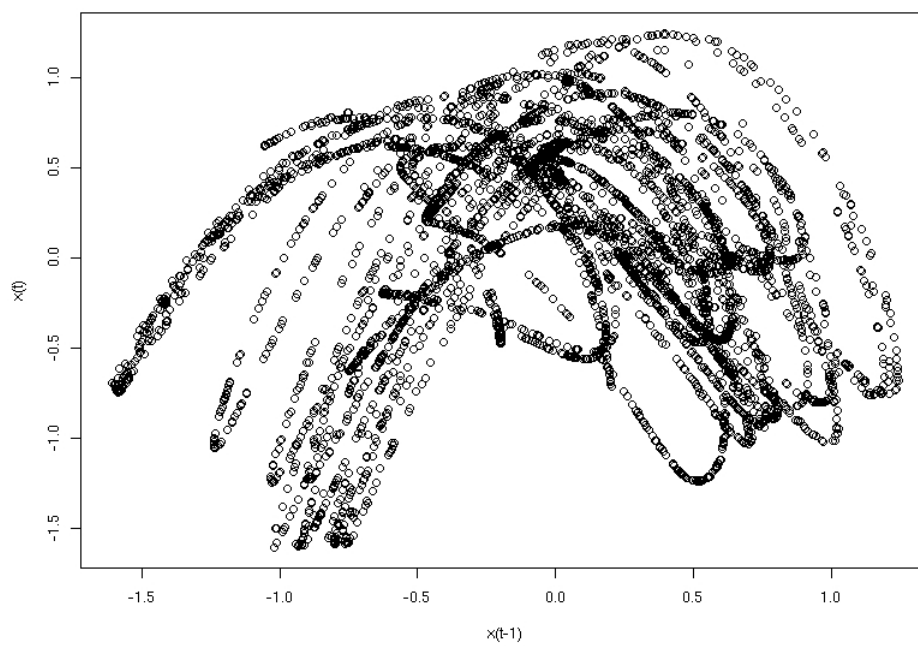


Figura 3: Componente $x(t)$ do atrator de Hénon após passar por um filtro linear de ordem $q = 6$.

do filtro, sendo necessário testar diversos valores para q verificando seu efeito sobre as estatísticas discriminantes, aqui no caso, correspondendo à dimensão de correlação.

3 *Reconstrução do espaço de fase*

O objetivo deste capítulo é apresentar as metodologias utilizadas na reconstrução do espaço onde a dinâmica estudada se desenvolve. Iniciamos a discussão com aspectos gerais envolvidos e, em seguida, uma análise detalhada dos passos seguidos e dos resultados esperados e obtidos nessa etapa.

O primeiro passo ao buscarmos evidências de comportamento determinístico em séries temporais financeiras é reconstruir a dinâmica do sistema que a originou. Porém, como capturar o comportamento de todo um sistema tendo à nossa disposição apenas um vetor composto por quantidades escalares? O teorema que nos garante a possibilidade de tal análise, ou seja, que nos permite a transição de um conjunto de observações escalares para um espaço de fase multivariado é atribuído a Takens (1981), sendo conhecido como teorema de imersão. Suponha um sistema dinâmico $\mathbf{x}(n) \rightarrow (\mathbf{x}(n)) = \mathbf{x}(n+1)$, onde o espaço de fase $\mathbf{x}(t)$ é multidimensional. Se formos capazes de observar uma única quantidade escalar $h(\cdot)$ de alguma função vetor das variáveis dinâmicas $\mathbf{g}(\mathbf{x}(n))$, então a estrutura geométrica da dinâmica multivariada pode ser *desdobrada* a partir desse conjunto $h(\mathbf{g}(\mathbf{x}(n)))$ de medidas escalares em um novo espaço, criado com novos vetores, cujos componentes consistem de $h(\cdot)$ aplicado a potências de $\mathbf{g}(\mathbf{x}(n))$. Assim, esses vetores

$$\mathbf{y}(n) = [h(\mathbf{x}(n)), h(\mathbf{g}^{T_1}(\mathbf{x}(n))), h(\mathbf{g}^{T_2}(\mathbf{x}(n))), \dots, h(\mathbf{g}^{T_{d-1}}(\mathbf{x}(n)))], \quad (3.1)$$

dentro de um espaço euclidiano com suficientes d dimensões, recriarão a maioria das propriedades do sinal multivariado desconhecido $\mathbf{x}(n)$ no novo espaço vetorial $\mathbf{y}(n)$, particularmente, Takens (1981) nos garante que a seqüência dos pontos $\mathbf{y}(n) \rightarrow \mathbf{y}(n+1)$, ou seja, a evolução do sistema no tempo, é a mesma da dinâmica desconhecida $\mathbf{x}(n) \rightarrow \mathbf{x}(n+1)$. Uma consequência crítica desse fato é a de que a dimensão do espaço original não precisa ser necessariamente a mesma do espaço de fase reconstruído.

Com isso, fazendo a função escalar $h(\cdot)$ como sendo a variável escalar observada $s(n)$

$$h(\mathbf{x}(n)) = s(n), \quad (3.2)$$

e escolhendo para a função geral $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ a operação que leva algum vetor inicial \mathbf{x} para algum tempo defasado τ_s posterior, de tal maneira que a T_k -enésima potência de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ torna-se

$$\mathbf{g}^{T_k}(\mathbf{x}(n)) = \mathbf{x}(n + T_k) = \mathbf{x}(t_0 + (n + T_k)\tau_s), \quad (3.3)$$

então os componentes de $\mathbf{y}(n)$ assumem a forma

$$\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + T_1), s(n + T_2), \dots, s(n + T_{d-1})]. \quad (3.4)$$

Abarbanel (1995) simplifica ainda mais a implementação do teorema, sugerindo como escolha para $T_k = kT$, ou seja, que as defasagens sejam qualquer inteiro múltiplo de um valor T , fazendo com que os vetores $\mathbf{y}(n)$ tornem-se

$$\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + T), s(n + 2T), \dots, s(n + T(d - 1))]. \quad (3.5)$$

Esse novo espaço é relacionado ao espaço original de $\mathbf{x}(n)$ através de transformações contínuas e diferenciáveis. De fato, o objeto geométrico (o atrator, utilizando os termos de sistemas dinâmicos) formado pelos vetores $\mathbf{f}(n)$ é praticamente equivalente ao atrator do espaço original se, como já mencionado, d for grande o bastante. Mais precisamente, o teorema de imersão menciona que, caso a dinâmica se encontre em um conjunto de d_A dimensões (onde d_A pode ser fracional), então escolher a dimensão inteira d do espaço desdobrado, onde $d > 2d_A$, será *suficiente* para remover quaisquer ambigüidades resultantes da projeção das observações sobre $h(\cdot)$ ou $s(n)$. Ainda, pode ser possível determinar uma dimensão *necessária*, menor que a suficiente $d > 2d_A$.

Tal discussão em torno do número de dimensões necessárias para se desdobrar o atrator é fundamental à aplicação prática do ferramental aqui apresentado a séries temporais financeiras devido à existência de "ruídos" na série. Definimos ruído como seqüências de números aleatórios e que possuem um número infinito de dimensões, ou seja, uma série contendo ruídos sempre poderá ser desdobrada numa dimensão superior àquela necessária à observação da dinâmica nela contida. Com isso, dependendo da técnica usada, a escolha de um número excessivamente grande de d dimensões acrescenta redundância (no caso de séries não contaminadas por ruídos), além de afetar negativamente o desempenho de diversos algoritmos, tais como os expoentes de Lyapunov.

3.1 Determinando a defasagem

Apesar do teorema de imersão Takens (1981) nos fornecer o ferramental básico para a reconstrução do espaço de fase, ele não mencionada nada a respeito da escolha da defasagem de tempo T a ser usando no processo. Diante dessa omissão e da inexistência de qualquer teorema que nos forneça um embasamento para essa escolha, Abarbanel (1995) discute extensivamente o problema, permitindo a elaboração de uma "lista" de requisitos que T deve atender:

- i Ele deve ser algum múltiplo do tempo de amostragem τ_s , uma vez que temos dados apenas nesses tempos.
- ii Se a defasagem for muito curta, as coordenadas $s(n)$ e $s(n+T)$ que desejamos usar no vetor reconstruído \mathbf{y}_n não serão suficientemente independentes, ou seja, não haverá passado tempo suficiente entre as observações para que o sistema tenha evoluído o suficiente para que novas informações a respeito da sua dinâmica possam ser obtidas.
- iii Da mesma forma, se T for excessivamente longo, $s(n)$ e $s(n+T)$ parecerão completamente aleatórias em relação uma à outra devido à instabilidade intrínseca dos sistemas caóticos.

Com essa lista em mãos, percebe-se que a metodologia para se chegar à melhor escolha para T pode ser baseada em um aspecto fundamental do próprio caos: sua capacidade de gerar informação.

Suponha que tenhamos uma resolução fixa e finita em nosso espaço de fase, sendo impossível distinguir dois pontos $\mathbf{x}^1(t)$ e $\mathbf{x}^2(t)$, localizados dentro de uma bola de tamanho R no momento t . Em algum tempo posterior t' a distância entre esses pontos cresceu para $|\mathbf{x}^1(t') - \mathbf{x}^2(t')| \approx |\mathbf{x}^1(t) - \mathbf{x}^2(t)| \exp[\lambda|t' - t|]; \lambda > 0$. Se essa distância for maior que R , então seremos capazes de distinguir entre as órbitas $\mathbf{x}^1(t')$ e $\mathbf{x}^2(t')$, de maneira que a instabilidade do sistema revelou uma informação sobre o espaço de fase que não estava disponível anteriormente ao nos permitir observar a existência de duas órbitas onde antes acreditávamos haver apenas uma.

Essa capacidade de geração de informação é fundamental na análise de sistemas dinâmicos não-lineares pois, caso o sistema fosse linear e estável globalmente, todos os λ do exemplo anterior seriam nulos ou negativos, sem haver a produção de qualquer tipo de informação.

Em um sistema não-linear com d graus de liberdade, haverão d expoentes como $\lambda_1 > \lambda_2, \dots, > \lambda_d$, sendo que a sua soma será negativa e pelo menos um deles será positivo. Por um lado, esse expoente positivo promove o afastamento exponencial das trajetórias. Porém, ao mesmo tempo, a soma dos expoentes é negativa, ou seja, as trajetórias no atrator permanecerão confinadas a uma região do espaço de fase. Essa interação entre afastamento e confinamento da trajetória é que origina a dinâmica caótica de um sistema.

3.1.1 Expansão e Contração do Atrator

Intuitivamente, a resposta a essa aparente contradição – como trajetórias podem se afastar e ainda assim permanecerem dentro de uma região compacta? – foi dada por Hénon (1976) e Rössler (1976), através dos conceitos de expansão e contração.

Por exemplo, se tomarmos um retângulo $abcd$ como um conjunto de condições iniciais, um atrator estranho surgirá quando a trajetória contrair o retângulo em algumas direções (ou seja, o efeito da dissipação) e esticá-lo em outras (o afastamento exponencial das condições iniciais). Porém, essa expansão não pode continuar indefinidamente pois, para que o retângulo permaneça dentro da região compacta do espaço de fase, ele deve ser dobrado sobre si mesmo.

Assim, o retângulo $abcd$ é achatado, expandido e contraído numa ferradura¹ a', b', c', d' , como mostrado em S_1 . Se repetirmos o processo, S_1 se transformará em S_2 e assim sucessivamente. Assim, o conjunto S_∞ consistirá em um número infinito de camadas separadas por distâncias de diversos tamanhos que, se for feita uma secção transversal do mesmo, chegaremos a uma representação da estrutura fractal do atrator, consequência das expansões e contrações que geraram S_∞ .

3.1.2 Informação mútua média

O conceito de informação mútua – introduzindo por Shannon (1948) – entre duas medidas a_i e b_j sorteadas de conjuntos de possíveis medidas A e B refere-se à quantidade de informação que pode ser aprendida a partir de a_i sobre a medida de b_j . Em termos binários, isso seria

$$\log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right], \quad (3.6)$$

onde $P_{AB}(a, b)$ é a densidade da probabilidade conjunta para medidas A e B que resultam nos valores a e b . $P_A(a)$ e $P_B(b)$ são as densidades das probabilidades individuais para

¹Sem relação à ferradura de Smale

as medidas de A e B . Assim, se a medida de um valor de A que resulta em a_i for completamente independente da medida de B que resultou em b_j , então $P_{AB}(a, b)$ se tornará $P_A(a)P_B(b)$ e a quantidade de informação entre as medidas, ou seja, a informação mútua, será zero. A média de todas as medidas dessa estatística informacional é a *informação mútua média* entre as medidas A e B e é dada por

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right]. \quad (3.7)$$

Com essa quantidade, podemos estabelecer um critério para determinar a dependência mútua entre medidas $s(t)$ tiradas em um tempo t e medidas $s(t+T)$ em um tempo $t+T$. Se assumirmos as observações $s(n)$ como sendo o conjunto de medidas A e os valores de $s(n+T)$ como sendo as medidas B , então a informação mútua média entre esses dois conjuntos será

$$I(T) = \sum_{s(n), s(n+T)} P(s(n), s(n+T)) \log_2 \left[\frac{P(s(n), s(n+T))}{P(s(n))P(s(n+T))} \right]. \quad (3.8)$$

De acordo com Fraser e Swinney (1986), a função $I(T)$ pode ser usada como uma espécie de função de autocorrelação não-linear para determinarmos quando os valores de $s(n)$ e $s(n+T)$ são suficientemente independentes entre si para serem úteis como coordenadas em um vetor defasado no tempo, mas não tão independentes a ponto de não terem nenhum tipo de relação entre si. A sugestão dada por Fraser e Swinney (1986), Abarbanel (1995) é a de tomarmos como T o primeiro mínimo de $I(T)$ e utilizá-lo na reconstrução do espaço de fase.

Como um exemplo da aplicação do conceito da informação mútua média, utilizaremos o sistema de equações desenvolvido por LORENZ (1963) e que serviu como referência na verificação da validade dos algoritmos escritos para a realização do trabalho, baseados particularmente em Abarbanel (1995). As equações que compõem o sistema são

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para a geração dos dados, foram utilizados como parâmetros os valores $\sigma = 16$, $b = 4$ e $r = 45,92$ e um algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem com intervalos de $\tau_s = 0,01$. Como podemos notar na Figura (4), o modelo de Lorenz nos oferece um dos sistemas caóticos mais familiares e utilizados no teste de novas técnicas de análise não-linear.

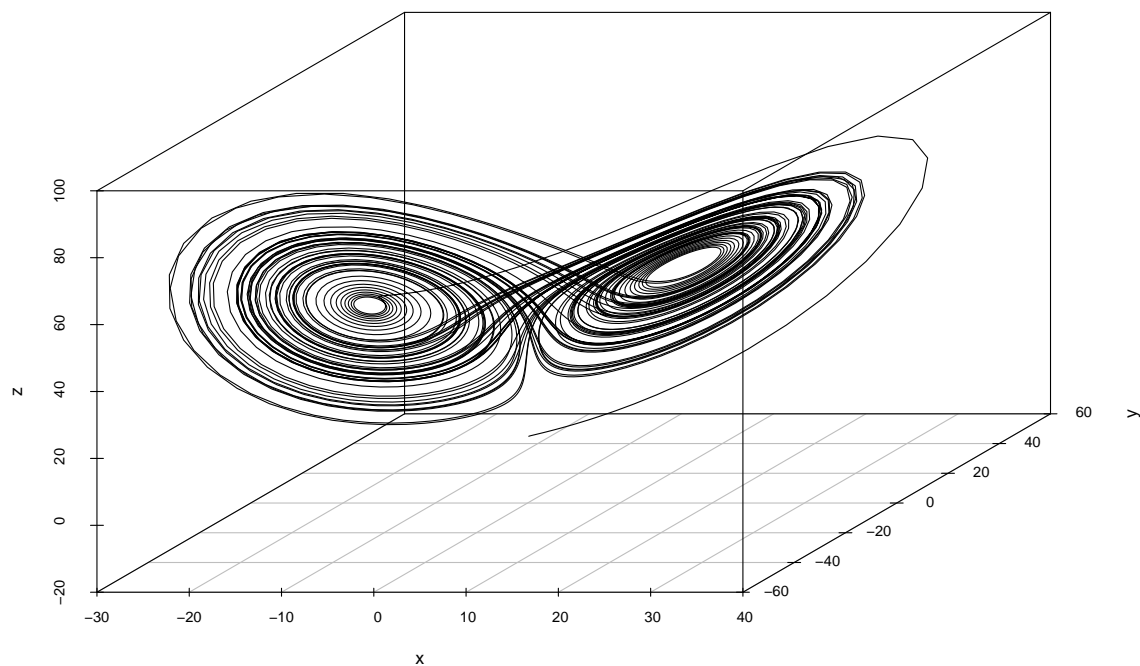


Figura 4: Sistema de Lorenz. Os três componentes do modelo de Lorenz, representado no sistema de equações (3.9).

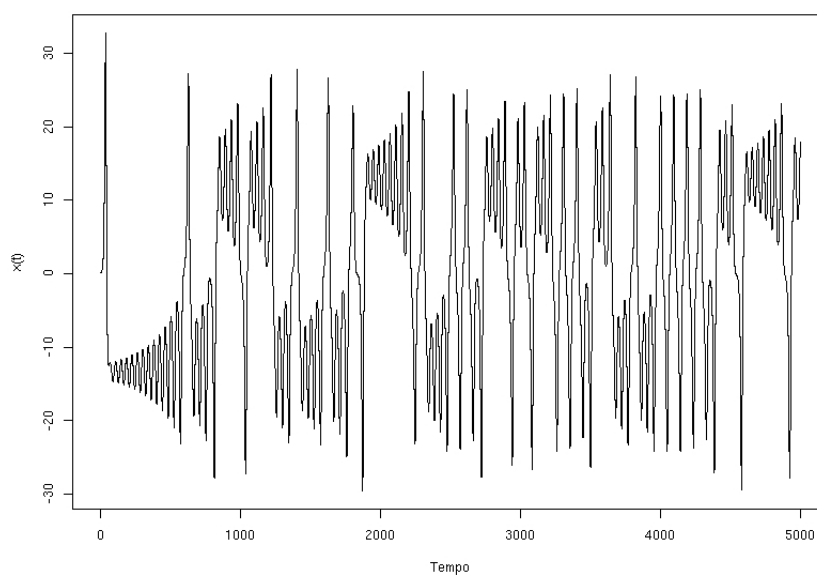


Figura 5: O componente $x(t)$ do modelo de Lorenz.

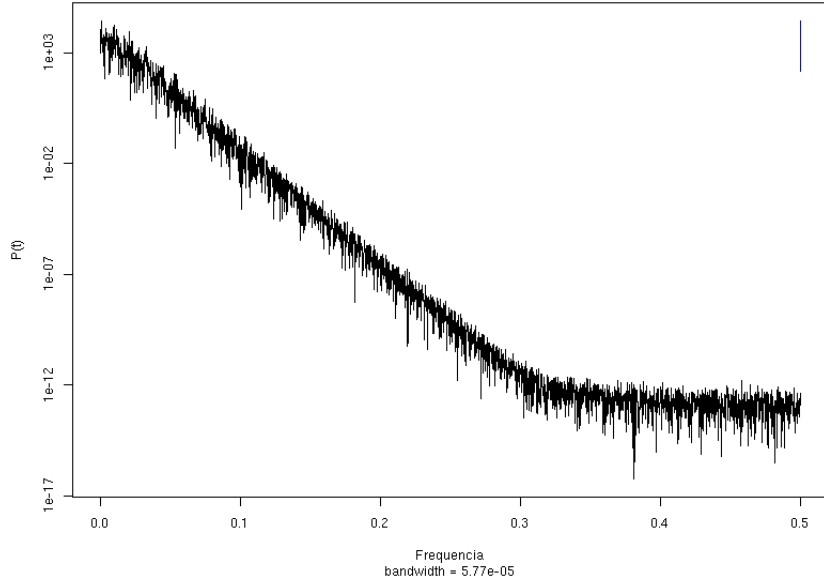


Figura 6: Espectrograma do componente $x(t)$ do modelo de Lorenz.

A figura (5) isola a série temporal correspondendo ao componente $x(t)$ do modelo de Lorenz. Os parâmetros fornecidos ao modelo geram um comportamento não-periódico e caótico, com um atrator de dimensão $d_a \approx 2,06$. Sobre essa série é que serão testados os algoritmos do presente trabalho, uma vez que suas características são bastante conhecidas, permitindo um teste com resultados conhecidos de antemão, antes de aplicarmos as técnicas sobre dados reais, sujeitos a diversos problemas potenciais e que complicariam consideravelmente a verificação da validade dos algoritmos.

De forma extremamente ilustrativa, podemos aproveitar a sequência de análise usada em Abarbanel (1995), onde o autor aplica duas técnicas bastante usadas na análise tradicional: o espectrograma e a função de autocorrelação. Como podemos observar pelas figuras (6) e (7), nada podemos aprender de relevante, uma vez que espectro do sinal $x(t)$ é praticamente "branco" e, por outro lado, a função de autocorrelação nos indica um $T \approx 30$, ou seja, seu primeiro zero.

Finalmente, calculamos a informação mútua média $I(T)$ para diversas defasagens de tempo, o que resulta na curva mostrada à Figura (8), onde podemos notar facilmente que o primeiro mínimo do gráfico ocorre em $T \approx 10$, valor esse utilizado na reconstrução do espaço de fase.

É interessante observar que o fato de que freqüentemente só podemos estimar uma região onde o mínimo do gráfico de $I(T)$ se encontra não é considerado como um problema,

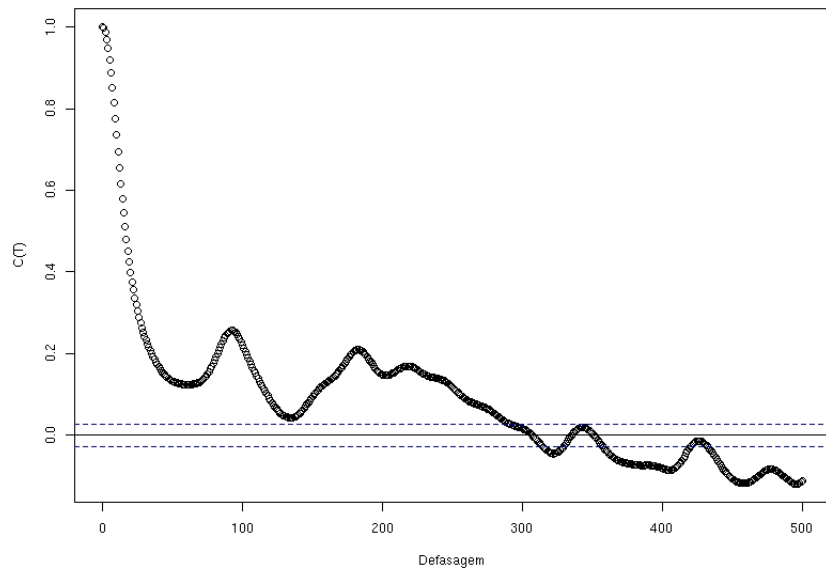


Figura 7: A função de autocorrelação linear para a série $x(t)$.

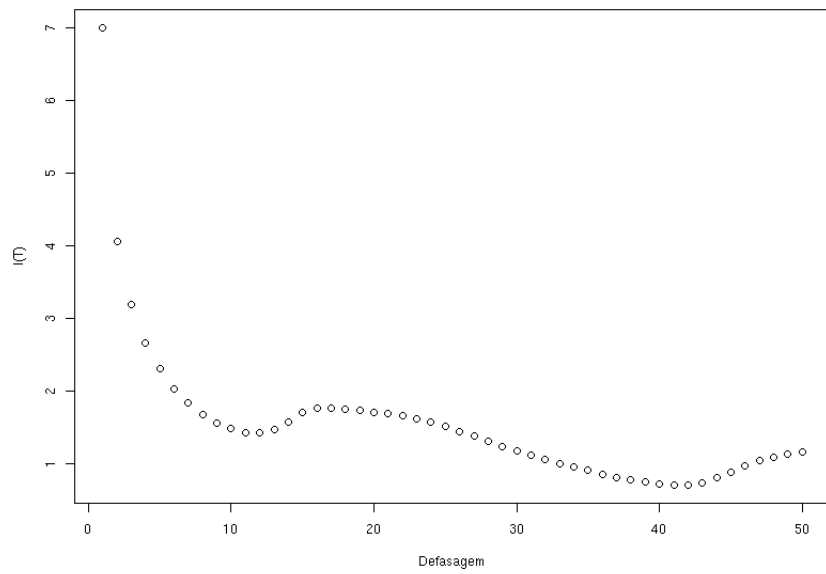


Figura 8: Informação mútua média $I(T)$ para a série $x(t)$.

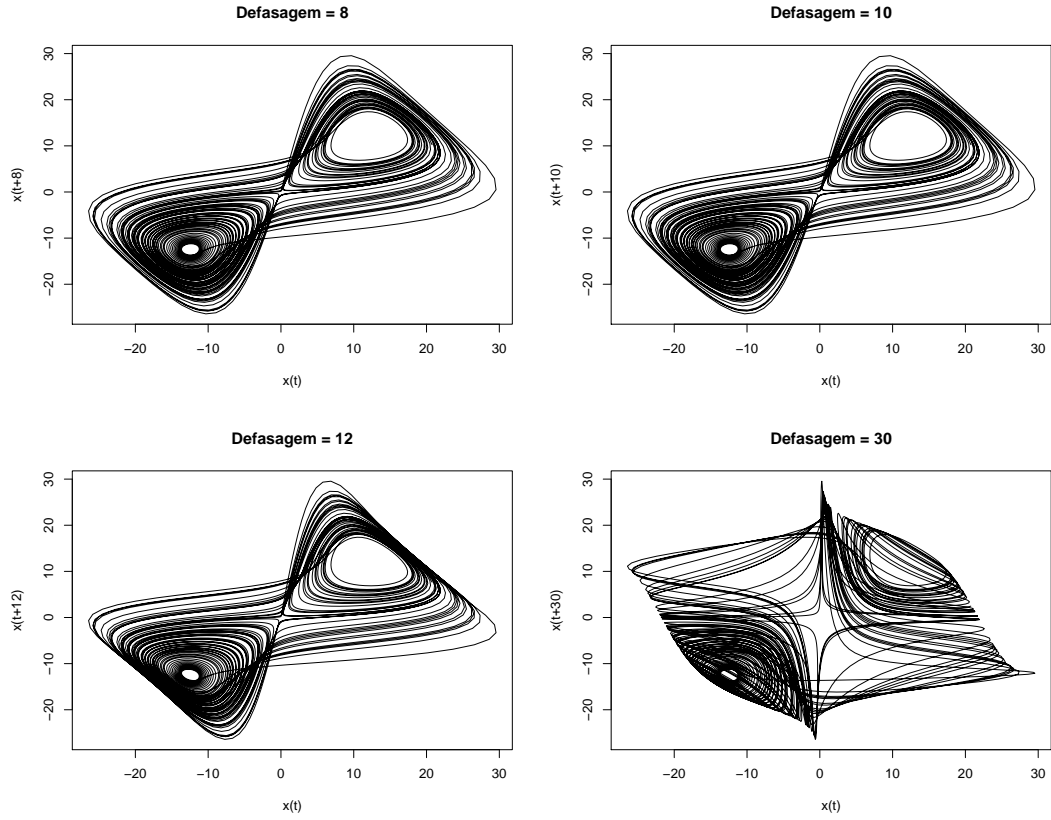


Figura 9: O efeito de diferentes defasagens de tempo sobre o atrator reconstruído a partir do componente $x(t)$ do modelo de Lorenz.

uma vez que essa metodologia varia de forma elegante em torno do primeiro mínimo real de $I(T)$, como é fácil notar na Figura (9). Nela, podemos observar que existe poucas diferenças nos atratores reconstruídos para $T = 8$, $T = 10$ e $T = 12$. Porém, é instrutivo também perceber a mudança sofrida pelo atrator quando utilizamos o T indicado pela função de autocorrelação.

3.2 Determinando a dimensão do espaço de fase

Uma vez definida a defasagem de tempo T para o espaço de fase reconstruído, passamos ao problema da determinação da dimensão global, ou seja, o número de coordenadas inteiras necessárias para desdobrar as órbitas do atrator, que originalmente se desenvolveu em um espaço dimensional superior e, devido à projeção do mesmo em um espaço com menos coordenadas, fez com que o mesmo se dobrasse sobre ele mesmo. A menor dimensão que desdobra o atrator de forma que nenhuma dessas sobreposições ocorra é denominada dimensão de imersão d_E , onde d_E é um valor inteiro.

Um ponto importante deve ser feito sobre a dimensão global de imersão d_E : para duas quantidades observadas $s_A(n)$ e $s_B(n)$ medidas do *mesmo* sistema, nada garante que a dimensão global d_E será a mesma para as duas, uma vez que cada observação gerará uma diferente combinação não-linear das variáveis da dinâmica original, podendo gerar um mapeamento diferente do espaço original $\mathbf{x}(n)$ em um espaço reconstruído na dimensão d_E .

O teorema de imersão afirma que, se a dimensão do atrator definido pelas órbitas for igual a d_A , então a condição suficiente para desdobrá-lo com certeza em um espaço de dimensão d_E será $d_E > 2d_A$. Por exemplo, sabe-se que para o modelo de Lorenz, $d_A \approx 2,06$, o que nos indica, de acordo com o teorema de imersão, que alguma dimensão d_E , onde $d_E \leq 5$, será suficiente para desdobrar o atrator de Lorenz que temos usado como exemplo antes de aplicarmos o ferramental sobre dados reais.

3.2.1 O problema dos falsos vizinhos

Utilizaremos aqui a técnica de falsos vizinhos globais para determinarmos qual dimensão utilizar na reconstrução do espaço de fase. Tal técnica, além de computacionalmente simples e rápida, tem a grande vantagem de, na presença de dados com contaminação de alta dimensão, ou seja, características que esperaríamos de ruídos, falha de forma "graciosa", não eliminando sua utilidade qualitativa.

O conceito de falsos vizinhos, introduzido por Kennel, R. e Abarbanel (1992) e mais tarde aperfeiçoado por Kantz, Hegger e Schreiber (1999) tem como idéia básica buscar por pontos que são vizinhos no espaço reconstruído, mas que não deveriam ser, devido às diferenças nas suas evoluções.

Ao analisarmos os mesmos dados em uma dimensão inferior $d < d_0$ estamos efetivamente eliminando eixos do sistema de coordenadas do espaço onde a dinâmica se desenvolve, um processo denominado projeção. Dessa forma, os pontos cujas coordenadas são completamente diferentes, mas que foram eliminadas pela projeção, podem se tornar falsos vizinhos no espaço d dimensional.

Suponha o espaço de fase reconstruído na dimensão d e defasagem de tempo T

$$\mathbf{y}(k) = [s(k), s(k+T), \dots, s(k+(d-1)T)]. \quad (3.10)$$

Seja o vizinho mais próximo de $\mathbf{y}(k)$ no espaço de fase o vetor

$$\mathbf{y}^{NN}(k) = [s^{NN}(k), s^{NN}(k+T), \dots, s^{NN}(k+(d-1)T)], \quad (3.11)$$

onde k mantém uma pequena semelhança em relação ao k do vetor $\mathbf{y}(k)$. Assim, se o vetor $\mathbf{y}^{NN}(k)$ for realmente um vizinho de $\mathbf{y}(k)$, então isso ocorreu devido à própria dinâmica do sistema. Caso contrário, se o vetor $\mathbf{y}^{NN}(k)$ chegou à vizinhança de $\mathbf{y}(k)$ por projeção, uma vez que a dimensão corrente d não foi capaz de desdobrar o atrator, então espera-se que, uma vez nos dirigindo à dimensão seguinte $d+1$, moveremos este falso vizinho para fora das redondezas de $\mathbf{y}(k)$. Se repetirmos esse procedimento para cada ponto $\mathbf{y}(k)$ e buscando qual dimensão é necessária para removermos todos os falsos vizinhos, chegaremos à d_E onde o atrator é desdobrado.

Kennel, R. e Abarbanel (1992) desenvolveu uma metodologia relativamente simples para determinarmos quando um ponto $\mathbf{y}(k)$ e seu vizinho próximo $\mathbf{y}^{NN}(k)$ como vistos na dimensão d encontram-se próximos ou distantes entre si na dimensão $d+1$. Se compararmos a distância entre os vetores $\mathbf{y}(k)$ e $\mathbf{y}^{NN}(k)$ na dimensão d com a distância entre os mesmos vetores na dimensão $d+1$, podemos distinguir um vizinho falso de um verdadeiro.

Se partirmos da dimensão d para $d+1$, os componentes adicionais dos vetores $\mathbf{y}(k)$ e $\mathbf{y}^{NN}(k)$ serão simplesmente $s(k+dT)$ e $s^{NN}(k+dT)$, respectivamente. Basta compararmos $|s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|$ com a distância euclidiana $|\mathbf{y}(k) - \mathbf{y}^{NN}(k)|$ entre os vizinhos mais próximos na dimensão d . Se a distância adicional em $d+1$ for grande quando comparada à distância em d , teremos um falso vizinho.

Seja o quadrado da distância euclidiana entre os pontos na dimensão d

$$R_d(k)^2 = \sum_{m=1}^d [s(k+(m-1)T) - s^{NN}(k+(m-1)T)]^2, \quad (3.12)$$

e na dimensão $d+1$

$$R_{d+1}(k)^2 = \sum_{m=1}^{d+1} [s(k+(m-1)T) - s^{NN}(k+(m-1)T)]^2, \quad (3.13)$$

$$= R_d(k)^2 + |s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|^2. \quad (3.14)$$

Temos que a distância entre dois pontos na dimensão $d+1$ relativa à distância na dimensão d é igual a

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}^2(k) - R_d(k)^2}{R_d(k)^2}} = \frac{|s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|}{R_d(k)}. \quad (3.15)$$

Se essa quantidade for maior que um certo valor, então teremos um falso vizinho. Esse

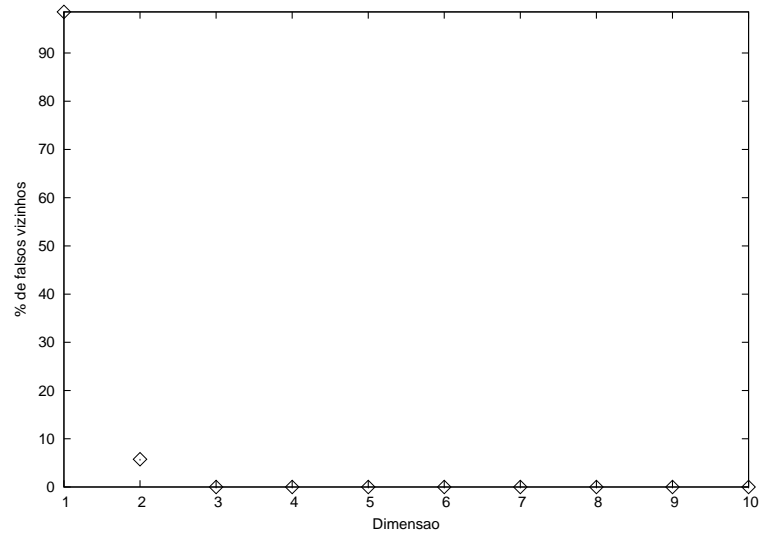


Figura 10: Proporção de falsos vizinhos para o componente $x(t)$ do atrator de Lorenz para $T = 10$ e diversas dimensões.

valor r deve ser grande o bastante para permitir o afastamento exponencial característica do caos determinístico. Abarbanel (1995) sugere $r = 15$. No caso mais específico de dados originados de séries de tempo financeiras, onde temos um conjunto de dados pequeno e, muito provavelmente, imerso em uma alta dimensão, diante disso, assumimos a recomendação de Kennel, R. e Abarbanel (1992) que diz que devemos considerar

$$\frac{|s(k + dT) - s^{NN}(k + dT)|}{\sigma} > A \quad (3.16)$$

como sendo um falso vizinho e onde σ é o desvio-padrão dos dados. Abarbanel (1995) sugere $A = 2$. Assim, um vizinho será considerado falso se tanto as equações (3.15) como (3.16) forem satisfeitas. É importante notar que ambos os valores recomendados para r e para A não são críticos.

Aplicando a técnica de falsos vizinhos sobre o componentes $x(t)$ do atrator de Lorenz, vemos na Figura (10) que, para uma defasagem $T = 10$, obtida pela informação mútua média, o percentual de falsos vizinhos cai a zero para $d_E = 3$, indicando o número de dimensões para desdobrar o atrator a partir dos dados de $x(t)$.

4 *Classificando o Sistema Dinâmico*

Uma vez que o espaço de fase tenha sido reconstruído, passamos à parte seguinte da análise, ou seja, a classificação do sistema dinâmico. Preferencialmente, utilizamos medidas que não variam de acordo com a evolução do sistema, sendo independentes do sistema de coordenadas onde o atrator é observado. Em outras palavras, elas não são sensíveis às condições iniciais ou a mudanças no sistema de coordenadas usado.

Isso será feito através de duas técnicas distintas, largamente usadas para esse fim: dimensões fractais e expoentes de Lyapunov. A primeira é característica da figura geométrica do atrator e nos diz como os seus pontos se distribuem no espaço d_E . Como já vimos na seção (1.1.1), uma característica típica de atratores estranhos são dimensões com valores não-inteiros, ou seja, dimensões fractais. Por outro lado, os expoentes de Lyapunov nos dizem como as órbitas em um atrator se distanciam sob a evolução do sistema dinâmico, sendo que um expoente máximo positivo de Lyapunov é uma forte evidência de comportamento determinístico.

Vale notar que essas duas quantidades são apenas dois exemplos de um vasto conjunto de alternativas possíveis, sendo escolhidas devido ao fato de que eles apresentam resultados relativamente confiáveis para dados empíricos.

4.1 Dimensões Fractais

Através do teorema ergódico de Eckmann e Ruelle (1985), podemos ver as medidas invariantes como estatísticas características de um sistema determinístico. Assim, usando a distribuição natural dos pontos de um atrator em um espaço R^d , dada por

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}(k)), \quad (4.1)$$

podemos definir estatísticas onde $\rho(\mathbf{x})$ funcione como uma função densidade de prob-

abilidade, uma vez que a fração de pontos dentro de um volume V no espaço de fase é igual a

$$\int_V d^d x \rho(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

Citando Eckmann e Ruelle (1985), como esta é a única medida invariante associada a dinâmicas instáveis, ela também será aquela capaz de suportar experimentos com dados empíricos. Também podemos ver que qualquer função $f(\mathbf{x})$ no espaço de fase pode ser usada para se definir uma quantidade invariante para a dinâmica $\mathbf{y}(k) \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{y}(k)) = \mathbf{y}(k+1)$. Se integrarmos a função com $\rho(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \int d^d x \rho(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\mathbf{y}(k)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\mathbf{F}^{k-1}(\mathbf{y}(1))) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

onde

$$\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{F}^{k-1}(\mathbf{x})) \quad (4.5)$$

é a k -ésima iteração da dinâmica $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x})$, ou seja, assim, $\mathbf{F}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Com isso, se avaliarmos a média de $f(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$, chegaremos a

$$\int d^d x \rho(\mathbf{x}) f(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \bar{f} + \frac{1}{N} [f(\mathbf{y}(N+1)) - f(\mathbf{y}(1))] \quad (4.6)$$

onde, para um N suficientemente grande, tornar-se-á apenas \bar{f} , demonstrando de forma simples a propriedade da invariância.

A função $f(\mathbf{x})$ de maior interesse será aquela que nos diga como o número de pontos dentro de uma bola de raio r evolui à medida que r tende a zero. Como o volume ocupado por uma esfera de raio r na dimensão d evolui como r^d , podemos esperar que o número de pontos $n(\mathbf{x}, r)$ dentro de r em \mathbf{x} evolua como

$$n(\mathbf{x}, r) \approx r^{d(\mathbf{x})}, \quad (4.7)$$

para um r pequeno o bastante para que haja um número suficiente de pontos dentro da esfera, mas não grande o bastante de forma que $r \approx R_A$, ou seja, onde ela contenha todo o atrator. Assim, teremos um r tal que

$$0 \ll \frac{r}{R_A} \ll 1. \quad (4.8)$$

Caso o atrator fosse um objeto geométrico regular, seria perfeitamente razoável esperar que $d(\mathbf{x}) = D$ para todo \mathbf{x} . Porém, em um atrator estranho, não podemos assumir que chegaríamos ao mesmo valor D para qualquer \mathbf{x} , uma vez que o mesmo não é um objeto regular e, diante disso, poderíamos dizer que $d(\mathbf{x})$ é uma dimensão local, que sob a dinâmica $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x})$ mudaria para cada \mathbf{x} . Assim, para que possamos identificar dimensões diante dessa propriedade dos atratores estranhos, precisamos observar o número de pontos $\mathbf{y}(k)$ dentro de uma esfera ao redor de algum ponto \mathbf{x} no espaço de fase. Isso é feito como

$$n(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \theta(r - |\mathbf{y}(k) - \mathbf{x}|), \quad (4.9)$$

onde $\theta(u)$ é a função Heaviside

$$\begin{aligned} \theta(u) &= 1 \text{ se } u > 0, \\ &= 0 \text{ se } u < 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como a densidade dos pontos em um atrator não precisa ser uniforme, os momentos de qualquer função $f(\mathbf{x})$ avaliados pela densidade natural $\rho(\mathbf{x})$ mostrará diferentes características da distribuição dos pontos.

Fazendo $f(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}, r)^{(q-1)}$ e definindo a função $C(q, r)$ como sendo a média de $f(\mathbf{x})$ em relação ao atrator, ponderada pela densidade natural $\rho(\mathbf{x})$:

$$C(q, r) = \int d^d x \rho(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}, r)^{(q-1)},$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left[\frac{1}{K} \sum_{n=1}^K \theta(r - |\mathbf{y}(n) - \mathbf{y}(k)|) \right]^{(q-1)}. \quad (4.11)$$

Para uma quantidade infinita de dados ($N \rightarrow \infty$) e um r suficientemente pequeno, assume-se que a função $C(q, r)$ comporte-se como

$$C(q, r) \approx r^{(q-1)D_q} \quad (4.12)$$

A função (4.11) é conhecida como sendo a função de correlação do atrator, sendo inicialmente utilizada por Grassberger e Procaccia (1983) para caracterizar atratores sob o caso de $q = 2$, uma vez que sua avaliação é a mais simples em termos numéricos.

A dimensão D_q é definida pelo limite

$$D_q = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log[C(q, r)]}{(q-1) \log[r]}. \quad (4.13)$$

Voltando-nos especificamente para o trabalho de Grassberger e Procaccia (1983), fazendo $q = 2$, a equação (4.11) torna-se

$$C(2, r) = \frac{2}{M(M-1)} \sum_{k=1}^M \sum_{n=k+1}^M \theta(r - |\mathbf{y}(n) - \mathbf{y}(k)|), \quad (4.14)$$

que é conhecida como *somatório de correlação*.

Pelas equações (4.1) e (4.13) fica fácil notar que, na prática, temos dois problemas sérios. Primeiro, a equação (4.1) assume uma quantidade infinita de dados, algo que, no caso de séries de tempo financeiras, obviamente não é verdade. Segundo, as possibilidades de escolhas para r são limitadas pelos próprio dados.

Diversos trabalhos atacam esses problemas, notadamente Theiler (1990), Ruelle (1990). Quanto ao primeiro ponto, uma regra simples expressa por Theiler (1990) diz que são necessários pelo menos $10^{D_2/2}$ observações para uma estimativa confiável de D_2 . Como já foi mostrado pela Tabela (??), tal recomendação não poderá ser atendida, o que coloca em dúvida a veracidade completa dos resultados aqui apresentados. Para mitigar parte desse problema, também será calculado o expoente máximo de Lyapunov para as séries.

Já a escolha de r seguirá a recomendação de Kantz e Schreiber (2004), que sugerem que r seja igual à metade da amplitude do erro médio quadrático da série.

4.1.1 Correlações temporais e gráficos de separação espaço-temporal

É fato comumente conhecido da econometria de séries temporais financeiras a existência de correlações temporais entre as observações e tem impacto direto na avaliação da validade dos resultados obtidos.

Já foi mencionado que o somatório de correlação é uma estimativa de uma quantidade abstrata: a integral de correlação. Essa estimativa será não-viesada se, e somente se, a amostra usada não apresentar correlações entre os pontos no espaço de fase m -dimensional. Mas, se a violação a essa premissa for fraca, o seu impacto pode ser ignorado. Porém, no caso onde as correlações sejam significativas (como em séries temporais financeiras, por exemplo), isso invalida completamente os valores calculados para a dimensão fractal do atrator.

Felizmente, esse problema é de solução relativamente simples. Uma vez que saibamos o período de tempo dentro do qual as observações são correlacionadas, basta rejeitar os pares temporalmente próximos. Já levando em consideração esse problema, Theiler (1986) adaptou a equação básica (4.14), tornando-a

$$C(2, r) = \frac{2}{(M - n_{\min})(M - m_{\min} - 1)} \sum_{k=1}^M \sum_{n=k+1+m_{\min}}^M \theta(r - |\mathbf{y}(n) - \mathbf{y}(k)|), \quad (4.15)$$

É preciso então definir uma forma de se detectar essas correlações temporais e estimar um valor para ela. Provenzale et al. (1992) resolveu esse problema através do uso de *gráficos de separação espaço-temporal*, cuja idéia é a seguinte: na presença de correlações temporais, a probabilidade de que um dado par de pontos tenha entre si uma distância inferior a r depende tanto do próprio r como também do tempo passado entre as duas observações. Essa dependência pode ser detectada gerando-se um gráfico do número de pares como uma função dessas duas variáveis, o tempo passado Δt e a distância espacial r .

O gráfico de separação espaço-temporal nos dirá quantos pares devem ser excluídos. Através de uma rápida inspeção visual, podemos perceber que ocorrerão correlações temporais enquanto as curvas não saturarem.

No exemplo apresentado na figura (11), reproduzida a partir de um conjunto de dados experimentais apresentado por Kantz e Schreiber (2004), podemos identificar claramente a existência de uma oscilação constante. A partir do gráfico, podemos então definir que

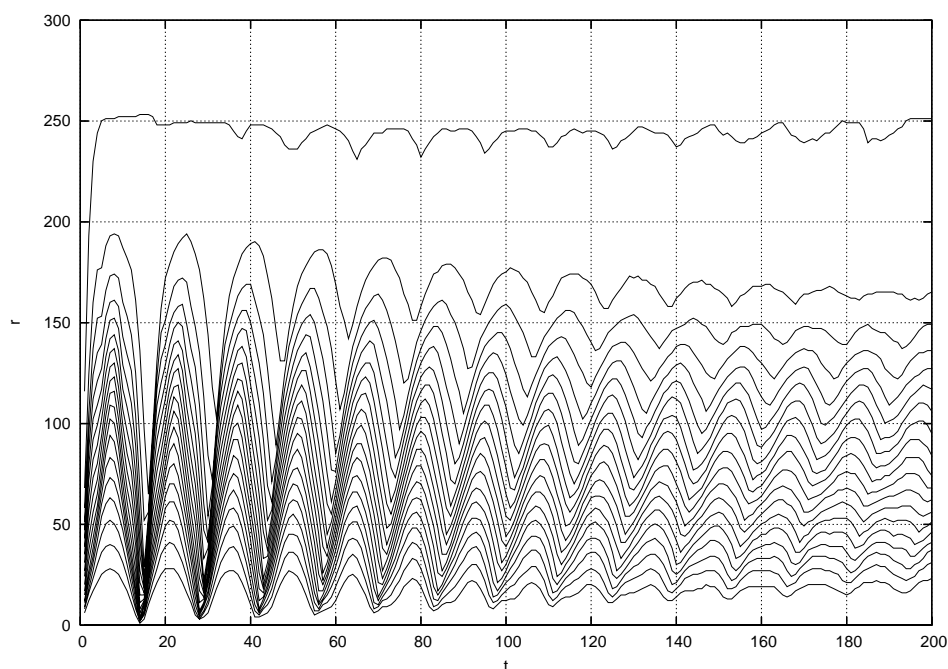


Figura 11: Gráfico de separação espaço-temporal de dados de um fluxo de Taylor-Couette.

para intervalos de tempo inferiores a $\Delta t \approx 15$

4.2 Expoentes de Lyapunov

A imprevisibilidade dos sistemas caóticos é uma consequência direta da sua sensibilidade às condições iniciais, ou seja, qualquer desvio, por menor que seja, nas condições iniciais, torna-se *exponencialmente* maior à medida que o tempo passa. Um exemplo dessa característica fundamental pode ser visto na Figura (12), que representa o componente $x(t)$ do atrator de Lorentz para dois conjuntos sensivelmente diferentes de condições iniciais.

A medida dessa divergência exponencial é característica do sistema gerador dos dados analisados e serve como uma medida de caos. Mesmo existindo tantos expoentes de Lyapunov quanto houverem dimensões do espaço de fase, estudaremos apenas o mais importante deles para nosso objetivo, ou seja, o *expoente máximo* λ , que nos servirá como indicador da taxa de divergência entre trajetórias inicialmente próximas.

Suponha dois pontos inicialmente próximos do componente $x(t)$ do atrator de Lorentz: x_0 e $x_0 + \Delta X_0$. Após uma iteração, os pontos estarão separados por

$$\Delta x_1 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) \approx \Delta x_0 f'(x_0) \quad (4.16)$$

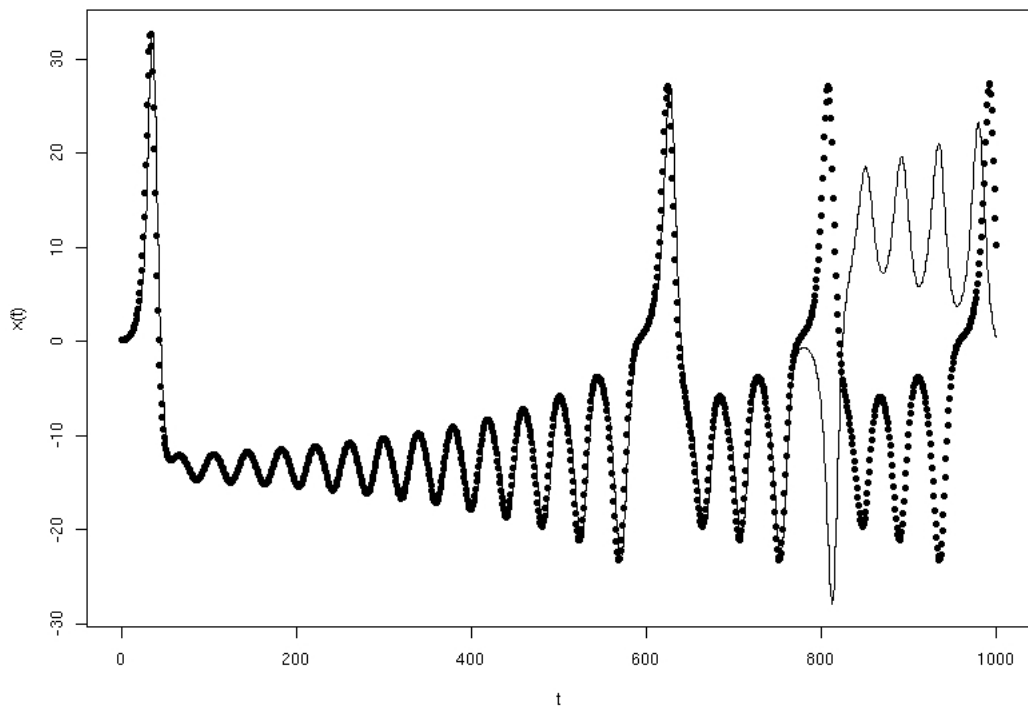


Figura 12: Duas séries correspondendo ao componente $x(t)$ do atrator de Lorenz com condições iniciais sensivelmente diferentes.

Se definirmos o expoente de Lyapunov local λ em x_0 tal que $e^\lambda = |\Delta x_1/\Delta x_0|$, ou seja,

$$\lambda = \log |\Delta x_1/\Delta x_0| \approx \log |f'(x_0)| \quad (4.17)$$

Se λ for positivo, teremos uma divergência exponencial de trajetórias inicialmente próximas, um forte indicador para caos. Também podemos encontrar expoentes de Lyapunov negativos, indicando a existência de um ponto fixo estável, ou ainda, expoentes iguais a zero, onde duas trajetórias se afastam ou se aproximam de forma mais lenta que exponencial. Finalmente, se o sistema for caracterizado por ruído aleatório, então o expoente máximo será infinito.

Tabela 4.1. Dinâmicas possíveis e expoentes correspondentes.

Tipo de dinâmica	Expoente máximo de Lyapunov
ponto fixo estável	$\lambda < 0$
ciclo estável	$\lambda = 0$
caos	$0 < \lambda < \infty$
ruído	$\lambda = \infty$

Assim, uma vez que um expoente máximo de Lyapunov positivo pode ser considerado como uma forte evidência de comportamento caótico, torna-se bastante interessante calcular seu valor para as séries de tempo analisadas.

O algoritmo utilizado no presente trabalho foi desenvolvido por Kantz (1994) e testa diretamente a divergência exponencial de trajetórias inicialmente próximas, ao contrário do algoritmo inicialmente apresentado por Wolf et al. (1985), que apenas assumia a existência desse comportamento, o que pode levar a resultados completamente incorretos.

Como já mencionado, dados empíricos são inevitavelmente contaminados por ruídos. Porém, sua influência pode ser bastante reduzida através da aplicação de técnicas de redução de ruídos, cuja aplicação será discutida detalhadamente durante a análise das séries de tempo, uma vez que técnicas diferentes foram aplicadas, dependendo da série analisada.

O algoritmo de Kantz, implementado no pacote TISEAN, calcula o crescimento exponencial médio das distâncias da seguinte forma:

1. Escolha um ponto \mathbf{s}_{n_0} da série de tempo no espaço de fase e determine todos os pontos vizinhos a ele dentro de uma distância inferior a r .

2. Calcule a média das distâncias de todos os vizinhos em relação à trajetória como sendo função do tempo relativo. O logaritmo da distância média no tempo Δn é considerado como sendo a taxa de expansão dentro do período de tempo Δn (mais o logaritmo da distância inicial) contendo todas as flutuações devidas à projeção e à dinâmica do sistema.
3. Repetindo os passos anteriores para diversos valores de n_0 , as flutuações das taxas de expansão convergirão a uma média.

Assim, calcula-se:

$$S(\Delta n) = \frac{1}{N} \sum_{n_0=1}^N \ln \left(\frac{1}{|\mathcal{U}(\mathbf{s}_{n_0})|} \sum_{\mathbf{s}_n \in \mathcal{U}(\mathbf{s}_{n_0})} |s_{n_0+\Delta n} - s_{n+\Delta n}| \right) \quad (4.18)$$

onde os pontos de referência \mathbf{s}_{n_0} são os vetores das séries, $\mathcal{U}(\mathbf{s}_{n_0})$ é a vizinhança de \mathbf{s}_{n_0} com diâmetro r . Vale notar que, da mesma forma que calculamos a proporção de falsos vizinhos para cada ponto na trajetória do sistema, r deve ser a menor possível, porém também deverá ser grande o bastante de forma que todo ponto tenha pelo menos alguns vizinhos.

4.3 Entropia

A entropia é uma quantidade termodinâmica que descreve a desordem existente dentro de um sistema, ou seja, ela também pode ser usada para caracterizar a quantidade de informação de um sistema, exatamente o objeto de estudo do campo da teoria da informação, desenvolvido inicialmente por Shannon (1948).

A teoria da informação oferece um ponto de vista alternativo à análise de séries temporais. Se tomarmos cada observação como uma fonte de informação, uma sequência delas pode ser então considerada como uma mensagem sendo transmitida e, se esses números tiverem algum tipo de distribuição de probabilidade e as transições entre diferentes números ou padrões ocorrerem de acordo com probabilidades bem definidas, então podemos identificar a quantidade de informações que se pode projetar sobre o futuro em relação ao que já se conhece.

Por exemplo, em um sistema periódico, tudo o que é preciso para se saber o que acontecerá no futuro é apenas uma única observação do seu ciclo. Porém, se utilizarmos a

saída de um gerador de números aleatórios dentro de um intervalo $[0, 1]$, não é possível prever o próximo resultado, mesmo se tivermos à nossa disposição uma quantidade infinita de observações passadas.

4.3.1 A Entropia de Kolmogorov-Sinai e a Entropia de Correlação

Seja uma partição \mathcal{P}_r das observações, sendo intervalos I_j . Seja também p_{i_1, i_2, \dots, i_m} a probabilidade conjunta de que em um período de tempo arbitrário n a observação se encontre dentro do intervalo I_{i_1} , em um tempo $n + 1$ ela se encontre no intervalo I_{i_2} e assim por diante. Então, podemos definir *entropias de blocos de tamanho m* como

$$H_q(m, \mathcal{P}_r) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} p_{i_1, i_2, \dots, i_m}^q \quad (4.19)$$

Assim, as entropias de ordem- q serão:

$$h_q = \sup_{\mathcal{P}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H_q(m, \mathcal{P}_r), \quad (4.20)$$

onde

$$h_q(m, \mathcal{P}_r) = H_q(m+1, \mathcal{P}_r) - H_q(m, \mathcal{P}_r). \quad (4.21)$$

Mesmo que no senso mais restrito do conceito da entropia de Kolmogorov-Sinai, apenas h_1 poderia ser denominada como tal, todas as entropias de ordem- q também seriam entropias no sentido de K-S.

Porém, na prática, é difícil extrair a entropia a partir de séries de tempo, uma vez que freqüentemente é impossível obter o supremo para todas as partições possíveis, da mesma forma que não podemos utilizar valores de r arbitrariamente pequenos, fazendo com que o limite $m \rightarrow \infty$ torne-se o principal problema.

Uma implementação possível da definição de entropia de K-S utiliza o conceito de *contagem de caixas*. Se os dados forem escalonados ao intervalo de unidades, o espaço de fase será coberto por $1/r$ intervalos iguais de tamanho r , permitindo que se determine as probabilidades conjuntas p_{i_1, \dots, i_m} bastando-se contar o número n_{i_1, \dots, i_m} de segmentos da série de tempo que se encontrem na seqüência de intervalos I_{i_1}, \dots, I_{i_m} .

Assim, podemos determinar h_q através do gráfico gerado a partir de

$$h_q(m, r) = H_q(m+1, r) - H_q(m, r) = \ln \frac{C_q(m, r)}{C_q(m+1, r)}, \quad (4.22)$$

contra m para diversos r e contra r para diversos m .

Na prática, utilizamos os somatórios de correlação $C_2(m, r)$ para o cálculo de h_2 .

5 *Análise das Séries*

Apresentamos agora os resultados das análises realizadas sobre cada uma das séries de tempo introduzidas na seção 2.1.

Para todas as séries foi utilizada a mesma seqüência básica de estudo, com as devidas adaptações feitas de acordo com as necessidades apresentadas caso-a-caso:

1. Definir os parâmetros para a reconstrução do espaço de fase.
2. Verifica-se, através do gráfico de separação espaço-temporal, a existência de correlações temporais significativas e, em caso positivo, corrige-se os passos seguintes para que essa característica seja considerada.
3. Calcula-se a entropia da série para se verificar evidências de comportamento determinístico.
4. Caso existam evidências de comportamento caótico, calcula-se o expoente máximo de Lyapunov, que determina ainda mais fortemente a evidência de um atrator estranho na série.
5. Finalmente, calcula-se a integral de correlação da série a fim de se estimar a dimensão fractal desse atrator.

A adaptação mais comumente realizada à metodologia, dada uma característica comum a todas as séries analisadas, é a filtragem de ruído. Como não conhecemos a natureza exata desses ruídos, foi preciso assumir que os mesmos são dinâmicos, ou seja, a quantidade de ruído varia de uma observação a outra, sendo aplicado nesse caso o esquema de redução de ruídos via projeção local, explicado a seguir.

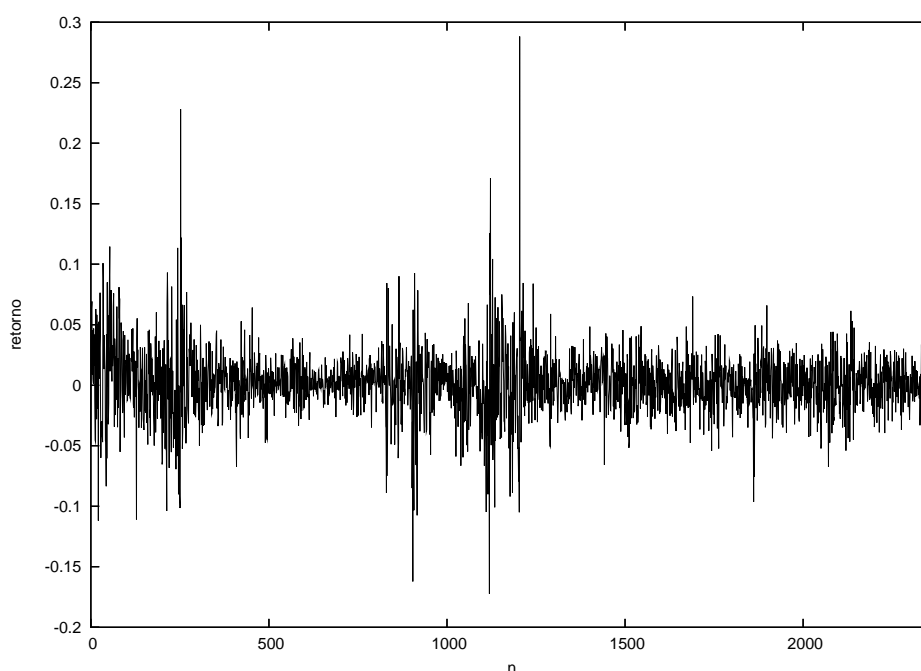


Figura 13: Retornos do Ibovespa entre janeiro de 1994 e outubro de 2004.

5.1 Ibovespa

A primeira série analisada corresponde aos retornos diários do índice Ibovespa (IBOV), extraído a partir da base de dados Economática, entre as datas de 03/01/1994 e 15/10/2004, correspondendo a 2.634 observações.

Como já explicado, o primeiro passo na análise é determinar os parâmetros de imersão no espaço de fase. Assim, aplicamos os testes de informação mútua média e falsos vizinhos para determinar a defasagem de tempo T e o número de dimensões m adequados, respectivamente.

Podemos observar pelas figuras (14) e (15), que o primeiro mínimo da função $I(T)$ nos indica uma defasagem $T = 5$ e uma dimensão de $m = 9$. A alta dimensionalidade observada pode ser resultado de correlações temporais mas, como podemos notar pela figura (16), não há evidência de tal característica, uma vez que há saturação das curvas logo no início do gráfico. Assim, apenas a título de verificação, na figura (15) o cálculo de falsos vizinhos foi feito para diversos possíveis valores para a janela de Theiler, parâmetro que indica quais os pares de observações que devem ser ignorados devido à correlação temporal e, como podemos ver, não há nenhuma variação nos resultados.

O parâmetro de imersão dimensional $m = 9$, quando considerado em conjunto com a

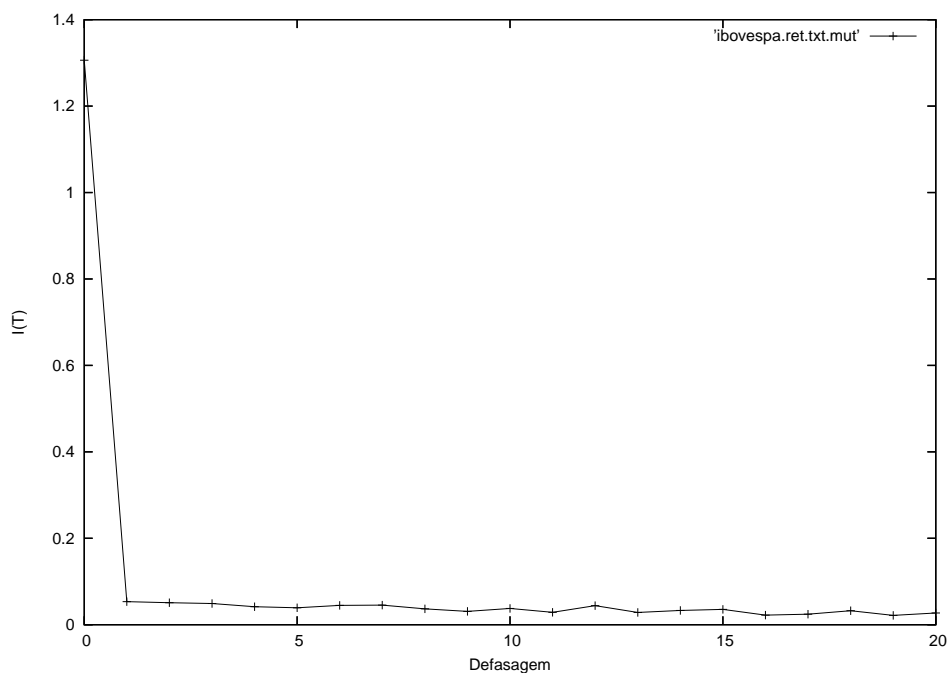


Figura 14: Informação mútua média para os retornos do Ibovespa.

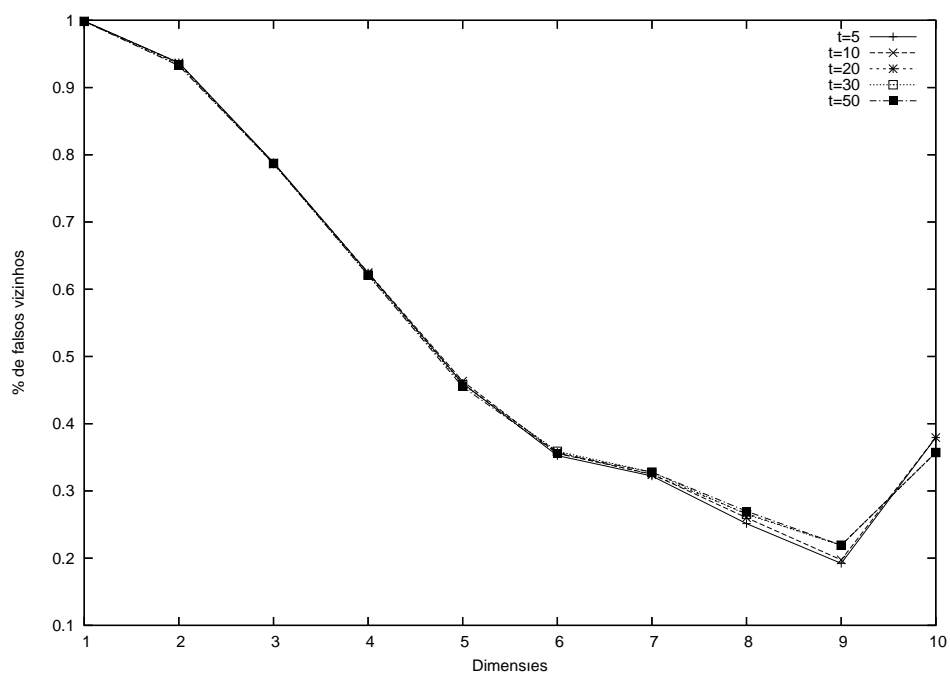


Figura 15: Falsos vizinhos para os retornos do Ibovespa.

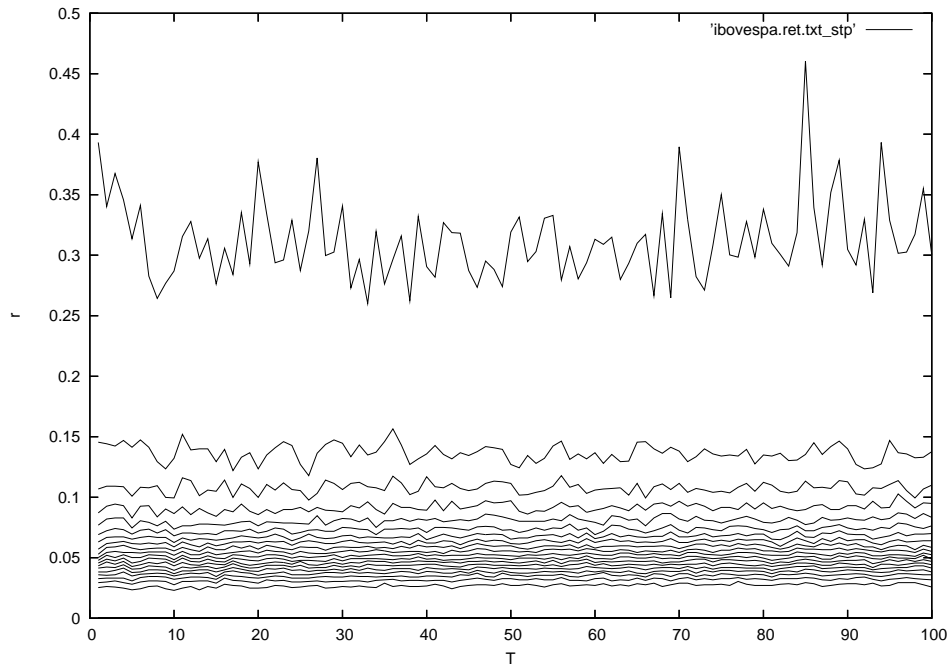


Figura 16: Gráfico de separação espaço-temporal para a série de retornos do Ibovespa.

existência de ruídos em séries de tempo financeiras, indica a necessidade da aplicação de alguma técnica para redução de ruídos.

Como mencionado, devido ao fato de que o ruído varia dinamicamente em séries de tempo financeiras, isso exige a aplicação do esquema de redução de ruídos via projeção local, que tem como principal premissa a hipótese de que os dados observados são compostos pela saída um sistema dinâmico de baixa dimensionalidade ($m \leq 5$) e de um ruído aleatório ou de alta dimensionalidade. Isso significa que, em um espaço de imersão arbitrariamente alto, a parte determinística dos dados se encontraria em uma variedade de baixa dimensionalidade, onde o ruído faz com que essas observações sejam espalhadas para fora dessa variedade. Assim, o objetivo da redução de ruídos não-lineares via projeção local é tentar identificar essa variedade e projetar os dados sobre ela. Os procedimentos aplicados aqui foram propostos por Grassberger et al. (1993) e implementados por Kantz, Hegger e Schreiber (1999).

Assim, aplicando-se a redução de ruídos, temos como resultado para a aplicação dos falsos vizinhos a redução do número de dimensões necessárias para a reconstrução do espaço de fase e o desdobramento do atrator. Enquanto poderíamos aplicar diversas iterações do processo sobre os dados, foi observado que apenas uma única iteração é suficiente, sendo as demais redundantes. Como pode ser observado na figura (17), o novo m passa a ser $m = 5$.

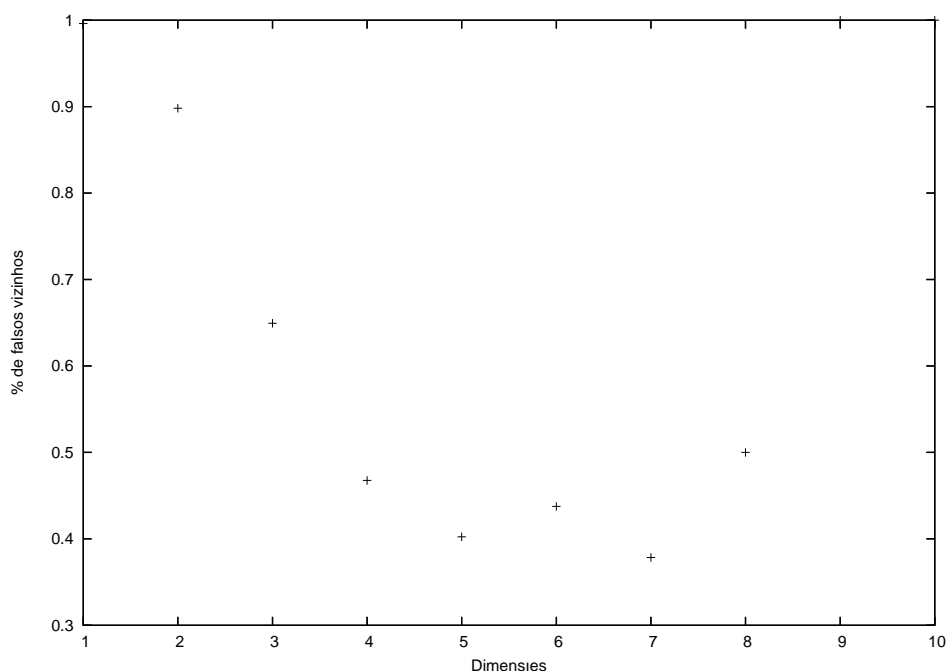


Figura 17: Falsos vizinhos para a série do Ibovespa filtrada através do esquema de projeção local.

Temos então como parâmetros para reconstrução do espaço de fase, $T = 5$ e $m = 5$. Utilizando-os para o cálculo das entropia de correlação, chegamos à figura (18). Podemos notar que não há platô estável para o cálculo da entropia de Kolmogorov-Sinai, implicando na existência de um comportamento praticamente estocástico, o que confirma a sua imprevisibilidade e, conseqüentemente, a sua conformidade com a Hipótese de Mercados Eficientes.

Como não temos evidências de comportamento determinístico, não há razão para se tentar determinar a dimensionalidade de um atrator estranho para a série, uma vez que o mesmo não existirá. Tal resultado confirma os trabalhos de Brundo (1998)¹ e Rochman (2002) para o Ibovespa.

5.2 IBrX-50

Outro índice bastante usado e cuja série é analisada a seguir é o IBrX-50 (IBRX), cuja composição é bastante semelhante ao Ibovespa, mas com uma diferença fundamental: sua carteira teórica é montada de tal forma que sempre conterá 50 ações, ao contrário do Ibovespa, onde o número de ações varia de forma que ela corresponda a ações responsáveis

¹Apenas como uma confirmação adicional dos resultados, o autor realizou o teste BDS sobre os dados filtrados e chegou aos mesmos resultados que Brundo para o Ibovespa.

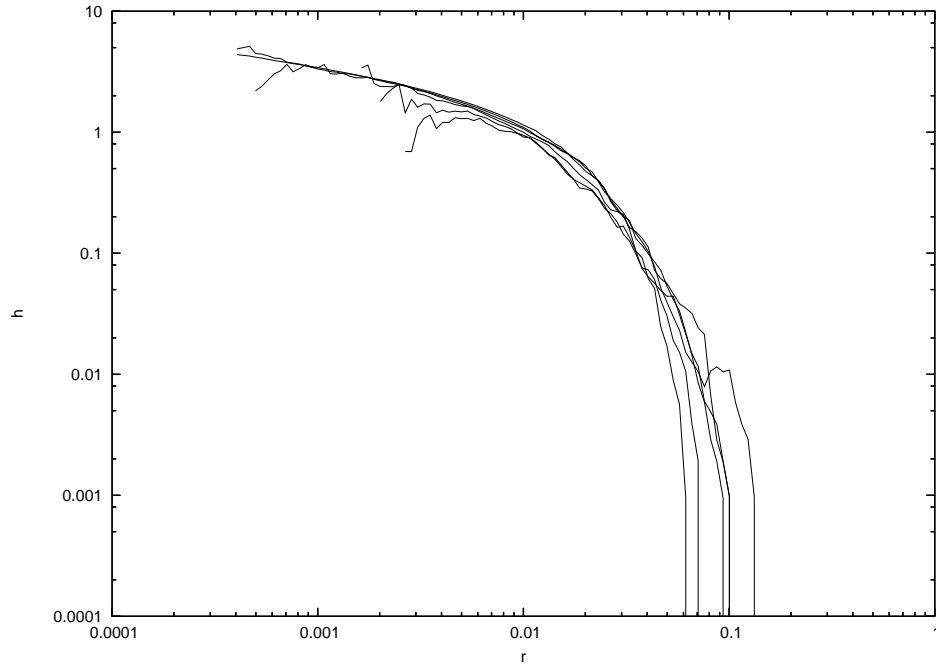


Figura 18: Entropia de correlação para o Ibovespa.

por 80% da liquidez do mercado.

A série do IBrX-50 analisada corresponde aos retornos diários do período entre 30/12/1997 e 15/10/2004, contendo 1.683 observações, como pode ser observado na figura (19).

O principal motivo da escolha desse índice é tentar encontrar evidências que confirmem ou não a conjectura feita por Rochman (2002) de que o índice Ibovespa, apesar de apresentar características de comportamento não-linear, não apresenta comportamento caótico determinístico devido à sua composição. Ao selecionar o IBrX-50, um índice com composição diferente do Ibovespa, esperamos encontrar evidências que nos ajudem a confirmar ou não essa afirmação.

Como na seção anterior, determinamos inicialmente os parâmetros de imersão T e m . Verificando as figuras (20) e (21) temos $T = 2$ e $m = 7$. Da mesma forma que o índice Ibovespa, temos uma alta dimensionalidade do possível atrator estranho embutido no sistema.

Procedemos então de forma semelhante, ou seja, primeiro determinamos se essa alta dimensionalidade é resultado de correlações temporais na série através da inspeção do gráfico de separação espaço-temporal e, caso não seja o caso, assumimos a existência de ruídos aleatórios ou de alta dimensionalidade na série, aplicando o esquema de redução de ruídos via projeção local.

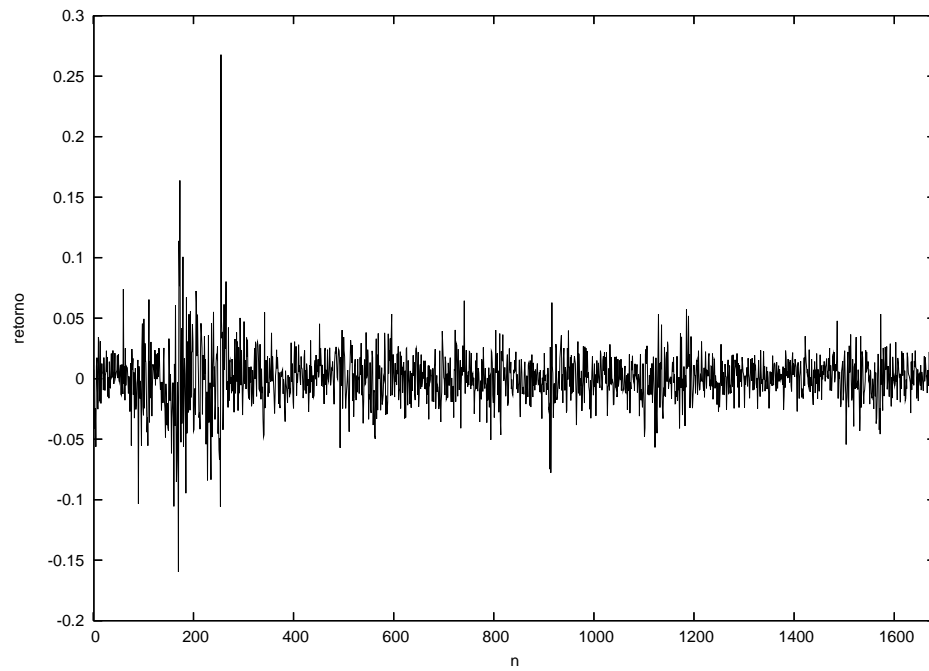


Figura 19: Retornos diários do índice IBrX-50.

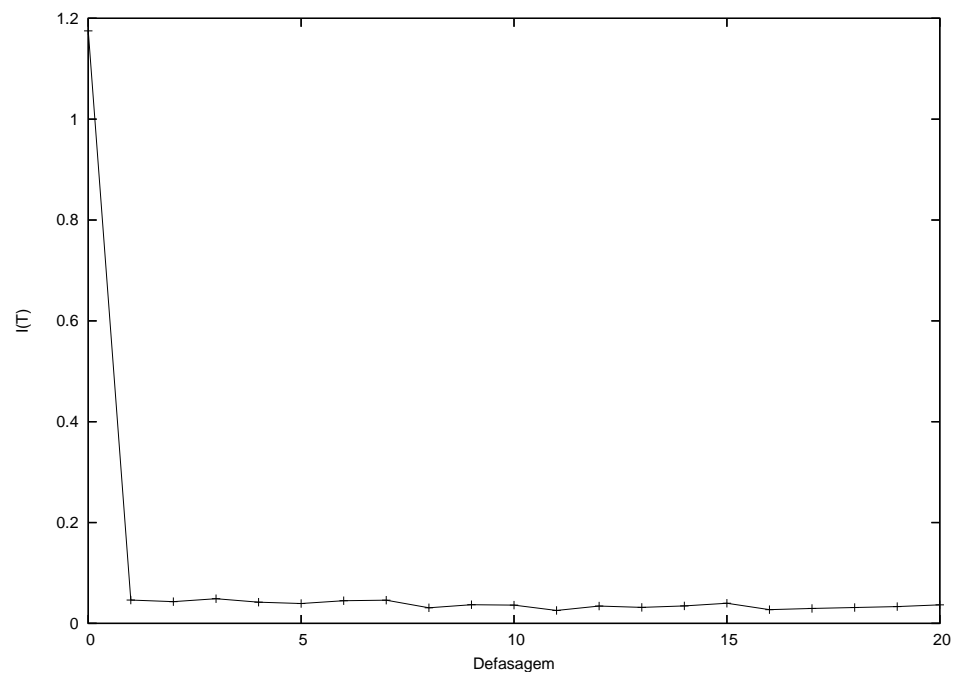


Figura 20: Cálculo da informação mútua média para o IBrX-50.

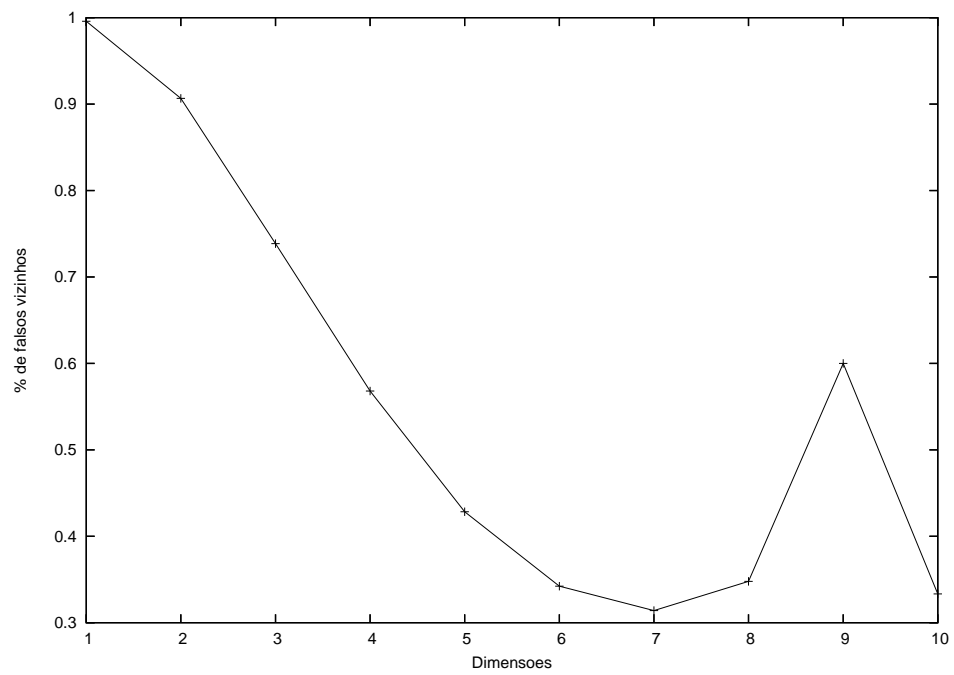


Figura 21: Falsos vizinhos para o IBrX-50.

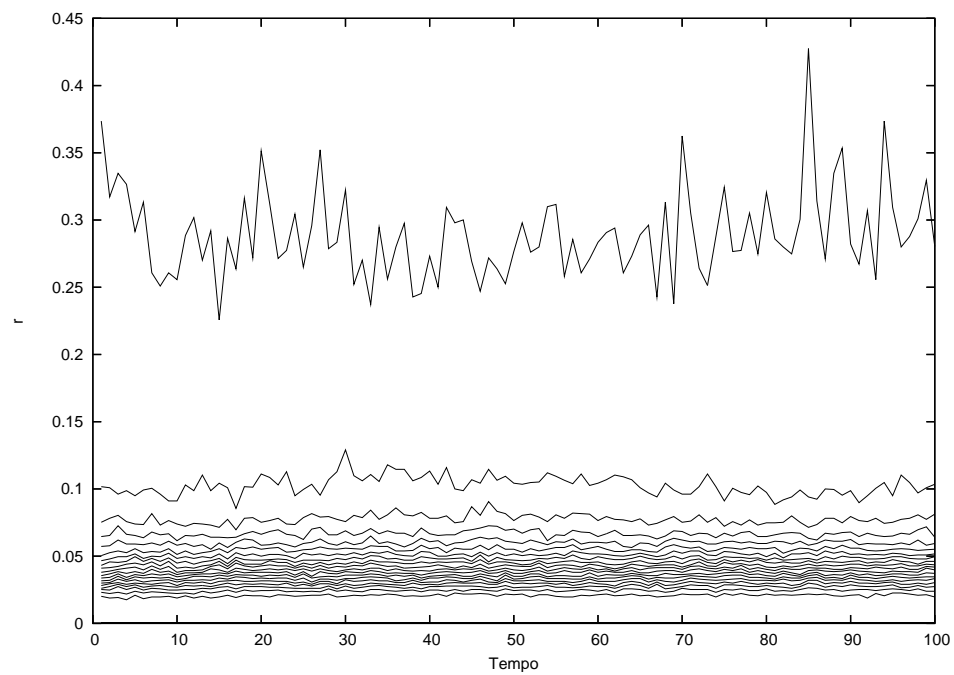


Figura 22: Gráfico de separação espaço-temporal para o IBrX-50.

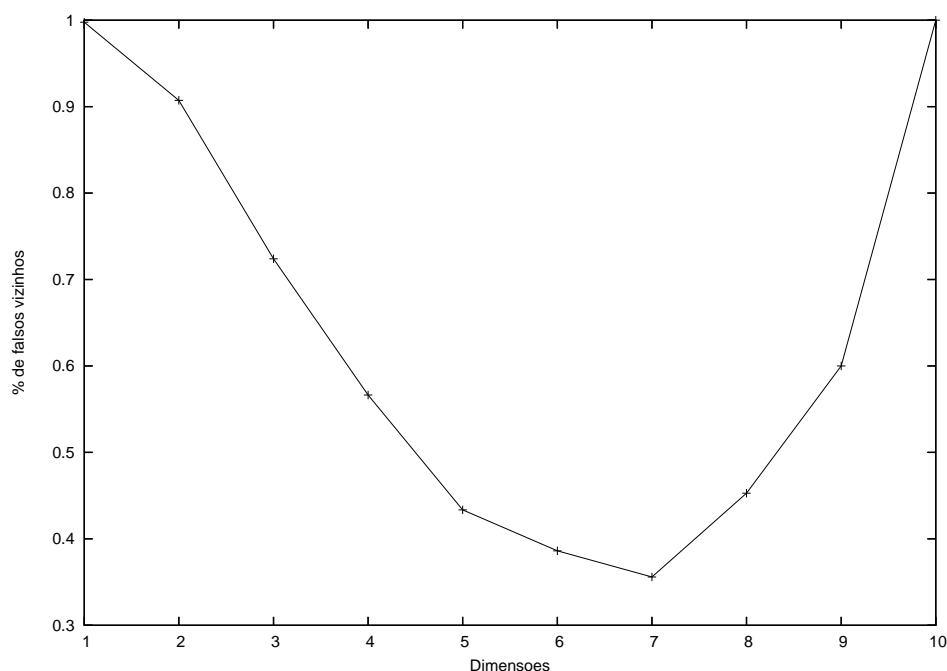


Figura 23: Falsos vizinhos para a série filtrada do IBrX-50 via projeção local.

Vemos pela figura (22) que não há correlação temporal aparente. Assim, assumindo as mesmas hipóteses da seção anterior em relação à presença de ruídos na série, aplicamos a redução de ruídos. Temos então o novo cálculo para os falsos vizinhos sobre os dados filtrados na figura (23). Podemos notar que, mesmo após a filtragem, temos potencialmente um atrator de alta dimensionalidade, o que põe em dúvida qualquer afirmação que poderíamos realizar sobre estimativas da dimensionalidade do mesmo, assim como seus expoentes de Lyapunov.

Verificamos então a entropia de correlação do mesmo a fim de determinarmos se existe um comportamento estocástico da série, uma possível explicação para os resultados obtidos até agora. Da mesma maneira que o Ibovespa, o índice IBrX-50 apresenta evidências de conformidade com a Hipótese de Mercados Eficientes, uma vez que não há platô estável no gráfico de entropia à figura (24), impossibilitando a quantificação da mesma.

Temos então evidências de que a inexistência de comportamento caótico no Ibovespa pode não depender da sua composição, uma vez que os resultados obtidos na análise do IBrx-50 são qualitativamente idênticos com aqueles obtidos no Ibovespa.

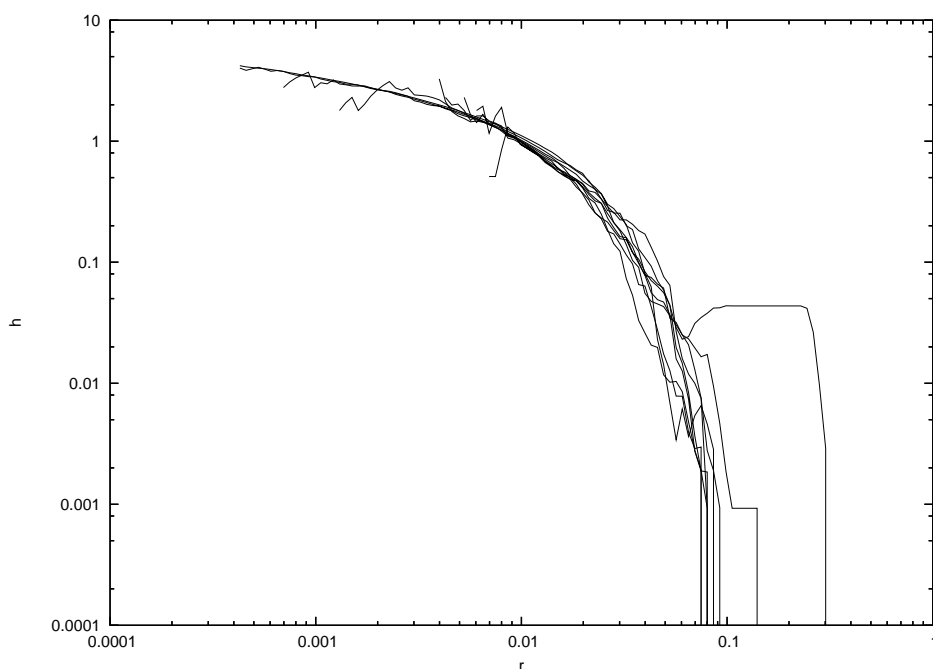


Figura 24: Entropia de correlações h_2 para a série IBrX-50.

5.3 Petrobrás PN

Analizamos agora a série de retornos diários da ação Petrobrás PN (PETR4) entre o período de 01/03/1994 a 15/10/2004, correspondendo a 2.660 observações e representada à figura (25).

Através do cálculo da informação mútua média e da proporção de falsos vizinhos, chegamos às figuras (26) e (27), onde temos como parâmetros para a reconstrução do espaço de fase $T = 4$ e $m = 6$, apresentando novamente o problema de alta dimensionalidade.

Verificando a existência de correlações temporais através do gráfico de separação espaço-temporal à figura (28), vemos que não há correlações significativas entre pares. Da mesma forma que o procedimento feito sobre os índices Ibovespa e IBrX-50, aplicamos a redução de ruídos via projeção local e, de acordo com o resultado, que pode ser observado na figura (29), vemos que a hipótese de contaminação de ruídos de alta dimensionalidade na série não pode ser considerada como correta.

Finalmente, calculando-se a entropia da série de retornos, vemos que, da mesma forma que as séries já estudadas, há evidências de que a ação atende à Hipótese de Mercados Eficientes, uma vez que não há platô estável no gráfico.

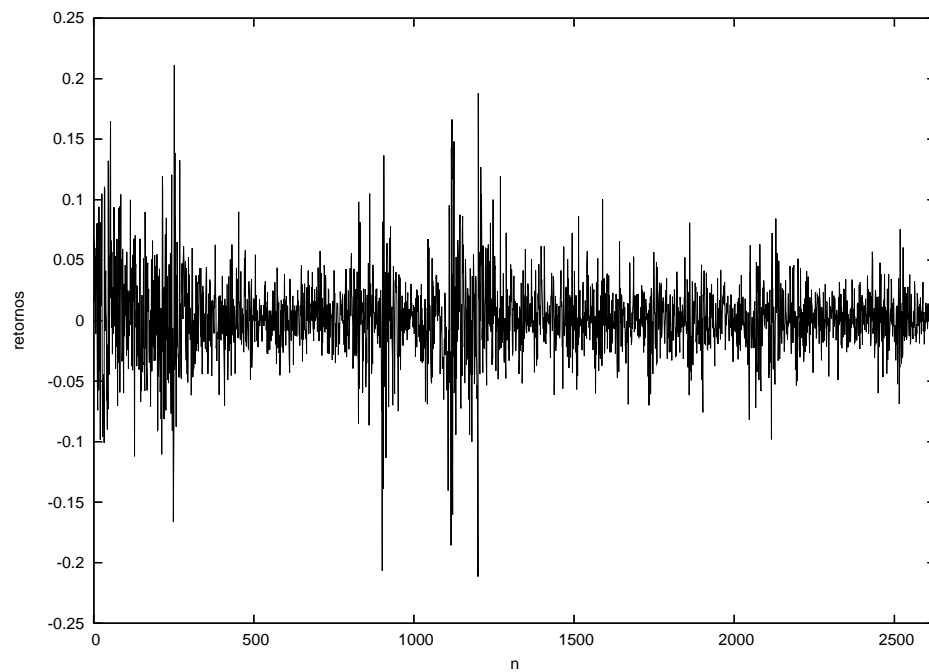


Figura 25: Retornos diários da ação Petrobrás PN (PETR4).

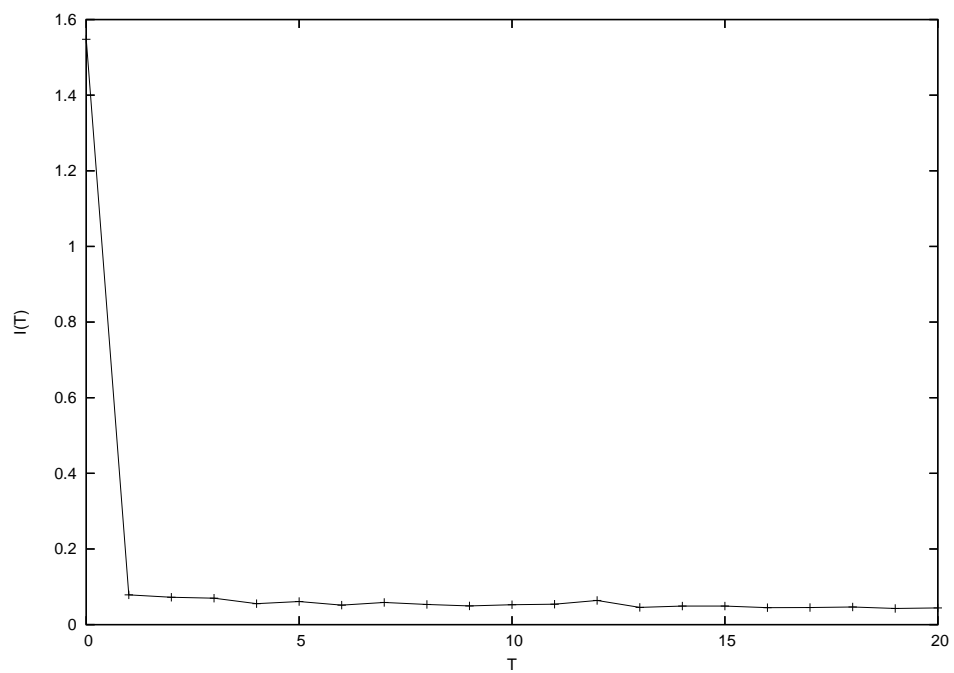


Figura 26: Informação mútua média para a série de retornos diários da ação Petrobrás PN (PETR4).

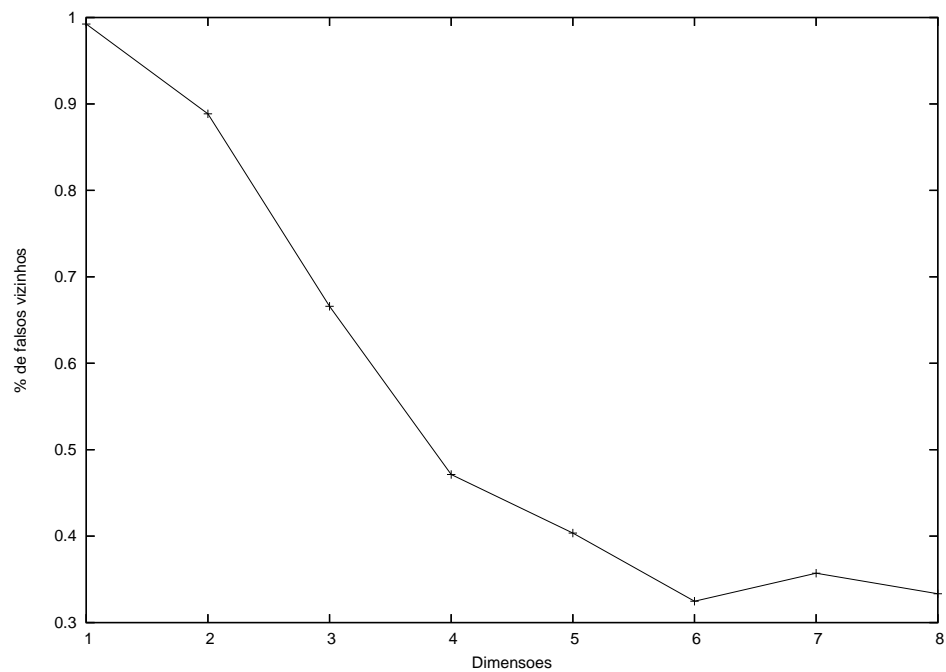


Figura 27: Proporção de falsos vizinhos para os retornos diários da ação Petrobrás PN (PETR4).

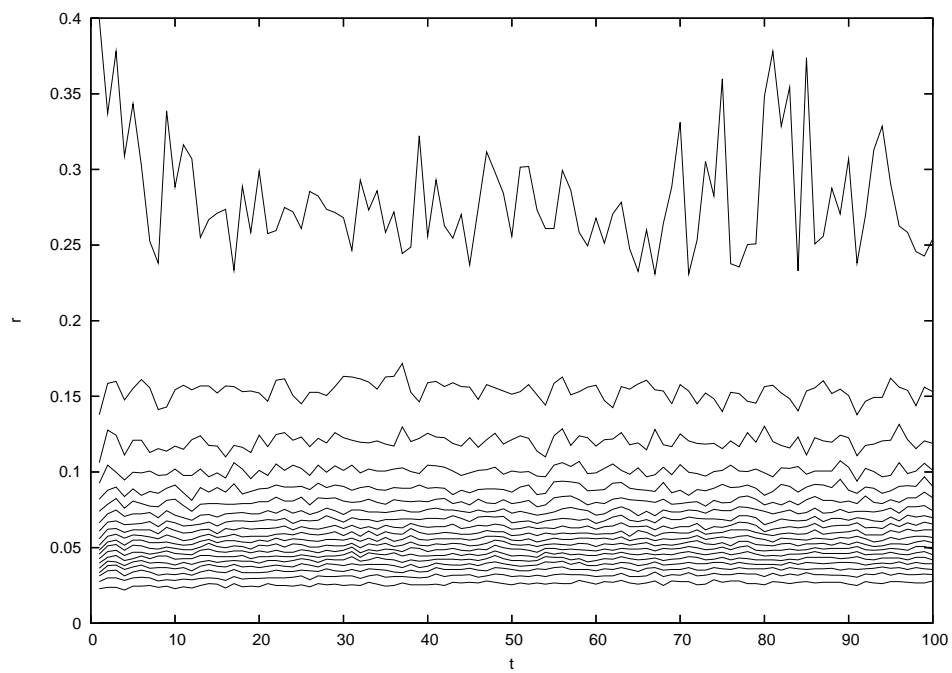


Figura 28: Gráfico de separação espaço-temporal para os retornos diários da ação Petrobrás PN (PETR4).

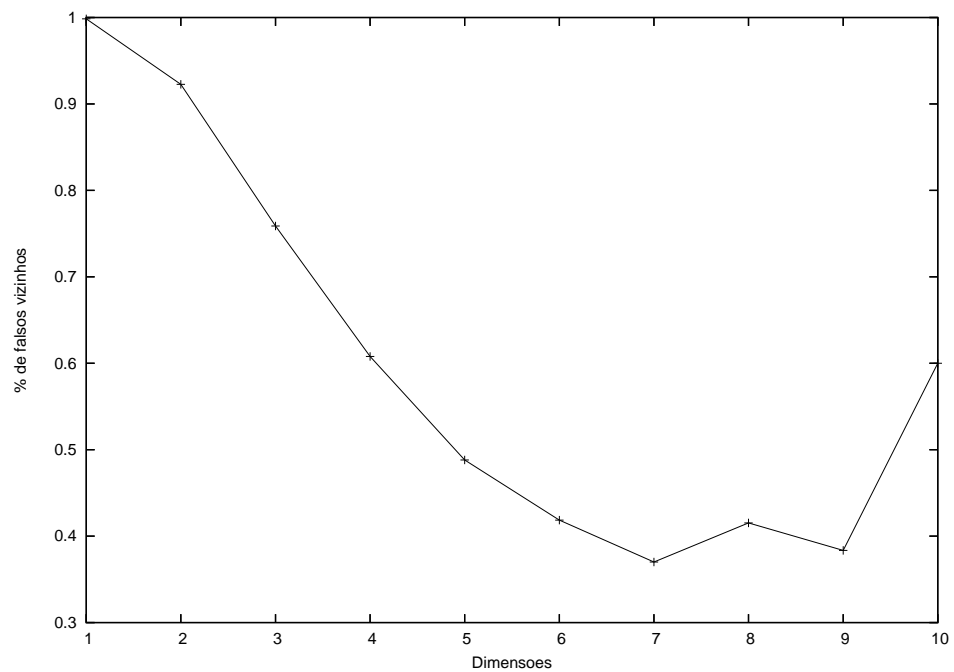


Figura 29: Falsos vizinhos para a série filtrada dos retornos diários da ação Petrobrás PN (PETR4).

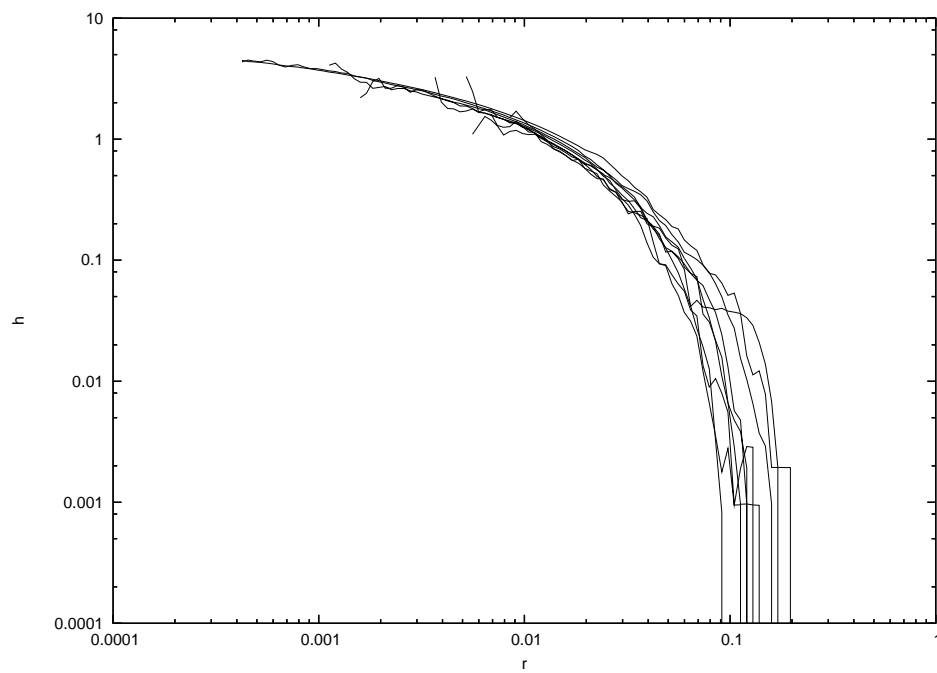


Figura 30: Cálculo da entropia de correlações para os retornos diários da ação Petrobrás PN (PETR4).

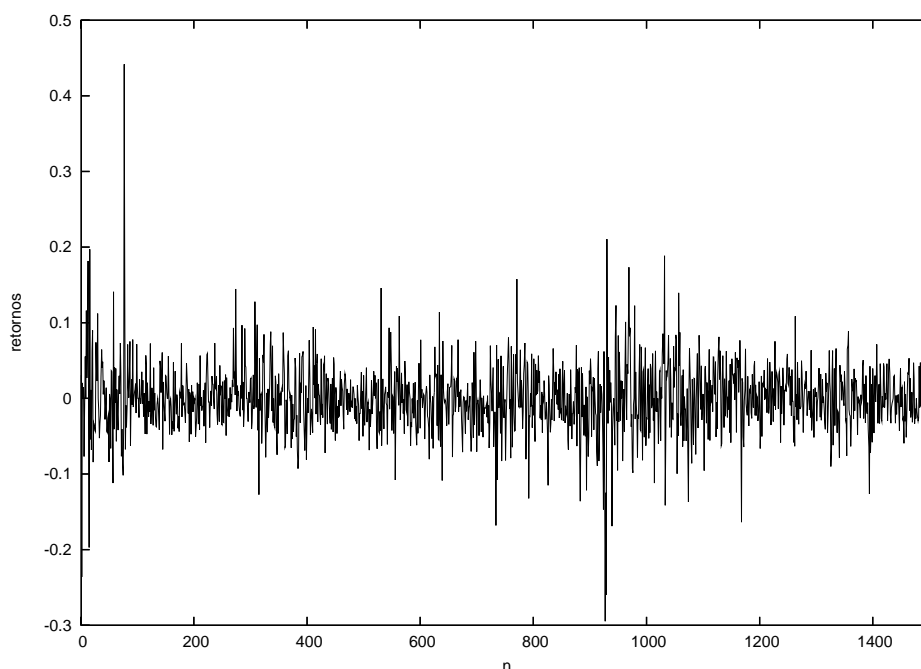


Figura 31: Retornos diários da ação Embratel Participações PN (EBTP4).

5.4 Embratel Participações PN

A série de retornos diários das ações Embratel Participações PN (EBTP4) correspondem ao período entre 21/09/1998 e 15/10/2004, totalizando 1.506 observações.

Seguindo a metodologia utilizada até o momento, definimos os parâmetros de reconstrução do espaço de fase como $T = 2$ e $m = 6$, como podemos observar nas figuras (32) e (33), respectivamente.

Diante da alta dimensionalidade do atrator, assumimos a existência de ruídos de alta dimensão acoplados ao sinal e aplicamos a redução de ruídos sobre a série e recalculamos novamente os falsos vizinhos. Como notamos à figura (34), a dimensão do atrator é reduzida para $m = 5$, viabilizando a continuação da análise.

A seguir, calculamos a entropia de correlação da série, de forma a verificar se é possível calcular a integral de correlação e determinar a dimensão fractal do atrator. Como vemos na figura (35), não é possível estabelecer um platô estável no gráfico, indicando um comportamento estocástico ou muito próximo a ele.

Assim, podemos afirmar que a ação atende à versão "fraca" da Hipótese de Mercados Eficientes, ou seja, não há informação suficiente nas observações passadas para que se possa projetar seu comportamento futuro.

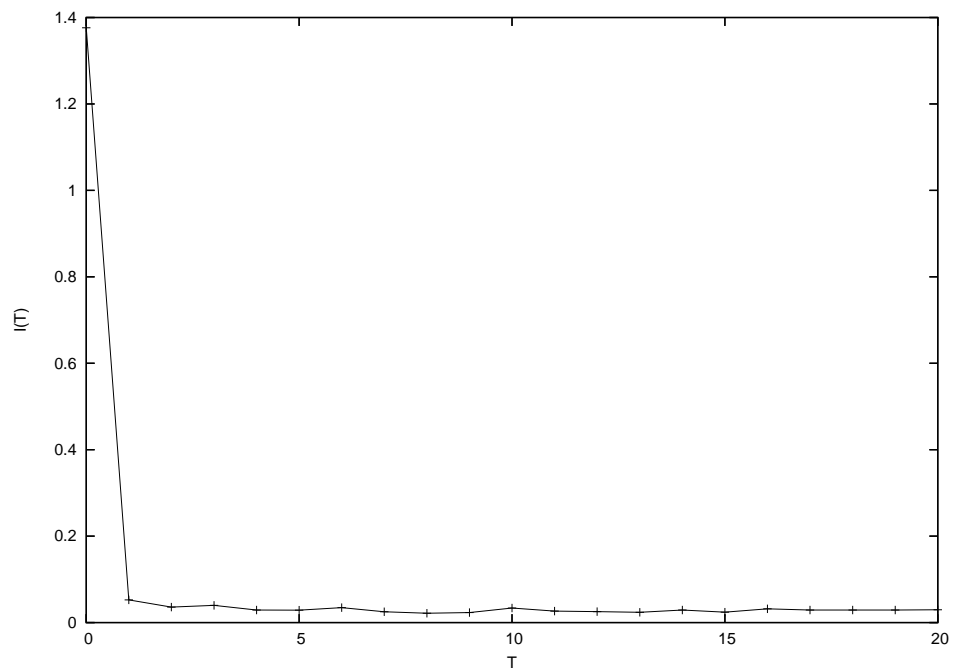


Figura 32: Informação mútua média para a série de retornos diários da ação Embratel Participações PN (EBTP4).

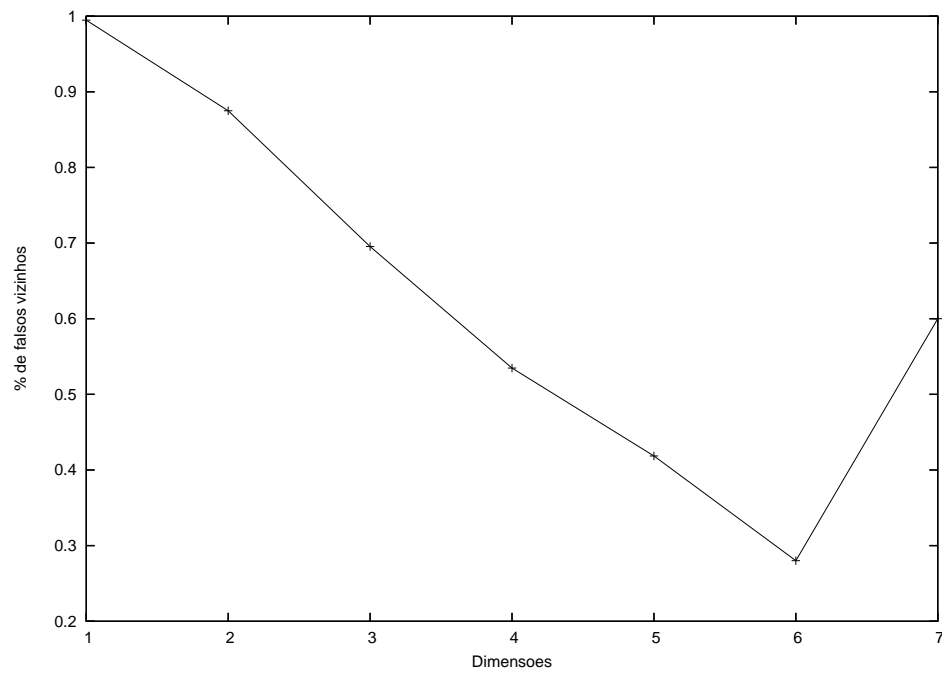


Figura 33: Falsos vizinhos para a série de retornos diários da ação Embratel Participações PN (EBTP4).

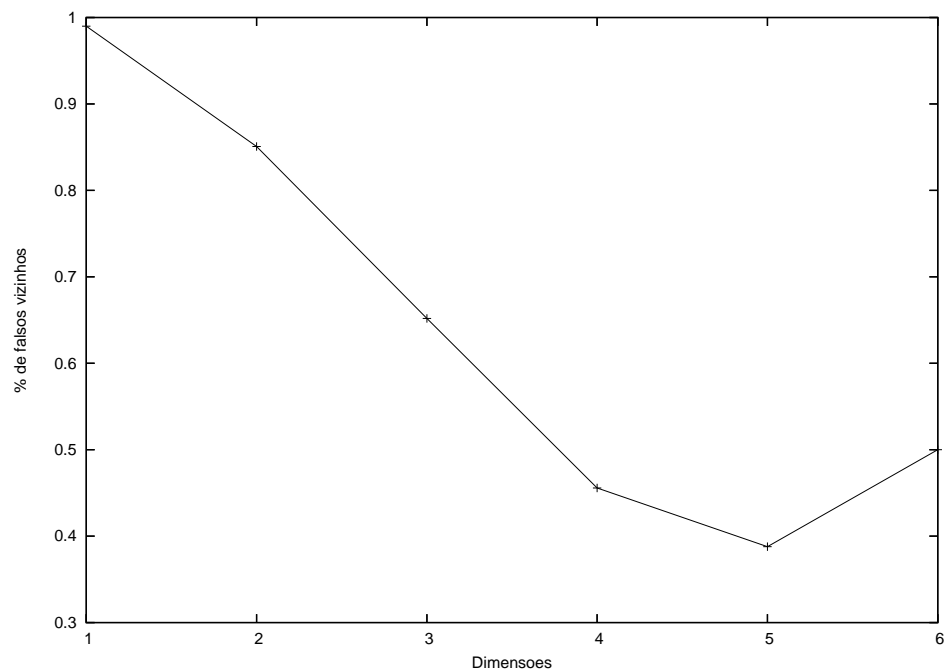


Figura 34: Falsos vizinhos para a série filtrada dos retornos diários da ação Embratel Participações PN (EBTP4).

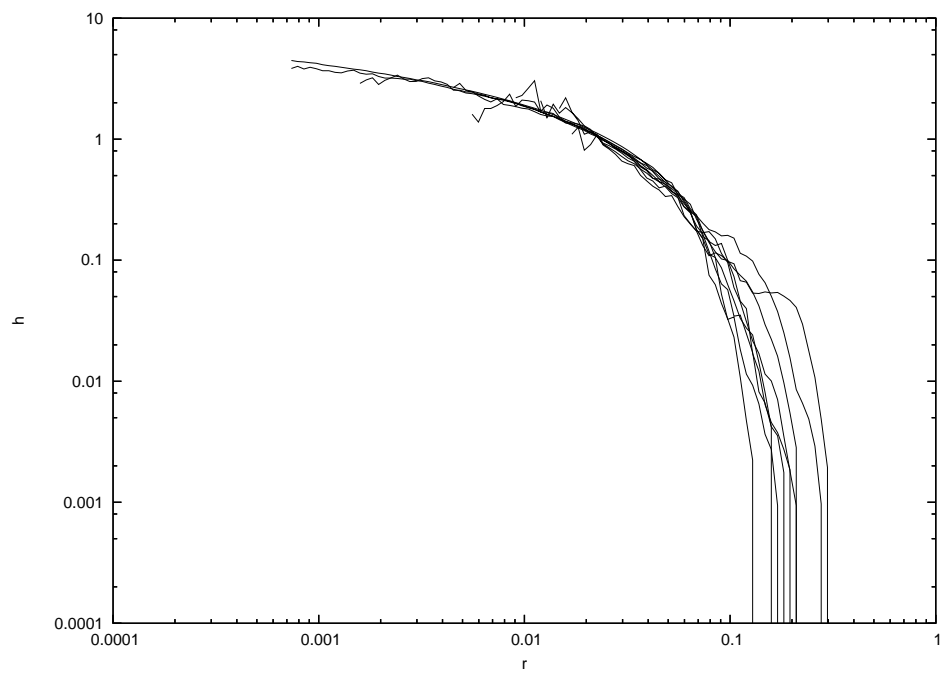


Figura 35: Entropia de correlação da série de retornos diários da ação Embratel Participações PN (EBTP4).

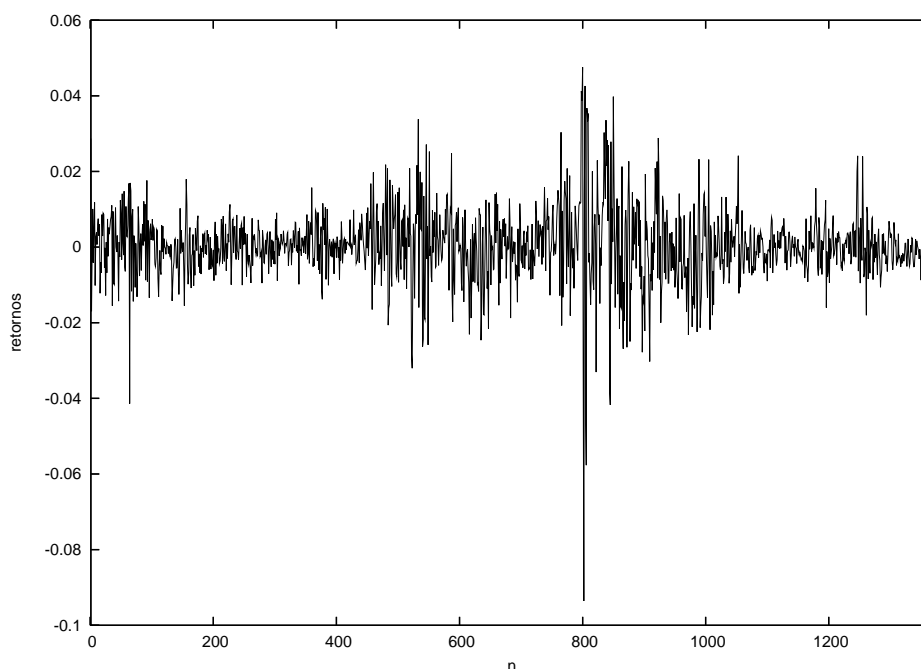


Figura 36: Retornos diários do câmbio real-dólar (PTAX).

5.5 Câmbio Real-Dólar

A última série estudada são os retornos do câmbio real-dólar observado entre 01/04/1999 e 15/10/2004, totalizando 1.369 observações.

Pelo cálculo da informação mútua média e falsos vizinhos chegamos a um $T = 4$ e $m = 7$, como observado nas figuras (37) e (38), respectivamente.

Novamente, diante da alta dimensão do atrator e da hipótese de que a série está contaminada por ruídos de alta dimensionalidade, aplicamos a redução de ruídos via projeção local e calculamos novamente a dimensão do atrator via falsos vizinhos. Pelo gráfico resultante na figura (39) vemos que $m = 5$. Porém, essa medida não converge naturalmente para esse valor, uma vez que para $m > 5$ simplesmente não haviam pares suficientes para serem contados, o que põe em cheque a veracidade dessa quantidade.

Assumindo que a estimativa de $m = 5$ é confiável, calculamos a entropia de correlações para a série, como a figura (40), não há platô estável para o cálculo da mesma, indicando evidências de estocasticidade dos retornos e, conseqüentemente, sua conformidade com a versão "fraca" da Hipótese de Mercados Eficientes.

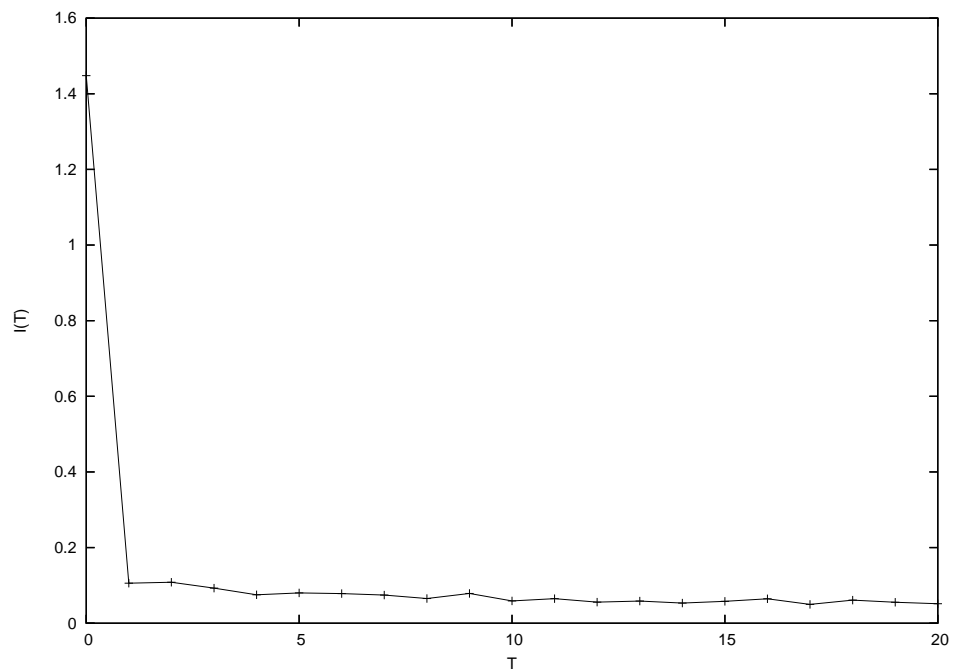


Figura 37: Informação mútua média para os retornos diários do câmbio real-dólar (PTAX).

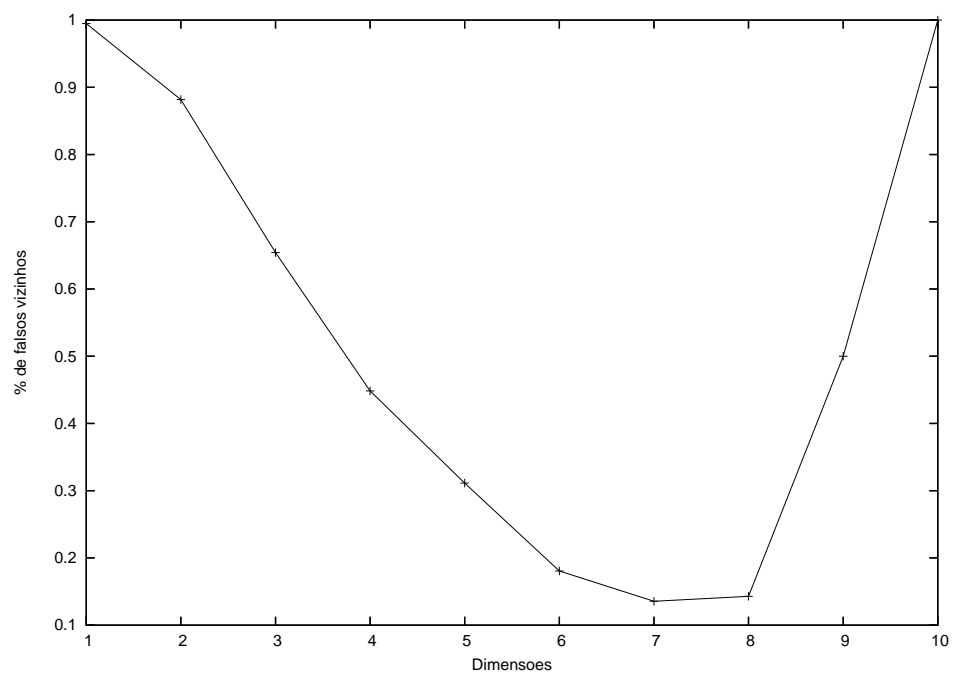


Figura 38: Falsos vizinhos para os retornos diários do câmbio real-dólar (PTAX).

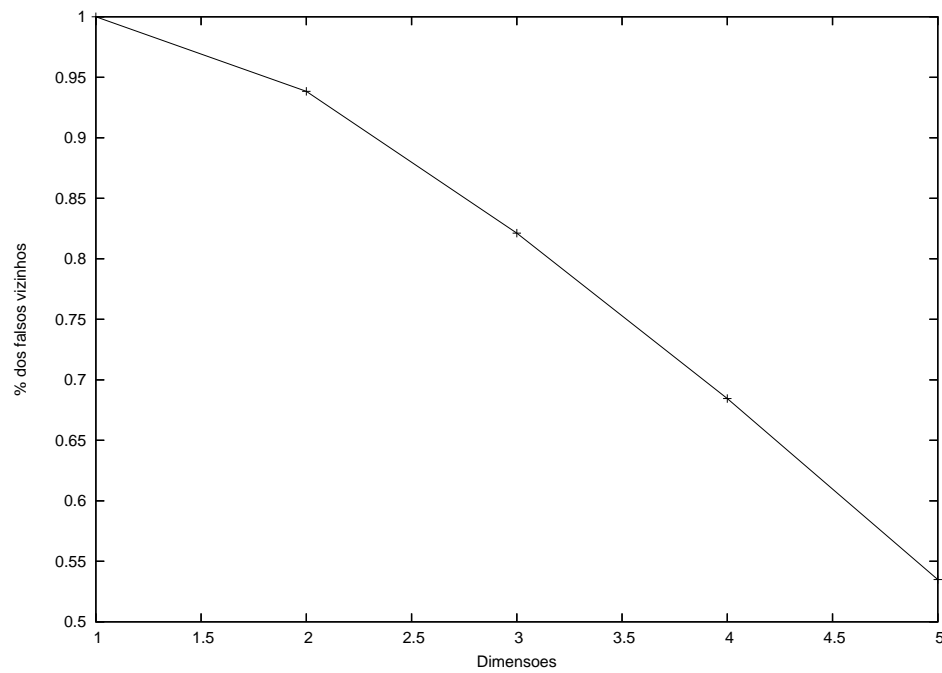


Figura 39: Falsos vizinhos para os retornos diários do câmbio real-dólar (PTAX).

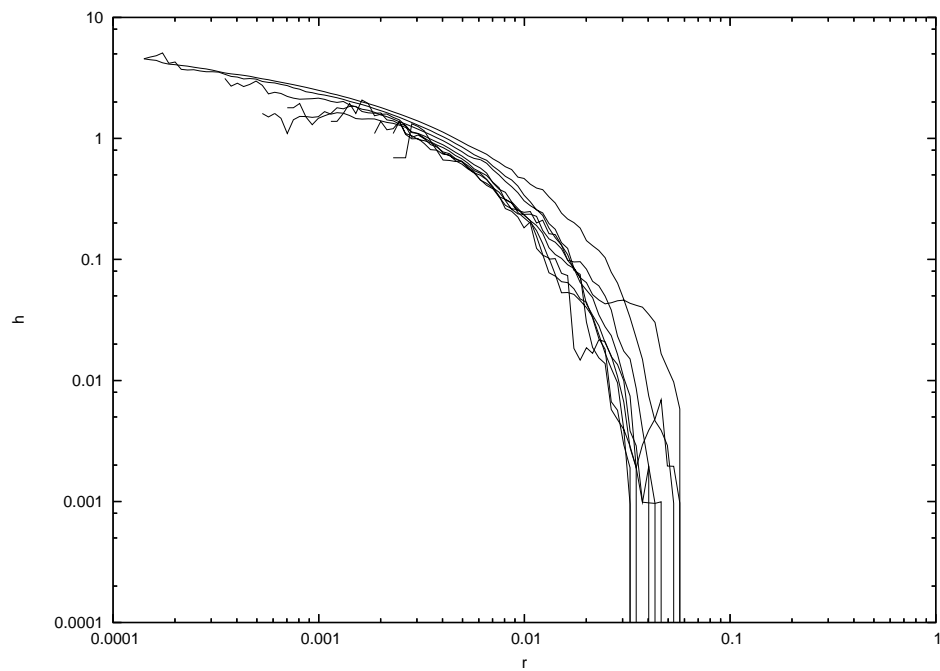


Figura 40: Entropia h_2 para os retornos diários do câmbio real-dólar (PTAX).

6 *Conclusão*

Como visto no trabalho, a aplicabilidade de técnicas inter-disciplinares advindas da Física podem ser um ferramental extremamente útil e intuitivo no estudo de Finanças Empíricas, uma vez que seus resultados são relativamente simples de serem interpretados e os resultados obtidos através delas correspondem àqueles observados através do uso de técnicas econométricas tradicionais, se não ainda mais precisos que estes.

Também vimos que a Teoria do Caos, ao apresentar o conceito de comportamento caótico determinístico, permite que se faça um paralelo entre a Física e as Finanças, uma vez que sistemas caóticos apresentam um certo grau de previsibilidade e assim, se formos capazes de detectar evidências desse tipo de comportamento em séries financeiras, podemos ter em mãos evidências de não-conformidade de um ativo em relação à versão "fraca" da Hipótese de Mercados Eficientes, ou seja, que seríamos capazes de prever seu comportamento futuro observando dados passados.

Assim, aplicando essas técnicas sobre diversas séries de tempo financeiras, pudemos mostrar que, ao menos para elas, a Hipótese de Mercados Eficientes é válida em sua versão "fraca", ou seja, não é possível, com base na observação de dados passados, prever seu comportamento futuro. Porém, como também foi mencionado na análise, é preciso que se faça uma importante salvaguarda em relação a esses resultados e àqueles obtidos em outros trabalhos, principalmente aqueles que se utilizam do teste de não-linearidade BDS e expoentes de Lyapunov como evidências de comportamento caótico: apesar desses trabalhos detectarem evidências de não-linearidade e determinismo – duas assinaturas de sistemas caóticos – eles não fazem menção direta quanto à dimensionalidade do atrator estudado ou quanto ao problema de ruídos aleatórios ou de alta dimensionalidade frente ao problema de "branqueamento" preliminar dos dados, que pode levar a resultados espúrios quando o objetivo da análise é a detecção de caos.

Quanto a possíveis extensões do presente trabalho, a possibilidade de aplicação de técnicas de separação de sinais através de mapas polinomiais locais, como apresentado

por Kostelich e Yorke (1990) representaria a oportunidade de verificar com maior rigor, mesmo que para isso a complexidade da análise cresça consideravelmente.

Outra possibilidade consiste no cálculo da *entropia aproximada*, um conceito relativamente recente, desenvolvido por Pincus (1991) e aplicado principalmente em problemas de biologia quantitativa, como feito por Pincus (1994). A entropia aproximada mede a probabilidade de que um determinado padrão não se repita, apresentando estimativas bastante confiáveis mesmo para conjuntos de dados pequenos, com pelo menos 1.000 observações. Algumas adaptações são necessárias para sua aplicação em séries financeiras, principalmente no que diz respeito ao "comprimento" dos padrões observados, mas de solução relativamente simples.

7 *Glossário*

Atrator. O conjunto de pontos no espaço de fase visitado pela solução de uma equação de evolução muito tempo depois que todos os transientes se extinguíram. Um atrator pode ter uma dimensão inteira – um atrator regular – ou uma dimensão fracional – um atrator **estranho**.

Caos. Evolução determinística de um sistema não-linear que se encontra entre o comportamento regular e estocástico (ruído). Este tipo de dinâmica é levemente previsível, não-periódica e cujas órbitas variam de forma exponencialmente rápida em resposta a mudanças nas condições iniciais.

Dimensão de imersão. É a dimensão do espaço de fase necessária para o desdobramento do atrator de um sistema não-linear a partir de observações de sinais escalares da fonte. Esta é uma dimensão inteira.

Dimensão fractal. É a dimensão de um conjunto infinito de pontos associada à maneira que a densidade desses pontos se escalona. Valores fracionais para as dimensões são típicos para atratores estranhos de sistemas não-lineares.

Espaço de fase/estado. Sistemas não-lineares são descritos por vetores multidimensionais definidos por tempos contínuos ou discretos. O espaço onde esses vetores se encontram é denominado espaço de estado ou de fase. A dimensão do espaço de fase é inteira.

Expoentes de Lyapunov. A taxa com que órbitas inicialmente próximas divergem umas das outras após pequenas perturbações quando a evolução de um sistema não-linear é caótica. Existem M expoentes para um fluxo com M dimensões. Para um sistema dissipativo, a soma desses expoentes é negativa.

Falsos vizinhos. Os falsos vizinhos em um atrator que podem ter se encontrado próximos uns dos outros por efeito de projeção, pois o atrator está sendo visto em uma dimensão muito baixa para que se possa desdobrá-lo completamente.

Informação mútua média. A quantidade de informação que pode-se aprender sobre uma observação analisando-se outra **em média sobre todas as observações**. Esta é uma estatística desenvolvida por Shannon (1948) no campo de teoria da informação que descreve sistemas caóticos não-lineares como se eles fossem fontes de informação.

Referências

- ABARBANEL, H. D. I. *Analysis of observed chaotic data*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1995. (Institute for Nonlinear Science).
- ABHYANKAR, A.; COPELAND, L. S.; WONG, W. Nonlinear dynamics in real-time equity market indices: Evidence from the united kingdom. *The Economic Journal*, n. 105, p. 864–880, July 1995.
- BALL, R. Anomalies in relationships between securities's yields and yield-surrogates. *Journal of Financial Economics*, v. 6, n. 2/3, p. 103–126, 1978.
- BROCK, W. et al. A test for independence based on the correlation dimension. 1995.
- BRUNDO, M. L. G. P. *Aplicação de técnicas não-lineares em séries financeiras*. Dissertação (Mestrado) — FEA/USP, 1998.
- CAMPBELL, J.; LO, A.; MACKINLAY, C. *The econometrics of financial markets*. 2. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 1997.
- CAVALCANTI, A. I. B. Instabilidade e não-linearidades nos mercados financeiros. In: ANPEC. *Anais do XXXI Encontro Nacional de Economia*. [S.l.], 2003.
- ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, v. 57, n. 3, p. 617–653, July 1985.
- FAMA, E. F. The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, v. 38, p. 34–72, January 1965.
- FAMA, E. F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, v. 25, n. 2, p. 383, May 1970.
- FAMA, E. F. Efficient capital markets: Ii. *Journal of Finance*, v. 46, n. 5, p. 1575–1617, December 1991.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. Permanent and temporary components of stock prices. *Journal of Political Economy*, v. 96, p. 246–273, 1988.
- FRANCISCO, G.; PAIVA, C.; ROSENFELD, R. Dynamic parameters for brazilian financial time series. *Economia Aplicada*, v. 6, n. 1, p. 67–77, 2002.
- FRASER, A. M.; SWINNEY, H. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, n. 33, p. 1134–1140, 1986.
- FRENCH, K.; ROLL, R. Stock return variances: The arrival of information and the reaction of traders. *Journal of Financial Economics*, v. 19, p. 3–30, 1986.

- GARRETT, I.; TAYLOR, N. Intraday and interday basis dynamics: Evidence from the ftse 100 index futures market. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, v. 5, n. 2, p. 133–152, July 2001.
- GOPIKRISHNAN, P. et al. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. 1999.
- GRASSBERGER, P. et al. On noise reduction methods for chaotic data. *Chaos*, n. 3, p. 127, 1993.
- GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Characterization of strange attractors. *Physical Review Letters*, v. 50, n. 5, p. 347–349, January 1983.
- HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Community of Mathematical Physics*, n. 50, p. 69, 1976.
- HSIEH, D. A. Chaos and nonlinear dynamics: Applications to financial markets. *Journal of Finance*, v. 46, n. 5, p. 1839–1877, December 1991.
- KANTZ, H. A robust method to estimate the maximal lyapunov exponent of a time series. *Physics Letters A*, v. 185, p. 77, 1994.
- KANTZ, H.; HEGGER, R.; SCHREIBER, T. Practical implementation of nonlinear time series methods: The tisean package. *Chaos*, n. 9, p. 413, 1999.
- KANTZ, H.; SCHREIBER, T. *Nonlinear time series analysis*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- KEIM, D.; STAUMBAUGH, R. Predicting returns in stock and bond markets. *Journal of Financial Economics*, v. 17, p. 357–390, 1986.
- KENNEL, M.; R., B.; ABARBANEL, H. Determining minimum embedding dimension for phase space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, n. 45, p. 3493, 1992.
- KOSTELICH, E.; YORKE, J. A. Noise reduction-finding the simplest dynamical system consistent with the data. *Physica D*, n. 41, p. 183–196, 1990.
- ANPAD. *Estrutura fractal em mercados emergentes*.
- LEBARON, B. Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance. October 1994.
- LÉVY, P. *Calcul des Probabilités*. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1925.
- LIMA, L. R.; XIAO, Z. Are there long-range dependence in financial time series? In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE FINANÇAS. *Anais do Quarto Encontro de Finanças*. [S.l.], 2004.
- LO, A.; MACKINLAY, A. C. Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test. *Review of Financial Studies*, v. 1, p. 41–66, 1988.
- LO, A.; MACKINLAY, A. C. When are contrarian profits due to stock market overreaction? *Review of Financial Studies*, v. 7, p. 175–208, 1990.

- LO, A. W. Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, v. 59, n. 5, September 1991.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, n. 26, p. 636–646, 1963.
- MANDELBROT, B. B. New methods of statistical economics. *Journal of Political Economy*, v. 2, n. 2, p. 203–210, October 1963.
- MANDELBROT, B. B. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, n. 36, p. 394–419, 1963.
- MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. Stochastic process with ultraslow convergence to a gaussian: the truncated $1/\text{'evy}$ flight. *Physical Review Letters*, v. 73, n. 22, p. 2946–2949, November 1994.
- MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. *Nature*, n. 376, p. 46–49, 1995.
- MINARDI, A. M. A. F. Águas passadas não movem moinho. preços passados movem o mercado? In: ANPAD. *Anais do EnANPAD 2002*. [S.l.], 2002.
- PINCUS, S. M. Approximate entropy as a measure of system complexity. *Procedures of the National Academy of Science*, n. 88, p. 2297–2301, 1991.
- PINCUS, S. M. Quantification of evolution from order to randomness in practical time series analysis. *Methods in Enzymology*, n. 240, p. 68–89, 1994.
- PROVENZALE, A. et al. Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series. *Physica D*, n. 58, p. 31, 1992.
- ROCHMAN, R. R. An analysis of the non-linear and chaotic structure of the index ibovespa. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE FINANÇAS. *Anais do Segundo Encontro de Finanças*. [S.l.], 2002.
- ROMANOVSKY. Truncated levy distribution of sp500 stock index fluctuations. distribution of one-share fluctuations in a model space. *Physica A*, n. 287, p. 450–460, June 2000.
- ROSENSTEIN, M. T.; COLLINS, J. J.; LUCA, C. J. D. A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets. *Physica D*, v. 65, p. 117, 1993.
- RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, n. 57, p. 397, 1976.
- RUELLE, D. Comments on deterministic chaos: The science and the fiction. *Procedures of the Royal Society A*, n. 427, p. 241–248, 1990.
- SAUER, T.; YORKER, J. A. How many delay coordinates do you need? *International Journal of Bifurcation and Chaos*, n. 36, p. 737–744, 1993.
- SCHEINKMAN, J. A.; LEBARON, B. Nonlinear dynamics and stock returns. *The Journal of Business*, 1989.

- SCHITTENKOPF, C.; DORFFNER, G.; DOCKNER, E. On nonlinear, stochastic dynamics in economic and financial time series. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, v. 4, n. 3, p. 101–121, 2001.
- SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, n. 27, p. 379–423, 1948.
- SMALL, M.; TSE, C. K. Determinism in financial time series. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, v. 7, n. 3, 2003.
- SPROTT, J. C. *Chaos and Time-Series Analysis*. [S.l.]: Oxford University Press, 2003.
- STROGATZ, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. [S.l.]: Westmion ABP, 1994.
- TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. In: *Lectures notes in mathematics*. [S.l.]: Springer, Berlin, 1981. v. 898, p. 366.
- THEILER, J. Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time series data. *Physical Review A*, n. 34, p. 2427, 1986.
- THEILER, J. Estimating fractal dimension. *Journal of the American Optical Society A*, n. 7, p. 1055–1073, 1990.
- THEILER, J.; EUBANK, S. Don't bleach chaotic data. *Chaos*, n. 3, p. 771, December 1993.
- THEILER, J. et al. Using surrogate data to detect nonlinearity in time series. In: *Nonlinear Modeling and Forecasting*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1992. p. 163–188.
- VISWANATHAN, G. M. et al. The origin of fat tailed distributions in financial time series. November 2002.
- WATTS, R. L. Systematic 'abnormal' returns after quarterly earnings announcements. *Journal of Financial Economics*, v. 6, n. 2/3, p. 127–150, 1978.
- WOLF, A. et al. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, v. 16, p. 285, 1985.