

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

ARTUR DE BARROS LIMA

ESTIMADORES DE VOLATILIDADE NO MERCADO BRASILEIRO

Análise de desempenho de estimadores que usam valores extremos

SÃO PAULO

2008

ARTUR DE BARROS LIMA

ESTIMADORES DE VOLATILIDADE NO MERCADO BRASILEIRO:

Análise de desempenho de estimadores que usam valores extremos

Dissertação apresentada à Escola de
Economia de São Paulo da Fundação Getúlio
Vargas, como requisito para a obtenção de título
de Mestre em Finanças e Economia Empresarial.

Campo de Conhecimento:

Investimentos

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Matone

SÃO PAULO

2008

Lima, Artur de Barros.

Estimadores de Volatilidade no mercado brasileiro: Análise de desempenho de estimadores que usam valores extremos / Artur de Barros Lima. - 2008.

59 f.

Orientador: Ricardo Matone.

Dissertação (Mestrado em Finanças e Economia Empresarial) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Mercado financeiro - Brasil. 2. Investimentos - Análise - Brasil. 3. Avaliação de ativos. I. Matone, Ricardo. II. Dissertação (mestrado profissional) - Escola de Economia de São Paulo. III. Título.

CDU 336.76(81)

ARTUR DE BARROS LIMA

ESTIMADORES DE VOLATILIDADE NO MERCADO BRASILEIRO

Análise de desempenho de estimadores que usam valores extremos

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para a obtenção de título de Mestre em Finanças e Economia Empresarial.

Campo de Conhecimento:

Investimentos

Data de aprovação:

___/___/___

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Matone (Orientador)

FGV-EAESP

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

FGV-EAESP

Prof. Dr. Nilson Teixeira

Banco Credit Suisse Brasil S/A

Dedico este trabalho à minha esposa Janaína,
à minha filha Lívia,
e aos meus pais,
Ernani e Roseli.

AGRADECIMENTOS

Expresso minha sincera gratidão àqueles que contribuíram para a elaboração desta dissertação, em todas as suas fases.

Agradeço ao Prof. Dr. Ricardo Matone, pela confiança no meu trabalho quando aceitou orientar-me. Agradeço pelo tempo dedicado a esse trabalho quando da realização de reuniões e leituras. Agradeço por ter me orientado de forma a atingir o objetivo deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Nilson Teixeira e Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto, pelo tempo dedicado ao exame desse trabalho e por sua valiosa contribuição com o peso de toda sua experiência acadêmica e profissional.

Aos amigos Fausto Ferreira e Leonardo Ferreira pela obtenção de alguns dados para a análise de desempenho dos estimadores, objeto deste trabalho.

À minha esposa Janaína, pelo amor, confiança e compreensão durante a realização do curso e confecção da dissertação aqui apresentada.

Aos meus pais, Ernani e Roseli, pelo apoio dado sob todas as formas.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é analisar o desempenho de estimadores de volatilidade que utilizam valores extremos (máximo, mínimo, abertura e fechamento) para ativos no mercado brasileiro. Discute-se o viés dos estimadores usando como referências o estimador clássico, a volatilidade realizada e a volatilidade implícita de 1 mês da série de opções no dinheiro (ATM - *at the money*); discute-se a eficiência quanto à previsibilidade da volatilidade futura usando o estimador clássico e a volatilidade implícita defasados um período para frente como variáveis dependentes e a eficiência em si, isto é, quanto ao tamanho da variância do estimador. Como representantes de ativos brasileiros, foram escolhidos a paridade BRL/USD spot e o Índice Bovespa. Além de bastante líquidos, esses dois ativos têm bastante importância no mercado brasileiro, seja como *benchmark* para investimentos, bem como ativos-base para muitos derivativos operados na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) e na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa). A volatilidade do ativo-base é uma das variáveis para o apreamento de derivativos como opções; muitas estratégias são montadas, no mercado financeiro, utilizando-a como referência. A volatilidade também é bastante usada no gerenciamento de riscos, em modelos como o *Value at Risk* (VaR), por exemplo.

Palavras-chave: volatilidade, valores extremos.

ABSTRACT

The objective of this work is to analyze the performance of estimators of volatility using extreme values (maximum, minimum, opening and closing) for assets in the Brazilian market. It is discussed the bias of estimators using classical estimator, the realized volatility and the implied volatility of 1 month of the options at the money (ATM) as references, it is discussed the efficiency about the predictability of future volatility using classical estimator and implied volatility delayed for a period ahead as dependent variables and efficiency itself, that is, about the size of the variance of the estimator. As representatives of Brazilian assets, it was chosen the parity BRL/USD spot and the Bovespa index. Besides fairly liquid, these two assets are very important in the Brazilian market as benchmark for investments and underlying for many derivatives operated in the Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) and in the Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa). The volatility of the underlying is one of the variables for derivatives pricing such as options. Many strategies are built in financial market volatility using it as a reference. The volatility is also used in the management of risk, in models such as Value at Risk (VaR), for example.

Keywords: volatility, extreme values.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Gráfico 1 – Preço do ativo no tempo | 22 |
| Gráfico 2 – Preço do ativo no tempo | 25 |
| Gráfico 3 – Evolução do Índice Bovespa de janeiro de 2000 até setembro de 2007 | 30 |
| Gráfico 4 – Evolução da paridade BRL/USD spot de janeiro de 2000 até setembro de 2007 | 31 |
| Gráfico 5 – Retornos diários do índice Bovespa | 50 |
| Gráfico 6 – Histograma dos retornos diários do índice Bovespa | 50 |
| Gráfico 7 – Retornos diários da paridade BRL/USD spot | 51 |
| Gráfico 8 – Histograma dos retornos diários da paridade BRL/USD spot | 51 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Teste teórico de viés e eficiência para estimadores de volatilidade usando valores extremos | 28 |
| Tabela 2 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana – Período 2000 a 2007 | 33 |
| Tabela 3 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Mês – Período 2000 a 2007 | 34 |
| Tabela 4 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana – Período 2004 a 2007 | 34 |
| Tabela 5 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana – Período 2000 a 2007 | 34 |
| Tabela 6 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Mês – Período 2000 a 2007 | 35 |
| Tabela 7 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana – Período 2004 a 2007 | 35 |
| Tabela 8 – Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana – Período 2000 a 2007 | 36 |
| Tabela 9 – Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Mês – Período 2000 a 2007 | 37 |
| Tabela 10 – Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Mês – Período 2004 a 2007 | 37 |
| Tabela 11 – Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador | |

| | |
|--|----|
| clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana – Período 2000 a 2007 | 37 |
| Tabela 12 - Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Mês - Período 2000 a 2007 | 38 |
| Tabela 13 - Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Mês - Período 2004 a 2007 | 38 |
| Tabela 14 –Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana - Período 2000 a 2007 | 39 |
| Tabela 15 – Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Mês - Período 2000 a 2007 | 39 |
| Tabela 16 – Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana - Período 2004 a 2007 | 40 |
| Tabela 17 – Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana - Período 2000 a 2007 | 40 |
| Tabela 18 – Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Mês - Período 2000 a 2007 | 41 |
| Tabela 19 – Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana - Período 2004 a 2007 | 41 |
| Tabela 20 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade realizada como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Dia | 43 |
| Tabela 21 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade realizada como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana | 43 |
| Tabela 22 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade realizada como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Dia | 43 |

| | |
|---|----|
| Tabela 23 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade realizada como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana | 44 |
| Tabela 24 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade implícita como referência – Índice Bovespa | 45 |
| Tabela 25 – Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade implícita como referência – Paridade BRL/USD | 46 |
| Tabela 26 – Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – volatilidade implícita como referência – Índice Bovespa | 46 |
| Tabela 27 – Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – volatilidade implícita como referência – Paridade BRL/USD | 47 |
| Tabela 28 – Equações de previsão de volatilidade futura – volatilidade implícita como referência – Índice Bovespa | 47 |
| Tabela 29 – Equações de previsão de volatilidade futura – volatilidade implícita como referência – Paridade BRL/USD | 48 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 14 |
| 1.1 | <i>Introdução</i> | 14 |
| 1.2 | <i>Revisão Bibliográfica</i> | 16 |
| 1.3 | <i>Estrutura do Trabalho</i> | 19 |
| 2 | TEORIA | 21 |
| 3 | ESTUDO DE CASO – ÍNDICE BOVESPA E PARIDADE BRL/USD SPOT | 28 |
| 3.1 | <i>Mercado local brasileiro</i> | 29 |
| 3.2 | <i>Descrição dos dados</i> | 31 |
| 3.3 | <i>Análise dos Resultados</i> | 33 |
| 3.3.1 | <i>Estimador Clássico como referência</i> | 33 |
| 3.3.2 | <i>Volatilidade Realizada como referência</i> | 42 |
| 3.3.3 | <i>Volatilidade Implícita como referência</i> | 44 |
| 3.4 | <i>Análise das diferenças entre a teoria e a verificação empírica</i> | 49 |
| 4 | CONCLUSÃO | 53 |
| 4.1 | <i>Conclusões</i> | 53 |
| 4.2 | <i>Sugestões para novos trabalhos</i> | 54 |
| 5 | APÊNDICE | 57 |
| 5.1 | <i>Gerador de números Aleatórios (Box – Muller)</i> | 57 |
| | REFERÊNCIAS | 59 |

1. INTRODUÇÃO

1.1. Introdução

O mercado de derivativos no mundo desenvolveu-se bastante nas últimas décadas. Entre seus principais produtos, estão as opções de ativos. Para se apreçar e construir estratégias no mercado usando opções é preciso estimar a volatilidade do seu ativo-base. Também a volatilidade dos ativos é bastante usada em gerenciamento de riscos. Vários estudos teóricos têm sido feitos para melhor modelar, verificar e prever a volatilidade dos ativos.

É intuitivo imaginar que um estimador, utilizando valores extremos aqui definidos como máximo, mínimo, abertura e fechamento, traduziria melhor a volatilidade observada no mercado se comparado com o estimador tradicional, que usa apenas os valores de fechamento. Isso se deve ao fato de o primeiro incorporar o comportamento da trajetória ao longo do tempo e não apenas retratos do valor em momentos específicos (valores de abertura e fechamento são meramente amostras do processo verificadas em determinado momento de cada período). Valores máximos e mínimos contêm mais informação sobre a volatilidade do que a abertura e o fechamento. Informações diárias de abertura, máximo, mínimo e fechamento estão hoje disponíveis para o mercado, seja em jornais, sites e difusores de informação como *Reuters* e *Bloomberg*.

Na recente teoria de finanças, é assumido freqüentemente que os preços dos ativos seguem um processo estocástico, sendo o movimento geométrico Browniano o mais comumente utilizado. A teoria de apreçamento de opções desenvolvida por Black e Scholes em 1973 assume este comportamento como base. O preço de um ativo $S(t)$, então, segue a equação diferencial abaixo:

$$dS = \mu S dt + \delta S dz \quad (I)$$

Em que:

μ é o parâmetro de *drift*

δ é o parâmetro de volatilidade

dz é um processo de Winner que tem por definição as seguintes características:

- 1) $dz = \varepsilon(t) \sqrt{dt}$ (passeio aleatório sem *drift*) ; $\varepsilon(t) \sim N(0,1)$;

- 2) Para todo $s < t$ a quantidade $z(t) - z(s)$ é uma variável estocástica normal com média zero e variância $t - s$;
- 3) Para qualquer $0 < t_1 < t_2$, as variáveis $z(t_1)$ e $z(t_2)$ são não correlacionadas;
- 4) $z(t_0) = 0$ com probabilidade 1.

É também bastante aceito e usado que a variação dos preços segue uma distribuição log-normal e, portanto, a transformação $\ln S$, que é uma aproximação do retorno de $S(t)$, segue uma distribuição normal, ou seja, a variação dos preços em um intervalo é normalmente distribuída com média μ' e variância proporcional ao tamanho do intervalo. Verificações empíricas corroboram este resultado. Pelo lema de Ito, temos que o processo $X(t) = \ln(S(t))$ segue um movimento geométrico Browniano com *drift* $\mu' = \mu - \frac{\delta^2}{2}$ e variância δ^2 .

As fórmulas de apreçamento de opções são funções independentes do valor do *drift* do processo e são, usualmente, funções não-lineares do parâmetro de volatilidade do movimento geométrico Browniano. Como resultado disso, uma atenção especial se dá para a estimação desse valor numérico. A volatilidade usada no modelo é a expectativa do mercado de qual será a volatilidade realizada durante o resto de vida da opção e os agentes do mercado usam todas as informações disponíveis para a melhor estimativa do seu valor. O valor da volatilidade também tem grande importância atual no gerenciamento de risco de projetos e portfólios. Modelos de gerenciamento de risco como o VaR (*Value at Risk*) utilizam volatilidades e correlações entre os ativos para obterem estimativas de perdas potenciais, dado um certo nível de confiança.

Vários métodos têm sido propostos para se estimar o parâmetro de volatilidade. O mais comum é a estimação clássica, em que se define a constante de difusão D do passeio aleatório como a variância dos valores $X(t)$ após um intervalo de tempo. D é estimado como:

$$D = \frac{1}{T(n-1)} \sum (d_i - d_m)^2$$

Em que n é o número de intervalos, T é o tamanho do intervalo, d_i é o valor observado para o final de cada intervalo i e d_m é a média dos d_i . ($d_m = \frac{1}{n} \sum d_i$).

O estimador clássico atribui peso uniforme a todas as observações. Uma variação desse estimador é o *exponential weighted moving average* (EWMA), em que se atribui maior peso às observações recentes, segundo constante de suavização. Uma desvantagem do

EWMA é a arbitrariedade na escolha dessa constante de suavização. As vantagens desses estimadores são sua simplicidade, a não-dependência em relação à presença de tendência e não-existência de viés na sua estimação; também os preços dos ativos são obtidos em momentos definidos, normalmente no fechamento dos negócios do dia. A grande desvantagem é que esse estimador ignora outras informações que estão disponíveis no mercado, como os valores máximo e mínimo atingidos no intervalo de tempo de análise e o valor de abertura de cada intervalo.

Este trabalho tem por objetivo discutir o viés e a eficiência de estimadores de volatilidade que utilizam valores extremos (máximo, mínimo, abertura e fechamento) para ativos no mercado brasileiro. Para isso, os testes são feitos considerando-se o estimador tradicional, a volatilidade realizada e a volatilidade implícita como referências. Quer-se, nesse trabalho, verificar se, de fato, os estimadores que usam valores extremos apresentam melhor performance que o estimador clássico para ativos brasileiros, e se esse indicativo justifica seu uso em mesas de operações e áreas de gerenciamento de risco no Brasil. Viés e eficiência são termos estatísticos: entende-se como viés a propriedade de um estimador de, à medida que o número de observações aumenta ($n \rightarrow \infty$), o valor do estimador não convirja para o valor real da medida e, afirma-se, um estimador é mais eficiente que outro se o primeiro apresentar variância menor do que o último. Tais estimadores foram propostos recentemente e, talvez por isso, sejam ainda pouco utilizados no mercado financeiro.

1.2. Revisão Bibliográfica

O primeiro estudo a partir de valores extremos foi realizado por Michael Parkinson, em 1980. Esse estudo, na teoria, mostrou que o uso dos valores máximos e mínimos atingidos por uma variável, em um intervalo de tempo na estimação da volatilidade (constante de difusão), geraria um parâmetro cerca de 5 vezes mais eficiente do que o da estimação clássica. Parkinson (1980) considerou que a variável $X(t) = \ln(S(t))$ não possui tendência (*drift*) e, ao invés de usar o tamanho de cada intervalo, ele propôs o uso dos extremos de $X(t)$ em cada intervalo i . Definindo $l_i = \max X(t) - \min X(t)$, o estimador não viesado obtido por Parkinson foi:

$$\delta^2 = \frac{1}{4 \ln(2) T n} \sum (l_i)^2$$

Em que T é o tamanho do intervalo e n é o número de intervalos.

Na teoria, tomando-se a variância do novo estimador e comparando-a com a variância do estimador clássico, verificou-se que a variância do estimador clássico é cerca de 5 vezes maior que a variância do estimador de Parkinson (1980). Isso significa que obteríamos um estimador tão eficiente quanto o obtido com o método clássico usando cerca de 5 vezes menos observações na estimação. Esse ganho de eficiência é de grande utilidade na estimação de volatilidade para ativos em países emergentes, pois muitas vezes não há disponibilidade de dados para a estimação e é possível excluir períodos em que existe mudança na estrutura do mercado, como heterocedasticidade, que é a mudança da volatilidade ao longo do tempo. Além disso, informações antigas podem ser pouco relevantes para explicar-se o momento atual.

No mesmo ano, Garman e Klass (1980) propuseram vários estimadores usando valores extremos, também assumindo a não-presença de *drift* em $X(t) = \ln(S(t))$ e que o contínuo monitoramento dos preços. Um dos estimadores propostos possui, na teoria, uma variância de cerca de 8 vezes inferior ao estimador clássico. Garman e Klass (1980) também expuseram resultados de simulação feita usando os estimadores e verificaram que todos, à exceção do clássico, apresentaram viés de baixa. Eles apontam que a principal razão para isso é a discretização das observações no tempo. Quanto mais se aumentar a frequência de observações, mais se reduz o viés. A discretização não gera viés no estimador clássico, mas se tem perda de eficiência e gera viés e perda de eficiência para os estimadores que usam valores extremos.

Com o objetivo de flexibilizar a restrição de que o processo não possui *drift*, Roger e Satchell (1991) e Yang e Zhang (2000) propuseram novos estimadores tão eficientes quanto os propostos por Garman e Klass (1980). Yang e Zhang (2000) basicamente complementam o trabalho de Roger e Satchell (1991), propondo um estimador que contém esse último, mas corrige o fato de haver um período do dia em que os preços não são observados, causando um salto, ou seja, uma descontinuidade, no processo. Esse salto é a diferença entre o preço de fechamento de um dia e o preço de abertura do dia seguinte.

Vários trabalhos foram feitos para se verificar empiricamente o viés e a eficiência dos estimadores usando valores extremos.

Becker (1983) afirma que, muitas vezes, os preços máximo e mínimo não representam o real comportamento da variável, pois eles seriam reflexos de operações feitas por compradores/vendedores em desvantagens no mercado. Isso é muito frequente em operações

com papéis ilíquidos devido à assimetria de informações. Também, após análise de regressões feitas para previsão de volatilidade futura usando o estimador clássico como referência, conclui-se que os estimadores que usam valores extremos possuem informações que o estimador clássico não possui.

Mota e Fernandes (2004) concluíram que os estimadores gerados por Garman e Klass (1980) têm desempenho semelhante aos gerados pelos modelos GARCH ao se comparar com a volatilidade realizada pelo Ibovespa. A desvantagem dos modelos GARCH é que eles são mais difíceis de serem estimados e possuem um alto custo computacional para implementação.

Toner (1997) também concluiu que os estimadores de Parkinson (1980) e Garman e Klass (1980) são mais eficientes que o método clássico que usa os preços de fechamento. Nesse trabalho foram feitos uma série de testes estatísticos de viés e eficiência para o contrato futuro do S&P 500.

Li e Weinbaum (2000) discutem a existência de viés em diversos estimadores, inclusive no estimador clássico. É mostrado que, em certas circunstâncias, o estimador clássico pode apresentar viés de alta. Para se verificar empiricamente tal viés, usou-se a volatilidade realizada como referência. O estudo empírico de viés foi feito usando dados de 1989 a 1999 para o S&P 100, S&P 500 spot índices, Futuro do S&P 500 e para as paridades *Deutsche Mark/US Dollar*, *Japanese Yen/US Dollar* e *US Dollar/British Pound*.

Wiggins (1991) compara a eficiência dos estimadores na previsão da volatilidade futura e analisa o viés do estimador de Parkinson (1980) usando o estimador clássico como referência. Este seria um trabalho complementar do trabalho de Becker (1983). Foram escolhidas várias ações e estas foram divididas em 12 grupos, levando em consideração o valor absoluto do preço e o volume de negócios intra-diários como critérios. É verificado que a performance do estimador que usa valores extremos difere segundo os grupos.

Wiggins (1992) analisa o viés dos estimadores - usando o estimador clássico como referência - e sua eficiência na previsão da volatilidade futura. O período de análise do S&P 500 foi de 1982 a 1989.

Duque e Paxson (1997) discutem uma série de hipóteses e questões envolvendo os estimadores de volatilidade, utilizando valores extremos e a volatilidade implícita. Nesse estudo, são analisadas hipóteses, como possível diferença entre os diversos estimadores de volatilidade histórica e os diversos de volatilidade implícita; discute-se sobre qual é o melhor para prever o futuro - a volatilidade histórica ou a implícita. Verifica-se, isto é, há evidências de diferença entre os estimadores em que a volatilidade implícita explica melhor a

volatilidade futura e aqueles em que a volatilidade implícita é parcialmente explicada pela volatilidade histórica.

1.3. Estrutura do Trabalho

Esse trabalho tem por objetivo discutir o viés e a eficiência de estimadores de volatilidade que utilizam valores extremos (máximo, mínimo, abertura e fechamento) para ativos do mercado brasileiro. Pretende-se verificar se, para ativos do mercado brasileiro, os estimadores que usam valores extremos apresentam performance melhor que o estimador clássico e, desta forma, propor a sua utilização em mesas de operações e em gerenciamento de riscos. Discute-se: o viés usando o estimador clássico, utilizando-se como referências a volatilidade realizada e a volatilidade implícita de 1 mês da série de opções no dinheiro (ATM – *at the money*); a eficiência de tais estimadores quanto à previsibilidade da volatilidade futura, utilizando-se como variáveis dependentes o estimador clássico e a volatilidade implícita defasados um período para frente; e a eficiência em si, isto é, quanto ao tamanho da variância do estimador. Os ativos escolhidos são o Índice Bovespa e a paridade BRL/USD spot.

No capítulo 2, faz-se uma revisão sobre a teoria usada no desenvolvimento dos estimadores e apresentam-se alguns dos diversos estimadores propostos na literatura, que serão utilizados nesse trabalho. Também são apresentados os resultados de um teste simulado para confirmar as eficiências dos estimadores propostos por Parkinson (1980), Garman e Klass (GK), Rogers e Satchell (RS) e Yang Zhang (YZ). Basicamente, é gerada uma série de retornos aleatórios com distribuição normal de média 0 e desvio padrão conhecido e testa-se a eficiência desses, comparando-os com o estimador clássico. O teste de eficiência será o mesmo feito por Garman e Klass (1980), que é a razão entre a variância do estimador clássico e a do novo estimador.

No capítulo 3, são analisados os dados usados no trabalho para o Índice Bovespa e a paridade BRL/USD spot. Como motivação, para explicar o período de análise, apresenta-se uma breve discussão sobre o mercado financeiro brasileiro e a razão da escolha do Índice Bovespa e da paridade BRL/USD spot para verificar o viés e a eficiência dos estimadores que usam valores extremos no mercado brasileiro. Também são apresentados os diversos resultados de análise de viés e eficiência dos estimadores. Com o objetivo de explicar as

diferenças verificadas entre a teoria e a prática, realiza-se um teste estatístico para verificar a distribuição dos retornos dos ativos analisados.

No capítulo 4, são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para a realização de trabalhos futuros.

2. TEORIA

Toda a teoria vem do trabalho de Feller (1951). Tem-se como base X_k ($k=1, \dots, n$), uma seqüência de variáveis aleatórias mutualmente independentes com média zero e variância 1 e define-se $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$, $M_n = \max(0, S_1, S_2, \dots, S_n)$, $m_n = \min(0, S_1, S_2, \dots, S_n)$ e a variável aleatória $R_n = M_n - m_n$.

Em uma analogia à variável $S(t)$, que representa os preços de um ativo ao longo do tempo, X_k representaria os retornos de $S(t)$ ao longo do tempo, S_n o retorno acumulado ao longo do período, n seria o número de observações dentro do período e M_n seria o máximo valor de $S(t)$ em log no período e m_n o valor mínimo de $S(t)$ em log no período.

Para o caso de presença de *drift*, a variável S_n é reposta por $S_k^* = S_k - k \frac{S_n}{n}$ ($k = 1, \dots, n$) e definem-se as variáveis R_n^* , M_n^* e m_n^* em analogia às variáveis acima. S_k^* representaria as variações de S_n em relação a uma linha que une a origem ao ponto (n, S_n) . Dessa forma, a tendência é eliminada. O estimador de Naoto (KUNITOMO, 1992), que será mencionado mais adiante, baseia-se nas propriedades da transformação S_k^* .

Feller (1951) discute as diversas propriedades da variável R_n e comenta que o range de R_n é certamente não menor que o range de $S(t)$ no período e que, para n muito grande, os dois ranges seriam praticamente os mesmos. Daí, conclui-se que é possível usar R_n para calcular as propriedades da variável X_k .

Os demais cálculos para a construção dos estimadores são feitos sob a forte consideração de que os preços $S(t)$ seguem o processo $dS = \mu S dt + \delta S dz$ como mencionado em (I) e que a trajetória é contínua e constantemente monitorada. Para o desenvolvimento dos estimadores, usa-se a teoria dos processos estocásticos.

Como citado nas referências bibliográficas, o primeiro trabalho proposto foi feito por Parkinson (1980). Enquanto ele usou apenas o máximo e o mínimo da trajetória, vários autores, em seguida, propuseram novos estimadores que usam mais informações e/ou flexibilizam restrições de modelo.

Garman e Klass (1980) assumiram que a variável $X(t) = \ln(S(t))$ não apresenta tendência. Também foi assumido que a trajetória é contínua e que os preços estão mudando,

mesmo quando as bolsas estão fechadas e eles não são observáveis. A dinâmica dos preços está representada no Gráfico 1, abaixo. Pelo gráfico, o período do dia é dividido em duas partes, f e $(1-f)$, e o mercado está inicialmente fechado, começando do preço de fechamento de ontem C_0 . A trajetória dos preços é, então, não observável, até o mercado abrir em f com o preço O_1 . No intervalo $(1-f)$ assume-se que o preço é continuamente monitorado com valor máximo de H_1 , valor mínimo de L_1 e valor de fechamento C_1 . A presença de f , empiricamente, implica em um salto, ou seja, descontinuidade nas observações, que seria o *gap* de C_0 a O_1 .

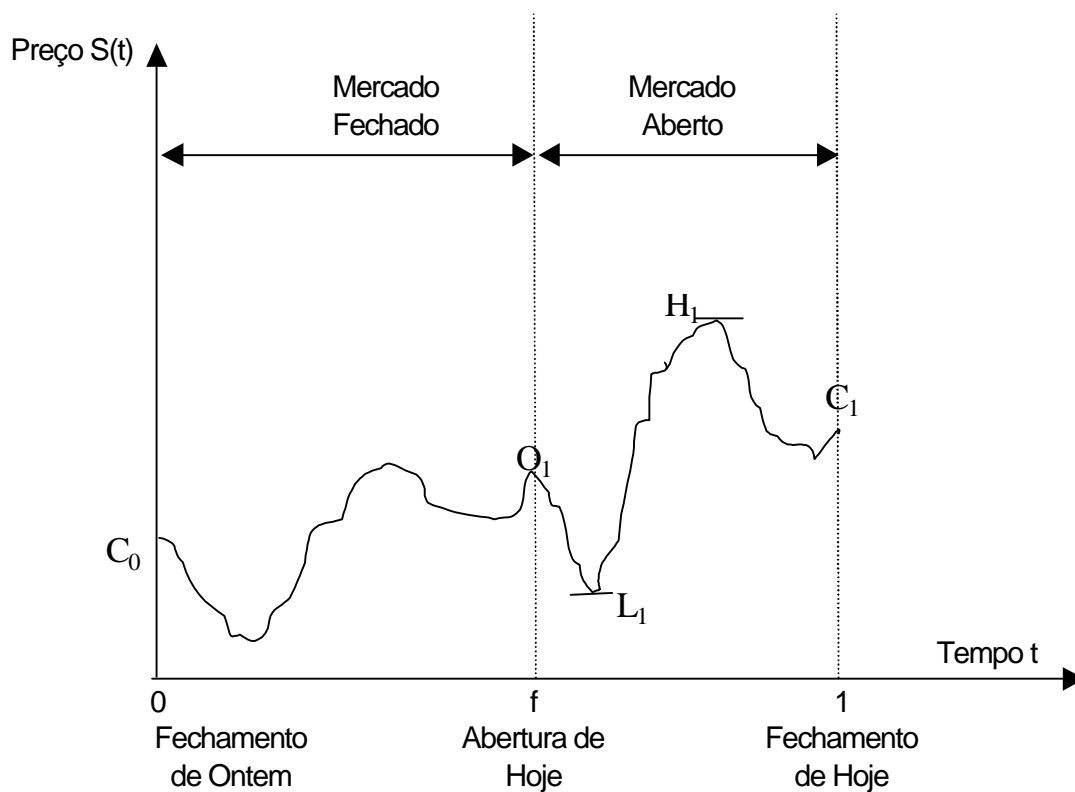


Gráfico 1 - Preço do ativo no tempo
Fonte: Elaboração própria.

Em que:

H_1 = valor máximo atingido hoje por $X(t)$;

L_1 = valor mínimo atingido hoje por $X(t)$;

O_1 = valor de abertura de hoje de $X(t)$;

C_1 = valor de fechamento de hoje de $X(t)$;

C_0 = valor de fechamento de ontem de $X(t)$;

f = fração dia (intervalo $[0,1]$) em que o mercado está fechado;

$u = H_1 - O_1$, valor máximo normalizado pela abertura;

$d = L_1 - O_1$, valor mínimo normalizado pela abertura;

$c = C_1 - O_1$, valor de fechamento normalizado pela abertura.

A utilização de variáveis normalizadas é feita, pois, para muitos estimadores, apenas o valor do incremento em relação à O_1 é relevante.

Para analisar a eficiência dos estimadores, Garman e Klass (1980) usaram uma medida de eficiência que seria a razão entre a variância do estimador clássico (δ_0^2) e a variância do estimador proposto (δ_y^2):

$$Eff(y) = \frac{\text{var}(\delta_0^2)}{\text{var}(\delta_y^2)}$$

Os estimadores analisados por Garman e Klass (1980) foram:

1) Estimador Tradicional:

$$\delta_0^2 = \frac{1}{N-1} \sum (C_i - C)^2, \text{ onde } C = \frac{1}{N} \sum C_i$$

Este é o estimador clássico, que usa apenas os valores de fechamento. Esse estimador independe do valor de f .

2) Garman e Klass 1 (GK1):

$$\delta_1^2 = \frac{(O_1 - C_0)^2}{2f} + \frac{(C_1 - O_1)^2}{2(1-f)}$$

Este estimador inclui o valor de abertura e depende do valor de f . O simples fato de se incluir o valor de abertura já cria um estimador duas vezes mais eficiente que o estimador clássico.

3) Parkinson (PK):

$$\delta_2^2 = \frac{(u-d)^2}{4\ln(2)}$$

Este estimador captura somente os valores extremos normalizados pela abertura (u e d). É o mesmo estimador proposto por Parkinson (1980) e possui uma eficiência cerca de cinco vezes superior ao estimador clássico, como já mencionado.

4) Parkinson Modificado (PKM):

$$\delta_3^2 = \frac{a(O_1 - C_0)^2}{f} + \frac{(1-a)(u-d)^2}{4(1-f)\ln(2)}$$

Este estimador captura os extremos normalizados e os preços de abertura e fechamento. O valor para “a” que implica em mínima variância é $a = 0.17$, independente do valor de f . Para esse estimador, na teoria, a eficiência é de 6.2. O estimador, em si, depende de f , mas sua variância não.

5) Garman e Klass 4 (GK4):

$$\delta_4^2 = 0.511(u-d)^2 - 0.019[c(u+d) - 2ud] - 0.383c^2$$

6) Garman e Klass 5 (GK5):

$$\delta_5^2 = 0.5(u-d)^2 - 2[\ln(2)-1]c^2$$

Estes estimadores capturam os extremos e o fechamento normalizados (u , d e c). O sexto estimador é uma forma simplificada do quinto. Para esses estimadores, a eficiência é de 7.4.

7) Garman e Klass 6 (GK6):

$$\delta_6^2 = \frac{a(O_1 - C_0)^2}{f} + \frac{(1-a)\delta_4^2}{(1-f)}$$

Este estimador captura todas as informações (abertura, fechamento e extremos), e o valor para “a” que implica em mínima variância seria $a = 0.12$, também independe do valor de f . Para esse estimador, a eficiência é de 8.4. Também aqui, o estimador, em si, depende de f , mas sua variância não.

Kunitomo (1992) obteve um estimador mais eficiente ainda, cerca de dez vezes, considerando a mesma medida de eficiência usada no trabalho de Garman e Klass (1980). Kunitomo (1992) permitiu a presença de *drift* e utilizou valores extremos ajustados na estimação. A figura 2 mostra os extremos ajustados C e E pela tendência, usados na estimação:

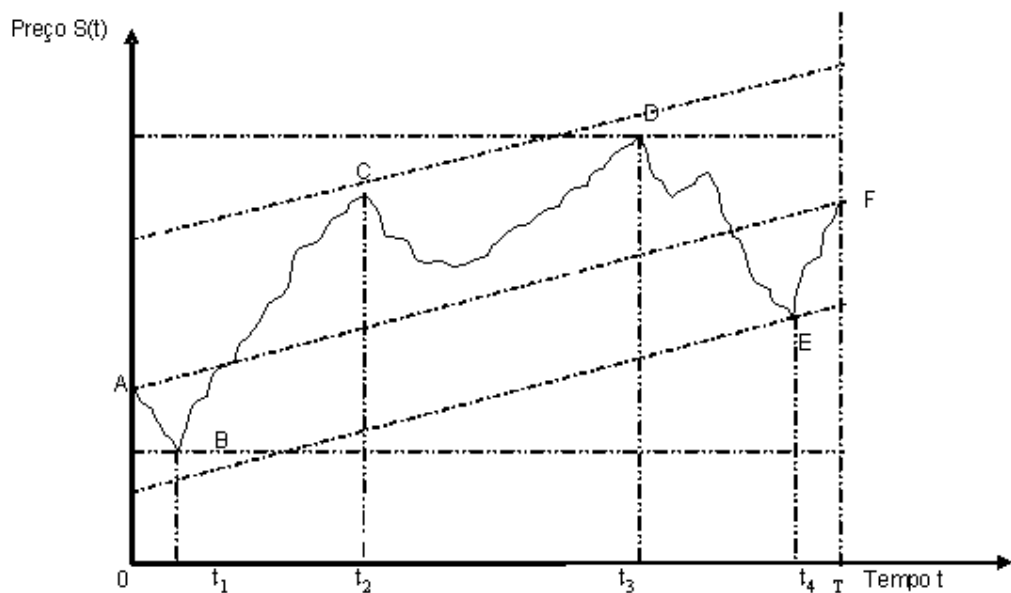


Gráfico 2 - Preço ativo no tempo

Fonte: Elaboração própria.

Em que:

B e D são os extremos sem a presença do *drift*;

C e E são os extremos ajustados com presença de *drift*;

A e F são os preços de abertura e fechamento, respectivamente.

O estimador proposto é $\delta^2 = \frac{\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^2}{NT} \sum (R_i)^2$, em que T é o tamanho do intervalo, N é

o número de intervalos, $R_i = \max Y(t) - \min Y(t)$ e $Y(t) = X(t) - \left(\frac{t}{T}\right)X(T)$. Como se pode observar, $Y(t)$ seria $X(t) = \ln S(t)$ ajustado pela tendência.

Uma vez que os estimadores propostos por Parkinson (1980) e Garman e Klass (1980) estão baseados no fato de não existir *drift* no processo de $X(t) = d \ln S$ e que, empiricamente, isso não ocorre com frequência, novos trabalhos foram feitos, propondo estimadores que permitem tendências (*drift*).

Rogers e Satchell (1991) propuseram o seguinte estimador:

8) Rogers Satchell (RS):

$$\delta_7^2 = [u(u - c) + d(d - c)]$$

Este estimador, usando a mesma medida de eficiência de Garman e Klass (1980), seria cerca de 6 vezes mais eficiente que o estimador clássico. Neste trabalho, Rogers e Satchell (1991) analisam duas características nos estimadores de Garman e Klass (1980). A primeira delas é o embasamento, feito considerando a ausência de *drift*. Se o *drift* for pequeno, comparado a variância, então os estimadores GK não sofrem grandes prejuízos na estimação. A segunda é o fato de não se observar o real valor de máximo e mínimo, devido à discretização. Mesmo diminuindo o tamanho do intervalo de observação, o viés é corrigido apenas gradualmente, conforme comprovação empírica, contradizendo Garman e Klass (1980), que afirmaram que a redução do intervalo eliminaria o efeito negativo de várias considerações feitas no modelo. Então Rogers e Satchell (1991) propuseram uma correção aos valores máximos e mínimos observados e realizaram uma série de testes simulados, comprovando que os estimadores com correção conseguiram diminuir bastante o viés de baixa.

Outro estimador independente da presença de tendência foi proposto por Yang e Zhang (2000):

9) Yang Zhang (YZ):

$$\delta_8^2 = V_0 + kV_c + (1-k)\delta_7^2 \text{ onde}$$

$$V_0 = \frac{1}{N-1} \sum (o_i - o)^2 \text{ onde } o = \frac{1}{N} \sum o_i \text{ e}$$

$$V_c = \frac{1}{N-1} \sum (c_i - c)^2 \text{ onde } c = \frac{1}{N} \sum c_i$$

$$K = \frac{(1-\alpha)}{\left(\alpha + \frac{(n+1)}{(n-1)} \right)}$$

• = 1.34 (sugerido no trabalho após estudos)

Como é possível verificar, este estimador nada mais é que a soma da variância do período em que o mercado está fechado e de uma média ponderada (k é o ponderador) do estimador clássico (período em que o mercado está aberto) e o estimador proposto por Rogers e Satchell (1991). Esse estimador, também usando a mesma medida de eficiência de Garman e Klass (1980), seria, dependendo do valor de n e \bullet , cerca de 14 vezes mais eficiente que o estimador clássico. Neste trabalho Yang e Zhang (2000) analisam os efeitos da presença de *drift* e da relevância do salto do preço na abertura do mercado. Eles afirmam que a presença de *drift* e salto de abertura causam viés de baixa nos estimadores de Garman e Klass (1980). Como esses ocorrem com frequência na realidade, é importante ter um estimador independente de μ e f . Também como em Rogers e Satchell (1991), eles afirmam que se o *drift* é muito menor que a variância, os estimadores GK não têm grandes prejuízos quanto ao viés. Empiricamente, os estimadores GK e YZ teriam praticamente o mesmo desempenho, pois normalmente os *drifts* são pequenos. Para corrigir o efeito de f na estimação, Yang e Zhang propõem a fixação dos valores de “a” dos estimadores GK iguais a f . Yang e Zhang (2000) também propõem um estimador para corrigir o efeito de discretização.

Para se verificar os valores teóricos de eficiência dos estimadores usando valores extremos na literatura, foi realizado um teste dirigido no qual gera-se uma série de retornos que seguem um movimento geométrico browniano com desvio padrão 20% (variância 4%) e media 0. Foram gerados 1.440 retornos intra-diários em 500 dias (o processo de geração usado foi o Box-Muller. Gerador está apresentado no apêndice I). Os 1.440 retornos intra-diários corresponderiam a observações a cada minuto, durante 24hs. O modelo assume que os preços se movem o tempo inteiro, sendo que, em um período do dia, eles não são obser-

váveis. Nesse teste foi usado $f = 0.5$, ou seja, o mercado está fechado na metade do dia. Aqui não se faz distinção entre a volatilidade do período em que o mercado está fechado e o período em que ele está aberto. Intuitivamente, seria correto considerar uma volatilidade menor para o período em que o mercado está fechado, pois a ocorrência e a divulgação de novas informações para o mercado durante esse período são bem menores do que no período em que o mercado está aberto.

A Tabela 1 apresenta o viés dos estimadores e mostra uma comparação da eficiência dos resultados obtidos com os resultados teóricos. A medida de eficiência usada é a mesma de Garman e Klass (1980) mencionada anteriormente.

Tabela 1 - Teste teórico de viés e eficiência para estimadores de volatilidade usando valores extremos

Valor Teórico 4%

| <i>Estimador</i> | <i>Desvio-</i> | | <i>Eficiência</i> | |
|------------------|----------------|---------------|-------------------|----------------|
| | <i>Valor</i> | <i>Padrão</i> | <i>Eficiência</i> | <i>teórica</i> |
| Tradicional | 4.01% | 0.38% | | |
| GK1 | 3.84% | 0.27% | 2.02 | 2.00 |
| PK | 3.84% | 0.16% | 5.55 | 5.20 |
| PKM | 3.81% | 0.15% | 6.97 | 6.20 |
| GK4 | 3.77% | 0.12% | 9.98 | 7.40 |
| GK5 | 3.77% | 0.12% | 9.97 | 7.40 |
| GK6 | 3.84% | 0.12% | 9.93 | 8.40 |
| RS | 3.77% | 0.14% | 7.99 | 6.00 |
| YZ | 4.00% | 0.22% | 3.04 | 3.57 |

Fonte: elaboração própria

Pode-se verificar na Tabela 1 que para os estimadores GK4, GK5 e RS rejeita-se a hipótese nula $Valor = 4.0\%$ com 95% de nível de confiança e para os demais não se rejeita. Dentro desses, todos, com exceção de YZ, que não apresentou viés, apresentaram ligeiro viés de baixa. Isso, conforme Garman e Klass (1980) comentaram, se deve à discretização das observações no tempo. O viés de baixa deve-se ao fato de não observarmos o real valor de máximo e mínimo. Estaria sendo feita a verificação de um máximo inferior ao máximo real e um mínimo superior ao mínimo real. Como mencionado na teoria, se aumentássemos o número de observações intra-diárias ($n \rightarrow \infty$), o viés tenderia a zero e a eficiência tenderia ao valor teórico.

3. ESTUDO DE CASO - ÍNDICE BOVESPA E PARIDADE BRL/USD SPOT

3.1. Mercado local brasileiro

Faz-se, nesta parte do trabalho, um breve resumo dos acontecimentos recentes no mercado brasileiro, como motivação para justificar a escolha dos períodos analisados.

Para verificar a performance dos estimadores usando os valores extremos aplicados ao mercado brasileiro, foram feitos alguns testes para a paridade BRL/USD spot e o Índice Bovespa. A razão para a escolha do Índice Bovespa e da paridade BRL/USD spot é baseada nos resultados obtidos no teste simulado, pois, para diminuir o efeito de discretização e/ou dados não observáveis no tempo, temos que ter ativos com grande volume de negócios durante o dia, ou seja, ativos bastante líquidos. Outra razão para a escolha desses ativos é a sua importância no mercado financeiro brasileiro. As principais opções no mercado de derivativos na BM&F são do Índice Bovespa e de dólar. Desta forma, é muito importante a estimativa da volatilidade para o apreamento desses derivativos.

O Gráfico 3, abaixo, mostra a evolução do Índice Bovespa e o Gráfico 4 mostra a evolução da paridade BRL/USD spot no período que começa em 2000 e segue até set./2007. Verificam-se comportamentos bem diferentes das variáveis ao longo do tempo.

Para o Índice Bovespa, a partir de 2003 verifica-se uma tendência de alta nos preços com alguns períodos de crise, como maio de 2006 e agosto de 2007. Em maio de 2006 tivemos uma crise devida ao temor de que o FED pudesse aumentar consideravelmente a taxa básica de juros da moeda norte-americana para conter uma possível pressão inflacionária. Nesse momento, houve uma migração dos investimentos estrangeiros de ativos de alto risco, como a bolsa brasileira, para ativos sem risco, como os títulos do governo norte-americano. Em agosto de 2007, tivemos a crise no mercado imobiliário norte-americano com os chamados *subprimes*. Muitos investidores tiveram grandes prejuízos, o que fez com que eles tivessem que vender posições em todo o mundo para cobrir chamadas de margem de posições alavancadas. Vários *hedge funds* não permitiram saques de investidores e anunciaram grandes prejuízos após rever a metodologia de marcação a mercado dos chamados CDOs (*Collateralized Debt Obligation*). Muitos bancos americanos e europeus também tiveram fortes prejuízos após reverem suas posições. Devido à forte presença de *hedge funds* nos mercados mundiais, o alastramento da crise foi inevitável. Dada a alta liquidez de ativos no mer-

cado brasileiro, os investidores começaram as vendas por aqui. Houve, nessa época, uma fuga considerável de capital da nossa bolsa de valores e forte depreciação do Real frente ao Dólar.

Para a paridade BRL/USD também se verifica uma tendência de apreciação do Real a partir de 2004. É possível ver claramente a crise de desconfiança dos investidores em relação à eleição do presidente Lula, em 2002. Nesse momento, a paridade atingiu o seu máximo histórico de 4 BRL para 1 USD desde 1994, com a implementação do Real. Também se verifica aumento na volatilidade em maio de 2006 e em agosto de 2007 devido às crises já mencionadas.

Fica claro, pelos gráficos abaixo, que a partir de meados de 2003 o Brasil entrou em um ciclo de valorização de ativos locais e apreciação da moeda BRL. Isso não ocorreu só no Brasil, mas no mundo inteiro. Estávamos em um período de alta liquidez e otimismo no mercado internacional e de redução de aversão ao risco pelos investidores.

Na primeira parte do trabalho, na qual se usa o estimador clássico como referência, é analisado se existe diferença entre os resultados ao usarem-se dados desde 2000 até 2007 ou ao usarem-se dados desde 2004 até 2007. Com isso, se pode verificar se a quebra de estrutura no mercado, ou seja, o início desse ciclo de bonança no mercado mundial, afeta o resultado quanto à performance dos estimadores que usam valores extremos.

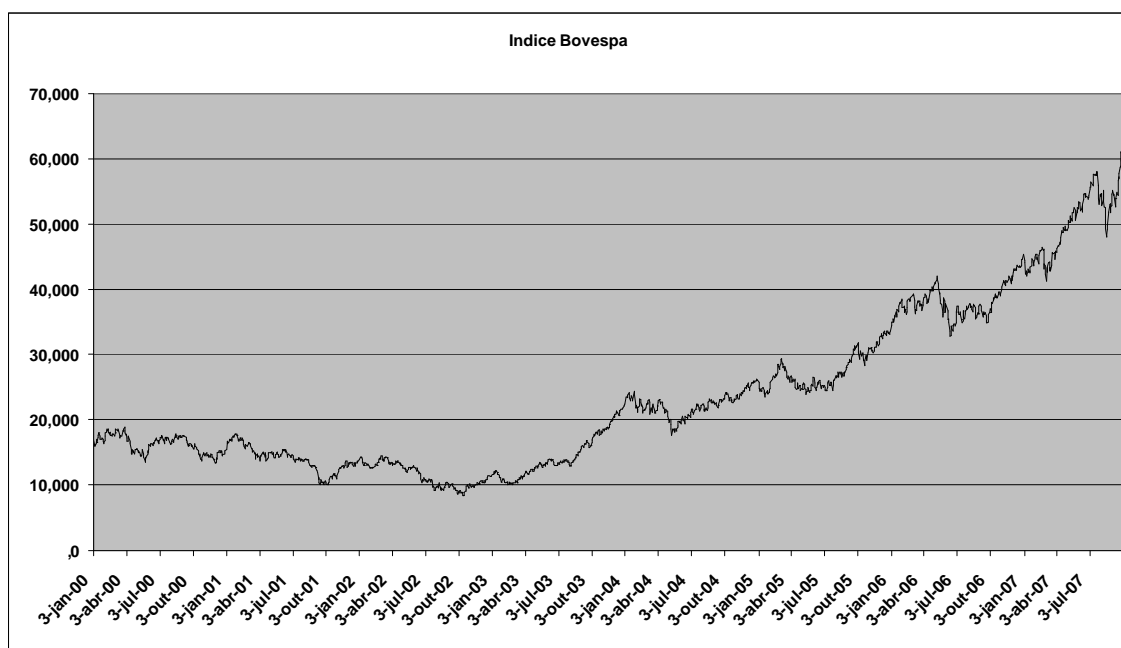


Gráfico 3 - Evolução do Índice Bovespa de janeiro de 2000 até setembro de 2007.
Fonte: Elaboração própria.

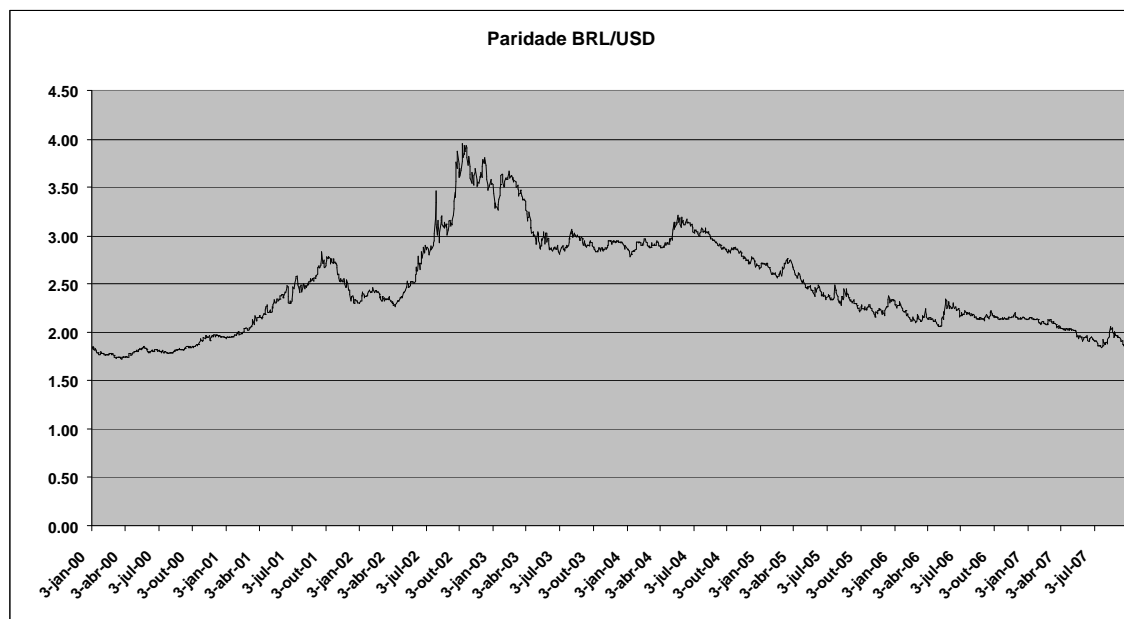


Gráfico 4 - Evolução da paridade BRL/USD spot de janeiro de 2000 até setembro de 2007.

Fonte: Elaboração própria.

3.2. Descrição dos Dados

Os estimadores escolhidos para a análise foram o tradicional, o PK, o PKM, o GK6, o RS e o YZ. A não-escolha dos outros estimadores mencionados neste trabalho para a realização dos testes deve-se ao fato de muitos serem redundantes ou de difícil construção. Por exemplo, da família GK, foram escolhidos PK, PKM e GK6, pois esses basicamente cobrem todo o espectro, e não foi escolhido o estimador de Naoto (KUNITOMO, 1992) devido à dificuldade na sua construção, dada a necessidade de informações intra-diárias por um período mais longo do que o obtido para a análise usando a variância realizada.

Para os primeiros testes, em que se utiliza o estimador clássico como referência, os dados foram obtidos da *Bloomberg* e o período de estudo começa em Janeiro de 2000 e termina em Setembro de 2007. Os dados são diários e foram capturados os valores de máximo, mínimo, abertura e fechamento para calcular os estimadores de volatilidade. Antes de usá-los foi verificada a consistência dos dados, isto é, se o máximo é de fato maior ou igual que o mínimo, abertura e fechamento e se o mínimo é de fato menor ou igual que o máximo, abertura e fechamento.

Foi calculada a volatilidade usando dados de 1 semana e 1 mês para o estimador tradicional, Parkinson, Parkinson Modificado, Garman Klass 6, Rogers Satchell e Yang Zhang. Tanto para 1 semana como para 1 mês, não se faz sobreposições de dados. Os estimadores semanais e mensais são o somatório de dados diários. Desta forma, tem-se 384 períodos de 1 semana e 91 períodos de 1 mês. A escolha de dois períodos foi feita para se verificar se os resultados são dependentes da janela de observação. Para análise dos resultados a partir de 2004, foram utilizados apenas os dados de 1 semana, pois há poucos pontos para dados de 1 mês. Nesse caso, tem-se 185 períodos de 1 semana.

Para a análise empírica usando a volatilidade realizada como referência (ver definição no item 3.3.2), foram utilizadas observações de 5 em 5 minutos para o Índice Bovespa Futuro e para a paridade BRL/USD, no período que começa em 06 de março de 2007 até 28 de setembro de 2007. O período escolhido foi o máximo com frequência de 5 em 5 minutos, conseguido junto à *Bloomberg*. A escolha da frequência de 5 em 5 minutos foi baseada no trabalho de Andersen e Bollerslev (2003) que afirma que a frequência para se analisar a volatilidade realizada deve ser de, no mínimo, 30 em 30 minutos e, no máximo, de 5 em 5 minutos. Se for escolhida uma frequência maior, podem-se introduzir erros, devido a fenômenos de microestrutura, como falta de liquidez. Desta forma, há 143 observações diárias e 29 observações semanais. Também para os testes foram utilizados os estimadores tradicional, Parkinson, Parkinson Modificado, Garman Klass 6, Rogers Satchell e Yang Zhang.

Para os testes usando a volatilidade implícita ATM de 1 mês como referência, foram usados dados diários entre setembro de 2004 inclusive e setembro de 2007, inclusive. Para a paridade BRL/USD foram usadas informações obtidas da base de dados do Banco Credit Suisse e para o Índice Bovespa, da base de dados do Banco Santander.

A escolha do estimador clássico de volatilidade, da volatilidade realizada e da volatilidade implícita como referências se deve a:

- 1) Estimador clássico: é o estimador mais usado na prática, pois é não viesado e de fácil mensuração.
- 2) Volatilidade realizada: é uma medida livre de erros e é observável, isto é, não é algo latente. Também se pode verificar o viés do estimador clássico mencionado por Becker (BECKER, 1983).
- 3) Volatilidade implícita: é a que melhor representa a expectativa do mercado quanto à volatilidade futura, sendo usada para apreamento das opções no mercado.

Os resultados das análises são expressos em termos de volatilidade anualizada, ou seja, $Vol_{ano} = (252^{0.5}) * Vol_{dia}$, em que 252 é o número de dias úteis no ano, e não em

termos de variância, apesar de todos os estimadores estarem escritos na forma de variância no capítulo 2 deste trabalho.

3.3. *Análise dos Resultados*

3.3.1. *Estimador Clássico como Referência*

Supondo que o estimador tradicional seja um estimador não viesado, foram feitos testes de viés para os outros estimadores usando-o como referência, testes de eficiência dos estimadores quanto à previsão da volatilidade do próximo período e regressões, considerando o estimador tradicional defasado de um período para frente como variável dependente e os outros estimadores, individualmente, como variáveis independentes. Nas regressões foram incluídos componentes MA (média móvel) e AR (auto-regressivo) para eliminar correlação entre os resíduos segundo o teste estatístico Q de Ljung-Box. Para analisar parcimônia foram usados os critérios de Akaike (AIC) e Schwartz (SBC). A heterocedasticidade foi corrigida usando o parâmetro de White e a estimação foi feita usando o método dos mínimos quadrados. O *software* usado para as regressões foi o EViews.

As tabelas de 2 a 7 mostram os testes de viés para os estimadores, usando o estimador tradicional como referência.

Tabela 2 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana – Período 2000 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Tradicional - Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Tradicional | 26.77% | 10.91% | | |
| PK | 23.81% | 7.67% | 2.96% | 0.68% |
| PKM | 23.87% | 7.69% | 2.90% | 0.68% |
| GK6 | 22.38% | 7.32% | 4.39% | 0.67% |
| RS | 21.96% | 7.91% | 4.81% | 0.69% |
| YZ | 22.81% | 7.77% | 3.96% | 0.68% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 3 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Mês – Período 2000 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Tradicional - Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Tradicional | 27.74% | 8.00% | | |
| PK | 24.13% | 6.29% | 3.61% | 1.07% |
| PKM | 24.18% | 6.31% | 3.56% | 1.07% |
| GK6 | 22.70% | 5.90% | 5.04% | 1.04% |
| RS | 22.40% | 6.13% | 5.34% | 1.06% |
| YZ | 23.27% | 6.27% | 4.47% | 1.07% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana – Período 2004 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Tradicional - Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Tradicional | 24.17% | 9.92% | | |
| PK | 21.73% | 6.95% | 2.44% | 1.27% |
| PKM | 21.73% | 6.96% | 2.44% | 1.11% |
| GK6 | 20.41% | 6.73% | 3.76% | 1.10% |
| RS | 20.12% | 7.41% | 4.05% | 1.14% |
| YZ | 20.84% | 7.17% | 3.32% | 1.13% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 5 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana – Período 2000 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Tradicional - Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Tradicional | 13.25% | 10.04% | | |
| PK | 12.73% | 7.60% | 0.52% | 0.64% |
| PKM | 13.53% | 7.89% | -0.27% | 0.65% |
| GK6 | 13.28% | 7.49% | -0.03% | 0.64% |
| RS | 12.35% | 7.11% | 0.90% | 0.63% |
| YZ | 13.34% | 7.62% | -0.08% | 0.64% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 6 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Mês – Período 2000 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Tradicional - Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Tradicional | 14.01% | 8.43% | | |
| PK | 13.06% | 7.02% | 0.94% | 1.15% |
| PKM | 13.86% | 7.29% | 0.15% | 1.17% |
| GK6 | 13.58% | 6.92% | 0.43% | 1.14% |
| RS | 12.65% | 6.55% | 1.35% | 1.12% |
| YZ | 13.64% | 7.02% | 0.37% | 1.15% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 7 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana – Período 2004 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Tradicional - Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Tradicional | 11.77% | 7.33% | | |
| PK | 11.85% | 5.56% | -0.09% | 0.67% |
| PKM | 12.11% | 5.61% | -0.34% | 0.68% |
| GK6 | 12.02% | 5.43% | -0.25% | 0.67% |
| RS | 11.68% | 5.39% | 0.08% | 0.67% |
| YZ | 12.04% | 5.49% | -0.27% | 0.67% |

Fonte: Elaboração própria.

Pode-se verificar que com 95% de nível de confiança para o Índice Bovespa, rejeita-se a hipótese nula de que a diferença entre o estimador tradicional e os estimadores usando valores extremos é nula, ou seja, temos viés nos estimadores. O mesmo não ocorre para a paridade BRL/USD. Pode-se também verificar que em todos os casos, a variância do estimador tradicional é superior à dos estimadores em estudo. Como nos testes teóricos, é verificado ligeiro viés de baixa para todos os estimadores. A razão para isso seria a mesma já comentada no teste simulado acima. Utilizando dados a partir de 2004, não se verifica nenhum resultado diferente para o Índice Bovespa e, para a paridade BRL/USD, o viés praticamente desaparece. Também para dados posteriores a 2004, verifica-se uma variância menor para os estimadores usando valores extremos. Para os dados a partir de 2004, não se veri-

fica nenhuma diferença significativa nos resultados para o Índice Bovespa. Para a paridade BRL/USD, verifica-se ligeiro viés de alta para alguns estimadores. Como se pode constatar, os resultados são bem melhores para a paridade BRL/USD do que para o Índice Bovespa.

Para avaliar a relativa eficiência do estimador tradicional e os estimadores em estudo quanto à previsão da volatilidade do próximo período, definem-se as seguintes medidas:

$$SE(\delta_i) = (\delta_{iT} - \delta_{OT+1})^2 : \text{erro quadrático}$$

$$AE(\delta_i) = [\delta_{iT} - \delta_{OT+1}]^2 : \text{erro absoluto}$$

Em que δ_{iT} é a volatilidade do estimador i no período T e δ_{OT+1} é a volatilidade do estimador clássico em $T+1$.

Fazendo a diferença entre o SE do estimador tradicional e o SE do estimador em questão, pode-se verificar a eficiência na previsão. A eficiência é conferida se a diferença entre os SE 's for estatisticamente significativamente diferente de zero. Para se verificar qual estimador é mais eficiente, a minimização do erro quadrático médio é equivalente a minimizar a perda esperada associada à estimação. O mesmo é feito usando AE . A análise usando o erro absoluto (AE) é feita para checar se *outliers* não estão prejudicando os resultados.

As tabelas de 8 a 13 mostram os resultados da análise de eficiência.

Tabela 8 - Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana - Período 2000 a 2007

| Estimador | Média (SE Tradic. – SE Estimador) x 10⁶ | Desvio-Padrão (diferença dos SE's) x 10⁶ | Média (AE Tradic. – AE Estimador) x 10⁶ | Desvio-Padrão (diferença dos AE's) x 10⁶ |
|------------------|---|--|---|--|
| PK | -2,848 | 1,374 | 12,891 | 4,869 |
| PKM | -2,808 | 1,373 | 12,958 | 4,861 |
| GK6 | -4,404 | 1,497 | 7,914 | 5,071 |
| RS | -5,984 | 1,659 | 2,956 | 5,260 |
| YZ | -4,468 | 1,532 | 8,073 | 5,094 |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 9 - Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Mês - Período 2000 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média (SE Tradic. – SE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos SE's) x 10⁶</i> | <i>Média (AE Tradic. – AE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos AE's) x 10⁶</i> |
|------------------|---|--|---|--|
| PK | 413 | 1,703 | 2,265 | 8,198 |
| PKM | 450 | 1,700 | 2,791 | 8,184 |
| GK6 | -664 | 1,836 | -2,160 | 8,512 |
| RS | -1,390 | 1,925 | -5,050 | 8,711 |
| YZ | -505 | 1,815 | -1,390 | 8,478 |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 10 - Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Mês - Período 2004 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média (SE Tradic. – SE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos SE's) x 10⁶</i> | <i>Média (AE Tradic. – AE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos AE's) x 10⁶</i> |
|------------------|---|--|---|--|
| PK | 3,290 | 1,676 | 14,612 | 6,430 |
| PKM | 3,291 | 1,676 | 14,615 | 6,430 |
| GK6 | 2,210 | 1,813 | 11,251 | 6,680 |
| RS | 1,117 | 1,954 | 8,593 | 6,959 |
| YZ | 2,261 | 1,837 | 12,433 | 6,728 |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 11- Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana – Período 2000 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média (SE Tradic. – SE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos SE's) x 10⁶</i> | <i>Média (AE Tradic. – AE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos AE's) x 10⁶</i> |
|------------------|---|--|---|--|
| PK | 3,357 | 2,266 | 14,232 | 4,739 |
| PKM | 3,273 | 2,260 | 12,920 | 4,727 |
| GK6 | 3,367 | 2,264 | 13,625 | 4,720 |
| RS | 3,308 | 2,245 | 14,599 | 4,762 |
| YZ | 3,302 | 2,253 | 13,348 | 4,730 |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 12 - Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Mês - Período 2000 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média (SE Tradic. – SE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos SE's) x 10⁶</i> | <i>Média (AE Tradic. – AE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio Padrão (diferença dos AEs) x 10⁶</i> |
|------------------|---|--|---|---|
| PK | 1,370 | 2,857 | 6,224 | 9,144 |
| PKM | 1,377 | 2,822 | 4,423 | 9,028 |
| GK6 | 1,674 | 2,741 | 5,749 | 8,931 |
| RS | 1,629 | 2,754 | 6,512 | 9,006 |
| YZ | 1,582 | 2,754 | 5,319 | 8,960 |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 13 - Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Mês - Período 2004 a 2007

| <i>Estimador</i> | <i>Média (SE Tradic. – SE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos SE's) x 10⁶</i> | <i>Média (AE Tradic. – AE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos AE's) x 10⁶</i> |
|------------------|---|--|---|--|
| PK | 2,321 | 1,070 | 12,903 | 5,126 |
| PKM | 2,255 | 1,071 | 12,257 | 5,130 |
| GK6 | 2,247 | 1,078 | 11,803 | 5,112 |
| RS | 2,119 | 1,081 | 11,383 | 5,158 |
| YZ | 2,108 | 1,080 | 11,185 | 5,154 |

Fonte: Elaboração própria.

Pelas tabelas de 8 a 13, para o Índice Bovespa não se verifica nenhuma eficiência na previsão da volatilidade futura, mas para a paridade BRL/USD, verifica-se eficiência. No caso de dados de 1 semana não se rejeita a eficiência com 85% de nível de confiança. Para o período que começa em 2004, tanto para o Índice Bovespa como para a paridade BRL/USD spot, os estimadores propostos são estatisticamente mais eficientes que o tradicional com 95% de confiança.

As tabelas de 14 a 19 mostram os resultados das regressões feitas considerando o estimador tradicional defasado 1 período para frente como variável dependente e os estimadores sem defasagem como variáveis independentes. Regressões significam modelos mais sofisticados e custosos para se estimar a volatilidade futura. Os valores entre parêntesis nas tabelas representam o desvio padrão dos coeficientes das regressões.

Tabela 14 - Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana - Período 2000 a 2007

| <i>Equação</i> | <i>MA(1)</i> | <i>AR(1)</i> | <i>SE * 100</i> | <i>R^2 Ajustado</i> |
|--|-----------------|--------------|-----------------|---------------------|
| Tradicional (t+1) = 0.27 + 0.44 * Tradicional (t) (0.01) (0.06) | | | 9.64 | 19.19% |
| Tradicional (t+1) = 0.10 + 0.70 * PK (0.02) (0.08) | | | 9.28 | 25.11% |
| Tradicional (t+1) = 0.10 + 0.70 * PKM (0.02) (0.08) | | | 9.28 | 25.21% |
| Tradicional (t+1) = 0.15 + 0.52 * GK (0.02) (0.08) | 0.19 (0.07) | | 9.46 | 22.23% |
| Tradicional (t+1) = 0.19 + 0.36 * RS (0.02) (0.07) | 00.29 (0.07) | | 9.55 | 20.81% |
| Tradicional (t+1) = 0.16 + 0.46 * YZ (0.02) (0.08) | 0.21 (0.07) | | 9.50 | 21.69% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 15 - Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Mês - Período 2000 a 2007

| <i>Equação</i> | <i>MA(1)</i> | <i>AR(1)</i> | <i>SE * 100</i> | <i>R^2 Ajustado</i> |
|--|-----------------|--------------|-----------------|---------------------|
| Tradicional (t+1) = 0.27 + 0.77 * Tradicional (t) (0.02) (0.13) | -0.50 (0.17) | | 7.32 | 15.95% |
| Tradicional (t+1) = 0.15 + 0.51 * PK (0.03) (0.11) | | | 7.30 | 15.50% |
| Tradicional (t+1) = 0.15 + 0.51 * PKM (0.03) (0.11) | | | 7.29 | 15.61% |
| Tradicional (t+1) = 0.16 + 0.53 * GK (0.03) (0.12) | | | 7.35 | 14.38% |
| Tradicional (t+1) = 0.17 + 0.47 * RS (0.03) (0.11) | | | 7.45 | 12.04% |
| Tradicional (t+1) = 0.17 + 0.48 * YZ (0.03) (0.11) | | | 7.40 | 13.23% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 18 - Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Mês - Período 2000 a 2007

| <i>Equação</i> | <i>AR(2)</i> | <i>AR(7)</i> | <i>SE * 100</i> | <i>R^2 Ajustado</i> |
|--|----------------|--------------|-----------------|---------------------|
| Tradicional (t+1) = 0.15 + 0.29 * Tradicional (t) (0.02) (0.10) | 0.39 (0.14) | | 6.97 | 32.44% |
| Tradicional (t+1) = 0.09 + 0.40 * PK (0.03) (0.16) | 0.37 (0.16) | | 6.99 | 31.99% |
| Tradicional (t+1) = 0.09 + 0.40 * PKM (0.02) (0.15) | 0.36 (0.16) | | 7.00 | 31.73% |
| Tradicional (t+1) = 0.08 + 0.43 * GK (0.02) (0.17) | 0.34 (0.16) | | 6.99 | 32.03% |
| Tradicional (t+1) = 0.09 + 0.45 * RS (0.02) (0.19) | 0.36 (0.16) | | 6.97 | 32.32% |
| Tradicional (t+1) = 0.09 + 0.42 * YZ (0.02) (0.16) | 0.35 (0.16) | | 7.00 | 31.86% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 19 - Equações de previsão de volatilidade futura – estimador clássico como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana - Período 2004 a 2007

| <i>Equação</i> | <i>AR(2)</i> | <i>AR(7)</i> | <i>SE * 100</i> | <i>R^2 Ajustado</i> |
|--|----------------|--------------|-----------------|---------------------|
| Tradicional (t+1) = 0.12 + 0.31 * Tradicional (t) (0.01) (0.09) | 0.24 (0.09) | | 6.54 | 20.74% |
| Tradicional (t+1) = 0.03 + 0.71 * PK (0.01) (0.10) | | | 6.12 | 29.12% |
| Tradicional (t+1) = 0.03 + 0.70 * PKM (0.01) (0.10) | | | 6.21 | 28.62% |
| Tradicional (t+1) = 0.03 + 0.71 * GK (0.01) (0.10) | | | 6.24 | 27.65% |
| Tradicional (t+1) = 0.04 + 0.69 * RS (0.01) (0.10) | | | 6.33 | 25.71% |
| Tradicional (t+1) = 0.03 + 0.69 * YZ (0.01) (0.10) | | | 6.31 | 26.12% |

Fonte: Elaboração própria.

Pelos resultados das Tabelas acima, mais uma vez não se pode inferir que os estimadores usando valores extremos prevêm melhor a volatilidade futura que o estimador

tradicional, a não ser para o caso da paridade BRL/USD com observação semanal para o período de 2000 a 2007. Nesse caso, o R^2 ajustado verificado para os estimadores usando valores extremos é maior que o verificado na regressão usando o estimador tradicional. No caso, usando dados a partir de 2004, pode-se afirmar que os estimadores usando valores extremos prevêm melhor a volatilidade futura tanto para o Índice Bovespa quanto para a paridade BRL/USD. Também se verifica que o coeficiente dos estimadores é maior do que os termos *ARMA*, mostrando que a maior parte da explicação da volatilidade futura vem destes estimadores e não dos termos *ARMA*.

3.3.2 Volatilidade Realizada como referência

Define-se *volatilidade realizada* como a soma dos quadrados dos retornos ocorridos em amostras contínuas de tamanhos iguais, durante um período t . Ela converge em probabilidade para a variância do processo à medida que se diminui o tamanho da amostra.

A fim de se examinar empiricamente o viés e a eficiência dos estimadores, tem-se a volatilidade realizada em uma data t definida como:

$$\delta_t = \sqrt{\sum (r_{j,t})^2}$$

Em que $r_{j,t}$ significa o retorno do ativo no intervalo intra-diário j do dia t . Estudos mostram que tal estimador usando alta frequência, com fracas considerações, pode ser considerado livre de medidas de erro. A utilização da volatilidade realizada como estimador de volatilidade mostra-se bastante custosa, pelo fato de se precisar de dados intra-diários por longos períodos.

As tabelas de 20 a 23 apresentam os resultados dos testes de viés usando a volatilidade realizada como referência.

Tabela 20 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade realizada como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Dia

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Realizado - Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Realizado | 24.40% | 11.95% | | |
| Tradicional | 21.38% | 17.16% | 3.02% | 1.75% |
| PK | 25.76% | 13.89% | -1.35% | 1.53% |
| PKM | 29.81% | 17.60% | -5.41% | 1.78% |
| GK6 | 29.85% | 17.62% | -5.45% | 1.78% |
| RS | 25.34% | 15.76% | -0.94% | 1.65% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 21 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade realizada como referência – Índice Bovespa – Dados de 1 Semana

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Realizado - Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Realizado | 25.24% | 9.93% | | |
| Tradicional | 25.89% | 10.97% | -0.66% | 2.75% |
| PK | 26.98% | 11.12% | -1.74% | 2.77% |
| PKM | 31.38% | 14.40% | -6.14% | 3.25% |
| GK6 | 31.22% | 14.88% | -5.99% | 3.32% |
| RS | 26.80% | 13.03% | -1.56% | 3.04% |
| YZ | 31.35% | 14.90% | -6.12% | 3.32% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 22 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade realizada como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Dia

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Realizado - Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Realizado | 14.46% | 8.58% | | |
| Tradicional | 11.06% | 10.25% | 3.40% | 1.10% |
| PK | 12.19% | 7.83% | 2.27% | 0.95% |
| PKM | 12.54% | 7.94% | 1.93% | 0.96% |
| GK6 | 12.50% | 7.70% | 1.97% | 0.95% |
| RS | 12.00% | 7.80% | 2.46% | 0.95% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 23 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade realizada como referência – Paridade BRL/USD – Dados de 1 Semana

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio- Padrão</i> | <i>Média (Realizado – Estimador)</i> | <i>Desvio- Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|---------------------------|--|---|
| Realizado | 15.13% | 7.27% | | |
| Tradicional | 12.97% | 8.73% | 2.16% | 2.11% |
| PK | 12.86% | 6.65% | 2.27% | 1.83% |
| PKM | 13.19% | 6.77% | 1.94% | 1.85% |
| GK6 | 13.13% | 6.55% | 2.00% | 1.82% |
| RS | 12.78% | 6.45% | 2.35% | 1.81% |
| YZ | 13.20% | 6.68% | 1.93% | 1.83% |

Fonte: Elaboração própria.

Pelas tabelas de 20 a 23 verifica-se que para o Índice Bovespa, os resultados são diferentes para 1 dia e 1 semana. Para verificação diária, os estimadores PK e RS possuem eficiência superior ao estimador tradicional, e não rejeitamos a hipótese nula de que volatilidade realizada é igual aos estimadores. Para verificação semanal, nenhum estimador apresenta-se mais eficiente que o estimador tradicional. Para a paridade BRL/USD, tanto para verificação semanal quanto para verificação diária, os estimadores possuem eficiência superior ao estimador tradicional. Quanto ao viés, todos apresentam viés de baixa; rejeitamos a hipótese nula de igualdade para verificação diária e não rejeitamos para nenhum estimador na verificação semanal, com 95% de confiança. Os dados acima corroboram o fato de que a verificação empírica da volatilidade realizada é maior que a da volatilidade estimada da maneira tradicional, mostrando que a volatilidade intra-diária é maior que a volatilidade diária. Isso explicaria o porquê da volatilidade implícita ser, na média, maior que a volatilidade obtida pelo estimador clássico.

3.3.3 Volatilidade Implícita como referência

Volatilidade implícita é definida como aquela que, usada no modelo de apreçamento de opções, atinge o valor de mercado da opção. Ela espelha a expectativa do mercado quanto

à volatilidade futura. Alguns problemas para se obter a volatilidade implícita do mercado são levantados:

- 1) Dados não simultâneos para opções e ativo-base;
- 2) Inconsistência se o modelo de apreçamento usado para se obter a volatilidade implícita não for o mesmo que o mercado utiliza.
- 3) Ineficiências de mercado que causam oportunidades de arbitragem.

Usando a volatilidade implícita ATM (*at the money*) de 1 mês como referência, foram feitos testes de viés para os estimadores, testes de eficiência desses quanto à previsão da volatilidade do próximo período e regressões considerando a volatilidade implícita defasada de um período para frente como variável dependente e os outros estimadores, individualmente, como variáveis independentes. Também nas regressões foram usados componentes MA (média móvel) e AR (auto-regressivo) para eliminar correlação entre os resíduos segundo o teste estatístico Q de Ljung-Box. Para analisar parcimônia foram usados os critérios de Akaike (AIC) e Schwartz (SBC). A heterocedasticidade foi corrigida usando o parâmetro de White e a estimação foi feita usando o método dos mínimos quadrados. O *software* usado para as regressões foi o EViews.

As tabelas 24 e 25 apresentam os resultados dos testes de viés usando a volatilidade implícita como referência.

Tabela 24 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade implícita como referência – Índice Bovespa

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio-Padrão</i> | <i>Média (Tradicional - Estimador)</i> | <i>Desvio Padrão - (diferença)</i> |
|------------------|--------------|----------------------|--|--|
| Implícita | 27.12% | 3.58% | | |
| Tradicional | 23.65% | 6.13% | 3.47% | 0.26% |
| PK | 21.08% | 4.95% | 6.04% | 0.22% |
| PKM | 21.08% | 4.96% | 6.04% | 0.22% |
| GK6 | 19.98% | 4.81% | 7.14% | 0.22% |
| RS | 19.98% | 5.21% | 7.14% | 0.23% |
| YZ | 20.57% | 5.16% | 6.55% | 0.23% |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 25 - Teste empírico de viés para estimadores de volatilidade – volatilidade implícita como referência – Paridade BRL/USD

| <i>Estimador</i> | <i>Média</i> | <i>Desvio-Padrão</i> | <i>Média (Tradicional - Estimador)</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença)</i> |
|------------------|--------------|----------------------|--|----------------------------------|
| Implícita | 12.77% | 3.58% | | |
| Tradicional | 12.55% | 5.50% | 0.22% | 0.24% |
| PK | 12.60% | 4.95% | 0.17% | 0.22% |
| PKM | 12.35% | 4.92% | 0.42% | 0.22% |
| GK6 | 12.50% | 4.85% | 0.27% | 0.22% |
| RS | 12.22% | 4.80% | 0.55% | 0.22% |
| YZ | 12.53% | 4.87% | 0.24% | 0.22% |

Fonte: Elaboração própria.

Pelas tabelas 24 e 25 pode-se, considerando a volatilidade implícita como referência e com 95% de nível de confiança, confirmar a presença de viés de baixa em todos os estimadores, inclusive o tradicional, para o Índice Bovespa, e afirmar que não há viés para todos os estimadores no caso da paridade BRL/USD spot, com exceção para os estimadores RS e PKM. Também é verificado que o desvio padrão dos estimadores usando valores extremos são menores do que para o estimador tradicional.

As tabelas de 26 a 27 apresentam os resultados dos testes de eficiência usando a volatilidade implícita como referência.

Tabela 26 - Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – volatilidade implícita como referência – Índice Bovespa

| <i>Estimador</i> | <i>Média (SE Tradic. – SE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos SE's) x 10⁶</i> | <i>Média (AE Tradic. – AE Estimador) x 10⁶</i> | <i>Desvio-Padrão (diferença dos AE's) x 10⁶</i> |
|------------------|---|--|---|--|
| PK | -1,165 | 215 | -11,616 | 1,593 |
| PKM | -1,170 | 215 | -11,645 | 1,594 |
| GK6 | -2,442 | 225 | -27,596 | 2,786 |
| RS | -2,688 | 229 | -21,888 | 1,623 |
| YZ | -1,862 | 220 | -16,569 | 1,603 |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 27 - Teste de eficiência relativa na previsão de volatilidade futura – volatilidade implícita como referência – Paridade BRL/USD

| <i>Estimador</i> | <i>Desvio-Padrão</i> | | <i>Desvio-Padrão</i> | |
|------------------|--|-------------|--|-------------|
| | <i>Média (SE Tradic. – SE (diferença dos SE's) x</i> <i>Estimador) x 10^6</i> | <i>10^6</i> | <i>Média (AE Tradic. – (diferença dos AE's) x</i> <i>AE Estimador) x 10^6</i> | <i>10^6</i> |
| PK | 310 | 84 | 5,187 | 989 |
| PKM | 321 | 82 | 4,817 | 972 |
| GK6 | 293 | 85 | 5,050 | 997 |
| RS | 277 | 83 | 4,078 | 982 |
| YZ | 310 | 84 | 5,136 | 988 |

Fonte: Elaboração própria.

Pelas tabelas 26 e 27 verifica-se que, para o Índice Bovespa, os estimadores usando valores extremos não apresentam maior eficiência que o estimador tradicional quanto à previsibilidade da volatilidade implícita defasada um período para frente. Para a Paridade BRL/USD spot, pode-se verificar tal eficiência com 95% de confiança.

As tabelas 28 e 29 mostram os resultados das regressões feitas considerando a volatilidade implícita defasada um período para frente como variável dependente e os estimadores sem defasagem como variáveis independentes. Os valores entre parêntesis nas tabelas representam o desvio padrão dos coeficientes das regressões.

Tabela 28 - Equações de previsão de volatilidade futura – volatilidade implícita como referência – Índice Bovespa

| <i>Equação</i> | <i>AR(1)</i> | <i>MA(2)</i> | <i>SE * 100</i> | <i>R^2 Ajustado</i> |
|--|--------------|--------------|-----------------|---------------------|
| Implicita (t+1) = 0.27 + 0.01 * Tradicional (t) (0.01) (0.04) | 0.94 | | 1.14 | 89.66% |
| Implicita (t+1) = 0.24 + 0.16 * PK (0.02) (0.08) | 0.93 | | 1.14 | 89.77% |
| Implicita (t+1) = 0.24 + 0.16 * PKM (0.02) (0.08) | 0.93 | | 1.14 | 89.77% |
| Implicita (t+1) = 0.23 + 0.23 * GK (0.01) (0.07) | 0.92 | | 1.13 | 89.89% |
| Implicita (t+1) = 0.23 + 0.20 * RS (0.01) (0.05) | 0.92 | | 1.13 | 89.93% |
| Implicita (t+1) = 0.23 + 0.21 * YZ (0.01) (0.06) | 0.92 | | 1.13 | 89.90% |

Fonte: Elaboração própria.

Nota: o coeficiente para o estimador Tradicional não é estatisticamente significativo a 90% de nível de confiança.

Tabela 29 - Equações de previsão de volatilidade futura – volatilidade implícita como referência – Paridade BRL/USD

| <i>Equação</i> | <i>AR(1)</i> | <i>MA(2)</i> | <i>SE * 100</i> | <i>R^2 Ajustado</i> |
|--|----------------|-----------------|-----------------|---------------------|
| Implicita (t+1) = 0.12 + 0.11 * Tradicional (t) (0.01) (0.04) | 0.98 (0.02) | -0.17 (0.11) | 0.81 | 94.96% |
| Implicita (t+1) = 0.10 + 0.21 * PK (0.01) (0.09) | 0.97 (0.02) | -0.18 (0.11) | 0.81 | 94.98% |
| Implicita (t+1) = 0.10 + 0.22 * PKM (0.01) (0.09) | 0.97 (0.02) | -0.19 (0.11) | 0.81 | 94.99% |
| Implicita (t+1) = 0.11 + 0.13 * GK (0.01) (0.08) | 0.97 (0.01) | -0.18 (0.11) | 0.81 | 94.93% |
| Implicita (t+1) = 0.12 + 0.08 * RS (0.01) (0.07) | 0.98 (0.01) | -0.17 (0.11) | 0.81 | 94.90% |
| Implicita (t+1) = 0.11 + 0.13 * YZ (0.01) (0.08) | 0.98 (0.01) | -0.18 (0.11) | 0.81 | 94.92% |

Fonte: Elaboração própria.

Nota: os coeficientes para os estimadores GK, RS e YZ não são estatisticamente significantes a 90% de nível de confiança

Pelas tabelas 28 e 29, não se verifica nenhuma eficiência superior dos estimadores usando valores extremos, comparando-os com o estimador tradicional. Verifica-se que o coeficiente de AR (1) (*Autoregressive*) é próximo de 1, o que nos leva a acreditar na presença de raiz unitária nas séries de volatilidade implícita. Ao fazer o teste de Dickey-Fuller, com 95% de grau de confiança, não se verifica presença de raiz unitária para o Índice Bovespa, mas sim para a paridade BRL/USD spot. A presença de raiz unitária compromete os resultados das regressões, pois essas seriam regressões espúrias, que se caracterizam por R^2 alto, e isso é exatamente o que se observa na tabela 29. Também se verifica que praticamente os termos AR explicam a volatilidade implícita futura.

3.4. Análise das diferenças entre a teoria e a verificação empírica

As verificações empíricas não refletiram totalmente a teoria. Fatores de eficiência na casa de 10 não foram verificados. As principais razões para a existência de viés são a discretização das observações no tempo e o fato de os preços serem negociados com incrementos definidos (*spreads*). Outra razão para explicar a diferença da teoria para a realidade é o fato de que os estimadores usando valores extremos foram construídos assumindo que os preços seguem o processo $dS = \mu S dt + \delta S dz$, em que dz é um passeio aleatório sem *drift*. Os retornos então seguiriam $d \ln S = (\mu - \delta^2/2) dt + \delta dz$. Em um mundo teórico onde se tem verificação contínua da trajetória, seria esperado um excelente desempenho dos estimadores que usam valores extremos. No mundo discreto como na prática, os estimadores podem ser piores que o estimador clássico quanto ao viés e à eficiência. Desde que as fortes considerações mencionadas não são verificadas na prática, o uso dos estimadores que usam valores extremos passa a ser questionável. Mesmo para a paridade BRL/USD spot, que apresentou melhores resultados, a eficiência verificada ficou longe dos valores teóricos. Em outros trabalhos realizados na literatura, nos quais se analisa empiricamente o desempenho de estimadores que usam valores extremos, como Wiggins (1991), Wiggins (1992), Toner (1997) e Becker (1983), também não se verificaram as eficiências obtidas na teoria.

Para se verificar se, de fato, os preços seguem o processo mencionado acima, analisou-se o comportamento dos retornos diários do Índice Bovespa e da paridade BRL/USD. Para a análise, foram usados os dados a partir de janeiro de 2003, que seria o início do ciclo de bonança observado no mercado internacional e brasileiro.

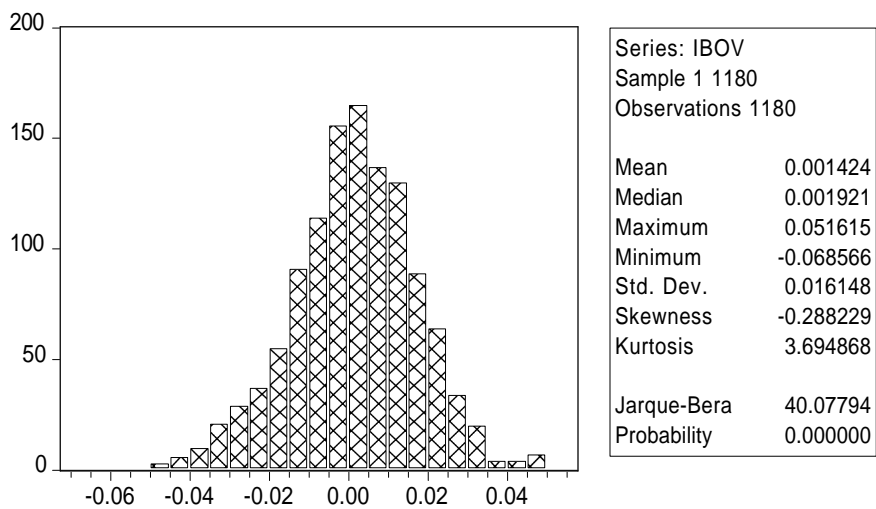
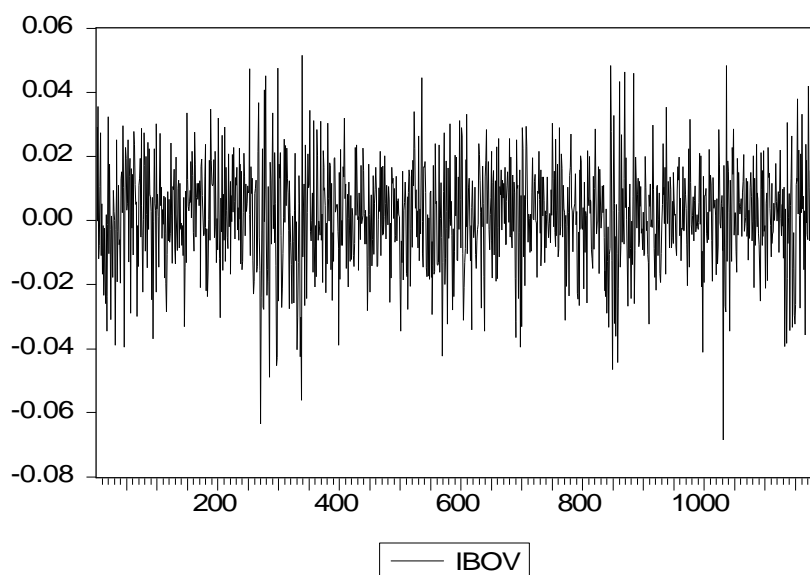


Gráfico 6 - Histograma dos retornos diários do Índice Bovespa

Fonte: Elaboração própria.

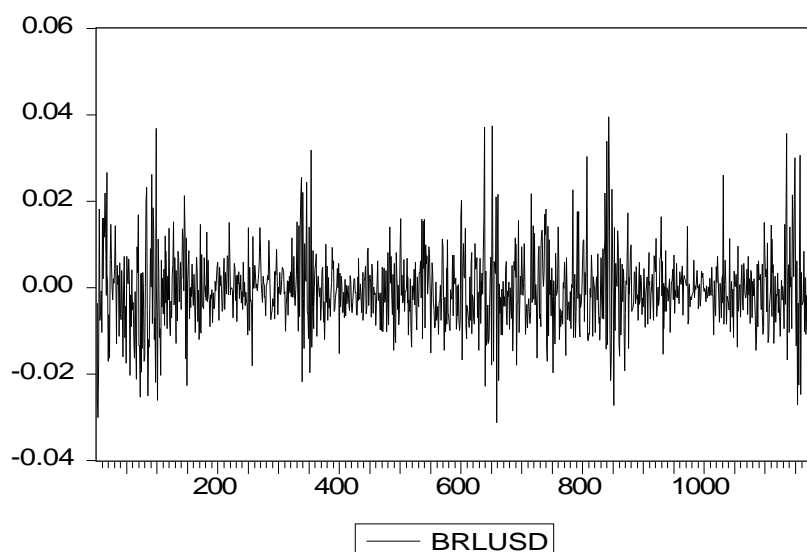


Gráfico 7 - Retornos diários da paridade BRL/USD spot

Fonte: Elaboração própria.

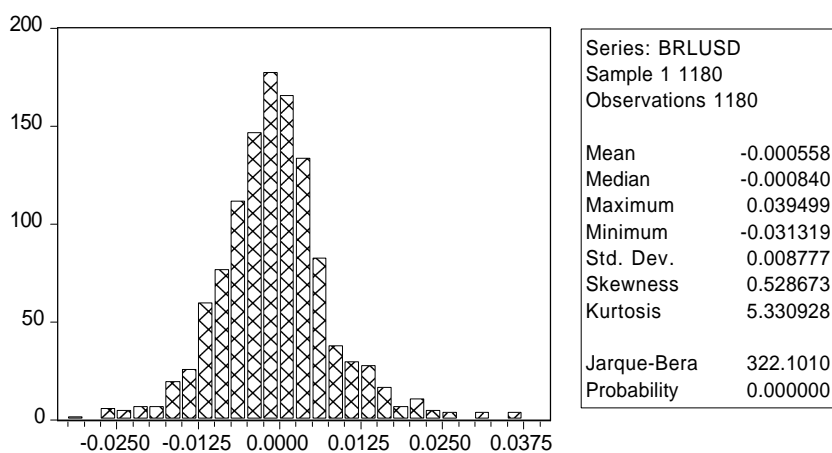


Gráfico 8 - Histograma dos retornos diários da paridade BRL/USD spot

Fonte: Elaboração própria.

Pelo teste de normalidade de Jarque-Bera se rejeita a hipótese nula de normalidade dos retornos com 95% de confiança. Portanto, a não-verificação empírica da teoria deve-se ao fato de o preço dos ativos não seguir o processo $dS = \mu S dt + \delta S dz$, em que dz é um processo de Wiener. Apesar disso, verifica-se que os estimadores para a paridade BRL/USD apresentaram melhor comportamento do que os do Índice Bovespa. Isso pode dever-se ao fato de:

- 1) Retornos reais das ações não serem corretamente representados, pois não se considerou efeitos de dividendos, juros de capital próprio, bonificação, direitos de subscrição, etc.
- 2) Futuro de Ibovespa na BM&F possuir um limitador de queda intra-diário de 10%, ou seja, se o preço cair 10% em um dia, o *circuit break* é acionado e o mercado pára por alguns instantes. Dado que a volatilidade do Ibovespa é alta, esta limitação não é desprezível para o modelo. Semelhante limitação existe para o futuro de Dólar na BM&F, mas a volatilidade do spot é bem menor que a do Ibovespa. Em outras palavras, o efeito desta limitação sobre o mercado de bolsa é maior do que para o mercado de câmbio. Vale mencionar que essa limitação afeta os estimadores que usam valores extremos, pois o máximo e o mínimo não seriam de fato observados, e não afeta, ou afeta pouco, o estimador clássico.

4. CONCLUSÃO

4.1 Conclusões

O trabalho tem como objetivo analisar a performance dos estimadores de volatilidade que usam valores extremos (máximo, mínimo, abertura e fechamento) para ativos no mercado brasileiro. Testes estatísticos de viés e eficiência foram realizados para o Índice Bovespa e a paridade BRL/USD spot utilizando o estimador clássico, a volatilidade realizada e a volatilidade implícita como referências.

Os principais resultados encontrados foram:

1) Usando o estimador clássico como referência:

a) Teste de Viés:

- i. Índice Bovespa: os estimadores usando valores extremos apresentaram viés de baixa. Enquanto o valor médio de volatilidade obtido para o estimador clássico é da ordem de 25%, o valor médio para os estimadores usando valores extremos é da ordem de 22%. O desvio-padrão da diferença é da ordem de 1% e, portanto, com 95% de confiança rejeita-se a hipótese de não existência de viés.
- ii. Paridade BLR/USD spot: os estimadores usando valores extremos não apresentaram viés. A diferença entre os estimadores é da ordem de 0.50% e como o desvio padrão é da ordem de 1%, com 95% de confiança, não se rejeita a hipótese de não-existência de viés.

b) Teste de Eficiência:

- i. Índice Bovespa: os estimadores usando valores extremos apresentaram desvio padrão menor que o estimador clássico. A eficiência, segundo medida descrita no capítulo 2, é da ordem de 2.0. A eficiência máxima observada foi 2.25. Nenhum estimador apresentou eficiência estatisticamente significativa, a 95% de confiança, superior ao estimador clássico quanto à previsibili-

dade da volatilidade futura. Nas regressões, obtiveram-se R^2 maiores, cerca de 25%, utilizando os estimadores que usam valores extremos.

- ii. Paridade BLR/USD spot: os estimadores usando valores extremos apresentaram desvio-padrão menor que o estimador clássico. A eficiência, segundo medida descrita no capítulo 2, é da ordem de 1.70. A eficiência máxima observada foi 2.0. Nenhum estimador apresentou eficiência estatisticamente significativa, a 95% de confiança, superior ao estimador clássico quanto à previsibilidade da volatilidade futura. Nas regressões, obtiveram-se R^2 maiores, cerca de 30%, utilizando os estimadores que usam valores extremos.

2) Usando a volatilidade realizada como referência:

a) Teste de Viés:

- i. Índice Bovespa: os resultados são divergentes, considerando o período de análise. Para dados de um dia, o estimador clássico apresenta viés de baixa e para 1 semana, não apresenta viés. Os estimadores que usam valores extremos possuem comportamentos diferentes entre si. Enquanto os estimadores PK e RS não apresentam viés, os outros apresentam viés de alta.
- ii. Paridade BLR/USD spot: todos os estimadores apresentam viés de baixa para dados de 1 dia e não o apresentam para dados de 1 semana, com 95% de confiança.

b) Teste de Eficiência:

- i. Índice Bovespa: os estimadores usando valores extremos divergem entre si quanto à eficiência. Enquanto os estimadores PK e RS apresentam eficiência de cerca de 1.50 para dados de 1 dia, a eficiência é inferior a 1 para dados de 1 semana.
- ii. Paridade BLR/USD spot: os estimadores usando valores extremos apresentaram desvio-padrão menor que o estimador clássico. A eficiência, segundo medida descrita no capítulo 2, é da ordem de 1.70. A eficiência máxima observada foi 1.83.

3) Usando a volatilidade implícita em opções no dinheiro (ATM – *at the money*) de 1 mês como referência:

a) Teste de Viés:

- i. Índice Bovespa: todos os estimadores, incluindo o clássico, apresentaram viés de baixa. Enquanto o valor médio de volatilidade obtido para a volatilidade implícita é de 27%, o valor médio para os estimadores é da ordem de 21%. O desvio padrão da diferença é da ordem de 0.25% e, portanto, com 95% de confiança, rejeita-se a hipótese de não-existência de viés.
- ii. Paridade BLR/USD spot: a maioria dos estimadores usando valores extremos não apresenta viés. Apenas os estimadores PKM e RS apresentaram ligeiro viés de baixa. A diferença entre os estimadores é da ordem de 0.25% e, como o desvio-padrão é da ordem de 0.22%, com 95% de confiança, não se rejeita a hipótese de não-existência de viés.

b) Teste de Eficiência:

- i. Índice Bovespa: os estimadores usando valores extremos apresentaram desvio padrão menor que o estimador clássico. A eficiência, segundo medida descrita no capítulo 1, é da ordem de 1.40. A eficiência máxima observada foi 1.60. Nenhum estimador apresentou eficiência estatisticamente significativa, a 95% de confiança, superior ao estimador clássico quanto à previsibilidade da volatilidade futura. Nas regressões, obtiveram-se R^2 próximos a 1 e que o componente AR(1) explica cerca de 90% da volatilidade implícita.
- ii. Paridade BLR/USD spot: os estimadores usando valores extremos apresentaram desvio-padrão menor que o estimador clássico. A eficiência, segundo medida descrita no capítulo 1, é da ordem de 1.20. A eficiência máxima observada foi 1.32. Todos os estimadores apresentaram eficiência estatisticamente significativa, a 95% de confiança, superior ao estimador clássico quanto à previsibilidade da volatilidade futura. Nas regressões, obtiveram-se R^2 próximos a 1 e que se tem a presença de raiz unitária.

Como se pode ver pelos resultados, de uma forma geral, os estimadores que usam valores extremos apresentaram-se melhores que o estimador clássico. Eficiências superiores a 5, que eram esperadas segundo a teoria, não foram verificadas. A principal razão para essa diferença entre teoria e prática é que toda a teoria está baseada no fato de que os retornos dos ativos seguem um processo estocástico com distribuição normal. Como foi verificado, para o Índice Bovespa e Paridade BRL/USD, os retornos não têm tal comportamento. Após teste estatístico, rejeita-se a hipótese nula de normalidade.

4.2 Sugestões para novos trabalhos

Atualmente, no mercado brasileiro, os estimadores que usam valores extremos não são frequentemente usados. Dados os resultados deste trabalho, fica a sugestão de que eles sejam discutidos em congressos nacionais de finanças e em futuros trabalhos.

Como sugestão de novo trabalho, pode-se testar para o Índice Bovespa e a paridade BRL/USD spot o estimador que usa a correção do efeito da discretização dos dados no tempo, que foi proposto por Rogers e Satchell (1991) e também por Yang e Zhang (2000). Como mencionado anteriormente, um dos fatores de viés para os estimadores é a discretização das observações no tempo. Então, pode-se verificar se a correção traz benefícios para os estimadores em termos de viés e eficiência e se ela faz com que a realidade se aproxime mais da teoria.

Para tentar eliminar o efeito de limitação de queda intra-diária, pode-se fazer um tratamento nos dados de forma a se eliminar *outliers*. Wiggins (1991) propôs a retirada de *outliers* segundo critérios de variação intra-diários entre a abertura, o máximo, o mínimo e o fechamento.

APÊNDICE

A seguir, é apresentado o gerador de números aleatórios utilizado neste trabalho para verificar os valores teóricos de eficiência dos estimadores que usam valores extremos em relação ao estimador tradicional. A rotina abaixo foi usada no Microsoft Excel.

5.1. Geração de números aleatórios (Box – Muller).

```

Sub GenerateRandomNumbers()
Dim pi As Double, a As Double, c As Double
Dim n As Long, n_max As Long
Dim j As Integer
Dim i() As Double
'Dim X() As Double
Dim k() As Double

pi = 4 * Atn(1)
a = 7 ^ 5
c = 2 ^ 31 - 1
n_max = 1440      '# random numbers

j = 251

ReDim i(n_max)
'ReDim X(n_max)
ReDim k(n_max)

k(0) = 0
For n = 1 To n_max
    k(n) = n
Next n

```

While j < 501

i(0) = j 'seed for the linear congruential generator

For n = 1 To n_max 'I() divided by c is iid U(0,1)

 i(n) = c * (a * i(n - 1) / c - Int(a * i(n - 1) / c)) 'a times I() modulo c

Next n

For n = 1 To n_max - 1 Step 2

 'Box-Muller method: X() is iid N(0,1)

 'X(n) = Sqr(-2 * Log(i(n) / c)) * Cos(2 * pi * (i(n + 1) / c))

 'X(n + 1) = Sqr(-2 * Log(i(n) / c)) * Sin(2 * pi * (i(n + 1) / c))

 Range("A1").Offset(k(n) - 1, j - 251).Value = Sqr(-2 * Log(i(n) / c)) * Cos(2 *
pi * (i(n + 1) / c))

 Range("A1").Offset(k(n), j - 251).Value = Sqr(-2 * Log(i(n) / c)) * Sin(2 * pi
* (i(n + 1) / c))

Next n

j = j + 1

Wend

End Sub

REFERÊNCIAS

ANDERSEN, T. G. et al. Modeling and forecasting realized volatility. **Econometric**, v. 71, n.2, p. 579-625, mar. 2003.

BECKERS, S. Variances of security price returns based on high, low and closing prices. **Journal of Business**, v. 56, p. 97-112, jan.1983.

DUQUE, J.; PAXSON, D. A. **Empirical evidence on volatility estimators**. Disponível em: <http://pascal.iseg.utl.pt/~jduque/jd_empirical%20evidences.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2008.

FELLER, W. The symptotic distribution of the range of sums of random variables. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 22, p. 427-32, 1951.

GARMAN, M; KLASS, M. On the estimation of security price volatilities from historical data. **Journal of Business**, v. 53, 67-78, jan. 1980.

KAI, Li; WEINBAUM, D. **The empirical performance of alternative extreme value volatility estimators**. Disponível em: <http://www.qf.nthu.edu.tw/~jtyang/Teaching/Risk_management/Papers/Quant_Methods/The%20Empirical%20Performance%20of%20Alternative%20Extreme%20Value%20Volatility%20Estimators.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2008.

KUNITOMO, N. Improving the parkinson method of estimating security price volatilities. **Journal of Business**, v. 65, n. 2, p.295-302, abr.1992.

PARKINSON, M. The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. **Journal of Business**, v. 53, n. 1, p.61-66, jan. 1980.

ROGERS, L. C. G.; SATCHELL, S. E. Estimating variance from high, low and closing prices. **Annals of Applied Probability**, v.1, n. 4, p.504-512, 1991. Disponível em: <<http://www.jstor.org/view/10505164/di983986/98p00357/0>>. Acesso em: 28 jan. 2008.

SÁ MOTA, B.; FERNANDES, M. Desempenho de estimadores de volatilidade na bolsa de valores de São Paulo. **Revista Brasileira de Economia**, v. 58, n.3, p. 429-448, jul./set. 2004.

TONER, M. **What is the best estimator of price volatility in futures markets**. 1997. Disponível em: <<http://www.sirca.org.au/Papers/1997005.pdf>>. Acesso em: 28 jan. 2008.

WIGGINS, J. Empirical tests of the bias and efficiency of the extreme-value estimator for common stocks. **Journal of Business**, v.64, n.3, p. 417-432, jul.1991.

WIGGINS, J. Estimating the Volatility of S&P 500 Futures Price Using the Extreme-Value Method. **Journal of Futures Markets**, v.12, p. 265-273, 1992.

YANG, D.; ZHANG, Q. Drift-Independent volatility estimation based on high, low, open and close prices. **Journal of Business**, v. 73, n. 3, p. 477-491, jul. 2000.