FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

YUGO WATARI

APLICAÇÃO DE ALOCAÇÃO DE RISCO EM FATORES (RISK FACTOR BUDGETING) AO MERCADO BRASILEIRO DE AÇÕES

SÃO PAULO

2017

YUGO WATARI

APLICAÇÃO DE ALOCAÇÃO DE RISCO EM FATORES (RISK FACTOR BUDGETING) AO MERCADO BRASILEIRO DE AÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração:
Finanças Quantitativas.

Orientador:
Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

SÃO PAULO
2017

Watari, Yugo.

Aplicação de alocação de risco em fatores (Risk Factor Budgeting) ao mercado brasileiro de ações / Yugo Watari – 2017.

61 f.

Orientador: Afonso de Campos Pinto.

Dissertação (MPFE) – Escola de Economia de São Paulo.

1. Mercado de capitais. 2. Investimentos – Administração. 3. Administração financeira. 4. Avaliação de riscos. I. Pinto, Afonso de Campos. II. Dissertação (MPFE) – Escola de Economia de São Paulo. III. Aplicação de alocação de risco em fatores (*Risk Factor Budgeting*) ao mercado brasileiro de ações.

CDU 336.76

YUGO WATARI

APLICAÇÃO DE ALOCAÇÃO DE RISCO EM FATORES (RISK FACTOR BUDGETING) AO MERCADO BRASILEIRO DE AÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração:
Finanças Quantitativas.

Data da Aprovação: 21 / 08 / 2017

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto
(Prof. Dr. Afonso Campos Pinto)
FGV - EESP

Prof. Dr. Roberto Cintra
FGV - EESP

Prof. Dr. Pedro Paulo Schirmer
Octaplus

Agradecimentos

Agradeço muito à minha esposa, Tami Katsuya Del Picchia Watari pela compreensão e apoio durante esses dois anos de dedicação aos estudos. Um agradecimento especial à minha família que, sem sua presença, não seria possível minhas conquistas.

Aos meus colegas de turmas, agradeço pelos momentos de apoio e colaboração durante o curso.

Agradeço aos professores pela passagem de conhecimentos e experiências, e um agradecimento especial ao professor Roberto Cintra, cuja paciência e dedicação tornou possível esta dissertação.

"Standard predictive regressions fail to reject the hypothesis that the party of the U.S. President, the weather in Manhattan, global warming, El Niño, sunspots, or the conjunctions of the planets, are significantly related to anomaly performance. These results are striking, and quite surprising. In fact, some readers may be inclined to reject some of this paper's conclusions solely on the grounds of plausibility. I urge readers to consider this option carefully, however, as doing do so entails rejecting the standard methodology on which the return predictability literature is built."

(Novy-Marx, 2014)

RESUMO

A construção de portfólios, ou seja, a definição da composição de uma carteira de ativos, é abordada, nesse trabalho, pela ótica da alocação baseada em constribuições do risco, medida via volatilidade, aplicada a uma carteira de ações. O objetivo é a construção de portfolios, via as contribuições de riscos; para isto construímos fatores de riscos genéricos baseados na abordagem de *Fama&French*; na sequência aplicamos uma metodologia para distribuir a volatilidade como contribuições de risco destes fatores genéricos. Diferentemente de outros trabalhos, ao invés de alocar em índices que representem estes fatores de riscos genéricos, alocamos diretamente nos ativos na expectativa de conseguirmos reproduzir o efeito de investir nestes índices, o que traz uma complexidade adicional. Esta abordagem foi motivada por nem sempre termos acesso à investir nesses índices. Finalmente, a título de ilustração, a metodologia foi aplicada ao mercado brasileiro de ações, em particular utilizando os fatores do modelo *Fama&French* de 5 fatores. Obtivemos portfolios com as contribuições de riscos desejadas em relação aos fatores de *Fama&French*, mas ao se analisar a alocação dos pesos dos fatores de riscos sobre os portfolios obtidos, verificamos que são alocados pesos a fatores que não estão relacionados aos de *Fama&French*, apesar das contribuições de risco destas estarem neutralizadas. E por fim argumentamos que estas alocações evitam a captura das características distintas de cada fator que gostaríamos de reproduzir.

Palavras-chave:Risk budgeting. Modelo de Fatores. Alocação de Risco. Atribuição de Risco. Alocação de Ativos. Modelo *Fama&French* de 5 fatores. Gestão de Carteiras de Ações. Risk Factor Budgeting.

ABSTRACT

We approach portfolio construction with risk based allocation, using volatility as the measure of risk, and applying to the stock markets. We start by obtaining generic risk factors based on the approach of Fama&French; and them we decompose the volatility in risk contributions of those generic risk factors. Differing from previous works, instead of allocating in indexes that represent the generic risk factors, we allocate at the asset level, in hopes that this will lead to reproducing the effects of inveting on those indexes, which brings additional complexity to the problem. This was motivated by investors not always having access to invest in theses indexes. Finally, for the purpose of illustration, we apply the metodology to the brazilian stock markets, selecting as risk factors, the five Fama&French risk factors. We obtain portfolios with the desired risk contributions, but as we look in to the weights of each risk factor, there is alocations of weights in the risk factors not related to those of Fama&French, even though the risk contributions are neutralized. We argue that these allocations are preventing from obtaining exposures to the distinct characteristics of each Fama&French risk factor.

Keywords: Risk budgeting. Factor Model. Risk Based Asset Allocation. Risk Attribution. Asset Allocation. *Fama&French* 5 Factor Model. Stock Portfolio Management. Risk Factor Budgeting.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

CAPM	*Capital Asset Pricing Model*
1/N	Estratégia ingênua de alocação de pesos iguais
MV	Mínima Variância
EW	*Equal Weighted*
ERC	*Equal Risk Contributions*
VAR	*Value at Risk*
CVAR	*Conditional Value at Risk*
ES	*Expected Shortfall*
CMR	Contribuição Marginal ao Risco
PCA	Análise de Componentes Principais
SVD	Decomposição de Valor Singular
SQP	Programação Sequencial Quadrática
SMB	*Small minus Big*
HML	*High minus Low*
RMW	*Robust minus Weak*
CMA	*Conservative minus Aggressive*
B/M	*Book to Market Ratio*
Op	*Operating Profitability*
Mkt	*Market*

Sumário

1 Introdução

Após a crise do *sub-prime* de 2008, o gerenciamento de riscos ganhou mais atenção dos investidores de países, cujo mercado de capitais são bem desenvolvidos; hoje, uma parte importante das responsabilidades de gestores de fundos é gerenciar os riscos presentes em seus portfolios. No Brasil, que já enfrentou várias crises nas duas últimas décadas, o gerenciamento de riscos é de boa qualidade: geralmente, há preocupação com as perdas sob stress, mas não necessariamente com a distribuição(alocação) dos riscos, muita ênfase é dada na alocação de ativos, que é muito diferente de distribuir riscos. Embora a idéia de que considerações de riscos nas alocações de ativos são importantes, muitas vezes a gestão de risco se dá em nível de ativos e não de modo agregado; um problema associado à gestão de riscos destes portfolios é a dificuldade tanto em identificar como em gerenciar as principais fontes de riscos incorridas, especialmente em portfolios grandes e complexos.

Dadas estas dificuldades, a gestão de riscos é, muitas vezes, simplificada a minimizar uma medida de risco, como descrito na teoria clássica de portfolio (Markowitz (1959)), e procurar portfolios que maximizem a expectativa de retorno e estejam na "fronteira eficiente". Apesar de ser alvo de críticas, pelas dificuldades de se estimar os retornos esperados e ter a tendência de gerar portfolios concentrados se otimizados de forma irrestrita, esta teoria foi bem sucedida em demonstrar os benefícios da diversificação do (risco de um) portfolio. Diversos estudos acadêmicos propuseram aperfeiçoamento no arcabouço original: como o portfolio resampling (Michaud (1989)); a alocação robusta de ativos (Tütüncü e Koenig (2004)); a convergência dos, retornos em níveis implicitos de mercado (Black e Litterman (1991)), entre outros. Tais estudos, mantiveram o arcabouço principal de otimização, ou seja, a minimização da variância para um dado retorno desejado.

E, apesar das melhorias propostas, estudos como de Benartzi e Thaler (2001) e Windcliff e Boyle (2004) demonstraram que muitos gestores abordam a diversificação do risco de suas carteiras através de métodos heurísticos, baseados em estratégias ingênuas como as de alocações de pesos iguais, ou seja, o mesmo porcentual do patrimônio em cada ativo - 1/N -, ou o portfolio de variância mínima global. Destas comparações surgiu uma linha de pesquisa que investiga a perfomance destas estratégias heurísticas: de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), por exemplo, mostraram que os resultados obtidos por estas ad-hoc, superam, em retorno ajustado pelo risco, as técnicas listadas no parágrafo anterior.

Com o objetivo de aperfeiçoar os métodos heurísticos, uma abordagem tem como princípio obter portfolios com contribuições de riscos determinadas, eliminando a necessidade da estimação de retornos esperados. Teiletche, Roncalli e Maillard (2010) estudaram uma destas estratégias é chamada de Risk Parity, e tem como objetivo manter contribuições

de riscos iguais para todos os ativos do portfolio, ou seja, contribuições iguais de risco.

A estratégia de realizar uma alocação baseada nos contribuições de risco do portfolio não é nova, e foi explorada por diversos autores como Grinold e Kahn (1999), Rahl et al. (2000), Scherer (2002) e Meucci (2009). O contexto proposto para a utilização destas técnicas é o de múltiplas classes de ativos em fundos de pensões, onde se procura a diversificação dos portfolios através da determinação das contribuições ao risco, ao invés da distribuição de porcentuais do patrimônio, que não permitem obter a correta contribuição do risco de cada classe de ativo. Neste caso, nem sempre é desejavel obter contribuições de riscos iguais, mas uma exposição desejada, chamada de Risk Budgeting; as propriedades de portfolios que utilizam esta estratégia foram estudadas por Bruder e Roncalli (2012).

Em uma variação da estratégia acima, Meucci (2010) propõe decompor as contribuições de riscos em fatores de riscos determinados pelos usuários, ao invés da contribuição de riscos dos ativos do portfoli, como se esses fatores correspondessem a sub-portfólios. Em seu trabalho, procura melhorar a diversificação dos portfolios dividindo as contribuições dos riscos em fatores definidos como os componentes principais do portfolio; adicionalmente, propõe uma técnica de componentes principais condicionais, que retém propriedades dos componentes principais, como serem não correlacionados e demonstrarem as contribuições à incerteza de forma decrescente, mas que permitem realizar alocações de portfolios e, dessa forma, controlar ativamente, a exposição a tais fatores. Para efetuar tal decomposição, utiliza um trabalho anterior, Meucci (2006), de atribuição da contribuição de risco, que consistem em decompor o risco total do portfolio em unidades menores, que podem ser no nível dos ativos, agregações destes ou até mesmo fatores de riscos definidos pelos gestores, inclusive os componentes principais condicionais mencionados.

Os próprios autovalores da matriz de variância-covariância dos retornos dos ativos, os componentes principais, poderiam corresponder aos fatores de risco, porém, à exceção do mercado de juros nominais, não há uma associação clara entre tais componentes principais e os fatores de risco geralmente considerados (setoriais, de rentabilidade, preço de mercado por valor contábil etc). Nesse contexto, a abordagem de alocação de orçamento de risco em fatores, visa compatibilizar a ideia dos componentes principais à subjetividade dos fatores mais coloquiais.

Roncalli e Weisang (2012) utilizam esta técnica de atribuição do risco em fatores de risco, mas propõem utilizar uma metodologia chamada de Risk Factor Budgeting, ou alocação do orçamento de risco por fator, para diversificar nos fatores de risco que sejam de mais interesse do gestor, como, por exemplo, os fatores de risco de Fama e French (1993).

Este trabalho se propõe a aplicar esta metodologia de alocação do orçamento de risco por fatores ao mercado brasileiro, incluindo:

1. a construção de cinco fatores de riscos inspirados no trabalho de Fama e French (2015);

2. a obtenção de portfolios com alocações de risco especificadas por fator, ao invés de alocar pesos diretamente em portfolios que reproduzam estes fatores.

   Estamos interessados em estudar as implicações de se construir um portfolio diversificado nesses cinco fatores, onde aplicamos o conceito de *Risk Parity*, mas sobre as contribuições de risco destes fatores genéricos. Esta abordagem difere das aplicações tradicionais, onde se diversifica diretamente sobre um conjunto de contribuições de riscos de ações, como em Ariki (2016) e Ferreira (2015).

3. investigar o impacto da ausência de cada fator, ou seja, construímos portfolios que tem como objetivo exposição em risco equivalente em apenas quatro dos fatores de *Fama&French*. O objetivo aqui foi identificar se há fatores mais relevantes e como se comportam as contribuições de risco e os pesos destes, ao se remover um dos fatores.

Acreditamos que poder diversificar nos fatores de risco possa ter um apelo maior de utilização por fundos que se proponham a capturar anomalias de mercados provenientes de fatores de riscos de *Fama&French*. Estratégias de "Smart Beta", que se utilizam de índices de Bovespa e/ou por índices construídos pela MSCI, tem aumentado o interesse por este tema no Brasil nos últimos anos. Mas, nem sempre temos acesso à composição destes índices, ou mesmo capacidade de investir neles; por isso, diferente de Roncalli e Weisang (2012) abordamos a técnica no nível de alocação em ações (ainda que com objetivos nas contribuições de risco dos fatores), ao invés de abordar no nível de índices que reproduzem os fatores de *Fama&French*, na expectativa de, utilizando o *risk factor budgeting*, construir portfolios que reproduzam o efeito de investir nestes índices.

Os principais resultados encontrados foram:

1. somente conseguimos encontrar portfolios com as contribuições de riscos desejadas, se não restringirmos a alocações *long-only*;

2. a performance destas estratégias, de *risk factor budgeting*, possuem retornos próximos aos de mercado incorrendo em riscos menores;

3. para a abordagem utilizada, não reproduziram portfolios como se estivéssemos alocando diretamente nos fatores de *Fama&French*.

Adicionalmente, testamos o impacto de cada fator, testando as 5 combinações possíveis, e se concluiu que, surpreendentemente, não há grande diferenciação entre tais carteiras;

O restante do estudo é organizado da seguinte maneira: na próxima seção de revisão bibliográfica, discutimos as principais literaturas sobre a teoria clássica de portfolio, métodos heuristicos, atribuição ao risco e as técnicas de alocações baseadas no risco. Em seguida na seção 3 descrevemos as metodologias utilizadas para a atribuição de risco, a construção de portfolios utilizando o *Risk Factor Budgeting* e as construções dos fatores de riscos de *Fama&French*. Os resultados destes experimentos são demonstrados na seção 4 de resultados e apresentamos nossas conclusões e oportunidades de trabalhos futuros na última seção.

2 Revisão Bibliográfica

Markowitz (1959) derivou a otimização da alocação de riqueza em ativos arriscados quando investidores desejam retorno sendo avessos ao risco, representado como a variância. Este arcabouço foi desenvolvido para cenários estáticos e 1 período e demonstrou o valor da diversificação do risco, porque através dela seria possível derivar portfolios com o mesmo nível de retorno esperado com riscos menores gerando a fronteira eficiente de média e variância. A chamada fronteira eficiente corresponde a diferentes combinações de máximo retorno para um dado nível de risco.

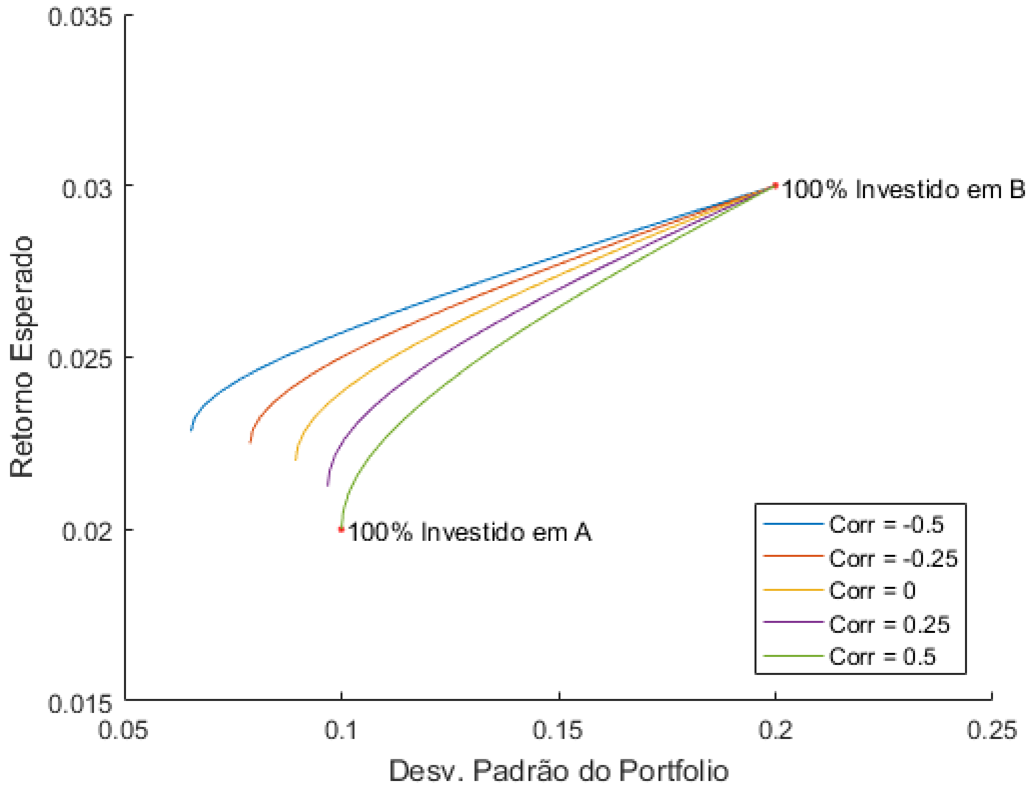


Figura 1 – Combinações de retornos esperados e volatilidade para um portfolio de 2 ativos com diferentes correlações

Esta derivação de portfolios ficou conhecida como otimização *mean-variance*. Sharpe (1964) e Lintner (1965) desenvolvem sobre este trabalho um modelo conhecido como CAPM, que utiliza o conceito de diversificação e aceitação de risco dado um certo nível de retorno esperado (medido pelo índice de *Sharpe*), para determinação de custo de capital para as empresas. Ele ainda demonstra utilizando o arcabouço de Markowitz que o portfolio ótimo (portfolio tangente) é equivalente a de ativos com pesos determinados por seus valores (*value-weighted*). Mas Jobson e Korkie (1981) e Michaud (1989) demonstram algumas

questões do arcabouço de otimização *mean-variance*, como por exemplo a tendência de maximizar erros de estimação das entradas do modelo (ou seja, erros de covariância e/ou retornos esperados) e a variação extrema de pesos de portfolio trazidos por estes, que indicam algumas das razões do modelo não ser adotado em grande escala pelos praticantes do mercado.

Jorion (1985) propõe a utilização de estimadores de *Bayes-Stein* para melhorar os erros de estimação dos retornos. Ele testa a performance fora da amostra: a) do portfolio tangente pela estimação clássica (média amostral e covariância amostral), b) do portfolio tangente utilizando estimadores de *Bayes-Stein* para a média, c) do portfolio de variância mínima global (*minimium-variance MV*) e d) dos portfolios com estratégias ingênuas como as de alocações de pesos iguais (1/N) e *value-weighted*. Ele encontra em seus testes que fora da amostra o portfolio de *MV* apresenta a melhor performance, sendo esta próxima às performances das estratégias ingênuas 1/N e *value-weighted* e sugere a utilização do portfolio *MV* quando os retornos são considerados iguais. E em estudos posteriores Jorion (1986) e Jorion (1991) demonstra que o estimador de *Bayes-Stein* para estimação da média traz ganhos para a estimação do portfolio tangente, mas a comparação de performance com os portfolios de *MV*, 1/N e *value-weighted*, abrem uma linha de pesquisa que comparam o portfolio tangente com métodos heurísticos, que evitam a estimação dos retornos esperados com técnicas de alocação baseadas no risco ou simplesmente priorizando a diversificação do risco como por exemplo os métodos ingênuos como 1/N.

Além do uso de estimadores de *Bayes-Stein*, Ledoit e Wolf (2003) utilizam novamente técnicas de *shrinkage*, mas desta vez para a estimação das matrizes de correlação. Tütüncü e Koenig (2004) propõem um método de alocação de ativos de forma robusta, mas Scherer (2007) demonstra que este método é equivalente à utilização de técnicas de *shrinkage* e não traz ganho adicional de performance em relação a estas. Não é do escopo deste trabalho ser exaustivo em relação à literatura de melhoria de estimação de retornos e covariância no contexto de seleção de ativos, mas estes geralmente podem ser reduzidos a utilização de técnicas de *shrinkage*, seja para equalizar retornos ou para convergir a retornos implicitos de mercado como em Black e Litterman (1991).

Apesar destas tentantivas de melhoria dos erros de estimação, Benartzi e Thaler (2001) e Windcliff e Boyle (2004) mostraram que, na prática, muitos abordam a questão da concentração de carteiras com uma estratégia de pesos iguais (1/N). E DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) mostram que em uma amostra com 25 ativos, em uma base de dados de ações americanas, dados os erros de estimação, seriam necessários mais de 3000 meses de dados para que a otimização de *mean-variance* tenha uma performance, em relação ao índice de *Sharpe*, melhor que uma estratégia de 1/N. Além disso demonstram que as técnicas de redução de erro de estimação com métodos de *shrinkage*, métodos baseados na crença de um modelo de precificação de ativos, e o portfolio de *MV* somente melhoram

modestamente a performance em relação ao índice de *Sharpe* e continuam, na prática, inviáveis para obter uma performance melhor que a estratégia ingênua de 1/N.

Teiletche, Roncalli e Maillard (2010) estudam outra dessas estratégias que evitam a estimação dos retornos, neste caso, portfolios com contribuições de riscos uniformemente distribuídas entre os constituintes (ou portfolio *ERC*). Este método provê uma solução sistemática para a construção de carteiras diversificadas no risco, uma vez que assumimos que não conseguimos estimar os retornos esperados de forma consistente. Eles apresentam esta estratégia como um compromisso entre redução de riscos e concentração de ativos comparando-o com as estratégias de MV, que possui a maior redução de risco, mas com possíveis concentrações de ativos, e com a estratégia 1/N, que possui uma menor concentração de ativos, mas com uma redução de risco menor que a estratégia de MV. O trabalho deles mostra que a estratégia *ERC* possui uma redução de risco entre uma estratégia MV e 1/N, não sofrendo a concentração de ativos como a estratégia MV nem a falta de controle de risco da estratégia 1/N.

No centro desta estratégia está o conceito de atribuição da contribuição de risco, que se inicia com Litterman (1996) e Garman (1997), debatendo que as medidas de risco de *volatilidade* e *VAR* não possuem propriedades aditivas e introduzem cálculos para obter as contribuições marginais do *VAR* e *CVAR*, Tasche (1999) introduz, com menos formalismo, propriedades desejadas por uma medida de risco e demonstra que a representação apropriada para medir performance é a derivada parcial de primeira ordem da medida de risco em relação ao peso das alocações. As metodologias são aprimoradas por Mina (2002) que demonstra que a decomposição pode ser realizada em qualquer nível de agregação do portfolio, por exemplo, a atribuição do risco pode ser realizada no nível setorial ou no nível de cada ativo individualmente no portfolio; Hallerbach (2003) que estende as metodologias para contextos de distribuições não-normais; e Zhang e Rachev (2004) que generalizam para qualquer medida de risco a técnica de atribuição de risco. Uma revisão detalhada pode ser encontrado em Meucci (2009).

Bruder e Roncalli (2012) formalizam a estratégia de *Risk Budgeting* (*RB*), que é uma generalização da estratégia *ERC* para contribuições de riscos que não são necessariamente iguais. Comentam que esta também é uma estratégia heurística, pois não há uma teoria financeira demonstrando que seja um portfolio ótimo. Seu sucesso pode ser atribuído ao aspecto de gerenciamento de riscos ao se controlar as contribuições de riscos.

Além disso, eles demonstram que o risco de um portfolio determinado pelo peso das contribuições de risco está entre o portfolio de MV e a determinada por pesos dos ativos com valores equivalentes às contribuições de riscos, e além disso demonstram que este portfolio existe e é único.

Esta estratégia não é nova e foi explorada por diversos autores (Rahl et al. (2000), Grinold e Kahn (1999), Meucci (2009), Scherer (2002)) no contexto de múltiplas classes

de ativos em fundos de pensões e mais recentemente na construção de índices de ações alternativos aos de alocação *value-weighted*. E Haugh, Iyengar e Song (2015) propõem o uso de algoritmos de otimização mais genéricos ao se construir portfolios de *Risk Budgeting*, que evitam pontos de ótimos locais com mais robustez quando comparados à performance de algoritmos mais tradicionais como a programação sequencial quadrática (*sqp*).

As técnicas acima são utilizadas no contexto do risco dos ativos do portfolio, mas Meucci (2006) propõe uma técnica que possibilita atribuir riscos sobre fatores genéricos definidos por usuários, e Meucci (2010) demonstra esta atribuição sobre fatores definidos como os componentes principais do portfolio em uma tentantiva de melhorar a visualização das fontes de riscos em comum que não são representados ao se decompor o risco por ativos. Adicionalmente, propõe uma técnica de componentes principais condicionais que retém propriedades dos componentes principais como sendo não correlacionados e demonstrando as contribuições à incerteza de forma decrescente, mas esta técnica permite realizar alocações no portfolio de maneira a controlar a exposição a estes fatores. Com este arcabouço, ele propõe uma técnica de alocação de portfolio que resulta em diversificação sobre estes componentes principais condicionais.

Roncalli e Weisang (2012) utilizam esta técnica de atribuição do risco sobre fatores de risco, mas propõem utilizar a metodologia de *RB* para diversificar sobre fatores de risco que sejam de mais interesse aos praticantes, como, por exemplo, os fatores de risco que representam anomalias do mercado utilizados em Fama e French (1993) e posteriormente estendidos em Fama e French (2015), ou também fatores macroeconômicos como em Eychenne, Martinetti e Roncalli (2011). Eles demonstram que esta alocação por *RB* nem sempre possui solução e além disso as soluções obtidas podem não ser únicas, portanto formula a alocação como um problema de otimização.

Por último, neste trabalho, exploramos a utilização de *RB* sobre os fatores de riscos de Fama e French (2015), mas aplicados ao mercado brasileiro. Diferentemente de Roncalli e Weisang (2012) abordamos a técninca no nível de alocação em ações, na expectativa de, construir portfolios que reproduzam o efeito de investir nestes fatores. Na seção seguinte abordamos as metodologias utilizadas para a atribuição de risco, a construção de portfolios utilizando o *Risk Factor Budgeting* e as contruções dos cinco fatores de riscos de *Fama&French*.

3 Metodologia de *Risk Factor Budgeting* e Construção dos Fatores de Risco

Esta seção descreve as metodologias utilizadas para atribuição de risco, a construção de portfolios utilizando o Risk Factor Budgeting e a construção dos fatores de *Fama&French*.

3.1 Revisão de Atribuição de Risco

Nesta seção revisamos brevemente os trabalhos de atribuição de risco de Litterman (1996), Garman (1997), Tasche (1999), Mina (2002), Hallerbach (2003), Zhang e Rachev (2004) e Meucci (2006).

3.1.1 Medidas de Risco

O lucro de um potfolio Π_t em um dado momento t, correspondente ao acumulado entre t-1 e t, é uma função do universo de n ativos $\{\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n\}$ e suas respectivas exposições representados como um vetor x $(n \times 1)$.

$$\Pi_t = x^\intercal R_t \tag{3.1}$$

Onde R_t é um vetor $(n \times 1)$ de retornos dos ativos no momento t. Isto implica que uma medida de risco também é uma função $\mathcal{R}$ das exposições x, e dentro destas medidas temos a mais popular que é a volatilidade (também conhecida como *tracking error* em alocações baseadas em *benchmarks*):

$$\mathcal{R}(x) = \sigma(x) = \sqrt{x^\intercal \Sigma x} \tag{3.2}$$

onde Σ é a matriz de covariância associada aos retornos dos ativos. Este estudo irá utilizar principalmente a medida de risco da volatilidade, mas alternativamente poderíamos utilizar outras medidas também populares como o *value at risk* (*VaR*):

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{Q}_{-x^\intercal R_t}(c) \tag{3.3}$$

onde $\mathcal{Q}_{-x^\intercal R_t}$ é o quantil associado à função do lucro e c é o intervalo de confiança. Além do *VAR* temos o *expected shortfall* (*ES*)(também conhecido como *conditional value*

at risk):

$$\mathcal{R}(x) = \mathbb{E}\left\{-x^{\intercal}R_t \mid -x^{\intercal}R_t \geq \mathcal{Q}_{-x^{\intercal}R_t}(c)\right\} \tag{3.4}$$

A escolha da medida de risco está vinculada a presença de propriedades desejadas ao se gerenciar riscos, que são a homogeneidade e a sub-aditividade[1], ou seja, mantendo o peso relativo entre cada ativo, o risco total aumenta proporcionalmente à medida que aumentamos a exposição total x e conseguimos particionar o risco total de modo a obter as participações do risco de cada ativo (as suas contribuições ao risco individuais). Tasche (1999) demonstra que a representação apropriada para se obter estas propriedades é a derivada parcial de primeira ordem da medida de risco escolhida em relação ao peso das alocações (ou a contribuição marginal ao risco), que apresentamos a seguir.

3.1.2 Contribuição de Risco

Dada uma medida de risco homogênea de grau 1 e diferenciável $\mathcal{R}(x)$, a contribuição marginal ao risco de um ativo do portfolio com exposição x_i é definida como $\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x_i}$, e satisfaz a decomposição de Euler:

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x} x \tag{3.5}$$

sendo cada $x_i \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x_i}$ a contribuição total do risco de cada ativo$\mathcal{RC}(\mathcal{A}_i)$ no portfolio.

No caso de $\mathcal{R}(x)$ ser a volatilidade do portfolio $\sigma(x) = \sqrt{x^{\intercal}\Sigma x}$ temos:

$$\mathcal{RC}(\mathcal{A}_i) = x_i \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^{\intercal}\Sigma x}} \tag{3.6}$$

Em outras palavras, com esta definição conseguimos decompor o risco total na soma de contribuições individuais de cada ativo. Quando, o número de ativos é grande, há situações que gostaríamos de visualizar o risco decomposto em fatores, que são agregações destes ativos, por exemplo, as setoriais em um portfolio de ações.

3.1.3 Contribuições de Risco da Agregação dos Ativos

Dado um conjunto de l agregações $\{N_1, ..., N_l\}$, que são exaustivas e mutuamente exclusivas no espaço de n ativos A, pela equação 3.5 podemos definir a contribuição de

[1] Ver Artzner et al. (1999) para uma discussão mais completa sobre medidas coerentes de risco.

risco de uma agregação N_z, para um z entre 1 e l, como a soma das contribuições de risco dos ativos que participem desta agregação.

$$\mathcal{RC}(N_z) = \sum_{i \in N_z} x_i \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x_i} \tag{3.7}$$

Além destas agregações, também temos situações que gostaríamos de obter as contribuições de risco de m fatores de riscos $\{\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_m\}$ que possuem uma relação linear com os retornos dos ativos originais; por exemplo, em um portfolio de renda fixa, as contribuições dos 3 primeiros componentes principais de uma curva de juros de *bonds*. Estes 3 primeiros componentes principais representam as variações de nível, inclinação e envergadura da estrutura da curva de juros[2]. Neste estudo também surge esta necessidade quando verificamos as contribuições de risco de um portfolio de ações sobre os fatores de risco descritos em Fama e French (2015), e para obter estas contribuições de risco seguimos a metodologia do trabalho de Roncalli e Weisang (2012), apresentada na seção seguinte, que se aplicam tanto a conjuntos completos e parciais de novos fatores de riscos, ou seja, a quantidade de fatores de risco $m \leq n$.

3.2 Decomposição do Risco de um Portfolio em Contribuições de Fatores de Riscos

Iniciamos a discussão com a relação dos retornos de um portfolio com os fatores de riscos, que são combinações lineares dos ativos originais.

3.2.1 Relacionando a Exposição do Portfolio com a Exposição aos Fatores de Risco

Dado um modelo linear de fatores com n ativos $\{\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n\}$ e m fatores de risco $\{\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_m\}$:

$$R_t = A\mathcal{F}_t + \varepsilon_t \tag{3.8}$$

Onde R_t é um vetor $(n \times 1)$ de retornos dos ativos $\{\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n\}$ do momento $t-1$ a t; $\mathcal{F}_t$ é um vetor $(m \times 1)$ de retornos dos fatores de risco $\{\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_m\}$; e A é a matriz de coeficientes $(n \times m)$ de R_t em relação à $\mathcal{F}_t$.

As exposições dos ativos de um portfolio são relacionadas com as exposições geradas por um grupo de fatores de risco, representadas como um vetor y $(m \times 1)$, através da

[2] Ver discussão em Golub e Tilman (1997) sobre utilização de análise de componentes principais (PCA) no contexto de análise de curvas de juros.

função de lucro do portfolio e da relação linear entre os retornos e os fatores de risco nas definições 3.1 e 3.8:

$$\Pi_t = x^\intercal R_t = x^\intercal A\mathcal{F}_t + x^\intercal \varepsilon_t = y^\intercal \mathcal{F}_t + \eta_t$$

com $y = A^\intercal x$ e $\eta_t = x^\intercal \varepsilon_t$. Definimos também $B = A^\intercal$ e B^+ a pseudo-inversa de Moore-Penrose[3] de B. Com isto descrevemos a relação da exposição dos ativos de um portfolio com a de seus fatores de risco como:

$$x = B^+ y + e \tag{3.9}$$

sendo $e = (I_n - B^+B)x$ um vetor $(n \times 1)$ no núcleo de B. Mas a relação 3.9 não é muito conveniente, portanto assim como Roncalli e Weisang (2012) que se inspiraram no trabalho de Meucci (2006), utilizamos um $\tilde{B}$ que é qualquer matriz $n \times (n-m)$, cujas colunas são geradoras do núcleo de B^+.

Para determinar $\tilde{B}$, calculamos a matriz transposta do núcleo de B utilizando a decomposição de valor singular (SVD) sobre a matriz B, que decompõe B em $B = U\Sigma V^*$. Onde as colunas de V que correspondem a valores singulares pequenos (pequenos valores na digonal de Σ) são aqueles que compõe a base do núcleo de B. Alternativamente poderíamos utilizar a decomposição QR, que é um algoritmo de decomposição de uma matriz em uma matriz Q ortogonal e uma matriz R triangular superior, onde neste caso dado r o posto da matriz B, as últimas $(n-r)$ colunas de Q compõem o núcleo de B.

Esta matriz $\tilde{B}$ é utilizada para concatenar com a matriz B, que seria o equivalente a obter uma matriz $\bar{B}$ com dimensões $n \times n$. Também determinamos um $\bar{y}$, onde os primeiros m elementos serão as exposições y procuradas e os $(n-m)$ elementos remanescentes serão um vetor $\tilde{y}$, que são exposições a fatores desconhecidos remanescentes, que denominaremos como $\tilde{\mathcal{F}}_t$. Este procedimento é equivalente a partir da relação linear 3.8 reescrita como:

$$R_t = \begin{pmatrix} A & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_t \\ \tilde{\mathcal{F}}_t \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Com isto, ao invés de 3.9, chegamos na nova relação reescrita como:

$$x = (B^+ \quad \tilde{B}^+) \begin{pmatrix} y \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Com a relação entre as exposições dos ativos e do novo conjunto de fatores de riscos descritos em 3.11, podemos passar a para a relação entre estas exposições no contexto das medidas de riscos e suas contribuições marginais.

[3] Para mais detalhes ver: http://mathworld.wolfram.com/Moore-PenroseMatrixInverse.html

3.2.2 Contribuição do Risco dos Fatores de Risco

Dadas uma medida de risco homogênea de grau 1 e diferenciável $\mathcal{R}$ e a decomposição 3.11, temos a relação entre a contribuição marginal do risco de cada fator de risco com as contribuições marginais do risco dos ativos originais do portfolio da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial y} B + \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial \tilde{y}} \tilde{B} \tag{3.12}$$

E a decomposição de Euler de $\mathcal{R}(x)$ nas novas coordenadas $(y, \tilde{y})$ resulta em:

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial y} y + \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial \tilde{y}} \tilde{y} \tag{3.13}$$

A contribuição de risco de cada fator $\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j)$ é definida como $y_j \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial y_j}$ e dos fatores adicionais $\mathcal{RC}(\tilde{\mathcal{F}}_j)$ como $\tilde{y}_j \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial \tilde{y}_j}$. E a partir da relação 3.12 Roncalli e Weisang (2012) demonstram que:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial y_j} = \left(A^{+} \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x^{\intercal}} \right)_j \tag{3.14}$$

e para os fatores adicionais:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial \tilde{y}_j} = \left(\tilde{B} \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x^{\intercal}} \right)_j \tag{3.15}$$

Tendo as definições 3.14 e 3.15 podemos verificar como ficam as contribuições de risco dos fatores $\mathcal{F}_j$ e seus fatores adicionais $\tilde{\mathcal{F}}_j$, para a medida de risco sendo a volatilidade do portfolio:

$$\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) = \frac{(A^{\intercal} x)_j (A^{+} \Sigma x)_j}{\sigma(x)} \tag{3.16}$$

$$\mathcal{RC}(\tilde{\mathcal{F}}_j) = \frac{(\tilde{B} x)_j (\tilde{B} \Sigma x)_j}{\sigma(x)} \tag{3.17}$$

Com a possibilidade de calcular as contribuições de risco dos fatores à partir de um portfolio de ativos, voltamos a atenção agora à construção de portfolios que, satisfaçam critérios de alocações de contribuições de riscos de determinados fatores, ou seja, que consiga performar a estratégia de RB sobre as contribuições de riscos dos fatores $\mathcal{F}_j$.

3.3 Construção de Portfolio através de *Risk Factor Budgeting*

O objetivo nesta seção é descrever a metodologia para obtenção de um portfolio cujas contribuições de risco estejam de acordo com um vetor de pesos b ($m \times 1$), ou seja,

$$\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) = b_j \mathcal{R}(x) \tag{3.18}$$

Começamos mapeando a medida de risco $\mathcal{R}(x)$ para $\mathcal{R}(y, \tilde{y})$, pois conseguimos calcular x a partir de y e $\tilde{y}$ pela equação 3.11. E para encontrar portfolios que respeitem as contribuições de risco desejadas, utilizamos a formulação geral das restrições como um problema quadrático, conforme inicialmente proposto em Roncalli e Weisang (2012).

$$(y^*, \tilde{y}^*) = argmin \sum_{j=1}^{m} (\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) - b_j \mathcal{R}(y, \tilde{y}))^2 \tag{3.19}$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 1^\intercal B^+ y + 1^\intercal \tilde{B}^+ \tilde{y} = 1 \\ B^+ y + \tilde{B}^+ \tilde{y} \preceq 1 \end{cases}$$

onde $\preceq$ é uma desigualdade componente a componente. Para uma otimização *long-only* adicionamos a restrição $0 \preceq B^+ y + \tilde{B}^+ \tilde{y}$.

Em seu trabalho Roncalli e Weisang (2012) também demonstram outra abordagem onde se altera o problema da seguinte maneira:

$$(y^*, \tilde{y}^*) = argmin \mathcal{R}(y, \tilde{y}) \tag{3.20}$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} b_j ln y_j \geq c \\ y \preceq 0 \end{cases}$$

mas neste estudo não exploramos a utilização desta otimização 3.20 e sim utilizamos a formulação mais geral 3.19.

3.3.1 Aplicando a medida de risco da volatilidade

Utilizando a relação 3.11 e partindo do risco do portfolio por seus pesos x:

$$\mathcal{R}(x) = \sqrt{x^\intercal \Sigma x} = \sqrt{(B^+ y + \tilde{B}^+ \tilde{y}) \Sigma (B^+ y + \tilde{B}^+ \tilde{y})} = \mathcal{R}(y, \tilde{y}) \tag{3.21}$$

E utilizando o cálculo de $\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j)$ 3.16 obtemos a seguinte formulação:

$$
\begin{aligned}
(y^*, \tilde{y}^*) = argmin \sum_{j=1}^{m} (& \frac{(A^\intercal(B^+y + \tilde{B}^+\tilde{y}))_j (A^+\Sigma(B^+y + \tilde{B}^+\tilde{y}))_j}{\sqrt{(B^+y + \tilde{B}^+\tilde{y})\Sigma(B^+y + \tilde{B}^+\tilde{y})}} \\
& - b_j\sqrt{(B^+y + \tilde{B}^+\tilde{y})\Sigma(B^+y + \tilde{B}^+\tilde{y})})^2
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

$$
\text{s.a.} \begin{cases} 1^\intercal B^+y + 1^\intercal \tilde{B}^+\tilde{y} = 1 \\ B^+y + \tilde{B}^+\tilde{y} \preceq 1 \end{cases}
$$

Para obter a solução do problema quadrático 3.22 utilizamos o algoritmo de Programação Sequencial Quadrática (*sqp*)[4] e são obtidos numericamente portfolios que satisfaçam as contribuições de riscos desejadas.

Uma vez definida a metodologia para obtenção dos portfolios que satisfaçam o *RB* sobre fatores de riscos, descrevemos na seção a seguir, a construção de fatores que utilizamos neste estudo, que são baseadas nos fatores de Fama e French (2015), mas aplicados ao mercado de ações brasileiro.

3.4 Five Factor Asset Pricing Model

O modelo de Fama e French (2015) tem como objetivo descrever a relação entre retornos médios e características dos ativos financeiros, que, não são explicadas pelo modelo CAPM definido por Sharpe (1964) e Lintner (1965), que utilizam apenas o fator de mercado (Mkt) para explicar as relações dos retornos *cross section*.

Estas características incluem as originalmente descritas por Fama e French (1993) que são o tamanho para definir o fator de tamanho (SMB) e o *book-to-market ratio*(B/M) para definir o fator de valor (HML). Além disso foram incluídas *operating profitability*(Op) para descrever o fator da rentabilidade operacional (RMW) e *investment*(Inv) para o fator do grau de investimento (CMA).

O fator de tamanho procura capturar uma diferença de retorno dado os tamanhos das empresas, este raciocínio é construído sobre a intuição de que investidores exigem taxas de descontos maiores para empresas menores que representariam um risco adicional quando comparadas às empresas maiores.

Já a razão B/M procura capturar a diferença entre empresas que estão subvaloriza-das (B/M alto, valor de mercado baixo comparado contra o patrimônio líquido contábil) , e empresas de crescimento (B/M baixo, o que indica estar no preço da empresa crescimento futuro em relação ao patrimônio líquido contábil atual).

[4] Método de otimização não linear com uma abordagem iterativa. Ver Nocedal e Wright (2006) para mais detalhes.

As duas características adicionadas posteriormente procuram capturar um diferencial de taxa de desconto entre empresas que estão com seus lucros operacionais robustos e aqueles que não estão, e também diferenças nas características de quanto as empresas investem, na intuição de que empresas que são mais conservadoras em suas políticas de investimento possuem taxas de descontos menores que as que são mais agressivas.

As características acima no longo prazo devem gerar um diferencial de retorno, proveniente da diferença das taxas de retorno, chamadas de anomalias de mercado. O modelo tenta capturar estas anomalias descrevendo que o excesso de retorno de um ativo ou portfólio seguem uma relação linear com os fatores descritos acima, que são determinadas pela regressão das séries de tempo dos fatores na seguinte forma:

$$R_{it} - R_{Ft} = a_i + b_i(R_{mt} - R_{Ft}) + s_i SMB_t + h_i HML_t + r_i RMW_t + c_i CMA_t + e_{it} \quad (3.23)$$

Onde $R_{it} - R_{Ft}$ representa o excesso de retorno do ativo i do momento $t-1$ a t em relação ao retorno do ativo livre de risco; $R_{mt} - R_{Ft}$ representa o excesso de retorno do portfolio de mercado do momento $t-1$ a t em relação ao retorno do ativo livre de risco; SMB_t é o excesso de retorno do fator *SMB* do momento $t-1$ a t; HML_t é o excesso de retorno do fator *HML* do momento $t-1$ a t, RMW_t é o excesso de retorno do fator *RMW* do momento $t-1$ a t; CMA_t é o excesso de retorno do fator *CMA* do momento $t-1$ a t; b_i, s_i, h_i, r_i e c_i representam as exposições do ativo i em relação aos fatores de risco; e_{it} o erro padrão do ativo i do momento $t-1$ a t e a_i o resíduo.

Para a construção dos fatores utilizamos dados de dezembro de 1999 a junho de 2016 que foram obtidos na Bloomberg, e os ativos considerados são todas as empresas que já foram em algum momento listados no índice Ibovespa, e para o retorno do portfolio de mercado (*Mkt*) também utilizamos o índice Ibovespa. Para cada um destes ativos, obtém-se, dados de fechamento mensais de preços das ações, capitalização de mercado, valor patrimonial, resultado operacional e ativos totais. Para o retorno do ativo livre de risco foi utilizado a taxa CDI.

Filtramos este conjunto de ativos ano a ano, mantendo apenas as empresas que tenham os dados contábeis de novembro e dezembro do ano anterior e que os preços estejam disponíveis de junho do ano corrente até julho do ano seguinte para todos os fechamentos de meses daquele período. Removemos também da base de dados as empresas ligadas a finanças, por estes possuírem características diferentes no balanço ligados à natureza da atividade. Esta listagem final consiste em 193 ativos, e com esta base de dados estimamos os cinco fatores de *Fama&French*.

Construímos portfolios com intuito de capturar apenas as anomalias de mercado que advém das características listadas para cada um dos fatores, tamanho, *book-to-market*

ration B/M, *operating profitability Op*[5] e *investment Inv*[6].

Estes portfolios são construídos a cada ano através do seguinte procedimento:

1. Criamos um portfolio ordenado pela característica do tamanho, ou seja, pelo *Market Cap*.
2. Dividimos este portfolio pela mediana do *Market Cap*, obtendo-se 2 portfolios chamados de pequeno(S) e grande(B).
3. Ordenamos independentemente os 2 portfolios obtidos pela característica de B/M.
4. Dividimos estes 2 portfolios em 4 portfolios, cada um pela sua mediana obtida pela ordenação do B/M. Com isto, obtemos para cada um dos dois portfolios um portfolio baixo(L) e alto(H), resultando em 4 portfolios (separação 2 x 2): pequeno e baixo (SL), pequeno e alto (SH), grande e baixo (BL) e grande e alto(BH).
5. Continuamos este mesmo procedimento, só que desta vez para a característica que indica Op, obtendo a próxima separação 2 x 2 x 2 que resulta em 8 portfolios.
6. Por último aplicamos este mesmo procedimento, para a característica que indica Inv, obtendo a separação final 2 x 2 x 2 x 2 que resulta em 16 portfolios.

A construção dos fatores SMB, HML, RMW e CMA se dão pela combinação dos 16 portfolios resultantes e são construídos tirando a média dos excessos de retornos entre portfolios com as características que desejamos isolar, e o resultado do fator é a diferença entre estes portfolios agrupados. Este procedimento é ilustrado a seguir:

$$\begin{aligned} SMB = {} & (SHRC + SHRA + SHWC + SHWA + SLRC + SLRA + SLWC + SLWA)/8 \\ & -(BHRC + BHRA + BHWC + BHWA + BLRC + BLRA + BLWC + BLWA)/8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} HML = {} & (SHRC + SHRA + SHWC + SHWA + BHRC + BHRA + BHWC + BHWA)/8 \\ & -(SLRC + SLRA + SLWC + SLWA + BLRC + BLRA + BLWC + BLWA)/8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RMW = {} & (SHRC + SHRA + SLRC + SLRA + BHRC + BHRA + BLRC + BLRA)/8 \\ & -(SHWC + SHWA + SLWC + SLWA + BHWC + BHWA + BLWC + BLWA)/8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CMA = {} & (SHRC + SHWC + SLRC + SLWC + BHRC + BHWC + BLRC + BLWC)/8 \\ & -(SHRA + SHWA + SLRA + SLWA + BHRA + BHWA + BLRA + BLWA)/8 \end{aligned}$$

[5] A métrica utilizada foi o LAJI (lucro antes de juros e impostos - *EBIT*

[6] A métrica utilizada foi a variação dos ativos totais.

Onde cada letra de um portfolio representa a partição da ordenação do portfolio que contém, por exemplo, o portfolio $SHRC$ foi subdividido primeiro nos menores em relação ao tamanho dos ativos do portfolio (S), seguido dos mais altos em B/M na segunda divisão (H), seguido dos que possuem melhor rentabilidade operacional (R) na terceira divisão e por último os mais conservadores em grau de investimento (C) na última divisão.

Ressaltamos que este procedimento de separação dos portfolios 2 x 2 x 2 x 2 difere do trabalho original de Fama e French (2015), onde eles realizam a separação ordenando os fatores primeiro por tamanho em 2 partes e em seguida por 1 das outras 3 características, separando em 3 portfolios, o que resulta em uma separação 3 x 2. Na construção dos fatores que são separados em 3, são agrupados os portfolios pela ordenação dos 2 portfolios na ponta, eliminando o portfolio que fica no meio.

Estas separações dos portfolios pela metodologia 3 x 2, descartam uma parte da base na estimação dos fatores de B/M, Op e Inv; e alteramos esta metodologia para a separação de 2 x 2 x 2 x 2, pois na base original eles contavam com no mínimo 900 ações durante todo o período, onde neste estudo contamos com apenas 193 ações em nossa base.

A construção dos fatores resulta em séries históricas com retornos mensais de cada um dos fatores, e com isto em mãos iniciamos a estimação de parâmetros que serão utilizados na fase de atribuição do risco.

3.5 Estimação de Parâmetros e Portfolios Testados

Nesta seção descrevemos os procedimentos utilizados para estimar os parâmetros das análises dos estudos e os portfolios parametrizados para implementação do arcabouço de *Factor Risk Budgeting* que exploramos extensamente nas seções 3.2 e 3.3.

Estimamos mês a mês a covariância[7] à partir do log-retorno mensal dos ativos e dos fatores de janeiro de 2002 até dezembro de 2016, utilizando uma janela móvel de 24 meses e excluindo os ativos que nesta data não tivessem a quantidade de dados da janela móvel de 24 meses. Com isto obtemos a matriz de covariância dos ativos Σ ao longo do tempo.

Para a mesma janela de dados e para cada ativo parametrizamos um portfolio com 100% de peso deste único ativo e estimamos pelo método dos mínimos quadrados ordinários os coeficientes dos retornos deste portfolio contra os 5 fatores de risco estimados, obtendo a matriz de coeficientes A ao longo do tempo.

Construímos o portfolio *equal-weighted*(EW ou 1/N) para ser nosso *benchmark* em relação à performance dos portfolios que serão testados, mas para que este portfolio seja comparável com os demais, iremos excluir os ativos que no momento t não tiverem

[7] Para esta estimação utilizamos a covariância amostral.

dados suficientes para calcularmos sua covariância na janela determinada acima, além disso iremos rebalancear todo mês. Para este portfolio verificamos mês a mês a contribuição do risco de cada fator de risco ao longo do tempo.

Além do portoflio *EW*, também iremos construir como *benchmark* o portfolio de mínima variância (MV) através da otimização irrestrita de *Markowitz*, rebalanceando-o todo mês.

Utilizando o arcabouço de *Factor Risk Budgeting* iremos construir portfolios que terão como objetivo manterem ao longo do tempo as contribuições de riscos alvos indicados na tabela 1 logo abaixo, e para tal serão rebalanceados mês a mês. Estes portfolios serão construídos inicialmente mantendo a restrição *long-only* para primeiro compararmos em um ambiente sem alavancagem extra e em seguida iremos repetir o procedimento sem a restrição *long-only* de forma a permitir alavancagem caso necessário.

O objetivo do portfolio indicado como *ERC* - *equal risk contributions ou risk parity* é de se diversificar igualmente pelas contribuições de risco dos 5 fatores de *Fama%French*. Com isto esperamos estudar as implicações, sob a ótica de risco, de se diversificar nesses cinco fatores; e além disso verificar se conseguimos reproduzir através da alocação por contribuição de risco em nível de ativos, o comportamento original dos cinco fatores.

Os demais portfolios tem como objetivo exposição em risco equivalente em quatro dos cinco fatores de *Fama&French*. Isto visa verificar o efeito de neutralizar um dos fatores, e como se comportam as contribuições de risco e os pesos destes, ao se remover um dos fatores.

Os portfolios que pretendemos construir e suas respectivas contribuições de risco alvos podem ser encontrados na tabela 1 abaixo.

Tabela 1 – *Risk Budgets Alvos de Portfolios deste Estudo*

Fatores →	*Mkt*	*SMB*	*HML*	*RMW*	*CMA*
ERC	20%	20%	20%	20%	20%
ex-Market	0%	25%	25%	25%	25%
ex-SMB	25%	0%	25%	25%	25%
ex-HML	25%	25%	0%	25%	25%
ex-RMW	25%	25%	25%	0%	25%
ex-CMA	25%	25%	25%	25%	0%

Em nenhum dos experimentos consideramos custos de transação na construção das carteiras.

4 Resultados

4.1 Fatores de *Fama&French*

Retornos mensais de cada um dos 16 portfolios resultantes da construção dos fatores de *Fama&French* foram calculados. Suas médias e desvios padrões podem ser encontrados no apêndice A, mas ao invés de analisá-los isoladamente, agrupamos-os em 8 portfolios utilizando um procedimento similar ao descrito na seção 3.4, que representam cada uma das características dos 4 fatores além do mercado. Chamamos estes agrupamentos de subfatores e os apresentamos na tabela 2, que permite analisarmos cada característica isoladamente.

Tabela 2 – Médias e Desvios Padrões dos Portfolios de *Fama&French* Agrupados por Características - jun/2000 - mai/2016

Portfolio	Média	Desvio Padrão	Observações
Pequeno	(0.04)	6.82	192
Grande	(0.26)	6.17	192
Alto	(0.27)	6.90	192
Baixo	(0.03)	6.11	192
Robusto	0.21	6.06	192
Fraco	(0.50)	6.84	192
Conservador	0.06	5.92	192
Agressivo	(0.35)	6.93	192
Mkt	(0.23)	7.15	192

(a) Retornos mensais em excesso ao ativo livre de risco dos portfolios agrupados pelas características de tamanho, B/M, Op e Inv respectivamente.

Pela tabela 2, para os subfatores de tamanho, encontramos um retorno maior para Pequeno do que Grande. Este resultado está em linha com os resultados encontrados em Fama e French (2015).

Para os subfatorers de B/M encontramos um retorno menor para Alto do que Baixo, onde a diferença entre os dois apresenta sinal oposto aos resultados encontrados por Fama e French (2015) para o mercado americano. Resultados similares para o mercado brasileiro foram encontrados por Martinsa e Jr (2015) e Lagnado (2016), mas PACHECO (2015) encontra resultados similares aos de Fama e French (2015). Esta diferença pode se dar pelo tamanho da amostra utilizado em cada estudo, onde neste trabalho utilizamos 196 ativos que já foram em algum momento listados no índice Ibovespa, Martinsa e Jr (2015) e Lagnado (2016) utilizam os 100 ativos mais líquidos do índice Ibovespa, enquanto

que PACHECO (2015) utiliza uma amostra de 1244 ativos que já foram listadas em algum momento na BM&F Bovespa durante o período analisado por seu trabalho.

Para os subfatores de Op e Inv encontramos resultados em linha com Fama e French (2015) onde os subfatores Robusto e Conservador possuem retornos positivos enquanto que os subfatores Fraco e Agressivo possuem retornos negativos.

Encontramos um resumo das médias, desvios padrões e % de retornos acima de zero dos fatores resultantes da construção dos 5 fatores de *Fama&French* na tabela 3 abaixo. Aonde verificamos, os fatores de SMB, RMW e CMA positivos e HML e Mkt negativos, consistentes com a discussão acima. Os fatores de RMW e CMA possuem maior porcentual de retornos acima do zero, sendo estes 59% e 56% respectivamente.

Tabela 3 – Médias e Desvios Padrões dos Cinco Fatores de *Fama&French* - jun/2000 - mai/2016

Portfolio	Média	Desvio Padrão	% Ret. > 0	Observações
SMB	0.22	3.75	52	192
HML	(0.24)	3.84	46	192
RMW	0.71	3.42	59	192
CMA	0.41	3.30	56	192
Mkt	(0.23)	7.15	48	192

As evoluções dos fatores de riscos ao longo do tempo (retornos mensais acumulados) resultantes são exibidas na figura 2. E vale notar que ao verificamos o fator de SMB, apesar de possuir resultado final positivo no período todo, durante o período de 2000 até 2010, verificamos tendência de retornos positivos e durante o período de 2011 até mai/2016, esta relação de retornos entre os subfatores Pequeno e Grande se invertem e resultam em resultados negativos para o fator de SMB. Além disso podemos verificar que os fatores de RMW quanto CMA são mais consistentemente positivos ao longo do período analisado, consistente com o fato de que possuem os maiores porcentuais de retornos acima do zero.

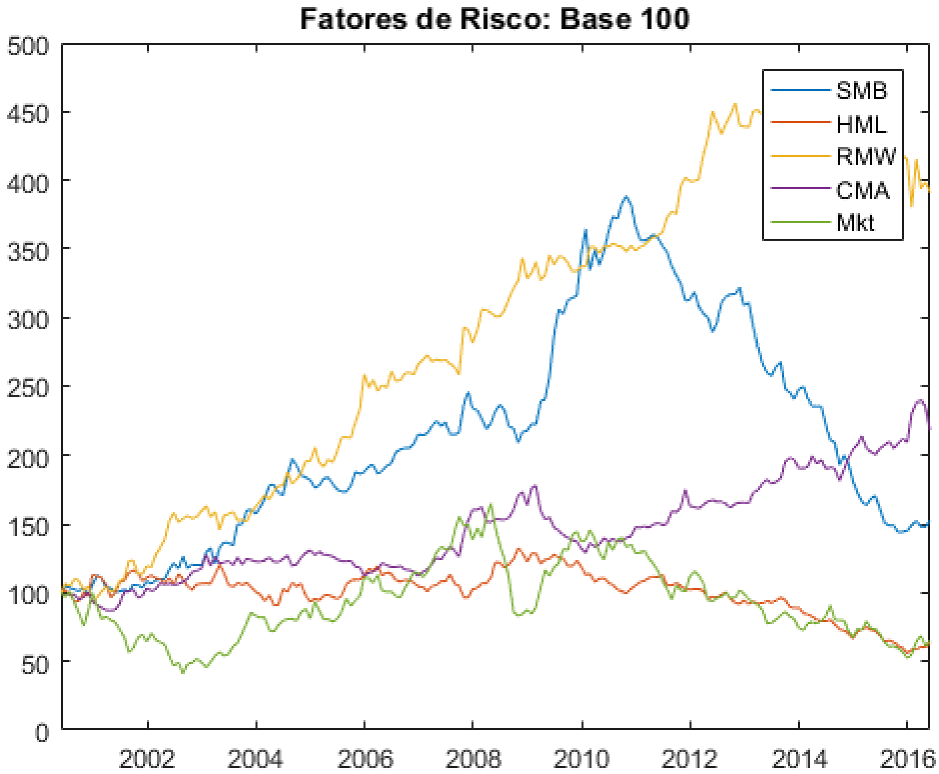


Figura 2 – Evolução dos fatores de risco desde junho 2000.

Além disso analisamos as correlações entre os fatores, que sumarizamos na tabela 4 abaixo.

Tabela 4 – Correlação dos Cinco Fatores de *Fama&French* - jun/2000 - mai/2016

	SMB	HML	RMW	CMA	Mkt
SMB	1.00	0.05	(0.08)	(0.16)	(0.06)
HML	0.02	1.00	(0.23)	0.05	0.13
RMW	(0.05)	(0.23)	1.00	0.20	(0.22)
CMA	(0.16)	0.05	0.20	1.00	(0.29)
Mkt	(0.06)	0.13	(0.22)	(0.29)	1.00

Apesar de não serem independentes por construção, observamos correlações relativamente baixas entre -0.29 e 0.20. O que reforça a busca pela diversificação com uma carteira composta por contribuições de riscos a estes fatores.

Não faz parte do escopo deste trabalho verificar a validade do modelo de cinco fatores em relação ao seu poder explicativo e inexistência de constante diferente de zero. Então não realizamos os testes de existência de constante ao se estimar os coeficientes das regressões dos 16 portfolios em relação aos cinco fatores. Ao invés disso, exploramos a seguir os resultados obtidos da aplicação de *Risk Factor Budgeting* utilizando os cinco fatores estimados como fatores de risco.

4.2 Performance do *Risk Factor Budgeting*

4.2.1 Resultados Gerais de Performance

A tabela 5 demonstra a performance e estatísticas de riscos do portfolio de mercado(Mkt), das duas estratégias de controle de *EW* e MV, além das 6 estratégias de *Risk Factor Budgeting ERC*, *ex-Market*, *ex-SMB*, *ex-HML*, *ex-RMW* e *ex-CMA*. A tabela possui 3 seções, sendo a primeira para o portfolio de mercado e as estratégias de controle, a segunda seção para os portfolios de *Risk Factor Budgeting* com a restrição de *long-only* e a terceira seção é equivalente à segunda, mas sem a restrição *long-only*. Para analisar a performance ajustada pelo risco de um portfolio medimos o retorno acumulado (Ret) demonstrado ao mês, sua volatilidade ao mês (Vol) e o índice de Sharpe (Sharpe) composto pelos dois, além disso para sua performance ajustada pelo risco em relação ao mercado, medimos seu retorno em excesso ao mercado ao mês (Ret Excesso), o *tracking-error* em relação ao mercado ao mês (TE) e o Information Ratio (IR) que é o índice calculado pela divisão do Retorno em Excesso em relação ao *tracking-error*. Também estamos interessados em verificar a performance da mitigação de grandes quedas nos preços, como por exemplo, a ocorrida em 2008 na crise do *sub-prime*, que é medida pela métrica de *maximum drawdown*(MDD), onde esta métrica refleti a maior queda acumulada dentro do período de 1 ano.

Dentro das estratégias com restrição *long-only*, nenhuma gerou retorno positivo no período, portanto nenhuma estratégia teve retorno maior que a do *Mkt*, nem em retorno ou retorno ajustado pelo risco, apesar de todas as estratégias verificarem redução de volatilidade em relação a este.

Nas estratégias sem restrição *long-only* verificamos que a estratégia de *ex-Mkt* tem o índice de Sharpe marginalmente melhor que o mercado, apresentando um retorno de 0,11% e volatilidade de 5,52%, que resultam em um índice de sharpe de 0,019, contra os 0,016 do *Mkt*. Além disso verificamos que todas as estratégias de *risk factor budgeting* obtiveram melhores índices de sharpe quando comparados à suas contrapartes com restrição *long-only*.

Devido à peculiaridade do período analisado de possuir retorno do mercado acumulado muito próximo de zero (retorno mensal de 0,11%), a análise de retorno ajustado por risco (pelo índice de Sharpe) teve pouca sensibilidade, mas obtivemos nas estratégias de *risk factor budgeting* retornos próximos ao de mercado e com volatilidades menores que as de mercado e da estratégia de *EW*.

Esta baixa sensibilidade não condiz com os resultados esperados se tivéssemos reproduzido o efeito dos fatores de risco com sucesso, pois, dados os retornos e riscos dos fatores apresentados na tabela 3, esperávamos encontrar uma diferenciação maior dos retornos em relação ao fator de mercado, à medida que a alocação das contribuições de riscos tenderiam mais aos fatores de SMB, HML, RMW e CMA. Esta alocação extra

se daria devido a seus menores riscos e correlações relativamente baixas entre si como constatadas na tabela 4. Também, na mesma linha, esperaríamos encontrar uma mitigação maior do risco dado a combinação de fatores que possuem riscos menores que a do fator de mercado, inclusive essa expectativa não se confirma ao verificamos os MDDs.

Todas as máximas perdas são obtidas no período de 2008 a 2009 durante a crise do *sub-prime*, verificando perdas de até 50% do portfolio no caso do *Mkt* e *ex-CMA* sem a restrição *long-only*. Todas as outras estratégias listadas tiveram um MDD menor que os dois, sendo as estratégias de *ex-Mkt*, *ex-SMB* e *ex-HML* sem restrição *long-only* as mais bem sucedidas em reduzir a perda máxima acumulada para 42%. Mas estas melhorias ainda não seriam as esperadas quando verificamos a performance dos fatores, durante 2008 e 2009, na figura 2.

Mas também temos elementos da alocação ter uma diferenciação entre os fatores ao verificamos que os maiores *tracking error* são provenientes das estratégias de *ex-Mkt*. Esta observação condiz com o fato de estarmos tentando eliminar a contribuição de risco do fator de mercado que é o *benchmark* em relação ao *tracking error*.

Tabela 5 – Performance e Estatísticas de Riscos das Estratégias de Alocação de Ativos

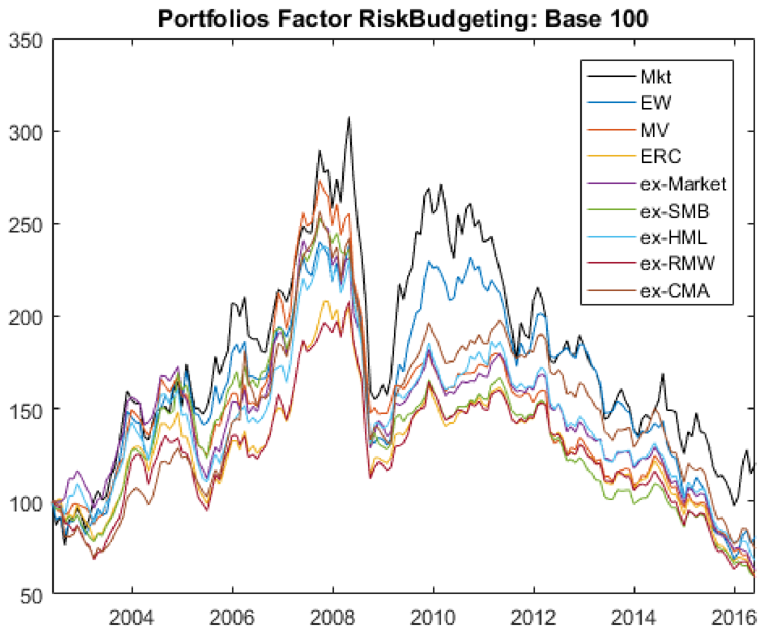
Portfolio	Ret	Vol	Sharpe	MDD(1 ano)	Ret Excesso	TE	IR
Mkt	0,11	6,82	0,016	50	-	-	-
EW	(0,13)	5,84	(0,022)	45	(0,24)	2,60	(0,091)
MV	(0,28)	4,89	(0,057)	46	(0,39)	5,48	(0,071)
long-only							
Risk Factor Budgeting	Ret	Vol	Sharpe	MDD(1 ano)	Ret Excesso	TE	IR
ERC	(0,30)	5,09	(0,059)	45	(0,41)	5,20	(0,080)
ex-Mkt	(0,28)	5,13	(0,054)	49	(0,39)	5,48	(0,071)
ex-SMB	(0,31)	4,89	(0,064)	48	(0,43)	5,24	(0,081)
ex-HML	(0,23)	4,96	(0,046)	45	(0,34)	5,10	(0,067)
ex-RMW	(0,31)	5,22	(0,060)	46	(0,43)	5,39	(0,079)
ex-CMA	(0,18)	5,61	(0,031)	48	(0,29)	5,17	(0,056)
sem restrição *long-only*							
Risk Factor Budgeting	Ret	Vol	Sharpe	MDD(1 ano)	Ret Excesso	TE	IR
ERC	0,04	5,29	0,008	46	(0,07)	5,71	(0,012)
ex-Mkt	0,11	5,52	0,019	42	(0,00)	6,60	(0,001)
ex-SMB	(0,03)	5,24	(0,006)	42	(0,14)	5,98	(0,024)
ex-HML	0,05	5,12	0,009	42	(0,06)	5,69	(0,011)
ex-RMW	0,01	5,38	0,001	44	(0,10)	5,73	(0,018)
ex-CMA	(0,04)	5,36	(0,008)	50	(0,16)	5,27	(0,029)

(a) Esta tabela demonstra performance e estatísticas de risco das estratégias utilizando *Risk Factor Budgeting* de junho/2002 a maio/2016. Retorno(Ret), Volatilidade(Vol), Retorno em Excesso ao *benchmark* (Ret Excesso) e o *Tracking Error* (TE) são mostrados em percentual ao mês (% a.m.), enquanto o *maximum drawdown* (MDD(1 ano)) é apresentado em percentual acumulado (%) e analisado em janelas móveis de 12 meses. Os índices de Sharpe e Information(IR) são reportados em decimais. O retorno em excesso e o *tracking error* estão sendo sendo calculados em relação ao market. Todas as estatísticas estão sendo calculadas *ex-post*.

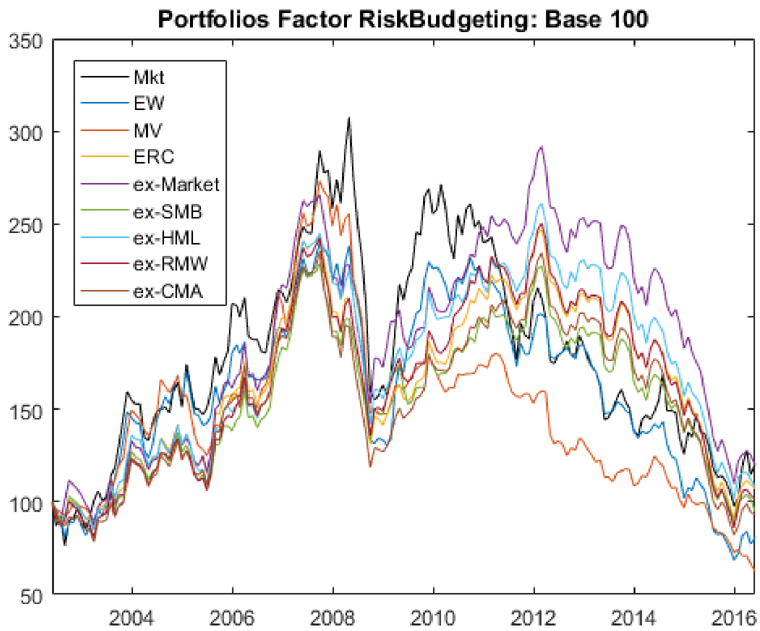
Para aprofundarmos na perfomance de cada estratégia, plotamos na figura 3a seus retornos acumulados ao longo do tempo. Onde verificamos que nenhuma das estratégias foram bem sucedidas em mitigar o MDD de forma relevante durante o período de crise de 2008 e 2009. E, além disso, chama a atenção que as estratégias de *Risk Factor Budgeting long-only* possuem todas em menor ou maior grau um comportamento similar às estratégias MV e *EW*.

Já na figura 3b, que se refere às estratégias sem restrição *long-only*, verificamos uma performance melhor das estratégias em relação ao mercado e as estratégias de *EW* e MV em um período pós crise do *sub-prime*, mas ao se aproximar de 2016, todo o ganho é devolvido e apenas a estratégia de *ex-Market* se mantém em um mesmo patamar que o mercado. Apesar de termos retornos acima das estratégias com restrição *long-only*, as performances das estratégias não aparentam reproduzir os portfolios *long-short* que levam à construção dos fatores avaliados na figura 2, o que sugere que se expor na contribuição

de risco não é necessariamente equivalente à se expor em pesos nos fatores.



(a) Evolução dos retornos com *Risk Factor Budgeting long-only*.



(b) Evolução dos retornos com *Risk Factor Budgeting* sem restrição *long-only*.

Figura 3 – Evolução dos Retornos dos Portfolios em base 100 de junho/2002 a maio/2016.

Outro efeito observado é, ao se eliminar na contribuição do risco um dos fatores de *Fama&French*, apesar das mudanças de patamares, analisando graficamente não parece trazer uma grande diferenciação entre as estratégias, o que não condiz com os comportamentos bem distintos dos fatores observados na figura 2 e suas baixas correlações observadas na

tabela 4. Para investigar mais a fundo apresentamos na tabela 6 as correlações entre as estratégias e seus *tracking errors* entre si.

Tabela 6 – Correlação (Matriz Diagonal Inferior) e *Tracking Error* (Matriz Diagonal Superior) entre as Estatégias de Alocação

long-only									
	Mkt	*EW*	MV	*ERC*	*ex-Mkt*	*ex-SMB*	*ex-HML*	*ex-RMW*	*ex-CMA*
Mkt	1,00	2,60	5,47	5,19	5,46	5,23	5,08	5,37	5,15
EW	0,93	1,00	4,22	3,78	4,10	3,87	3,66	3,85	3,79
MV	0,61	0,70	1,00	2,47	2,20	2,35	2,42	2,61	3,16
ERC	0,65	0,77	0,88	1,00	2,06	1,80	1,54	1,51	2,29
ex-Mkt	0,61	0,73	0,90	0,92	1,00	2,29	2,00	2,38	2,99
ex-SMB	0,64	0,75	0,88	0,94	0,90	1,00	2,08	2,30	2,83
ex-HML	0,67	0,78	0,88	0,95	0,92	0,91	1,00	2,21	2,97
ex-RMW	0,63	0,76	0,87	0,96	0,89	0,90	0,91	1,00	2,69
ex-CMA	0,67	0,78	0,83	0,91	0,85	0,86	0,85	0,88	1,00
sem restrição *long-only*									
	Mkt	*EW*	MV	*ERC*	*ex-Mkt*	*ex-SMB*	*ex-HML*	*ex-RMW*	*ex-CMA*
Mkt	1,00	2,60	5,47	5,69	6,58	5,96	5,68	5,71	5,26
EW	0,93	1,00	4,22	4,56	5,56	5,02	4,48	4,59	4,15
MV	0,61	0,70	1,00	3,61	4,10	3,77	3,39	3,80	3,52
ERC	0,58	0,67	0,75	1,00	1,46	1,25	1,20	1,02	1,35
ex-Mkt	0,44	0,52	0,69	0,96	1,00	1,24	1,78	1,55	2,28
ex-SMB	0,54	0,59	0,72	0,97	0,97	1,00	1,61	1,37	1,91
ex-HML	0,58	0,67	0,77	0,97	0,95	0,95	1,00	1,51	1,80
ex-RMW	0,58	0,67	0,73	0,98	0,96	0,97	0,96	1,00	1,59
ex-CMA	0,65	0,73	0,77	0,97	0,91	0,93	0,94	0,96	1,00

(a) Esta tabela compara as estratégias tendo acima da diagonal os *tracking errors* entre si e da diagonal para baixo as correlações. Todos os números se referem à estimação *ex-post* realizada de junho/2002 a maio/2016.

Nas estratégias de *risk factor budgeting* com a restrição *long-only* verificamos que todas possuem uma correlação com a estratégia de MV entre 0,83 e 0,90, com a estratégia de *EW* entre 0,73 a 0,78 e com o *Mkt* entre 0,61 a 0,67. Os *tracking errors* mantém esta ordem, dado que os menores valores estão relacionados às estratégias de MV, *EW* e *Mkt* respectivamente. Estes resultados corroboran a tese levantada pela análise gráfica de performance das estratégias de *risk factor budgeting* próximas à de MV e *EW*.

Quando analisamos as estratégias sem a restrição *long-only*, verificamos que entre si, as estratégias de *risk factor budgeting* possuem altas correlações com valores entre 0,85 e 0,96 e *tracking errors* entre 1,51% e e 2,99%. Estes resultados corroboram com a observação feita graficamente sobre a baixa diferenciação entre as estratégias, apesar de objetivarmos contribuições de riscos distintas.

Além disso, a estratégia de *ex-Mkt* possui a menor correlação de 0,44 e o maior *tracking error* de 6,58% em relação ao *Mkt*, o que atesta novamente que há algum sucesso em reduzir a contribuição do risco do fator de *Mkt*, .

Para examinar mais a fundo esta questão, iremos plotar para as estratégias de *EW*, *MV*, *ERC* e *ex-Mkt* as evoluções no tempo dos pesos alocados para cada fator de risco, a contribuição ao risco *ex-ante* por fator de risco e o peso que cada um tem no risco total das estratégias testadas.

4.2.2 Alocações e Contribuições de Riscos Resultantes

Na figura 4 verificamos a evolução do portfolio de *EW*, onde, da esquerda para a direita, o primeiro gráfico se refere à evolução no tempo do peso dos fatores de risco de *Fama&French*, o segundo demonstra a evolução do risco *ex-ante* segregado na contribuição de cada fator de risco e o terceiro demonstra a contribuição do risco normalizada para 100%. Os pesos e contribuições de risco dos fatores $\tilde{\mathcal{F}}_j$ são somados e apresentados como Outros. E em alguns momentos há a presença de contribuições de riscos negativas, o que faz com que o total dos positivos ultrapasse 100%, mas ao ser somado com os valores negativos obtemos um total de 100%.

Ao analisar as contribuições do risco, seu maior peso está no fator de *Mkt*, sendo sua participação entre 70% a 100% do risco, que é condizente com o fato de ser a estratégia com o menor *tracking error* em relação ao mercado. No peso resultante para cada fator de risco, além da participação do *Mkt*, verificamos peso relevante de SMB ao longo do tempo, mas que ao se traduzir em participação na contribuições do risco, acaba sendo bem reduzida.

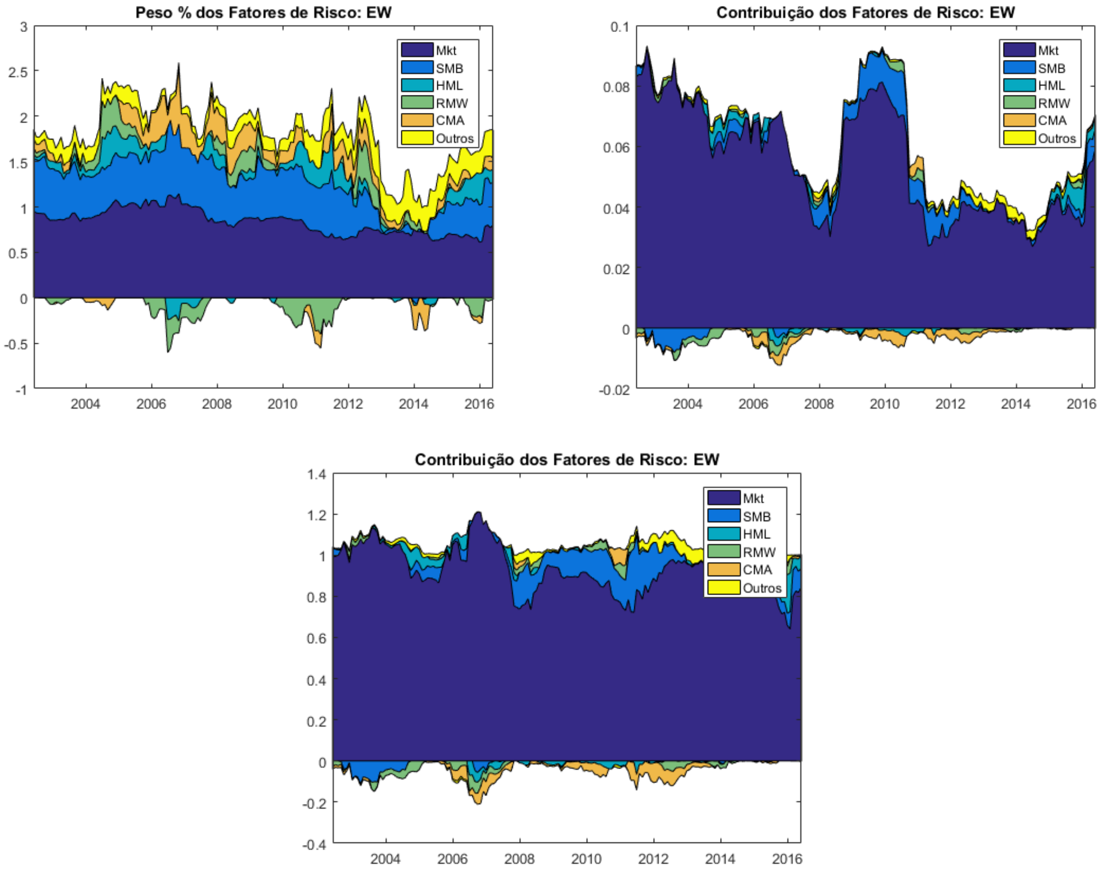


Figura 4 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *EW*.

Já na figura 5, plotamos os mesmos gráficos, mas desta vez para a estratégia MV. E verificamos uma participação na contribuição do risco de *Mkt* variando ao longo do tempo, sendo maior no período pré-crise *sub-prime* em relação ao período pós-crise. E apesar de este ser o fator mais relevante na participação da contribuição do risco entre os fatores de *Fama&French*, constatamos ao longo do tempo a participação dos fatores extras $\tilde{\mathcal{F}}$, que justificam porque a estratégia possui uma menor correlação em relação ao fator de *Mkt* do que a estratégia de *EW*. E em relação ao peso dos fatores, verificamos participações de *Mkt*, *SMB* e dos fatores $\tilde{\mathcal{F}}$ de forma mais relevante, mas que ao se traduzir em contribuições do risco, permanecem relevantes apenas o *Mkt* e fatores $\tilde{\mathcal{F}}$.

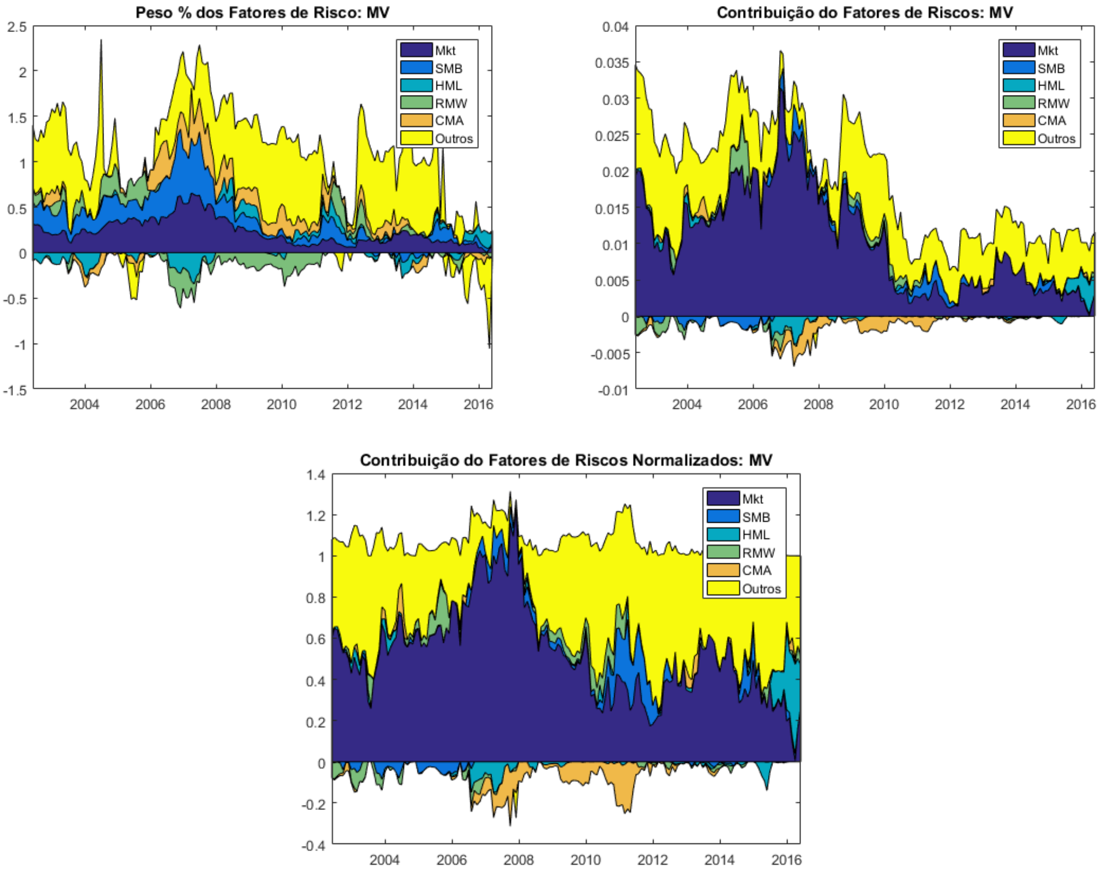


Figura 5 – Evolução das contribuições de risco do portfolio MV.

Ao analisarmos as duas estratégias *benchmark*, verificamos que a medição de contribuição de risco ao longo do tempo possuem resultados coerentes com os esperados dado as características discutidas acima. Portanto abaixo iremos analisar as contribuições de riscos obtidas pelas estratégias de *risk factor budgeting*, sob, a ótica do sucesso do procedimento em encontrar as contribuições de riscos desejadas e, além disso, procurar explicações para a aparente não reprodução dos fatores de *Fama&French*.

Iniciaremos com as contribuições de risco das estratégias de *ERC*, com e sem restrição *long-only*, que são apresentadas nas figuras 6 e 7 respectivamente. Verificamos no primeiro caso que o otimizador balancea as contribuições de riscos, mas sempre mantendo uma participação da contribuição relevante dos fatores $\tilde{\mathcal{F}}$, o que indica que com a restrição *long-only* não conseguimos encontrar alocações que satifazem os objetivos de contribuições de risco.

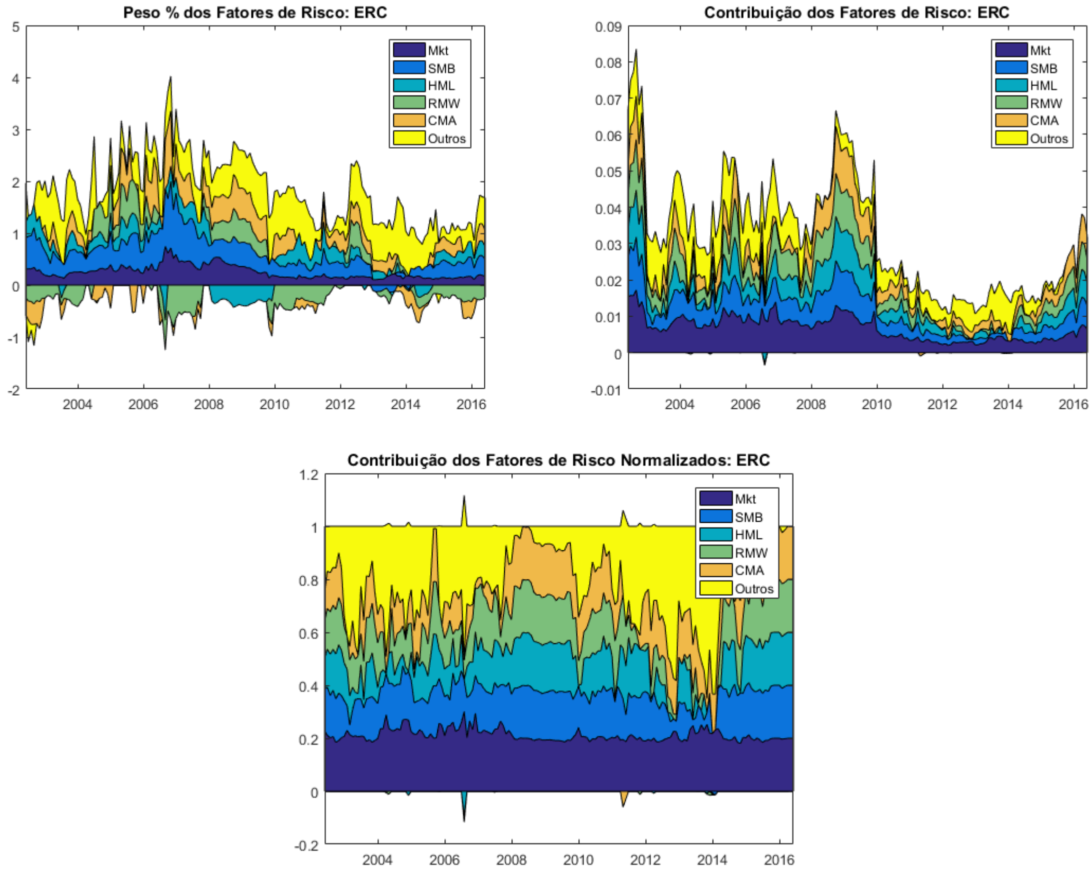


Figura 6 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ERC* com restrição *long-only*.

Enquanto que sem a restrição *long-only*, com exceção de alguns breves períodos em 2007, 2013 e 2014, o algoritmo é bem sucedido em encontrar portfolios que satisfazem os objetivos de contribuições de riscos. Mas apesar disso verificamos no peso dos fatores a presença de pesos dos fatores $\tilde{\mathcal{F}}$, que apesar de na ótica de contribuição dos riscos serem neutralizados, tornam o portfolio diferente do que se estivéssemos alocando os pesos diretamente nos portfolios que geram os fatores de *Fama&French*. Por este motivo não verificamos os patamares de retornos acima do mercado que são obtidos pelos fatores de *RMW*, *CMA* e *SMB*.

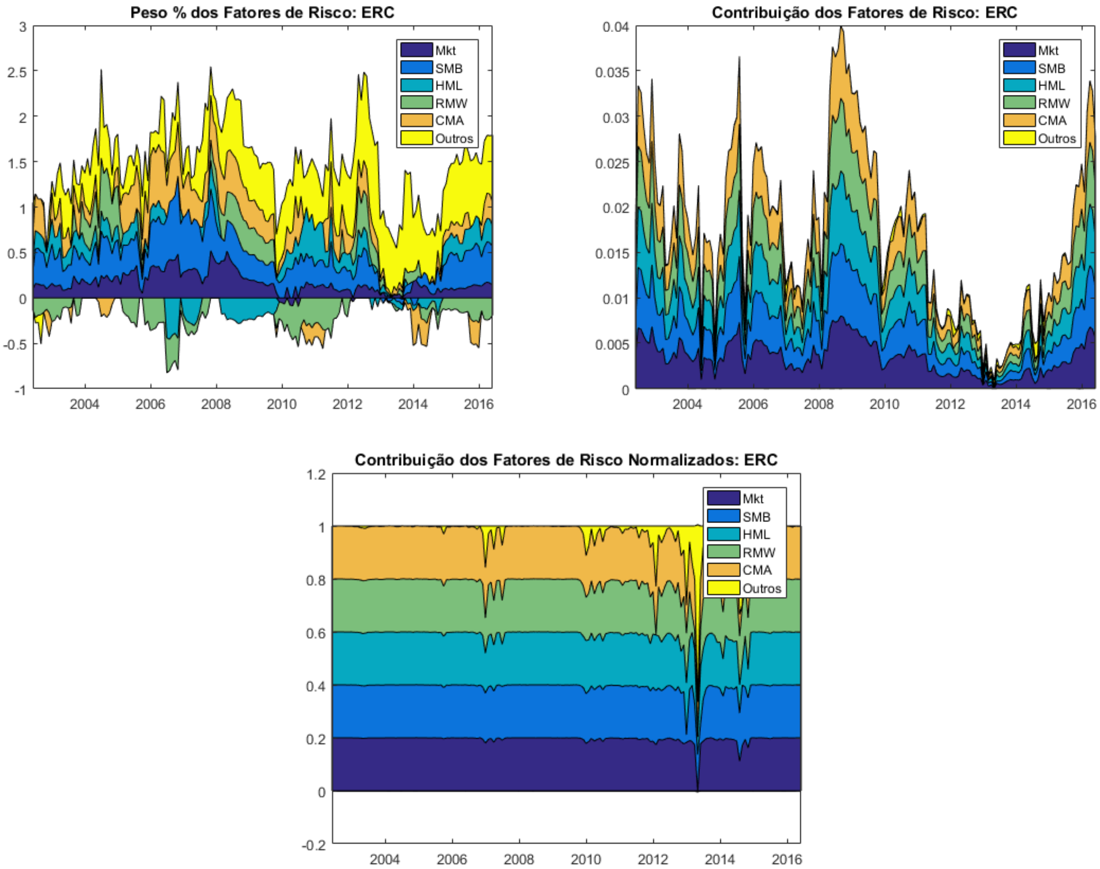


Figura 7 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ERC* sem restrição *long-only*.

Além disso, dada a baixa diferenciação entre as estratégias constatadas nos resultados da tabela 6, iremos verificar os resultados das contribuições de riscos das estratégias remanescentes onde se elimina a contribuição de risco de um dos fatores.

Para a estratégia *ex-Mkt* na figura 8, novamente verificamos que com a restrição *long-only* o algoritmo não encontra solução que consiga neutralizar a contribuição de risco do mercado, além disso, também verificamos participações relevantes dos fatores $\tilde{\mathcal{F}}$.

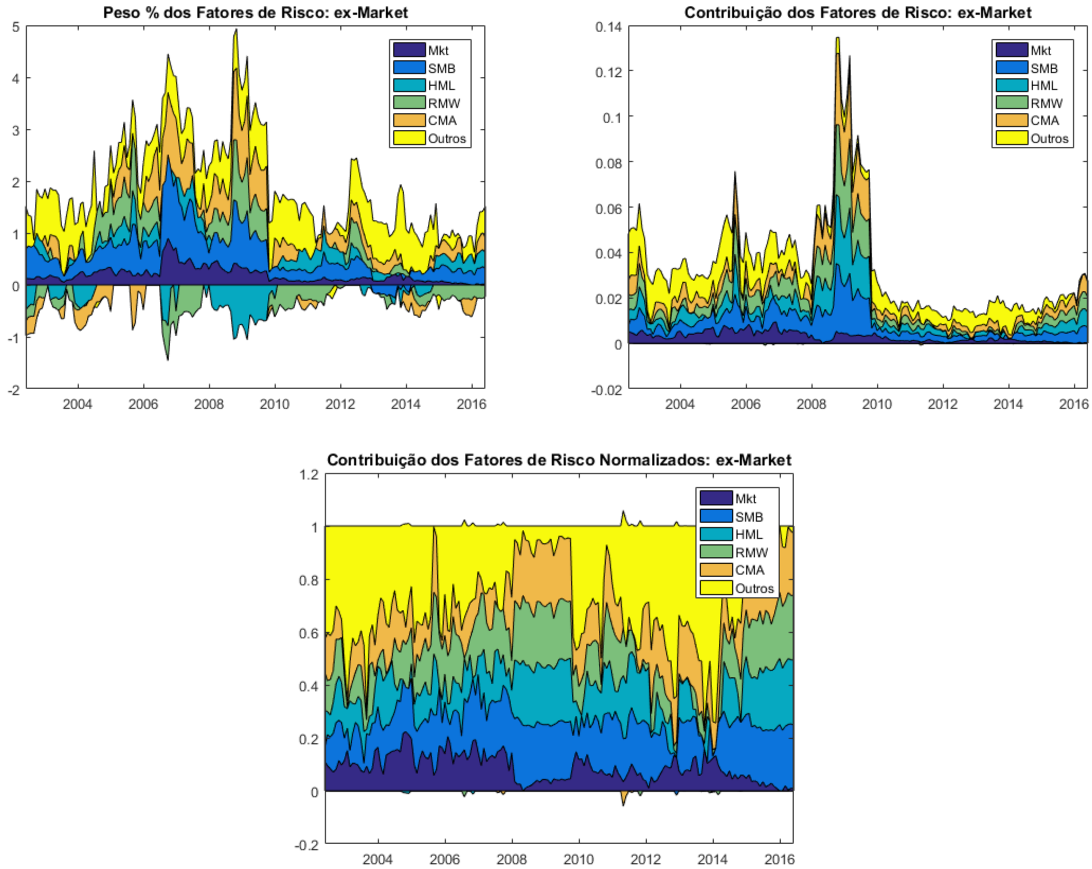


Figura 8 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-Mkt* com restrição *long-only*.

Já sem a restrição *long-only* obtemos soluções que não só neutralizam a contribuição do risco de *Mkt*, mas também neutralizam a contribuição do risco dos fatores $\tilde{\mathcal{F}}$. Mas ao analisarmos os pesos dos fatores, vemos que, apesar de neutralizar a contribuição do risco do fator de *Mkt*, temos a presença do peso do fator de *Mkt* de 2003 a 2009, e mais esporádico depois. Além disso, novamente temos a presença dos fatores de $\tilde{\mathcal{F}}$ nos pesos das alocações, apesar de serem neutralizados no cálculo das contribuições de risco. Ou seja, a possibilidade de alocação nos fatores $\tilde{\mathcal{F}}$, permitem soluções de alocações que satisfaçam as condições de otimização sem reproduzir as características dos fatores; e a eliminação da contribuição de risco de um dos fatores, não implica na eliminação do fator por estes não serem ortogonais.

Portanto a manutenção dos pesos em *Mkt*, nos indica que neutralizar a contribuição de risco de um fator, não neutraliza a alocação de pesos para este fator, e além disso a alocação de pesos em um fator, não implica em contribuição de risco deste fator. Portanto ao se realizar a alocação utilizando como guia as contribuições dos fatores de riscos, não garantimos alocações nos fatores diretamente quando permitimos a alocação nos fatores $\tilde{\mathcal{F}}$ e os fatores de riscos não são ortogonais.

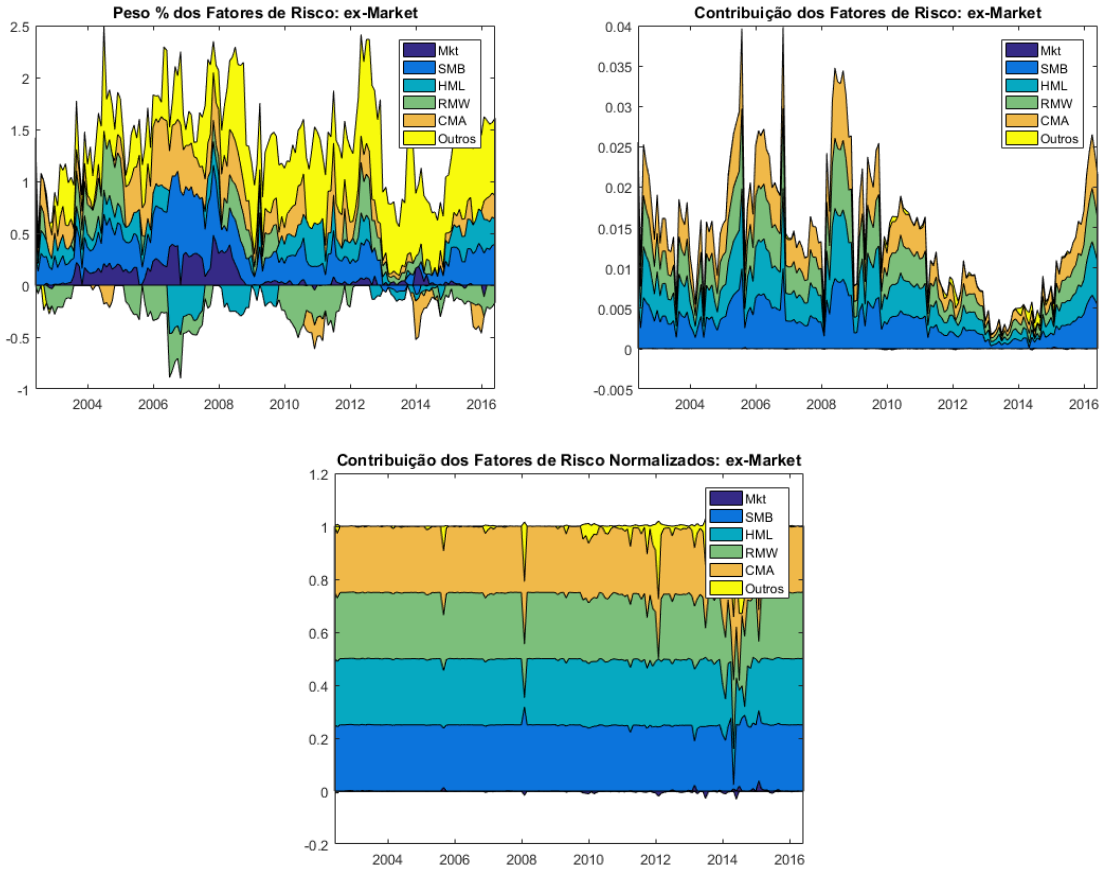


Figura 9 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-Mkt* sem restrição *long-only*.

Verificamos também que os riscos totais *ex-ante* possuem variações expressivas, que demonstram instabilidade na estimação da matriz de covariância. Como resultado disto, também iremos verificar esta instabilidade na estimação da matriz de coeficientes A, que podem ser também parte dos motivos de não verificarmos reprodução dos fatores de *Fama&French*. Estudos futuros podem confirmar estas hipóteses utilizando técnicas mais robustas de estimação de covariância como os propostos por Ledoit e Wolf (2003), ou até mesmo com simulações *forward-looking* das matrizes de covariância.

Encontramos resultados similares nas estratégias de *ex-SMB*, *ex-HML*, *ex-RMW* e *ex-CMA* e estes gráficos podem ser encontrados no apêndice B.

5 Conclusões

Neste trabalho adaptamos as técnicas de construção de portfolio propostas por Roncalli e Weisang (2012), baseadas em alocação de orçamento em fatores de riscos ao mercado brasileiro, no segmento de ações. Esta abordagem, ao invés de buscar alocações porcentuais diretas nos ativos (ações, no caso), procura dividir o risco do portfolio entre os 5 fatores de *Fama&French*, que resultam em alocações através desta divisão.

Roncalli e Weisang (2012) também apresentam um exercício de alocação de risco nos fatores de *Fama&French*, onde realizam as alocações no nível de agregação dos portfolios que compõem estes fatores. Já neste estudo, além de construirmos os 5 fatores de *Fama&French* para o mercado de ações brasileiro, procuramos alocações diretamente no nível dos ativos para verificar a possibilidade de construir portfolios que reproduzam o efeito de investir nestes índices.

O "coração"desta estratégia está na solução de um problema de otimização, que visa obter portfolios com os perfis de alocação de risco desejados, expressos como contribuições de riscos dos fatores de interesse. Testamos as alocações baseadas na distribuição do orçamento de risco em fatores, ao invés de alocação em porcentual do patrimônio, reproduzindo a estratégia de mesma alocação de risco por fator, ou *Risk Parity* ou *Equal Risk Contribution*.

Para investigar o impacto da eliminação de um dos fatores no portfolio como um todo, construímos cinco portfolios cujo objetivo é estarem expostos, igualmente, a apenas quatro dos fatores de *Fama&French*, visando identificar se há fatores mais relevantes e, adicionalmente, como se comportam as contribuições ao risco e os pesos dos fatores de risco remanescentes, ao se remover um dos fatores do objetivo.

De modo distinto de outros trabalhos com aplicação ao mercado brasileiro na gestão de carteiras de renda variável, como Ariki (2016) e Ferreira (2015), que estudam o comportamento de estratégias baseadas em contribuições dos riscos diretamente dos ativos, um objetivo deste trabalho foi investigar a performance de estratégias construídas utilizando contribuições de risco nos 5 fatores utilizados.

Na construção dos cinco fatores aqui utilizados, diferentemente de Fama e French (2015), não descartamos ações porque a base disponível era relativamente pequena: 193 ações, comparados com os do trabalho original que possuíam no mínimo mais de 900 ações durante todo o período; assim, não utilizamos o método tradicional de separação dos portfolios em tamanhos 3 x 2, 2 a 2, porque esta separação descarta uma parte da base de ações na construção dos fatores. Para evitar reduzir a base, adotamos a abordagem de separação dos portfolios em 2x2x2x2, que mantém todos os ativos na construção dos fatores. Isto gera no período analisado três fatores, *RMW*, *CMA* e *SMB* com retornos

acumulados maiores que o mercado incorrendo em risco menor. Além disso, verificamos correlações relativamente baixas entre os fatores, que reforçam a busca pela diversificação com uma carteira composta por contribuições de riscos a estes fatores.

Não testamos se os interceptos baseados na construção destes fatores são estatisticamente iguais a zero, o que teria um potencial uso para estimação de custo de capital. Deixamos este trabalho para pesquisas futuras com interesse na utilização destes fatores para a estimação do custo de capital.

Embora técnicas com alocações baseadas no risco geralmente possuem perfomance superior em relação ao retorno ajustado pelo risco, encontramos dificuldades em avaliar este quesito porque os retornos ficaram próximos a zero, conforme ilustrado na tabela 5.

Apesar disso, obtivemos para as estratégias de *risk factor budgeting* sem restrição *long-only* retornos próximos aos de mercado com riscos medidos pela volatilidade menores que o mercado e a estratégia de *EW*.

Ao analisar graficamente os retornos acumulados das estratégias contruídas por *risk factor budgeting* com a restrição *long-only*, constatamos comportamentos similares entre estas e as estratégias de MV e *EW*. Já na mesma análise para as estratégias de *risk factor budgeting* sem a restrição *long-only*, verificamos que apesar de serem construídos de forma a terem participações da contribuição ao risco dos fatores, não possuem patamares de retornos equivalente a uma alocação direta nos fatores de *Fama&French*, além disso mesmo removendo a contribuição ao risco de um dos fatores, não apresentam graficamente uma diferenciação relevante entre elas.

Reforçamos as constatações gráficas com análises da correlação e o *tracking error* entre elas, onde para as estratégias por *risk factor budgeting* com a restrição *long-only*, observamos altas correlações contra as estratégias de MV e *EW*, sendo elas entre 0,83 a 0,90 e 0,73 a 0,78 respectivamente.

Já entre as estratégias de*risk factor budgeting* sem a restrição *long-only*, encontramos altas correlações entre si de 0,85 a 0,97 e *tracking errors* de 1,02% a 2,99%, o que nos levou a afirmar que estas estratégias possuíam pouca diferenciação entre si apesar de se remover a contribuição de risco de um dos fatores.

Para investigar:

1. a performance das estratégias distintas de alocações diretas nos fatores de *Fama&French*;

2. e a similaridade de performances entre as estratégias de *risk factor budgeting*, apesar da alocação com objetivo de remover a contribuição de risco de um dos fatores;

analisamos as alocações realizadas sobre os fatores de risco e suas respectivas contribuições de risco ao longo do tempo.

Através desta análise constatamos que para as estratégias de *risk factor budgeting* com a restrição *long-only*, não obtivemos as contribuições de risco desejadas sobre os fatores. Já no caso das estratégias de *risk factor budgeting* sem a restrição *long-only*, com exceção de alguns breves períodos, a otimização foi bem sucedida em designar alocações que reproduzissem as contribuições de risco desejadas.

No contexto sem restrição *long-only*, apesar de neutralizar a contribuição ao risco dos fatores extras $\tilde{\mathcal{F}}$, verificamos alocações de pesos relevantes nestes fatores extras $\tilde{\mathcal{F}}$. E além disso em estratégias que removem a contribuição de riscos de um dos fatores, verificamos também alocações de pesos relevantes nos fatores que temos como objetivo remover suas contribuições. Concluímos que a possibilidade de alocações relevantes no fator de $\tilde{\mathcal{F}}$ possibilitam satisfazer as restrições da otimização sem reproduzir as características dos fatores; e além disso a eliminação da contribuição de risco de um dos fatores de risco, não eliminam sua presença, pelo fato dos fatores não serem ortogonais. Portanto ao se realizar a alocação utilizando como guia as contribuições aos fatores de riscos, não garantimos alocações nos fatores diretamente.

Pesquisas futuras podem incoporar no problema de otimização, além do atingimento das contribuições de risco, a minimização da presença de alocações de pesos nos fatores extras $\tilde{\mathcal{F}}$, que argumentamos ser o fator que permite alterar as contribuições de risco de forma a satisfazer o problema sem muita diferenciação entre as estratégias. E além disso, com os pesos maiores sobre os fatores de risco, esperamos verificar uma reprodução melhor dos portfolios que compõem os fatores de *Fama&French*.

Outra oportunidade está em testar como performariam os algoritmos de otimização propostos por Haugh, Iyengar e Song (2015), que evitam pontos de ótimos locais com mais robustez quando comparados ao algoritmo mais tradicional, o *sqp* utilizado neste trabalho. Este segundo ponto é construído sobre o fato de termos breves momentos em que o algoritmo, mesmo sem a restrição *long-only*, não encontrou uma alocação que satisfizesse as contribuições de riscos desejadas.

Adicionalmente ao se analisar graficamente, verificamos variações expressivas na medição dos riscos totais *ex-ante*, que podem ser comparados contra a utilização de métodos mais robustos de estimação de covariância ao longo do tempo como os propostos por Ledoit e Wolf (2003), ou simulações *forward-looking* das matrizes de covariância descrevendo-os como processos estocásticos.

Referências

ARIKI, R. Y. *Portfólios ponderados pelo risco: uma abordagem para a alocação de carteiras*. Tese (Doutorado), 2016.

ARTZNER, P. et al. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, Wiley Online Library, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999.

BENARTZI, S.; THALER, R. H. Naive diversification strategies in defined contribution saving plans. *American economic review*, JSTOR, p. 79–98, 2001.

BLACK, F.; LITTERMAN, R. B. Asset allocation: combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, Institutional Investor Journals, v. 1, n. 2, p. 7–18, 1991.

BRUDER, B.; RONCALLI, T. Managing risk exposures using the risk budgeting approach. 2012.

DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, Soc Financial Studies, v. 22, n. 5, p. 1915–1953, 2009.

EYCHENNE, K.; MARTINETTI, S.; RONCALLI, T. Strategic asset allocation. 2011.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 3–56, 1993.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. A five-factor asset pricing model. *Journal of Financial Economics*, v. 116, n. 1, p. 1 – 22, 2015. ISSN 0304-405X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304405X14002323>.

FERREIRA, G. W. d. O. Smart beta: uma aplicação ao mercado de ações brasileiro. 2015.

GARMAN, M. Taking var to pieces: Presenting a method to express a portfolio's var as the sum of its parts. *RISK-LONDON-RISK MAGAZINE LIMITED-*, RISK MAGAZINE LIMITED, v. 10, p. 70–71, 1997.

GOLUB, B. W.; TILMAN, L. M. Measuring yield curve risk using principal components, analysis, value, at risk, and key rate durations. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals, v. 23, n. 4, p. 72–84, 1997.

GRINOLD, R.; KAHN, R. *Active Portfolio Management: A Quatitative Approach for Producing Superior Returns and Controlling Risk*. [S.l.]: San Francisco: Irwin Library of Investment and Finance, 1999.

HALLERBACH, W. G. *Decomposing portfolio value-at-risk: A general analysis*. [S.l.], 2003.

HAUGH, M.; IYENGAR, G.; SONG, I. A generalized risk budgeting approach to portfolio construction. 2015.

JOBSON, J. D.; KORKIE, R. M. Putting markowitz theory to work. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals, v. 7, n. 4, p. 70–74, 1981.

JORION, P. International portfolio diversification with estimation risk. *Journal of Business*, JSTOR, p. 259–278, 1985.

JORION, P. Bayes-stein estimation for portfolio analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge Univ Press, v. 21, n. 03, p. 279–292, 1986.

JORION, P. Bayesian and capm estimators of the means: Implications for portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 717–727, 1991.

LAGNADO, L. M. *Introducing additional factors for the Brazilian market in the fama-french five-factor asset pricing model*. Tese (Doutorado), 2016.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of empirical finance*, Elsevier, v. 10, n. 5, p. 603–621, 2003.

LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, JSTOR, p. 13–37, 1965.

LITTERMAN, R. Hot spots™ and hedges. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals, v. 23, n. 5, p. 52–75, 1996.

MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection, Efficent Diversification of Investments*. [S.l.]: J. Wiley, 1959.

MARTINSA, C. C.; JR, W. E. Pricing assets with fama and french 5–factor model: a brazilian market novelty. In: *XV Encontro Brasileiro de Finanças*. [S.l.: s.n.], 2015.

MEUCCI, A. Risk contributions from generic user-defined factors. 2006. Disponível em: <https://ssrn.com/abstract=930034>.

MEUCCI, A. *Risk and asset allocation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009.

MEUCCI, A. Managing diversification. 2010.

MICHAUD, R. O. The markowitz optimization enigma: Is optimized optimal? *ICFA Continuing Education Series*, CFA Institute, v. 1989, n. 4, p. 43–54, 1989.

MINA, J. Risk attribution for asset managers. *RiskMetrics Journal*, v. 3, n. 2, p. 33–56, 2002.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

PACHECO, A. S. *O Modelo de Cinco Fatores de Fama E French no Brasil*. Tese (Doutorado), 2015.

RAHL, L. et al. *Risk budgeting: a new approach to investing*. [S.l.]: Risk Books London, UK, 2000.

RONCALLI, T.; WEISANG, G. Risk parity portfolios with risk factors. 2012.

SCHERER, B. *Portfolio construction and risk budgeting*. [S.l.]: Risk Books, 2002.

SCHERER, B. Can robust portfolio optimisation help to build better portfolios? *Journal of Asset Management*, Springer, v. 7, n. 6, p. 374–387, 2007.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*. *The Journal of Finance*, Blackwell Publishing Ltd, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964. ISSN 1540-6261. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>.

TASCHE, D. Risk contributions and performance measurement. *Report of the Lehrstuhl für mathematische Statistik, TU München*, Citeseer, 1999.

TEILETCHE, J.; RONCALLI, T.; MAILLARD, S. The properties of equally-weighted risk contributions portfolios. 2010.

TÜTÜNCÜ, R. H.; KOENIG, M. Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 132, n. 1, p. 157–187, 2004.

WINDCLIFF, H.; BOYLE, P. P. The 1/n pension investment puzzle. *North American Actuarial Journal*, Taylor & Francis, v. 8, n. 3, p. 32–45, 2004.

ZHANG, Y.; RACHEV, S. Risk attribution and portfolio performance measurement-an overview. *University of Karlsruhe, D-76128 Karlsruhe, Germany and Department of Statistics and Applied Probability University of California, Santa Barbara, CA93106, USA*, Citeseer, v. 185, 2004.

Apêndices

APÊNDICE A – Médias e Desvios Padrões dos Portfolios de *Fama&French*

Tabela 7 – Médias e Desvios Padrões dos 16 Portfolios de *Fama&French* - jun/2000 - mai/2016

Portfolio	Média	Desvio Padrão	Observações
SLWC	0.02	7.76	192
SLWA	(0.24)	9.51	192
SLRC	0.66	11.09	192
SLRA	0.61	8.10	192
SHWC	(0.61)	9.38	192
SHWA	(0.66)	13.94	192
SHRC	0.43	7.37	192
SHRA	(0.51)	9.36	192
BLWC	(0.81)	7.85	192
BLWA	(1.16)	7.88	192
BLRC	0.46	6.27	192
BLRA	0.23	7.07	192
BHWC	0.34	8.36	192
BHWA	(0.91)	9.21	192
BHRC	(0.05)	7.09	192
BHRA	(0.17)	8.30	192

(a) Retornos mensais em excesso ao ativo livre de risco dos portfolios ordenados e separados pelo procedimento 2 x 2 x 2 x 2 em tamanho, B/M, Op e Inv respectivamente.

APÊNDICE B – Evolução das Contribuições de Risco das estratégias de *Risk Factor Budgeting*

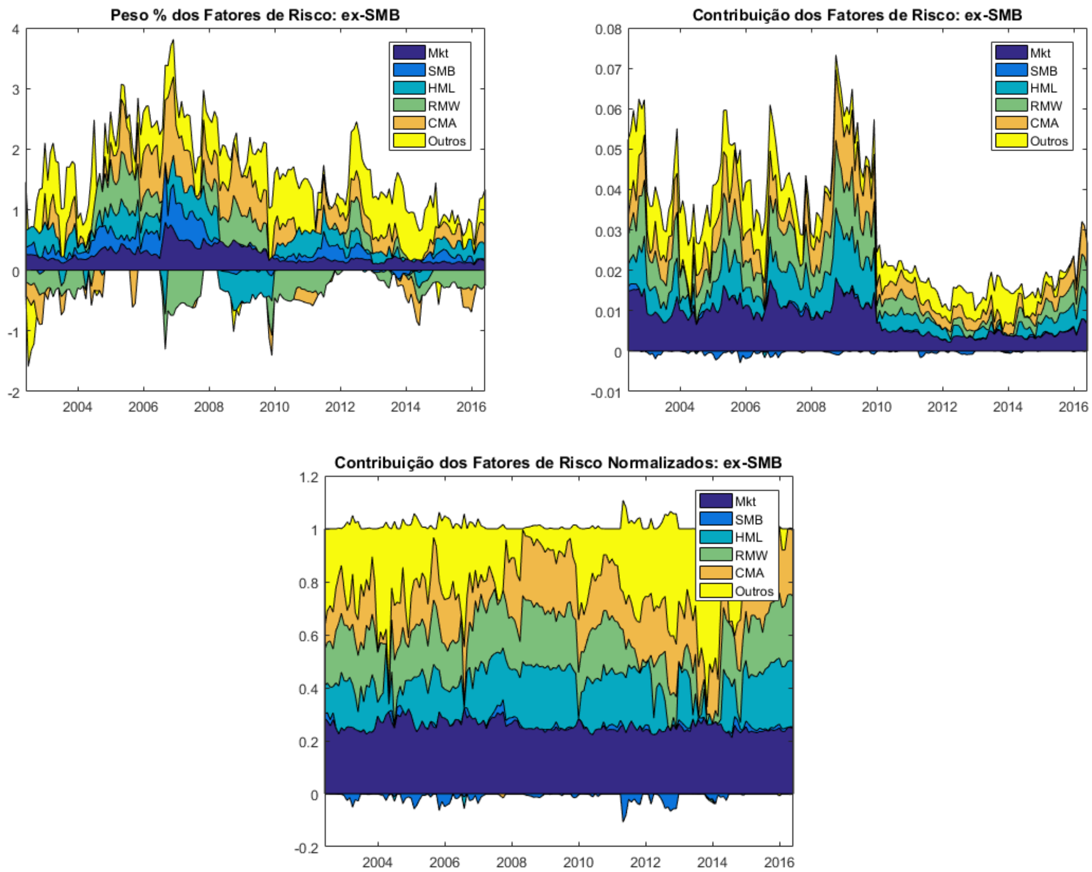


Figura 10 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-SMB* com restrição *long-only*.

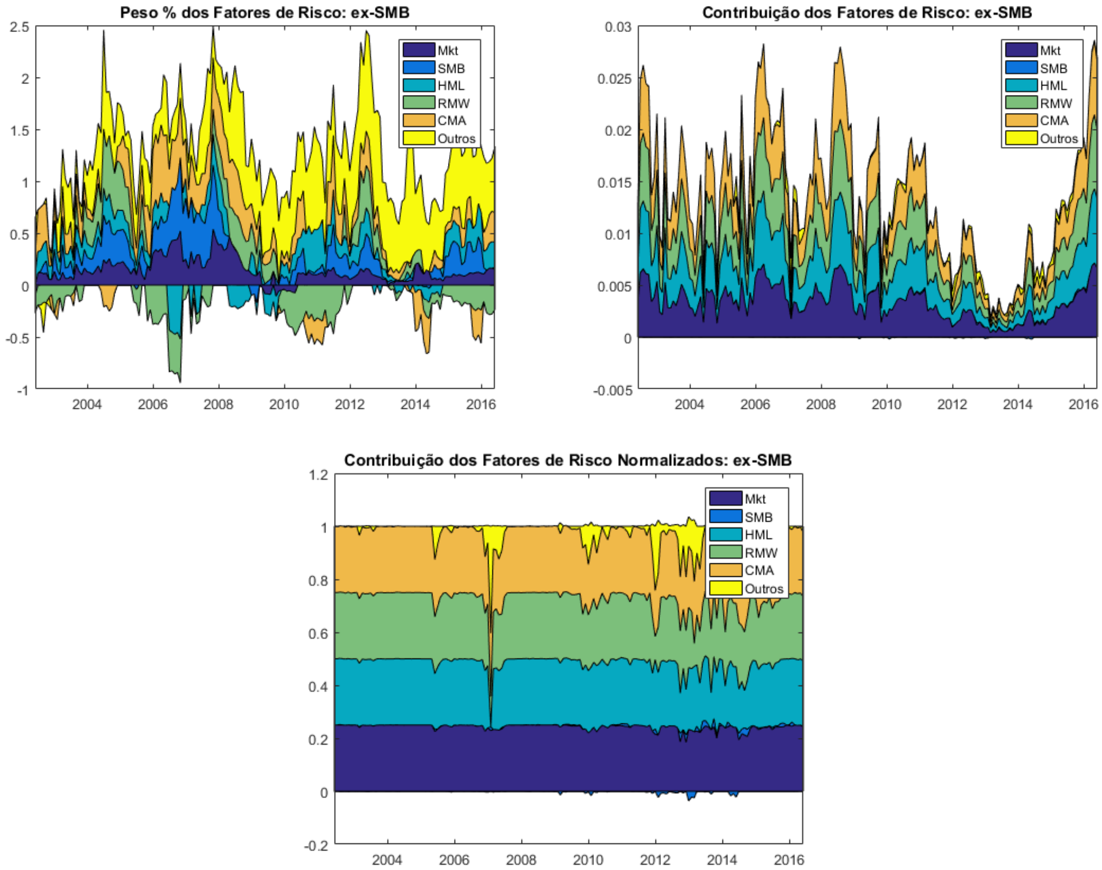


Figura 11 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-SMB* sem restrição *long-only*.

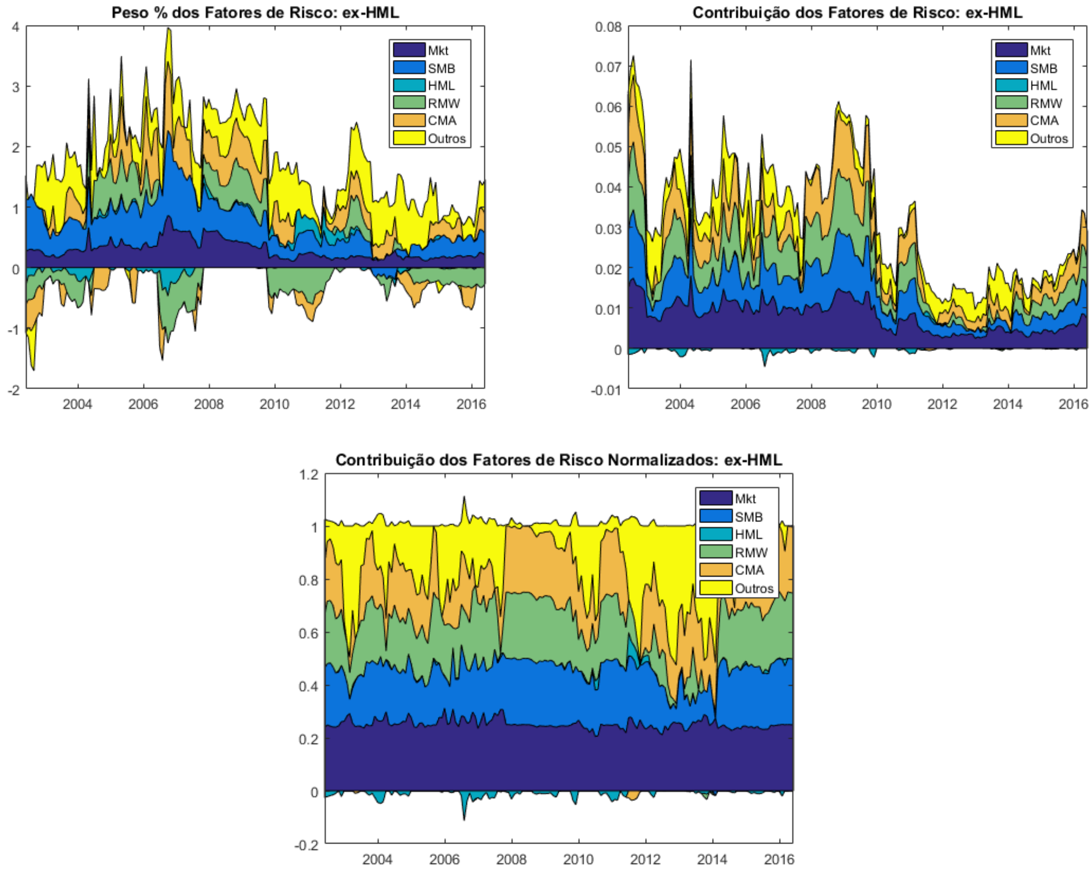


Figura 12 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-HML* com restrição *long-only*.

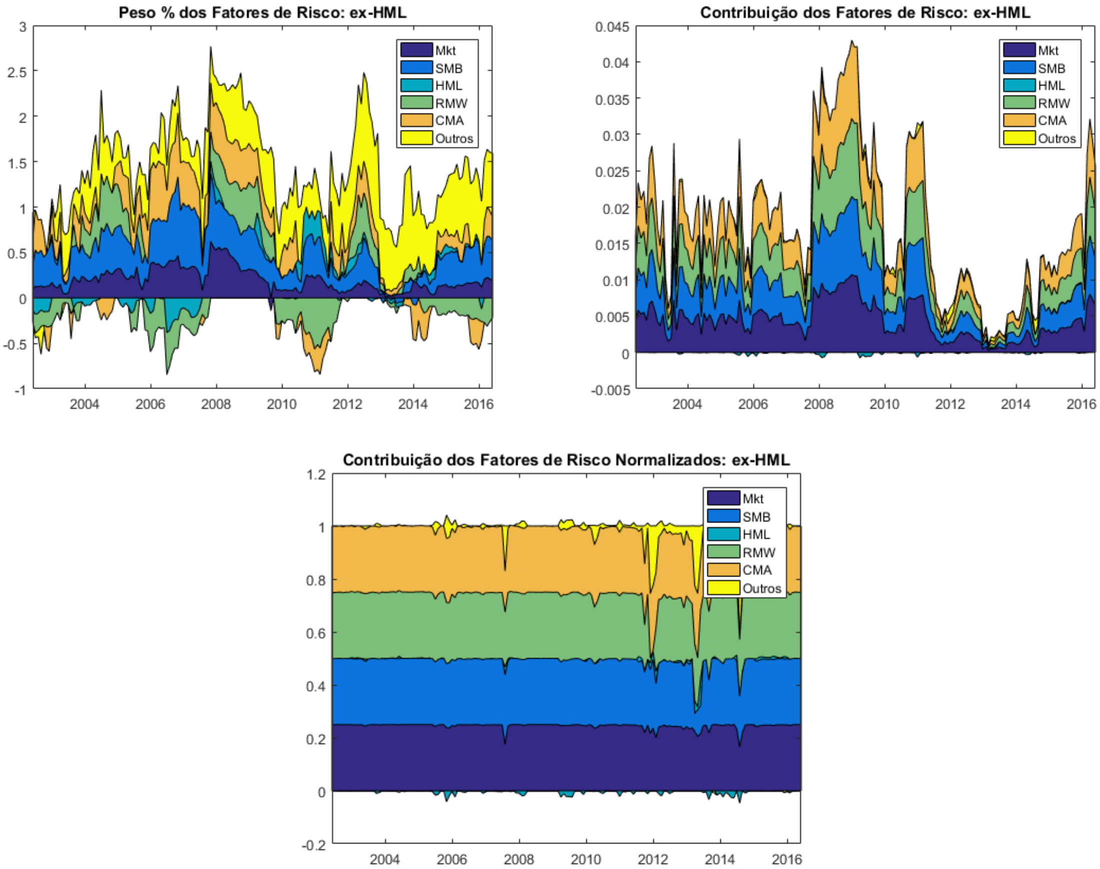


Figura 13 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-HML* sem restrição *long-only*.

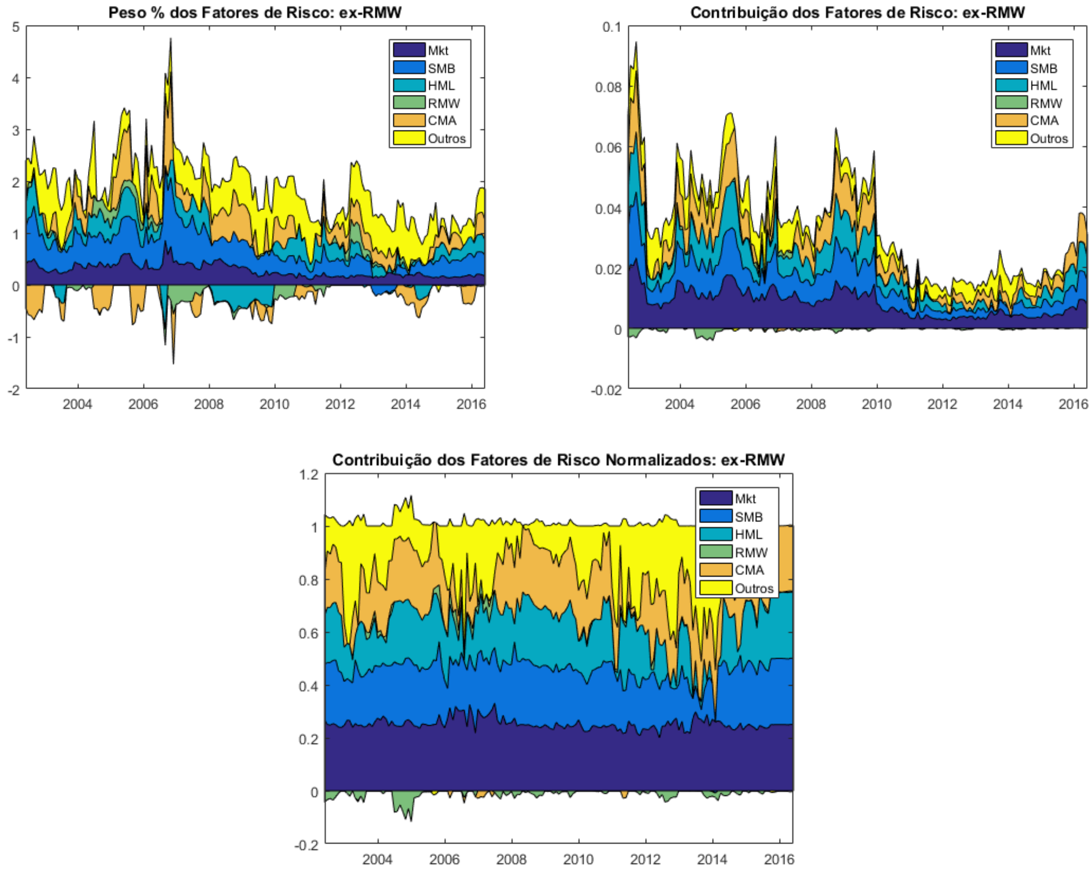


Figura 14 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-RMW* com restrição *long-only*.

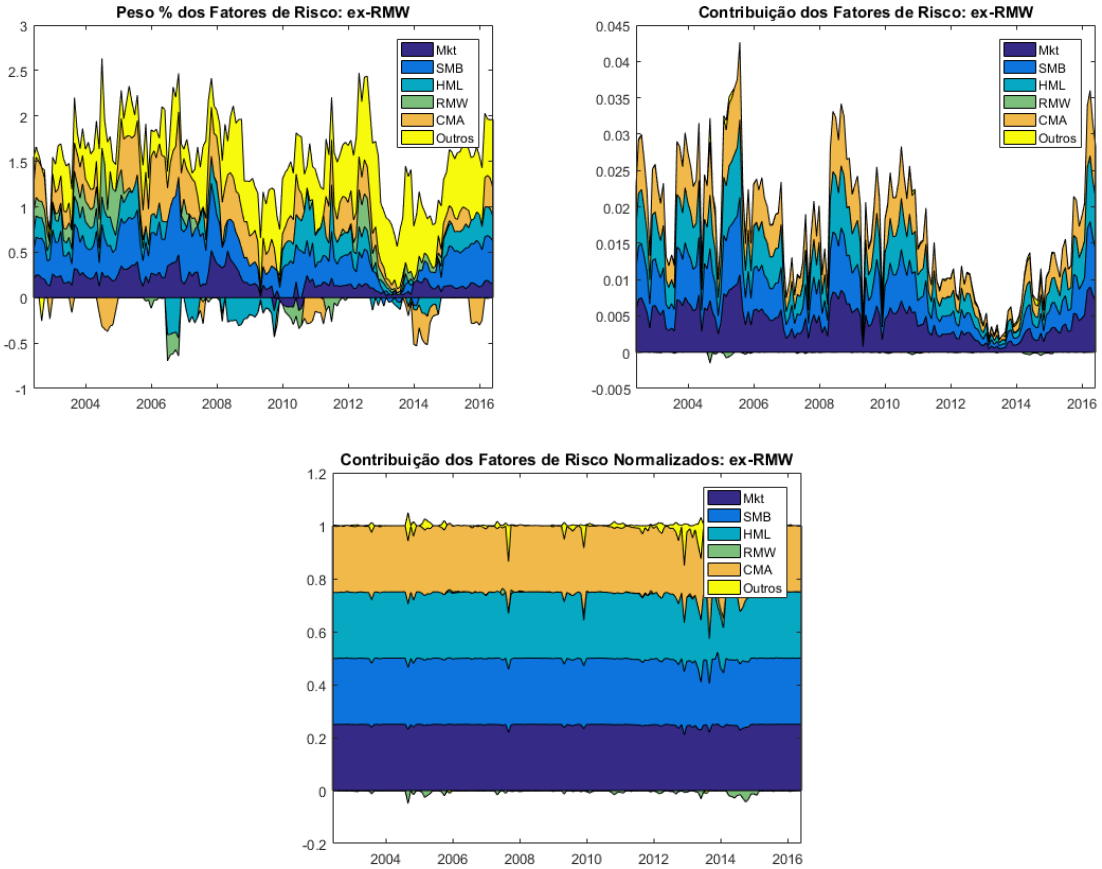


Figura 15 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-RMW* sem restrição *long-only*.

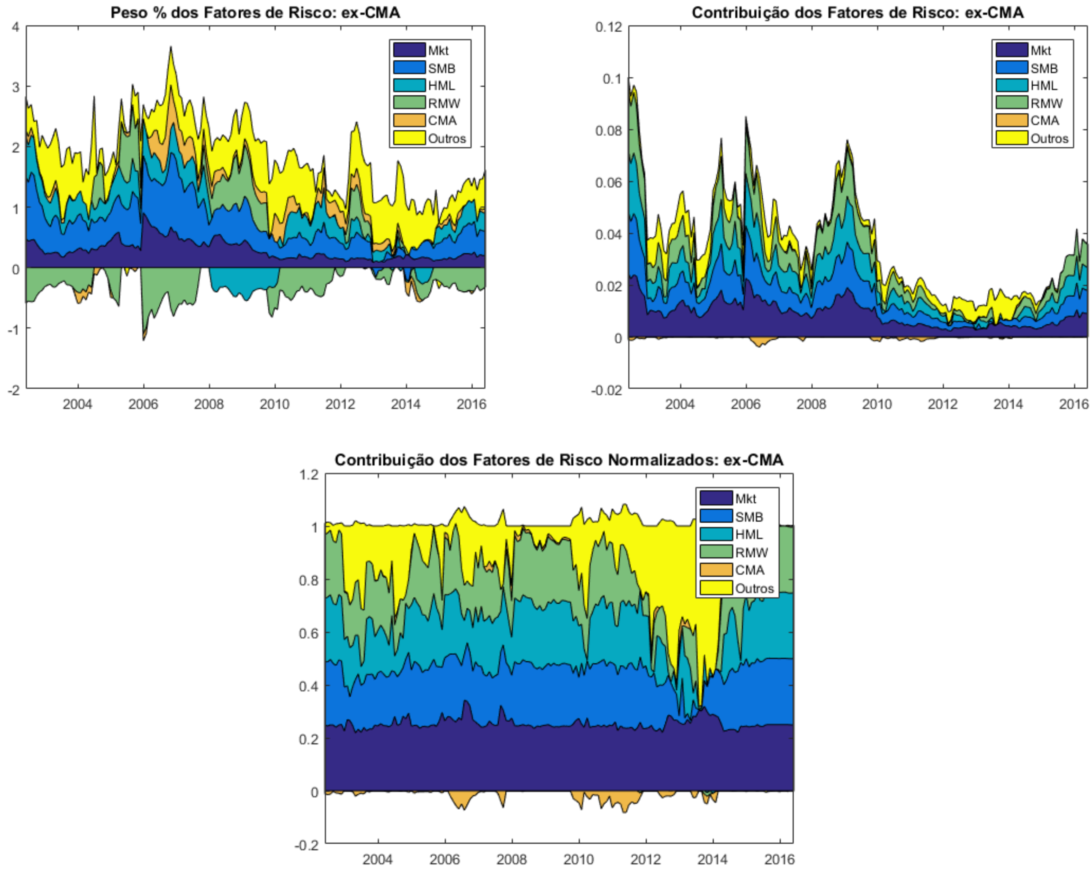


Figura 16 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-CMA* com restrição *long-only*.

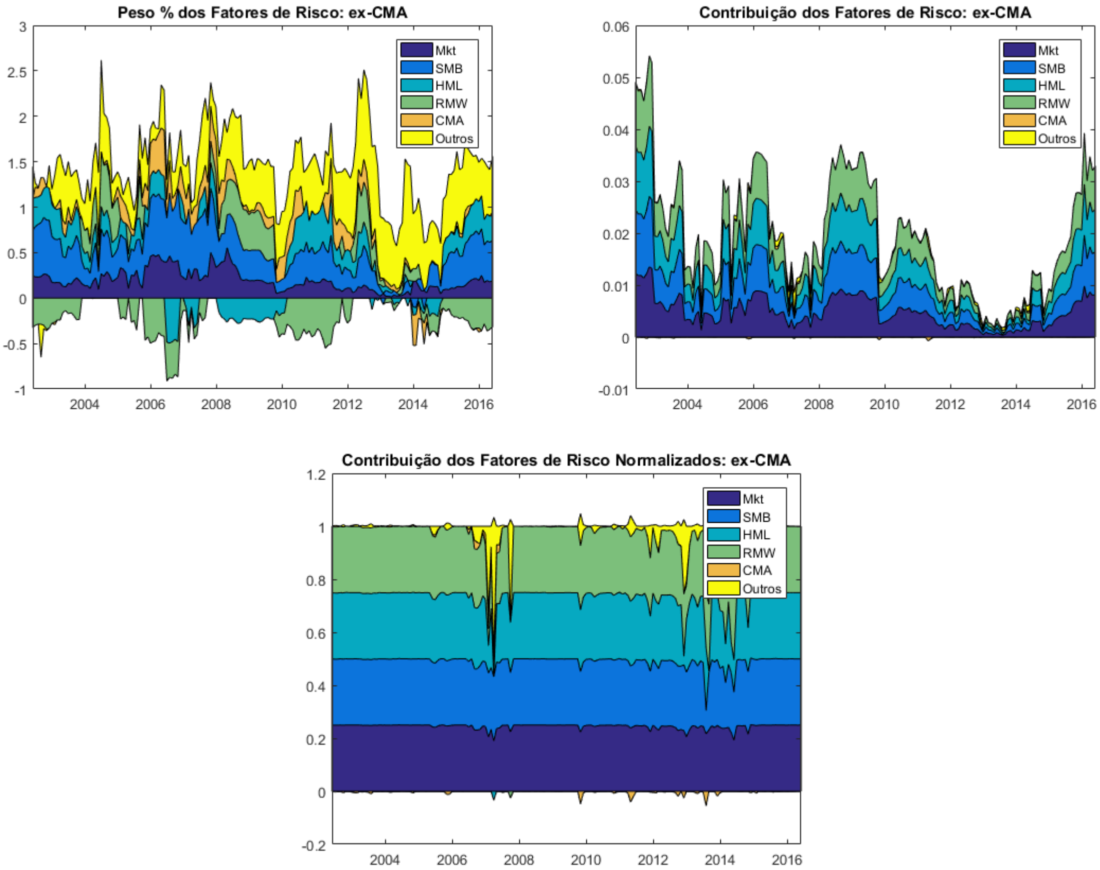


Figura 17 – Evolução das contribuições de risco do portfolio *ex-CMA* sem restrição *long-only*.