

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

DIEGO PIOTTO

**ESTUDO DE PODER DE MERCADO EM SISTEMAS DE GERAÇÃO DE ENERGIA
ELÉTRICA**

SÃO PAULO
2017

DIEGO PIOTTO

**ESTUDO DE PODER DE MERCADO EM SISTEMAS DE GERAÇÃO DE ENERGIA
ELÉTRICA**

Dissertação apresentada à Escola de
Economia de São Paulo da Fundação
Getúlio Vargas, como requisito para
obtenção do título de Mestre em Economia
e Finanças.

Campo de conhecimento: Microeconomia,
Teoria dos Jogos

Orientador: Prof. Ph.D. Daniel Monte

SÃO PAULO

2017

Piotto, Diego.

Estudo de poder de mercado em sistemas de geração de energia elétrica /
Diego Piotto. - 2017.
55 f.

Orientador: Daniel Monte

Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Recursos energéticos. 2. Bolsa de mercadorias. 3. Energia - Indústria. I.
Monte, Daniel. II. Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo.
III. Título.

CDU 620.9

DIEGO PIOTTO

ESTUDO DE PODER DE MERCADO EM SISTEMAS DE GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia e Finanças.

Campo de conhecimento: Microeconomia, Teoria dos Jogos

Data de aprovação:

__/__/__

Banca examinadora:

Prof. Ph.D. Daniel Monte (Orientador)
FGV-EESP

Prof. Ph.D. Paulo Picchetti
FGV-EESP

Prof. Ph.D. Rodrigo Menon Moita
INSPER

DEDICATÓRIA

A meu pai, que sempre me ajudou nos momentos mais difíceis da minha vida e sempre mostrou o caminho correto a seguir.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Marilia Resende Oliveira e meus filhos Benicio Piotto e Valentina Piotto que tanto me apoiaram nessa caminhada.

Ao professor Daniel Monte, pelos ensinamentos e pelas fundamentais contribuições nesse trabalho.

Aos meus amigos de mestrado, Fabio Gadelha, Fernanda Latronico e Camila Queiroz por todo companheirismo nessa jornada.

RESUMO

O sistema elétrico brasileiro sofreu grandes mudanças em sua regulação nas últimas décadas no intuito de aumentar a eficiência de mercado baseando-se no incentivo a competição entre os agentes. O incentivo a entrada de geradores privados tem gerado resultados significativos a competição e tem provocado uma reestruturação que tem modificado a operação antes totalmente centralizada para modelos descentralizados que estimulam a competição entre agentes.

O objetivo deste trabalho é, partir do artigo de Barroso Et al. (2001), onde é obtido a ação de poder de mercado em sistemas hidrotérmicos para ambiente competitivo e de mínimo custo tanto para modelo estático como modelo dinâmico, desenvolver o modelo de comportamento dos agentes para situações de colusão entre agentes price makers tanto para o modelo estático como para o dinâmico. Além disso obter as taxas de juros limites para o desvio da colusão. Será demonstrado que em mercados com poucos agentes, o benefício de se desviar da colusão somente ocorre para altas taxas de desconto. Com a inclusão de maior quantidade de agentes, identifica-se que o incentivo ao desvio da colusão possui taxas decrescentes. Será apresentado que para modelos acoplados no tempo o comportamento de um possível conluio fará com que os agentes sustentem o preço spot mais elevado, mesmo em períodos de baixa afluência.

Palavras-chave: Sistemas Hidrotérmicos, Poder de Mercado, Equilíbrio de Nash Cournot, Colusão.

ABSTRACT

The Brazilian electrical system has undergone great changes in its regulation in the last decades in order to increase the efficiency of the market based on the incentive to the competition among the agents. The incentive to the entry of private generators has generated significant results the competition and has caused a restructuring that has modified the operation before totally centralized to decentralized models that stimulate the competition between agents.

The objective of this work is to analyze the market power in hydrothermal systems that is, based on thermal and hydroelectric generation, using low cost models for centralized systems and Nash Cournot model for decentralized systems both decoupled in time in order to obtain the dispatch great. The analysis extends to the strategic behavior of the agents for time coupled systems using low cost models for centralized systems and Nash Cournot model using stochastic programming resources to determine the optimal dispatch of the agents of the market. It has been shown that in markets with few agents, the benefit of diverting from collusion only occurs at high discount rates. With the inclusion of a greater number of agents, it is identified that the incentive to the deviation of collusion has unbelievable rates. It will be shown that for time-coupled models the behavior of a possible collusion will cause the agents to sustain the higher spot price, even in periods of low affluence.

Keywords: Hydrothermal systems. Market Power. Nash-Cournot Equilibrium, Collusion.

Lista de Tabelas

Tabela 1- Quantidade de Agentes x Taxas de Juros	37
Tabela 2-Tabelas de Usinas para cálculo do preço Spot	43
Tabela 3- Despacho Ótimo	43
Tabela 4- Características das Usinas Hidroelétricas	47
Tabela 5- Características Usinas Térmicas	47

Lista de Figuras

Figura 1- Comportamento Ambiente de Mercado x Mínimo Custo	24
Figura 2- Comportamento Gerador com Restrição Operacional	27
Figura 3 - Comportamento Gerador Não Racional	28
Figura 4 - Custo Imediato e Futuro x Armazenamento Final	39
Figura 5 - Uso Ótimo da Água	40
Figura 6 - Obtenção da FCF	45
Figura 7- Preço Spot Médio.....	50
Figura 8 - Geração Total Hidroelétricas.....	51

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
2 REVISÃO DA LITERATURA.....	13
3 METODOLOGIA.....	17
3.1 PRODUÇÃO ÓTIMA	19
3.2 EQUILÍBRIO DE NASH COURNOT.....	20
3.2.1 PREÇO SPOT:	22
3.2.2 REMUNERAÇÃO LIQUIDA.....	22
3.3 SOLUÇÃO DE MÍNIMO CUSTO (BENCHMARK)	23
3.4 COMPARATIVO ENTRE ENERGIA PRODUZIDA NA SOLUÇÃO DE EQUILÍBRIO DE NASH COURNOT E MÍNIMO CUSTO (BECHMARKING).....	24
3.5 OFERTAS FORA DO EQUILIBRIO E DESVIOS.....	25
3.5.1 RESTRIÇÃO DE GERAÇÃO DE UMA DAS USINAS	25
3.5.2 COMPORTAMENTO NÃO-COURNOT DE UM DOS AGENTES.....	27
3.5.3 COOPERAÇÃO ENTRE AGENTES	28
3.5.4 POSSIBILIDADE DE DESVIOS	31
3.5.5 CARTEL DINAMICO COM N FIRMAS.....	34
3.6 SISTEMAS HIDROTÉRMICOS – MODELO DE MÍNIMO CUSTO	37
3.6.1 CUSTO IMEDIATO E CUSTO FUTURO	38
3.6.2 VALOR DA ÁGUA	39
3.6.3 SOLUÇÃO.....	40
3.7 DESPACHO HIDROTÉRMICO DE UM ESTÁGIO	41
3.7.1 PREÇO SPOT	42
3.8 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA.....	44
3.8.1 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA COM EQUILÍBRIO DE NASH COURNOT	45
3.8.2 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA COM COLUSÃO ENTRE OS AGENTES PRICE MAKERS	46
3.8.3 DIFERENÇAS ENTRE ALGORITMO MINIMO CUSTO E ALGORITMO NASH-COURNOT	46
4 RESULTADOS.....	47
4.1.1 PREÇO SPOT MÉDIO.....	49
4.1.2 GERAÇÃO HIDROELÉTRICA MÉDIA.....	50
4.1.3 ALTERNATIVAS REDUÇÃO DO PODER DE MERCADO.....	51
5 CONCLUSÕES E DISCUSSÕES.....	52
REFERÊNCIAS.....	54
APÊNDICE A.....	55

1. INTRODUÇÃO

O estudo de poder de mercado em sistemas de energia tem sido estudado desde a década de 1990 devido as transformações do mercado de energia em vários países do mundo. A alteração nos mecanismos de regulação visando aumento de eficiência do setor através da competição traz incentivo a participação de agentes privados para produção de energia, o que no passado era totalmente exercido pelo Governo. O avanço na tecnologia de geração de energia e redução no preço do gás natural na década de 90 proporcionou um avanço na geração térmica viabilizando substituir a operação de usinas antigas por usinas novas, mais econômicas e modernas. No campo da geração Hídrica, projeto de grandes hidroelétricas se tornaram raros devido à escassez de locais com potenciais adequados e a concorrência das pequenas centrais hidroelétricas (PCHs) que tem se mostrado ao longo dos anos uma alternativa viável devido sua operação geralmente se situar próximo a carga.

A introdução da competição de mercado no setor de geração de energia provocou reestruturações do setor elétrico em vários países do mundo como Chile, Austrália, Colômbia e várias regiões dos EUA, como por exemplo a Califórnia. Essa reestruturação se refere a mudança de arranjos comerciais e institucionais na venda de energia e não necessariamente a privatização do setor. A reestruturação do setor trouxe flexibilidade no plano de expansão do sistema, pois os agentes públicos e privados agora competem por contratos de venda de energia com distribuidores e consumidores livres.

A ideia de trazer para o mercado de geração de energia a livre competição entre os agentes é baseada no conceito econômico que a competição traz serviços de melhor qualidade e preços baixos. Então em um mercado perfeito, as forças provocadas pela lei da oferta e procura expurga a ação de reguladores e os mercados passam a ser comportar de forma desregulada.

A dissertação apresenta uma análise do poder de mercado baseado no comportamento de uma empresa de geração de energia hidroelétrica em um ambiente que altera de forma estratégica as ofertas de energia em relação ao despacho que minimiza o custo, com objetivo de alterar o preço spot e então elevar seus lucros. A partir do modelo desenvolvido em Barroso et al (2001), que traz uma modelagem dos

cenários de mínimo custo e de competição em ambiente de mercado, um enfoque é dado a situação de colusão tácita entre agentes price makers que participam de um mercado composto por agentes geradores térmicos e hidroelétricos. O modelo para análise de colusão é apresentado tanto na forma estática, via análise analítica, como para cenário dinâmico onde é utilizada programação estocástica para determinação do comportamento dos agentes.

O trabalho foi organizado em seis principais partes: Na seção 2, “Revisão da literatura”, são levantados estudos poder de mercado em sistemas hidrotérmicos e aspectos relevantes para esse trabalho. Na seção 3, é discutido de forma analítica o despacho de sistemas térmicos e como é realizado o pagamento com base no custo marginal de curto prazo (preço spot). Também é analisado o comportamento estratégico dos agentes baseando-se no poder de mercado em sistemas hidrotérmicos propondo métodos de identificação e análise de forma analítica. Nessa seção ainda será investigado estratégias de ofertas de energia quando as usinas tomam decisões de forma a maximizar seus lucros e comparar esses resultados com o despacho de mínimo custo (centralizado). Todos os modelos dessa seção são desenvolvidos considerando desacoplamento no tempo. A seção 4, o modelo passa a ser acoplado no tempo e se faz uso de algoritmos estocásticos para encontrar os despachos ótimos tanto para o modelo de mínimo custo quanto para o modelo competitivo descentralizado (Nash Cournot) e modelo de colusão. Na seção 5 é apresentado Resultados das simulações utilizando um caso exemplo com 2 usinas Hidroelétricas e 23 Usinas Térmicas e é seguida da seção 6, “Conclusões e Discussões”.

2 REVISÃO DA LITERATURA

O primeiro Teorema do Bem-Estar o pressuposto de que os agentes realmente se comportam de maneira competitiva. Se houvesse apenas dois agentes, possivelmente esses dificilmente tomariam os preços como dados. Nesse caso os agentes provavelmente reconheceriam o seu poder de mercado e tentariam utilizá-lo para melhorar seus lucros. Conforme Varian (2015) o primeiro Teorema do Bem-Estar conclui que o equilíbrio competitivo só faz sentido quando existe um número suficiente de agentes para assegurar que cada um deles se comporte de maneira competitiva. Além disso o teorema ainda afirma que em um mercado privado em que cada agente procura maximizar a sua utilidade resultará em uma alocação capaz de alcançar a eficiência de Pareto. É possível também afirmarmos que o inverso é verdadeiro, ou seja toda alocação no sentido de Pareto corresponde a um equilíbrio de mercado concorrencial, desde que as preferências dos consumidores sejam convexas, esse conceito trata-se do Segundo Teorema do Bem Estar Social.

A literatura disponível que aborda de poder de mercado em sistemas de geração de energia térmicos é recente, os primeiros trabalhos sobre o assunto iniciaram na década de 1990 com os trabalhos de Green e Newbery (1992) devido a reformulação que o mercado de energia inglês estava passando na época. Nesse trabalho é mostrado a preocupação com a manipulação de mercado de energia Inglês baseando a análise somente em geração térmica. Foi verificado que existia no mercado uma competição quase perfeita quando se dividia todo mercado de geração inglês o mercado fosse composto por 5 empresas de mesma capacidade. Como o mercado na época era dominado apenas por duas grandes empresas verificou-se que não existia mercado competitivo na área de energia na Inglaterra.

Em Boresnstein e Bushnell (1997) o poder de mercado é avaliado para o mercado de energia da Califórnia. O trabalho apresenta o comportamento de geradores após a mudança do mercado para a forma desregulada utilizando o modelo de Nash Cournot. A conclusão encontrada é que devido a restrições no sistema de transmissão de energia entre regiões dos EUA o poder de mercado poderia ser exercido e os preços manipulados em horários de alto consumo de energia.

Já em Boresnstein, Bushnell e Knittel (1999) discutem a ineficiência do uso de medidas de concentração de mercado para avaliação do poder de mercado em

mercados de energia e propõe métodos baseados em simulações de mercado para identificação de manipulação de mercado pelos agentes. O trabalho conclui que a modelagem baseada em simulações do Equilíbrio de Nash Cournot apresenta vantagens significativas na identificação de poder de mercado se comparada aos índices de concentração. Também é demonstrado que em horários de alta demanda de energia quando as linhas de transmissão atingem sua capacidade nominal os grandes produtores de energia congestionam de forma estratégica as linhas de transmissão e então o poder de mercado se torna preocupante. Por fim os resultados do artigo demonstram que o poder de mercado é mais relevante quando a demanda é modelada com menos sensível a mudança de preços.

A literatura para sistemas térmicos em ambiente competitivo é vasta, porém para sistemas hidrotérmicos, que representa de forma mais fiel o parque gerador no Brasil, é escasso. Os primeiros trabalhos relevantes relacionados a poder de mercado em sistemas hidrotérmicos utilizando teoria dos jogos para determinação de estratégia ótima se iniciam com a publicação de Scott e Read (1996) que faz uma análise na operação do sistema da Nova Zelândia. Nesse trabalho também é apresentado um conceito de programação dinâmica estocástica juntamente com o modelo de Nash Cournot para encontrar as quantidades de equilíbrio para um mercado de médio prazo. Devido sua grande relevância, esse trabalho foi utilizado pelo governo Neozelandês na reestruturação do mercado de energia naquele país.

No Brasil, os artigos relevantes que tratam do poder de mercado em sistemas hidrotérmicos iniciaram com a publicação do artigo de Kelman (1999), onde é investigado o comportamento dinâmico dos agentes onde cada um procura maximizar seus lucros e introduz o conceito de Teoria dos Jogos para a solução do problema via métodos iterativos baseado na oferta de preços de energia utilizando o modelo de concorrência de Bertrand onde os agentes competem ofertando preços de forma simultânea e o mercado se ajusta para determinar a quantidade vendida. O artigo demonstra que o modelo de Bertrand se mostra adequado apenas para modelagem de mercado no curto prazo. O trabalho também apresenta a formulação do problema dinâmico baseado em programação estocástica que servirá de base para essa dissertação. Esse modelo estocástico é responsável pela determinação do preço futuro da energia baseando-se no nível atual do reservatório das usinas geradoras e afluências esperadas para o futuro. Medidas de mitigação do poder de mercado também são apresentadas visando minimizar eventuais aumentos abusivos de preço.

Os trabalhos sobre poder de mercado em sistemas hidrotérmicos também são abordados em Barroso (2000), onde o modelo de concorrência é baseado no Equilíbrio de Nash Cournot de um jogo não cooperativo, que trata na determinação simultânea de quantidade de energia a ser produzida entre os agentes, onde a quantidade é definida de forma a maximizar o seu próprio lucro. O trabalho apresenta um modelo dinâmico que desenvolve um comparativo entre o despacho de mínimo custo (centralizado) e o despacho em ambiente de mercado (descentralizado). É demonstrado o trade off entre gerar mais energia hoje e aumentar seu lucro imediato vendendo energia ao preço spot hoje e maximizar a renda futura com o armazenamento da água para geração de energia no futuro. Os resultados demonstram que níveis mínimos de contratação obrigatório para cada gerador podem ser uma boa forma de mitigação de poder de mercado dos agentes.

Em Lino (2001) é investigado as possíveis ineficiências de uma operação descentralizada baseada em ofertas em sistemas hidrotérmicos comparando ao despacho centralizado. É demonstrado que o despacho descentralizado em um mercado de competição perfeita é semelhante a operação de mínimo custo do despacho centralizado. O trabalho conclui que o esquema de pagamento spot, baseado no custo do gerador marginal, não prove incentivos corretos para que reservatórios a montante regularize a produção de energia em situações onde as usinas operem em cascatas e propõe um mercado de regulação de uso da água que possa comercializar a água armazenada e assim trazer melhor linearidade ao mercado de energia hídrica.

O modelo de competição de Bertrand para análise de oligopólio em sistemas de geração hídrica é desenvolvido em Garcia, Reitzes e Stachetti (2001). O modelo utiliza uma estratégia de Markov baseada no estado dos reservatórios no início de cada período, para cada participante do mercado. Utiliza um processo estocástico para descrever o comportamento de enchimento dos reservatórios. O trabalho apresenta sugestões para política regulatória em sistemas baseado em geração hidroelétrica no que trata de limites de preço e eficiência de despacho sob comportamento estratégico e sob probabilidade de colusão entre os agentes. O modelo demonstra que sob condições de competição onde os geradores hidroelétricos possuem reservatórios cheios e alta capacidade de produção de energia a probabilidade de afluições futuras é o elemento chave para determinação do preço da energia.

Uma análise do poder mercado nos países nórdicos é abordado em Hjalmarsson (2000), onde um estudo econométrico é desenvolvido para identificação do poder de mercado spot na bolsa Nord Pool, que contempla vários países nórdicos. O artigo utiliza o modelo Bresnahan-Lau para identificar práticas de poder de mercado nos países que compõe a bolsa de energia Nord Pool. Os resultados encontrados no artigo demonstram que a pouca concentração de mercado e a existência de um parque gerador baseado fortemente em hidroelétricas reduzem a níveis muito baixos o poder de mercado nesse sistema.

Mais recentemente Pozo et al. (2010) estudaram o equilíbrio de Nash Cournot em aplicações de longo prazo utilizando um modelo iterativo do equilíbrio de Nash no qual as empresas podem decidir sobre suas estratégias de oferta. O modelo apresentado utiliza técnicas de suavização exponencial de forma a melhorar a convergência dos resultados. O artigo ainda apresenta o conceito de meta-jogo de que permite que as empresas tenham uma gama de estratégias de oferta onde vários equilíbrios de meta-jogo e mistos são possíveis. Por fim é apresentado de forma breve aplicações do modelo para geração de cenários que poderiam ser aplicados a análise com opções reais e também uma extensão estocástica do modelo.

Em Monte e Moita (2017) um modelo dinâmico de duopólio estocástico é demonstrado para um sistema geração hídrica em cascata. Esse artigo demonstra que os sistemas de despacho descentralizados são eficientes quando as afluições são baixas e ineficiente quando as afluições são altas. O modelo apresenta resultados que mostram que o argumento que em sistemas de usinas em cascata, as usinas que se encontram a montante, em mercados descentralizados, exercem o poder de mercado para forçar uma elevação no preço spot, porém isso ocorre somente em períodos de baixo pico, quando a energia é menos valorizada. Os resultados do trabalho demonstram que em situações não ótimas ocorrem somente quando as afluições são abundantes essa conclusão acarreta em um resultado importante, de que a competição de mercado proporciona uma situação eficiente em tempos críticos, quando os volumes de água são mais escassos.

Os modelos de análise de poder de mercado buscam uma convergência entre a operação descentralizada e a de mínimo custo e os trabalhos tem demonstrado que isso ocorre quando a quantidade de agentes do mercado for suficientemente grande de forma que nenhum agente isolado seja grande suficiente que possibilite a influenciar o preço da energia.

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada se baseia no modelo apresentado em Kelman, Barroso e Pereira (2001), onde é demonstrado de forma analítica o equilíbrio de Nash em um mercado baseado em ofertas com modelos de Cournot para sistemas desacoplados no tempo, ou seja, sistemas onde uma decisão no estágio t não afeta a operação no estágio $t+1$. A hipótese considerada nesse modelo desacoplado pode ser utilizada em sistemas exclusivamente térmicos onde os custos operativos estão baseados somente no custo do combustível utilizado e a quantidade de energia gerada.

Define-se produtores *price makers*, os agentes possuam capacidade instalada suficientemente grande que possam calibrar suas ofertas de energia de maneira a alterar o preço de mercado. Os custos de operação dos N agentes *price makers* é dado por um custo variável $c(i)$ que depende da quantidade de energia produzida $E(i)$ conforme relação linear:

$$C_i(E(i)) = c(i) * E(i) \quad (\forall i = 1, \dots, N) \quad (1)$$

Por outro lado, existem os produtores *price takers*, ou seja, produtores dependentes que não tem tamanho suficiente que possa influenciar os preços do mercado. O custo operacional dos M produtores *price takers* é dado por uma relação quadrática da sua oferta de energia:

$$\delta(O) = \frac{O^2}{2 * \alpha} \quad (2)$$

Onde:

O – Oferta Total de Energia dos agentes *price takers* dada pela diferença dentre Demanda total do sistema e a Energia Produzida pelos *price makers*;

α – parâmetro escalar que mede a produção energética das usinas térmicas.

A variação marginal do custo de operação dos *price takers* é dada por:

$$\frac{\partial \delta(O)}{\partial O} = \frac{O}{\alpha} \quad (3)$$

Reescrevendo a oferta O dos agentes price takers em função do preço de mercado temos que:

$$O(p) = \alpha * p \quad (4)$$

Para a demanda total do sistema (D) com comportamento inelástica, a demanda residual dos produtores price makers é:

$$Dr(p) = D - O(p) \quad (5)$$

Substituindo (3) em (4) temos:

$$Dr(p) = D - \alpha * p \quad (6)$$

Para uma oferta de energia dos price makers dada por $E(i)$ e a produção conjunta de todos esses produtores dada por:

$$Q = \sum_{i=1}^N E(i) \quad (7)$$

Dessa forma o preço de mercado é definido por:

$$Dr(p) = D - \alpha * p = Q$$

Que resulta em:

$$p(Q) = \frac{D - Q}{\alpha} \quad (8)$$

Substituindo (7) em (8) tem-se que o preço spot é dado por:

$$p = \frac{D - \sum_{i=1}^N E(i)}{\alpha} \quad (9)$$

3.1 PRODUÇÃO ÓTIMA

O lucro (L) de um agente *price maker* pode ser descrita como:

$$L(i) = Receita(i) - Despesa(i)$$

$$L(i) = p(Q) * E(i) - c(i) * E(i) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (10)$$

A quantidade de energia E(i) que maximiza o lucro de cada agente é obtida por:

$$\max_{E(i)} L(i) \rightarrow \frac{\partial L(i)}{\partial E(i)} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (11)$$

Derivando a Equação e igualando a zero temos:

$$\frac{\partial L(i)}{\partial E(i)} = \frac{D}{\alpha} * E(i) - \frac{\sum_{k=1}^N E(k) * E(i)}{\alpha} - c(i) * E(i) = 0 \quad (12)$$

Multiplicando por α :

$$D - \alpha * c(i) - \sum_{k \neq i}^N E(k) - 2 * E(i) = 0$$

Reajustando os termos temos a quantidade ótima de energia:

$$2 * E(i) = D - \sum_{k \neq i}^N E(k) - \alpha * c(i) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (13)$$

3.2 EQUILÍBRIO DE NASH COURNOT

Para o modelo de Nash-Cournot a quantidade ótima de energia produzida por cada agente será determinada de forma a maximizar seu próprio lucro assumindo como conhecido as produções de todos os outros competidores. Dessa forma a geração ótima de cada agente deve satisfazer:

$$E^*(i) = \max_E [p(Q) * E(i) - c(i) * E(i)] \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (14)$$

Substituindo (12) em (13) temos um sistema linear de N equações e N incógnitas. A solução do sistema resulta no equilíbrio de Nash-Cournot, onde nenhum agente irá alterar sua estratégia visto que isso resultaria em reduzir seu lucro, admitindo que não há limitações de produção para nenhum dos agentes. Dessa forma nenhum agente pode aumentar unilateralmente alterar sua receita alterando sua produção e todos estão simultaneamente tentando maximizar seus próprios lucros sem saber a decisão dos demais.

Transformando a Eq.12 em um sistema linear com N equações lineares em forma matricial temos:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & \dots \\ \dots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} E(1) \\ E(2) \\ E(3) \\ E(N) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} D - \alpha * c(1) \\ D - \alpha * c(2) \\ D - \alpha * c(3) \\ D - \alpha * c(N) \end{bmatrix} \\ \text{(M)} & & \text{(E)} & = & \text{(R)} \end{matrix} \quad (15)$$

Sendo λ os componentes da diagonal de M^{-1} e μ os elementos fora da diagonal temos:

$$\lambda = -N * \mu = \frac{N}{N + 1} \quad (16)$$

$$\mu = -\frac{1}{N + 1} \quad (17)$$

Então a Matriz ficará determinada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} E(1) \\ E(2) \\ E(3) \\ E(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & \cdots & \mu \\ \mu & \lambda & \ddots & \mu \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu & \mu & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - \alpha * c(1) \\ D - \alpha * c(2) \\ D - \alpha * c(3) \\ D - \alpha * c(N) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$(E) = M^{-1} * (R)$$

Resolvendo a matriz temos¹:

$$E^*(i) = \lambda * (D - \alpha * c(i)) + (N - 1) * \mu * D - \alpha * \mu * \sum_{k \neq i} c(k) \quad (19)$$

Substituindo (16) e (17) em (19) temos:

$$E(i) = \frac{D - N * \alpha * c(i) + \alpha * \sum_{k \neq i} c(k)}{N + 1} \quad (20)$$

A quantidade total Q^e produzida pelos produtores estratégicos em equilíbrio é:

$$Q^e = \sum_{k=1}^N E(k) = \frac{N}{N + 1} * D - \frac{\alpha * \sum_{k=1}^N c(k)}{N + 1} \quad (21)$$

¹ Uma demonstração da solução matricial pode ser consultada no Anexo A.

3.2.1 Preço Spot:

Substituindo (19), que determina a energia total produzida pelos agentes *price makers* na equação (8), que determina o preço de mercado temos a determinação do preço spot do sistema no equilíbrio é dado por:

$$p(N) = \frac{D + \alpha * \sum_{k=1}^N c(k)}{\alpha * (N + 1)} \quad (22)$$

3.2.2 Remuneração líquida

Multiplicando (19), que determina a energia produzida pelo agente *i*, por (21), custo marginal, e subtraindo o custo de produção em relação a quantidade produzida temos a remuneração líquida de cada produtor em situação de equilíbrio:

$$L(i) = E(i) * p(N) - E(i) * c(i)$$

Se os custos, $c(i)$ forem iguais para todos os agentes temos:

$$L(i) = \frac{(D - \alpha * c)^2}{\alpha * (N + 1)^2} \quad (23)$$

A remuneração total será:

$$L_{total} = N * L(I) = \frac{N}{(N + 1)^2} * \left(\frac{(D - \alpha * c)^2}{\alpha} \right) \quad (24)$$

3.3 SOLUÇÃO DE MÍNIMO CUSTO (BENCHMARK)

Seja Q^c a produção total de N agentes estratégicos de forma a minimizar custos totais. Qual Q^c que minimiza o custo de operação dos price takers e price makers?

Para solucionar esse problema será considerado que o custo de produção será o custo médio de produção total dos produtores estratégicos definido por:

$$c = \frac{\sum_{i=1}^N c(i) * E(i)}{\sum_{i=1}^N E(i)}$$

O problema de otimização que minimiza o custo é dado por:

$$Z = \text{Min} \left[\frac{(D - Q^c)^2}{2 * \alpha} + c * Q^c \right] \quad (25)$$

Minimizando temos:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q^c} = 0$$

O que resulta em:

$$Q^c = D - \alpha * c \quad (26)$$

Então a quantidade ótima produzida por cada agente N é:

$$E_{min}(i) = \frac{Q^c}{N} = \frac{(D - \alpha * c)}{N} \quad (27)$$

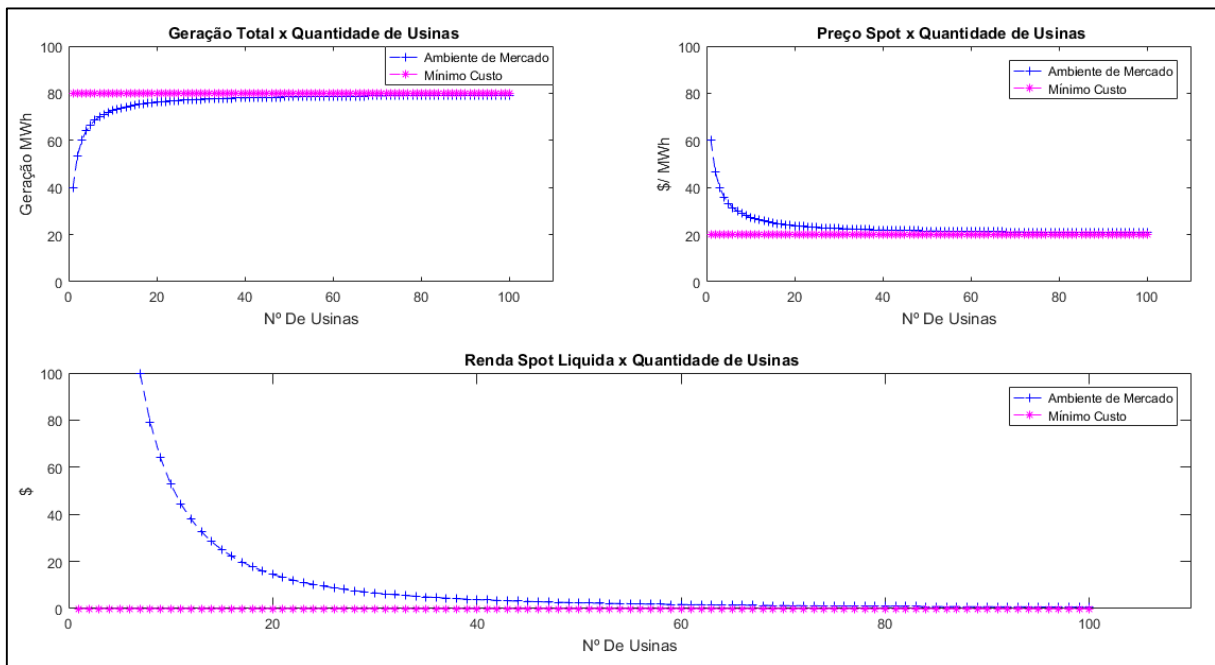
O preço spot é dado por:

$$p^c = \frac{D - Q^c}{\alpha} = \frac{D - (D - \alpha * c)}{\alpha} = \frac{\alpha * c}{\alpha} = c \quad (28)$$

Dessa forma, o preço do mercado é dado pelo custo marginal dos produtores *price makers*.

Abaixo é demonstrado um comparativo gráfico entre o comportamento de um agente em um cenário de competição de mercado (ambiente de mercado) e um cenário de operação com mínimo custo para as variáveis geração total, preço spot e lucro de cada usina conforme ocorre um aumento de agentes (N).

Figura 1- Comportamento Ambiente de Mercado x Mínimo Custo



Fonte: Autor

3.4 COMPARATIVO ENTRE ENERGIA PRODUZIDA NA SOLUÇÃO DE EQUILÍBRIO DE NASH COURNOT E MÍNIMO CUSTO (BECHMARKING)

Com custo (c) idêntico a quantidade de energia produzida por cada usina Hidroelétrica que maximiza o lucro dos *price makers* baseada em (20) é:

$$E(i) = \left(\frac{1}{N+1} \right) * (D - \alpha * c) \quad (29)$$

Para a solução de mínimo a quantidade de Energia é:

$$E_{\min}(i) = \left(\frac{1}{N}\right) * (D - \alpha * c) \quad (30)$$

Como $E(i) < E_{\min}(i)$, fica claro que em um ambiente competitivo predomina o interesse em reduzir a oferta para provocar aumento no preço de mercado.

3.5 OFERTAS FORA DO EQUILIBRIO E DESVIOS

O equilíbrio de Nash-Cournot representa um conjunto de estratégias dos competidores de forma que a estratégia de oferta ótima de cada competidor é a que maximiza seu próprio lucro. Dessa forma os competidores devem prever a escolha dos demais competidores considerado que esses farão escolhas racionais de forma simultânea.

Nos desenvolvimentos apresentados nessa sessão serão modelados cenários em que um dos agentes se comportam de forma a fugir do ponto de Equilíbrio de Nash, seja por uma deficiência operacional ou por um comportamento não racional.

3.5.1 RESTRIÇÃO DE GERAÇÃO DE UMA DAS USINAS

Considerando um mercado com 3 usinas price makers, no equilíbrio de Nash cada usina produziria conforme (29):

$$E(1) = E(2) = E(3) = \left(\frac{1}{N+1}\right) * (D - \alpha * c)$$

O preço Spot seria determinado por (20):

$$p(N) = \frac{D + \alpha * \sum_{k=1}^N c(k)}{\alpha * (N + 1)}$$

O lucro de cada usina no equilíbrio é dado a partir de (23):

$$L(i) = \frac{(D - \alpha * c)^2}{\alpha * (N + 1)^2}$$

Dessa forma mesmo que as usinas tenham capacidade de geração maior que $E(1)=E(2)=E(3)$ a produção ótima que irá maximizar os lucros é produzir conforme dado por (29).

Se a usina 1, devido a restrições técnicas, não consiga produzir conforme determinado pelo equilíbrio em (29) e essa geração se torne menor que o valor de equilíbrio, essa usina tenderia a produzir o máximo de energia possível que seja próximo ao valor de geração ótima.

Se a restrição de geração da Usina 1 é conhecida pelas Usinas 2 e 3, essas duas usinas tenderão a determinar suas produções de energia ótima através do equilíbrio de Nash-Cournot apenas entre elas, desconsiderando agora a geração da usina 1. Dessa forma, o equilíbrio será obtido considerando agora a Demanda Total do sistema menos a quantidade de energia que a usina 1 produzirá em restrição operacional. Assim a demanda D da equação (22) e (23) deverá ser substituída por D_r conforme equação:

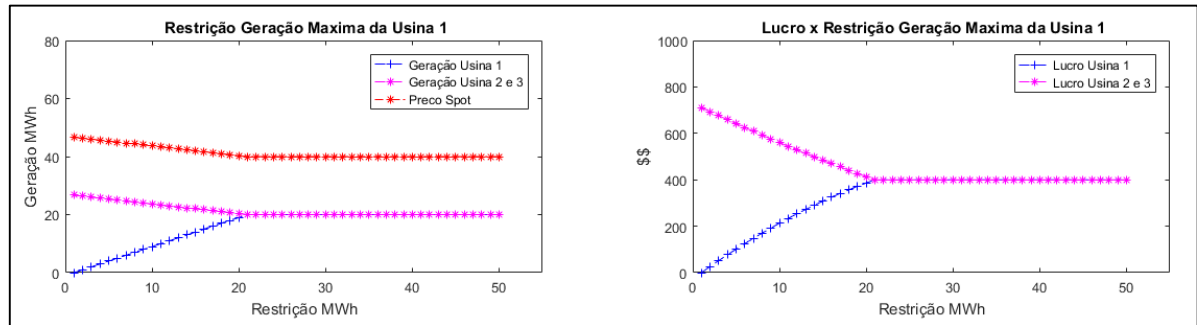
$$D_r = D - E(1)$$

O resultado dessa análise demonstram os seguintes comportamentos:

- ✓ A usina 1, em restrição, irá gerar o máximo de energia possível de forma a se aproximar do valor de equilíbrio que seria possível sem a restrição;
- ✓ As usinas 2 e 3 ao perceber a restrição da usina 1 passam a produzir um pouco mais de energia, mas de forma a não compensar totalmente a quantidade que a usina 1 deixou de produzir. Dessa forma as usinas 2 e 3 provocam de maneira estratégica uma elevação no preço spot;
- ✓ Com elevação do preço spot e aumento na geração, as usinas 2 e 3 aumentam seu lucro aproveitando a situação de restrição da usina 1, que consequentemente tem seu lucro reduzido;
- ✓ Se a usina 1 tiver uma restrição de geração de energia que impossibilite sua operação totalmente, ou seja, não consegue gerar nenhuma energia, o equilíbrio de Nash-Cournot se dará considerando apenas 2 competidores, as usinas 2 e 3, já que a usina 1 tem geração nula.

Uma simulação de comportamento estratégico desses agentes será apresentada na figura abaixo.

Figura 2- Comportamento Gerador com Restrição Operacional



Fonte: Autor

3.5.2 COMPORTAMENTO NÃO-COURNOT DE UM DOS AGENTES

O modelo de equilíbrio de Nash-Cournot considera que os agentes farão escolhas racionais, ou seja, cada competidor toma sua decisão de geração simulando cenários de respostas racionais dos demais competidores a sua decisão de geração até encontrar o equilíbrio de Nash-Cournot onde nenhum agente terá incentivo a mudar sua geração pois isso terá resultados não ótimos.

No cenário com três geradores price makers, o que ocorre se uma das usinas oferece quantidade de energia diferente do racional previsto pelo modelo de Nash-Cournot?

Considerando que a usina 1 tenha comportamento não racional, e essa usina oferte uma quantidade de energia qualquer para testar o comportamento do preço spot ou afetar os demais competidores.

As usinas 2 e 3, tem comportamento racional e tomam suas decisões supondo que a usina 1 também se comporta de forma racional. Dessa forma as usinas 2 e 3 não sabem que a usina 1 irá ofertar de maneira diferente do racional.

Nesse cenário, as usinas 2 e 3 irão ofertar suas energias conforme equilíbrio de Nash-Cournot definido por (20), porém após ofertarem suas energias, as usinas 2 e 3 observam que a usina 1 realizou uma oferta não racional e dessa forma o preço spot será determinado por (8) e seu lucro por (23).

O resultado dessa análise demonstram os seguintes comportamentos:

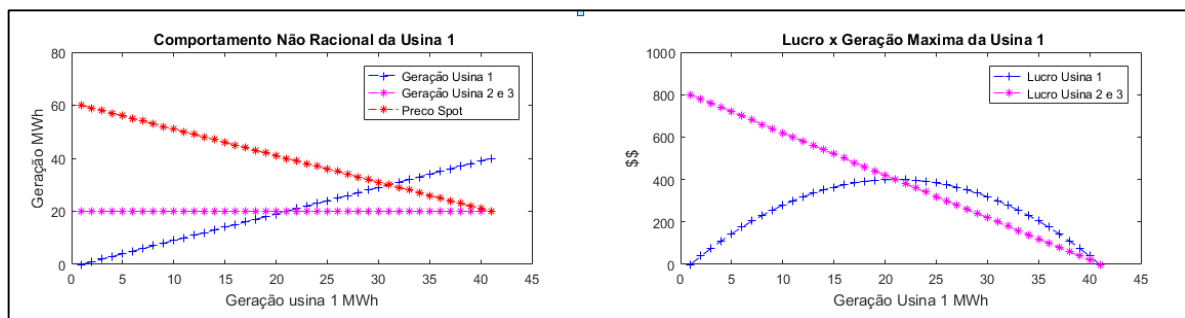
- ✓ A usina 1 se comportando irracionalmente irá ofertar uma quantidade de energia diferente da quantidade ótima, o que irá acarretar em diminuição do

seu lucro. Seu lucro máximo se dará somente quando ofertar a quantidade de equilíbrio;

- ✓ As usinas 2 e 3 terão seus lucros afetados de maneira positiva ou negativa, dependendo da quantidade ofertada pela usina 1. Se a usina 1 ofertar uma quantidade de energia menor que a quantidade de equilíbrio, o preço spot irá aumentar e como consequência as usinas 2 e 3 elevarão seus lucros. Se a usina 1 ofertar valor maior que a quantidade de equilíbrio, todas as usinas terão seus lucros reduzidos, porém as usinas 2 e 3 tem maior decréscimo em seus lucros.

Uma simulação de comportamento estratégico desses agentes é demonstrada na figura abaixo.

Figura 3 - Comportamento Gerador Não Racional



Fonte: Autor

3.5.3 COOPERAÇÃO ENTRE AGENTES

Conforme Nicholson, Snyder (2010) monopólio pode ser definido como apenas um fornecedor suprindo o mercado e essa firma pode escolher produzir em qualquer ponto na curva de demanda do mercado.

A cooperação entre os agentes pode resultar em um monopólio que tem o poder de estabelecer preços.

Nos modelos apresentados nos itens 3.5.2 e 3.5.3 os competidores operavam de maneira independente. O que ocorreria se esses competidores formassem um conluio para determinar conjuntamente suas produções de forma a manipular o preço spot e seus lucros? Se a possibilidade de conluio existir, os competidores farão escolhas que maximizem seus lucros totais e então dividirão os lucros entre si. Essa união entre os competidores para tentar fixar preços ou quantidades de produção para maximizar lucros é definida como cartel.

Supondo um mercado com 2 agentes *price makers*, ambos com mesmo custo operacional c e considerando um conjunto de agentes *price takers* que ofertam energia conforme (4) e que esses agentes possuem capacidade de atender toda a demanda somando suas capacidades de geração.

Os agentes *price makers* irão gerar uma quantidade de energia dado por (20):

$$E^*(i) = \frac{D - N * \alpha * c(i) + \alpha * \sum_{k \neq i} c(k)}{N + 1} = \frac{D - \alpha * c}{3} \quad \forall i = 1, 2 \quad (31)$$

A quantidade total produzida na posição de equilíbrio de Nash é a soma das quantidades de equilíbrio de cada um dos agentes:

$$QTE(i) = \sum_{k=1}^2 E^*(i) = 2 * E^*(i) = 2 * \left(\frac{D - \alpha * c}{3} \right) \quad (32)$$

A quantidade que uma empresa produziria em situação de monopólio é dada por (20) considerando $N=1$, então em monopólio a energia total gerada será definida por:

$$Em^*(i) = \frac{D - \alpha * c}{2} \quad (33)$$

O preço de mercado no cenário de monopólio dado por (8) será:

$$p(Qm) = \frac{D - Em^*}{\alpha} = \frac{D}{\alpha} - \frac{Em^*}{\alpha} = \frac{D}{\alpha} - \frac{D - \alpha * c}{2 * \alpha}$$

$$p(Qm) = \frac{D + \alpha * c}{2 * \alpha} \quad (34)$$

O Lucro Líquido é dado por:

$$Lm = Em^* * p(Qm) - c * Em^*$$

Substituindo temos:

$$Lm = \frac{(D - \alpha * c)}{2} * \frac{(D + \alpha * c)}{2 * \alpha} - c * \frac{(D - \alpha * c)}{2}$$

Simplificando a equação, resulta em:

$$Lm = \frac{(D - \alpha * c)^2}{4 * \alpha} \quad (35)$$

Assim, (35) resulta no lucro líquido de um agente em condições de monopólio.

Se as duas empresas pertencentes ao mercado nesse modelo formarem um conluio e cada uma produzir 50% da quantidade de energia Em^* , isso resultaria em um lucro para cada empresa de:

$$Lm(1) = Lm(2) = \frac{(D - \alpha * c)^2}{8 * \alpha} \quad (36)$$

Para o mesmo cenário de duas empresas, em situação de equilíbrio de Nash-Cournot, a quantidade de energia a ser produzida será de:

$$Qc = 2 * E^*(i)$$

O preço Spot será de:

$$p(Qc) = \frac{D - Q}{\alpha} = \frac{D}{\alpha} - \frac{2 * E^*(i)}{\alpha} = \frac{D}{\alpha} - \frac{D - \alpha * c}{3}$$

$$p(Qc) = \frac{D + 2 * \alpha}{3 * \alpha}$$

O lucro líquido será dado por:

$$Lc = \frac{D + 2 * \alpha}{3 * \alpha} * \frac{D - \alpha * c}{3} - c * \left(\frac{D - \alpha * c}{3}\right)$$

$$Lc = \frac{(D - \alpha * c)^2}{9 * \alpha} \quad (37)$$

Conforme pode-se verificar por (35) e (37) o maior lucro se dará se as duas empresas cooperarem e cada agente gerar 50% da demanda do sistema. Isso resulta em uma geração menor de cada usina do que na condição de equilíbrio de Nash-Cournot.

3.5.4 POSSIBILIDADE DE DESVIOS

Essa seção irá analisar se há vantagens em um dos agentes se desviar da colaboração e mudar sua posição de quantidade de energia a fornecida.

Supondo que um dos agentes queira se desviar da cooperação sob hipótese de que o outro agente irá manter sua posição de geração conforme determinado no modelo de cooperação. O segundo agente irá deixar de gerar conforme modelo de cooperação a partir do momento que identificar que o primeiro agente se desviou e assim a cooperação entre os agentes será encerrada.

Se a usina 1 vai produzir 50% de Em^* , conforme determinado em (33) a quantidade ofertada pela usina 2 será tal que maximize seus lucros L_2 dada a produção esperada da usina 1 o que resulta no seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \underset{E_2}{Max} \quad p\left(\frac{Em^*}{2}, E_2\right) * E_2 - c * E_2 \\ & \underset{E_2}{Max} \quad \left[\frac{D - \left(\frac{Em^*}{2} + E_2\right)}{\alpha} \right] * E_2 - c * E_2 \end{aligned}$$

Solucionando o problema de maximização temos:

$$\frac{\partial R_2}{\partial E_2} = 0 \rightarrow \frac{D - \frac{Em^*}{2} - 2 * E_2}{\alpha} - c = 0$$

Isolando E_2 e substituindo Em^* por (33) temos:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{D}{2} - \frac{D + \alpha * C}{8} - \frac{c * \alpha}{2} \\ E_2 &= \frac{3 * D - 3 * \alpha * c}{8} \end{aligned} \tag{38}$$

A quantidade total de energia produzida será de:

$$QTE = E_2 + \frac{Em^*}{2} = \frac{3 * D - 3 * \alpha * c}{8} + \frac{(D - \alpha * c)}{4}$$

$$QTE = \frac{5 * D - 5 * \alpha * c}{8} \quad (39)$$

O preço spot é determinado por:

$$p(QTE) = \frac{D - Q}{\alpha} = \frac{D - \frac{5 * D - 5 * \alpha * c}{8}}{\alpha}$$

$$p(QTE) = \frac{3 * D + 5 * \alpha * c}{8 * \alpha} \quad (40)$$

O lucro da usina 2, que desvia da cooperação é dada por:

$$L_{D2} = p(QTE) * E_2 - c * E_2$$

$$L_{D2} = \left(\frac{3 * D + 5 * \alpha * c}{8 * \alpha} \right) * \left(\frac{3 * D - 3 * \alpha * c}{8} \right) - c * \left(\frac{3 * D - 3 * \alpha * c}{8} \right)$$

$$L_{D2} = \frac{9}{64 * \alpha} * (D - \alpha * c)^2 \quad (41)$$

Dessa forma a renda da Usina 1, que fez sua oferta considerando a cooperação, pois ainda não havia identificado o desvio da Usina 2 é dado por:

$$L_{c1} = p(QTE) * \left(\frac{Em}{2} \right) - c * \left(\frac{Em}{2} \right)$$

$$L_{c1} = \left(\frac{3 * D + 5 * \alpha * c}{8 * \alpha} \right) * \left(\frac{D - \alpha * c}{4} \right) - c * \left(\frac{D - \alpha * c}{4} \right)$$

$$L_{c1} = \frac{3 * (D - \alpha * c)^2}{32 * \alpha} \quad (42)$$

Diante das equações (36), (37) e (41) pode-se concluir que a maior remuneração da Usina 2 é conseguida quando se desvia da cooperação e consequentemente deixa de colaborar quanto a quantidade de energia a ser produzida.

A usina 1 que se mantém colaborando até descobrir que a usina 2 se desviou tem a pior renda possível quando a usina 2 se desvia da cooperação.

Se for considerado que os agentes interagem durante infinitos períodos e descontam os payoffs usando uma taxa de desconto denotada por: $\delta = \frac{1}{1+rf} < 1$, onde rf pode ser interpretado como a taxa de juros. A usina 2 não terá interesse em se desviar do equilíbrio de colusão tácita, onde um desvio causará o fim da cooperação, se:

$$\frac{(D-\alpha*c)^2}{8*\alpha} + \delta * \frac{(D-\alpha*c)^2}{8*\alpha} + \delta^2 * \frac{(D-\alpha*c)^2}{8*\alpha} + \dots \geq \frac{9(D-\alpha*c)^2}{64*\alpha} * + \delta * \frac{(D-\alpha*c)^2}{9*\alpha} + \delta^2 * \frac{(D-\alpha*c)^2}{9*\alpha} \dots$$

$$\frac{(D - \alpha * c)^2}{8 * \alpha} * \frac{1}{1 - \delta} \geq \frac{9(D - \alpha * c)^2}{64 * \alpha} * + \frac{\delta}{1 - \delta} * \frac{(D - \alpha * c)^2}{9 * \alpha}$$

Simplificando e isolando δ temos:

$$\delta \geq \frac{9}{17}$$

Que resulta em uma taxa de juros:

$$\frac{1}{1 + rf} \geq \frac{9}{17}$$

$$rf \leq 88\%$$

Portanto, desde que $rf \leq 88\%$, existe um equilíbrio em que os agentes cooperam (colusão tácita).

3.5.5 CARTEL DINAMICO COM N FIRMAS

Considerando um cenário onde se tenha 3 agentes geradores o lucro estático de cada firma no equilíbrio de Nash-Cournot será:

$$\text{Max}_{E_1} \frac{(D - (E_1 + E_2 + E_3) * E_1)}{\alpha} - c * E_1$$

Solucionando o problema de maximização temos:

$$D - 2 * E_1 - E_2 - E_3 = \alpha * c$$

$$E_1 = \frac{D - E_2 - E_3 - \alpha * c}{2}$$

$$E_2 = D - 2 * E_1 - E_3 - \alpha * c$$

$$E_3 = D - 2 * E_1 - E_2 - \alpha * c$$

A quantidade de energia produzida por cada agente em equilíbrio de Nash-Cournot será:

$$Ec(i) = \frac{1}{N + 1} * (D - \alpha * c)$$

Para N=3 temos:

$$Ec(i) = \frac{1}{3 + 1} * (D - \alpha * c) = \frac{(D - \alpha * c)}{4} \quad (43)$$

A quantidade de energia total das posições em equilíbrio de Nash-Cournot é dada por:

$$QTE_c = \frac{3 * (D - \alpha * c)}{4}$$

O preço spot em equilíbrio de Nash-Cournot com 3 usinas será de:

$$p(QTE_c) = \frac{D - Q}{\alpha} = \frac{D - \frac{3 * (D - \alpha * c)}{4}}{\alpha}$$

$$p(QTE_c) = \frac{D + 3 * \alpha * c}{4 * \alpha} \quad (44)$$

O lucro líquido de cada agente em equilíbrio de Nash-Cournot é:

$$Lc(i) = \frac{D + 3 * \alpha * c}{4 * \alpha} * \frac{(D - \alpha * c)}{4} - c * \frac{(D - \alpha * c)}{4}$$

$$Lc(i) = \frac{(D - \alpha * c)^2}{16 * \alpha} \quad (45)$$

Em um cenário de monopólio a quantidade de energia produzida por cada agente será de:

$$E_m(i) = QTE_m = \frac{(D - \alpha * c)}{2}$$

A quantidade E_m também será a quantidade total de energia produzida no mercado. O preço de mercado será:

$$p(QTE_m) = \frac{D - E_m(i)}{\alpha} = \frac{D - \frac{(D - \alpha * c)}{2}}{\alpha}$$

$$p(QTE_m) = \frac{D + \alpha * c}{2 * \alpha} \quad (46)$$

Assim, o lucro líquido do agente para um cenário de monopólio será de:

$$L_m = E_m * p(QTE_m) - c * E_m$$

$$L_m = \left(\frac{(D - \alpha * c)}{2} \right) * \left(\frac{D + \alpha * c}{2 * \alpha} \right) - c * \frac{(D - \alpha * c)}{2}$$

$$L_m = \frac{(D - \alpha * c)^2}{4 * \alpha} \quad (47)$$

Havendo cooperação entre os agentes os 3 geradores irão gerar a quantidade QTE_m que dividida entre os três agentes o que resulta:

$$\frac{E_m(i)}{3} = \frac{(D - \alpha * c)}{6}$$

Que resulta um lucro para cada agente de:

$$L_m(i) = \frac{(D - \alpha * c)^2}{12 * \alpha} \quad (48)$$

Se a usina 1 desvia e as usinas 2 e 3 continuam gerando como em um monopólio temos:

$$Max_{E_1} \left(D - \left(E_1 + \frac{E_m(2)}{3} + \frac{E_m(3)}{3} \right) \right) * E_1 - c * E_1$$

Que resulta em uma quantidade de energia produzida para a usina que desviou de:

$$E(1) = \frac{D - \alpha * c}{3} \quad (49)$$

O preço spot será conforme (44) que resultará em um lucro para usina 1 que desviou de:

$$L_D(1) = \left(\frac{D - \alpha * c}{3} \right) * \left(\frac{D + \alpha * c}{2 * \alpha} \right) - c * \left(\frac{D - \alpha * c}{3} \right)$$

$$L_D(1) = \frac{(D - \alpha * c)^2}{6 * \alpha} \quad (50)$$

A usina 1 não terá interesse em desviar do equilíbrio de colusão tácita se:

$$\frac{(D-\alpha*c)^2}{12*\alpha} + \delta * \frac{(D-\alpha*c)^2}{12*\alpha} + \delta^2 * \frac{(D-\alpha*c)^2}{12*\alpha} + \dots \geq \frac{(D-\alpha*c)^2}{6*\alpha} * + \delta * \frac{(D-\alpha*c)^2}{16*\alpha} + \delta^2 * \frac{(D-\alpha*c)^2}{16*\alpha} \dots$$

$$\frac{(D - \alpha * c)^2}{12 * \alpha} * \frac{1}{1 - \delta} \geq \frac{(D - \alpha * c)^2}{6 * \alpha} + \frac{\delta}{1 - \delta} * \frac{(D - \alpha * c)^2}{16 * \alpha}$$

Simplificando e isolando δ temos:

$$\delta \geq \frac{4}{5}$$

Que resulta em uma taxa de juros:

$$\frac{1}{1 + rf} \geq \frac{4}{5}$$

$$rf \leq 25\%$$

Portanto, desde que $rf \leq 25\%$, existe um equilíbrio em que os 3 agentes cooperam (colusão tácita).

A tabela abaixo apresenta outras taxas de juros para diferentes quantidades de agentes participantes do mercado.

Tabela 1- Quantidade de Agentes x Taxas de Juros

Quantidade de Agentes	rf
2	88%
3	25%
4	24%
5	22%

Fonte: Autor

3.6 SISTEMAS HIDROTÉRMICOS – MODELO DE MÍNIMO CUSTO

Nesse tópico será apresentado o modelo de operação ótima de sistemas hidrotérmicos baseado em despacho de mínimo custo determinístico. Esse modelo considera um alto componente de geração advinda de geração hídrica, sendo assim,

o modelo considerar o uso de reservatórios das hidroelétricas que permitem a transferência de energia entre períodos. Assim, o despacho passa a ser modelo de forma acoplada no tempo, onde uma decisão de operação hoje gera consequências futuras de custo. Se o despacho utilizar muita água hoje para geração atender a demanda e ocorrer uma seca no futuro, será necessário o uso de mais usinas térmicas no futuro o que irá encarecer a operação do sistema. Se a água dos reservatórios for economizada hoje e for utilizado mais térmicas para atendimento da demanda e ocorrer altas afluições no futuro, as usinas hidroelétricas terão que liberar água através do vertedouro, o que será um desperdício de energia, aumentando os custos de operação.

3.6.1 CUSTO IMEDIATO E CUSTO FUTURO

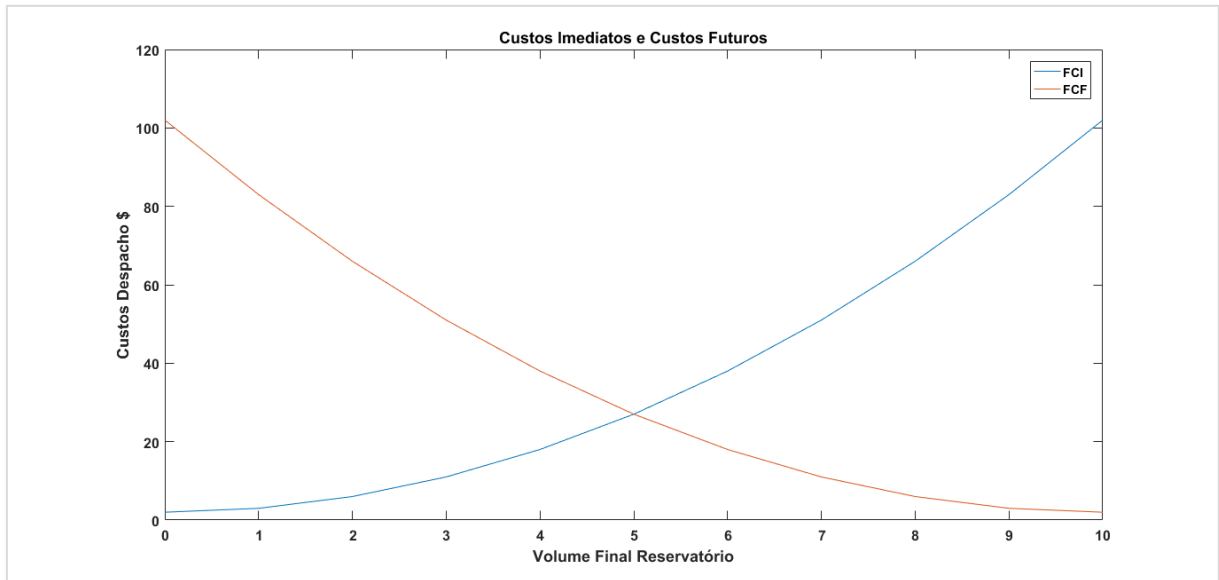
O operador do sistema, responsável pelo despacho, deverá avaliar o trade-off entre o uso imediato da água e os benefícios futuros do seu armazenamento. Os benefícios devem avaliados em termos de economia de combustíveis que serão necessários para operação das usinas térmicas.

A figura 1 demonstra o comportamento das duas funções, FCF (função de custo futuro) e FCI (função de custo imediato). A FCF representa o custo esperado de geração térmica e racionamento do final do estágio t (início de $t+1$) até o final do período de estudo. Essa função diminui à medida que o volume armazenado no reservatório aumenta, pois se terá mais energia hidroelétrica disponível no futuro.

A função FCI mede os custos de geração térmica no estágio t . Essa função aumenta à medida que aumenta a energia hidroelétrica disponível, pois para aumentar o armazenamento de água é necessário maior uso de térmicas o que deixa a operação mais cara.

A curva FCF pode ser calculada através de simulações de despacho para cada nível de armazenamento final do reservatório para cada uma das etapas em análise. Essas simulações consideram o comportamento probabilístico usando vários cenários de hidrologia.

Figura 4 - Custo Imediato e Futuro x Armazenamento Final



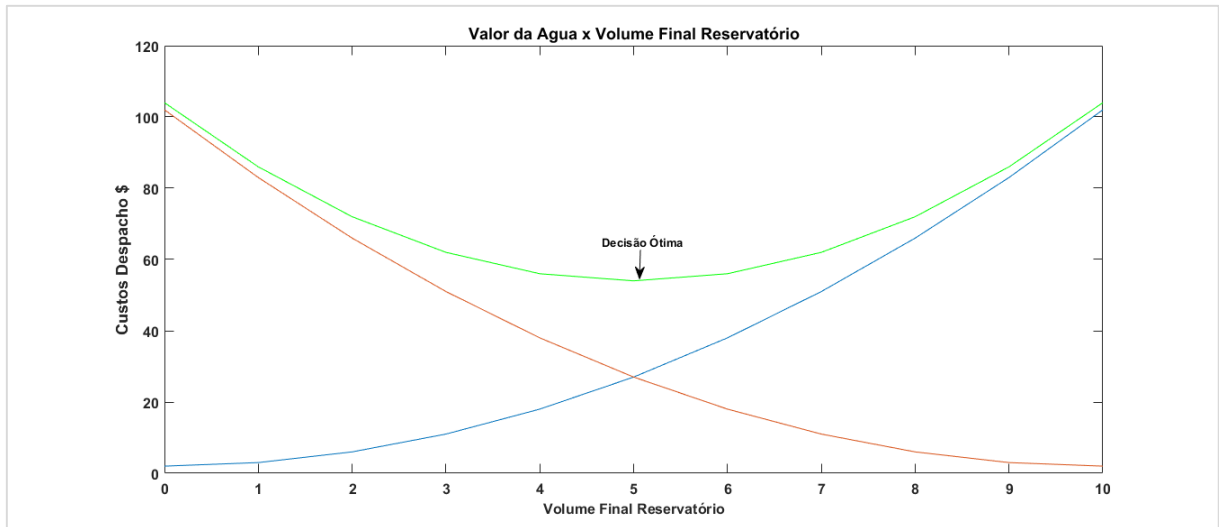
Fonte: Autor

3.6.2 VALOR DA ÁGUA

O uso ótimo da água é o ponto que minimiza a soma dos custos imediato (FCI) e custo futuro (FCF). A Figura 2 demonstra graficamente a relação entre as respectivas funções e o ponto de despacho ótimo situado no ponto de mínimo custo global.

Ao contrário das térmicas onde as usinas têm custo operativo direto, as usinas hidroelétricas têm custo de oportunidade indireta vinculada a economia de combustível esperada hoje e no futuro. O uso ótimo da água é determinado quando se equilibram os valores de custo imediato e futuro da água.

Figura 5 - Uso Ótimo da Água



Fonte: Autor

3.6.3 SOLUÇÃO

A solução de despacho possui um trade-off probabilístico de utilizar o estoque de energia hidroelétrica ou economizar água para geração futura.

A estratégia de operação é calculada considerando:

- ✓ Uma decisão para cada possível nível do reservatório em cada período de análise considerando que níveis de reservatórios altos necessitam de menos geração térmica preventiva;
- ✓ Quantidade ótima de geração térmica é uma função dos níveis de armazenamento dos reservatórios;
- ✓ Modelo utilizando duas variáveis de estados: nível de armazenamento e tendência hidrológica;
- ✓ Dinâmica hidrológicas dos aquíferos fazem com que as afluências em etapas sucessivas sejam estatisticamente correlacionadas, ou seja, grande afluência hoje representa alta probabilidade de grande afluência futura.

A estratégia operativa de minimização de custos é calculada via algoritmo estocástico que será detalhado na seção 3.8.1. O algoritmo estocástico fornecerá os custos marginais da geração hidroelétrica em função do nível de armazenamento a afluência. A partir dos custos marginais seguir os seguintes passos:

- ✓ Dado o armazenamento do reservatório no início do período e a afluência do mês anterior, carregar o custo marginal de geração hidroelétrica correspondente;
- ✓ Carregar as unidades geradoras hidroelétricas e térmicas por onde crescente do custo operativo até o atendimento da demanda do sistema ser atingida;

3.7 DESPACHO HIDROTÉRMICO DE UM ESTÁGIO

Nessa seção será detalhado a solução de despacho econômico e calculado o preço spot de um sistema hidrotérmico.

Diferente do caso onde se tenha somente térmicas operando, onde a solução ótima é dada por inspeção, o despacho hidrotérmico necessita da solução de um problema de otimização não linear que segue abaixo:

$$Z_t = \text{Min} \sum_{j=1}^J c_j * gt_j + FCF(V_{t+1}) \quad (51)$$

Sujeito a:

$$V_{t+1}(i) = V_t(i) - u_t(i) - s_t(i) + a_t(i) \quad (51b)$$

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) * u_t(i) + \sum_{j=1}^J gt_j = D_t \quad (51c)$$

$$V_t(i) \leq \overline{V_t(i)}$$

$$u_t(i) \leq \overline{u_t(i)}$$

$$gt_j \leq \overline{gt_j}$$

Onde:

i - Indexador das usinas $i=1,2,...N$;

$V_t(i)$ - Armazenamento inicial da usina i no estágio t ;

$V_{t+1}(i)$ - Armazenamento final da usina i no estágio t ;

$a_t(i)$ - Afluência lateral a usina i no estágio t .

$u_t(i)$ - Volume turbinado pela usina i no estágio t .

$s_t(i)$ - Volume de vertimento da usina i no estágio t .

$\rho(i)$ - Coeficiente de produção de energia da usina i ;

gt_j - Geração Térmica no estágio t .

A equação (51b) é o balanço hídrico do sistema que relaciona o armazenamento e os volumes de entrada e saída do reservatório e por fim os volumes de afluências que chegam aos reservatórios.

A equação (51c) é a restrição de atendimento a demanda onde a soma das gerações térmicas do sistema e a geração hídrica devem obrigatoriamente atender a demanda do sistema.

3.7.1 PREÇO SPOT

O preço spot é dado pelo gerador marginal do sistema, isso é, o último gerador que está em operação para atender a demanda do sistema. O valor do preço spot será dado pelo custo marginal do gerador marginal. É importante destacar que os geradores devem estar ordenados de forma que o custo operativo seja crescente, ou seja o gerador de menor custo para o gerador de maior custo.

Quando a operação incorpora geradores hidroelétricos deverá ser computado o valor do custo futuro do uso da água (FCF) e esse custo deverá ser inserido na escala de custo operativo crescente para que então se carregue os geradores até o atendimento da demanda também de forma crescente dos custos.

Um exemplo é demonstrado na tabela abaixo:

Tabela 2-Tabelas de Usinas para cálculo do preço Spot

Nome da Usina	Capacidade MW	Custo Operativo (\$/MWh)
Gt1	10	8
Gt2	5	12
GH1	5	14
Gt3	20	15

Fonte: Autor

Para uma demanda de 20MW tem-se:

Tabela 3- Despacho Ótimo

Nome da Usina	Geração (MWh)	Custo Operativo (\$/MWh)
Gt1	10	8
Gt2	5	12
GH1	5	14
Gt3	0	15

Fonte: Autor

O que resulta em uma geração total de 20MWh, ou seja, atende à demanda solicitada pelo sistema a um custo spot de R\$14(\$/MWh).

3.8 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

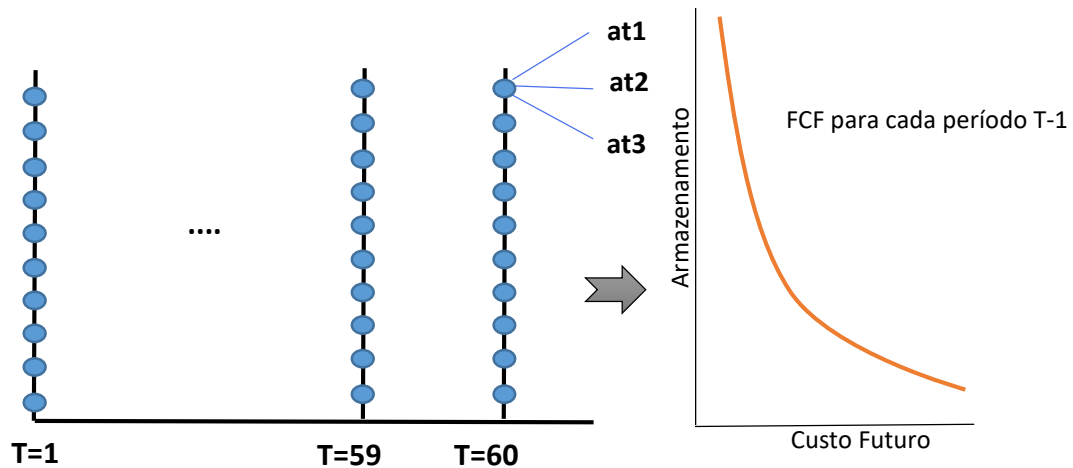
Esta seção irá apresentar os métodos de programação estocástica para cálculo de despacho de mínimo custo e despacho utilizando modelo de Nash-Cournot. Os algoritmos desenvolvidos utilizam o método apresentado em Kelman, Barroso e Pereira (2001) e terão como base o fato de que os despachos ótimos devem sempre buscar o equilíbrio entre o custo imediato (FCI) e o custo futuro do uso da água (FCF).

Para o cálculo das funções de custo futuro (FCF) o procedimento abaixo deverá ser seguido:

- ✓ Para cada período t definir um conjunto de 10 níveis de reservatório de variando de 100% a 0%;
- ✓ Iniciando do último período T , resolver o problema de otimização dado por (49). O armazenamento inicial $V_t(i)$ será dado por cada um dos níveis dos reservatórios. Como se trata do último estágio $FCF=0$. Essa solução deverá ser repetida para cada cenário de hidrologia;
- ✓ O custo esperado para cada nível do reservatório será a média de todas as soluções de cenário de hidrologia. Isso determina o primeiro ponto da FCF.
- ✓ Repetir o cálculo para todos os níveis do reservatório (100% a 0%);
- ✓ Interpolar os pontos de custos e então gerar a função de custo futuro para cada período $T-1$;
- ✓ Repetir todos os processos acima para cada período aplicando a probabilidade histórica de afluência para cada período.

O resultado do procedimento acima irá gerar um conjunto de funções de custo futuro $FCF(V_{t+1})$ ponderadas por sua probabilidade histórica de hidrologia para cada períodos de análise.

Figura 6 - Obtenção da FCF



Fonte: Autor

A programação estocástica para operação centralizada de mínimo custo utiliza exatamente o procedimento informado acima para calcular o despacho ótimo das usinas térmicas e hidroelétricas.

3.8.1 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA COM EQUILÍBRIO DE NASH COURNOT

A programação estocástica para solução em despacho descentralizado analisa o comportamento estratégico dos agentes baseado no equilíbrio de Nash-Cournot. Esse método irá auxiliar na identificação do poder de mercado que possa estar sendo usado pelos agentes price takers.

O método utiliza-se de conceitos semelhantes ao modelo de mínimo custo, porém no caso do algoritmo Nash-Cournot será calculado um equilíbrio para cada cenário de afluência, levando em consideração o benefício imediato de ofertar energia e o valor esperado de armazenar energia e a utilizar no futuro.

O procedimento para o algoritmo de Nash-Cournot segue abaixo:

- ✓ Para cada período t definir um conjunto de 10 níveis de reservatório de variando de 100% a 0%;
- ✓ Iniciando do último período T , encontrar as ofertas ótimas das usinas em relação ao turbinamento $u_t(i)$ para cada cenário de afluência. A quantidade ótima ofertada será determinada pelo equilíbrio de Nash Cournot que maximiza os lucros de cada usina condicionada a decisão

dos demais. Cada usina irá testar uma quantidade $u_t(i)$ que deverá maximizar a soma da remuneração imediata mais a remuneração futura.

- ✓ Jogo termina quando se chega a um ponto de equilíbrio. Nesse ponto nenhuma usina tem incentivo para modificar a quantidade de energia turbinada $u_t(i)$ pois essa decisão diminuiria seu lucro.
- ✓ Calcular a média de todos os equilíbrios para todos os cenários de hidrologia para cada nível de reservatório.
- ✓ Repetir para todos os períodos em análise.

3.8.2 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA COM COLUSÃO ENTRE OS AGENTES PRICE MAKERS

Nesse cenário os agentes price makers se unem para combinar uma só estratégia que determinará a quantidade de energia gerada ao sistema que garanta que o preço spot se manterá sempre o mais alto possível. O algoritmo que soluciona esse problema semelhante ao de Nash Cournot, porém agora ao invés de os agentes competirem entre si haverá colusão fazendo com que o preço seja fortemente manipulado.

3.8.3 DIFERENÇAS ENTRE ALGORITMO MINIMO CUSTO E ALGORITMO NASH-COURNOT

A principal diferença entre os algoritmos de mínimo custo e de Nash-Cournot apresentados acima está na simulação do processo competitivo entre os agentes. Outro ponto importante é que no algoritmo de Nash-Cournot temos duas funções de remuneração futura (FCF), sendo uma para cada usina, pois cada usina maximiza seu lucro separadamente. No algoritmo de mínimo custo a função de remuneração futura é única para ambos agentes, pois o objetivo é a minimização global dos custos.

4 RESULTADOS

Para análise do comportamento de geradores em cenários de mínimo custo (despacho centralizado) e cenários de competição via equilíbrio de Nash- Cournot (despacho descentralizado) foi desenvolvido um estudo considerando duas usinas hidroelétricas² (price makers) que estão posicionadas em paralelo em um rio. Nesse cenário ambas as usinas recebem a mesma afluência. As características das usinas seguem abaixo:

Tabela 4- Características das Usinas Hidroelétricas

Nome	Capacidade (MW)	Arm. Max (Hm ³)	Coef. Prod. (MW/m ³ /s)	Turb. Max. (m ³ /s)	Turb. Min. (m ³ /s)	Vol. Inicial (% do Vol. Útil)
FURNAS	1312	22950	0,745	1761	196	50
ILHA SOLTEIRA	4082	34432	0,383	10651	1370	30

Fonte: Autor

As usinas supracitadas foram escolhidas pois são os agentes mais representativos em termo de potência instalada no sistema simulado.

O parque gerador também é composto por 23 usinas térmicas (price takers) conforme quadro abaixo:

Tabela 5- Características Usinas Térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Custo Operacional (\$/MWH)
1	480	2.2
2	300	2.9
3	320	7.2

² Considerado somente duas usinas hidroelétricas para simplificação do modelo.

4	480	7.2
5	450	7.2
6	500	7.2
7	657	8.3
8	1309	8.4
9	1309	8.5
10	450	10.8
11	256	15.4
12	390	15.4
13	131	20.1
14	84	29.7
15	84	29.7
16	220	29.7
17	220	29.7
18	32	29.7
19	200	37.6
20	270	37.6
21	36	41.9
22	16	43.2
23	16	47.2

Fonte: O.N.S. Usinas Termoeletricas Pertencentes ao Sistema Sudeste.

As usinas price makers irão atuar no mercado para maximizar os seus lucros. As usinas price takers, irão gerar o restante da energia demandada a partir da energia já gerada pelas usinas price makers, da forma mais econômica possível, ou seja, a partir da usina com menor custo.

O estudo irá apresentar dois resultados importantes, o primeiro será o cenário de mínimo custo para preço spot e quantidade de energia hidroelétrica gerada. O outro cenário será baseado em operação descentralizada onde o comportamento dos agentes será a busca pelo equilíbrio de Nash-Cournot considerando as usinas hidroelétricas como price makers e as usinas térmicas como price takers.

Foram simulados 200 cenários hidrológicos para cada nível de reservatório a fim de simular o comportamento estocástico das afluições do sistema. O período de análise foi de 60 meses (5 anos) iniciando no mês de janeiro. Os períodos de seca representam os meses de maio a outubro e o período úmido nos meses de novembro a abril.

As variáveis de entrada consideradas na simulação:

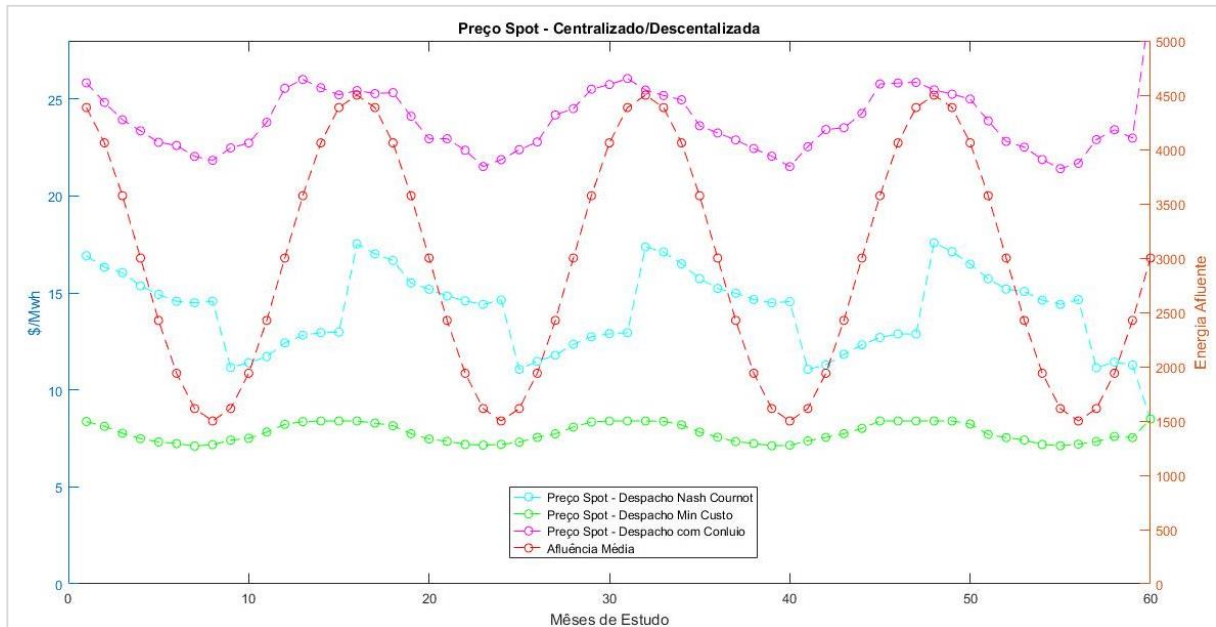
- ✓ Demanda do sistema – 5700MW - Flat;
- ✓ Regime de afluição base – Sistema Sul – Coletado da base do Operador Nacional do Sistema (O.N.S);

4.1.1 PREÇO SPOT MÉDIO

Na figura 6 pode-se verificar o comportamento do preço spot médio em um despacho centralizado (mínimo custo), despacho descentralizado (Nash-Cournot) e despacho em situação de colusão entre os agentes price makers. Verifica-se que o despacho descentralizado apresenta valores bem mais elevados que o despacho centralizado e que com colusão os agentes manipulam os preços de forma a elevar ainda mais o preço spot. A diferença entre o preço spot médio nos três cenários de análise se acentua em momentos de seca, ou seja, baixa afluição. Isso demonstra que os agentes price makers reduzem suas ofertas nesses períodos de afluição reduzida a fim de elevar o preço spot e consequentemente seus lucros e isso é acentuado quando ocorre a colusão entre esses agentes. Nos períodos de alta afluição (período úmido) a diferença no preço spot nos três cenários também é significativa. A diferença entre o preço spot no despacho centralizado para os cenários

de despacho descentralizado e colusão demonstra que os agentes exercem o poder de mercado de forma permanente.

Figura 7- Preço Spot Médio



Fonte: Autor

4.1.2 GERAÇÃO HIDROELÉTRICA MÉDIA

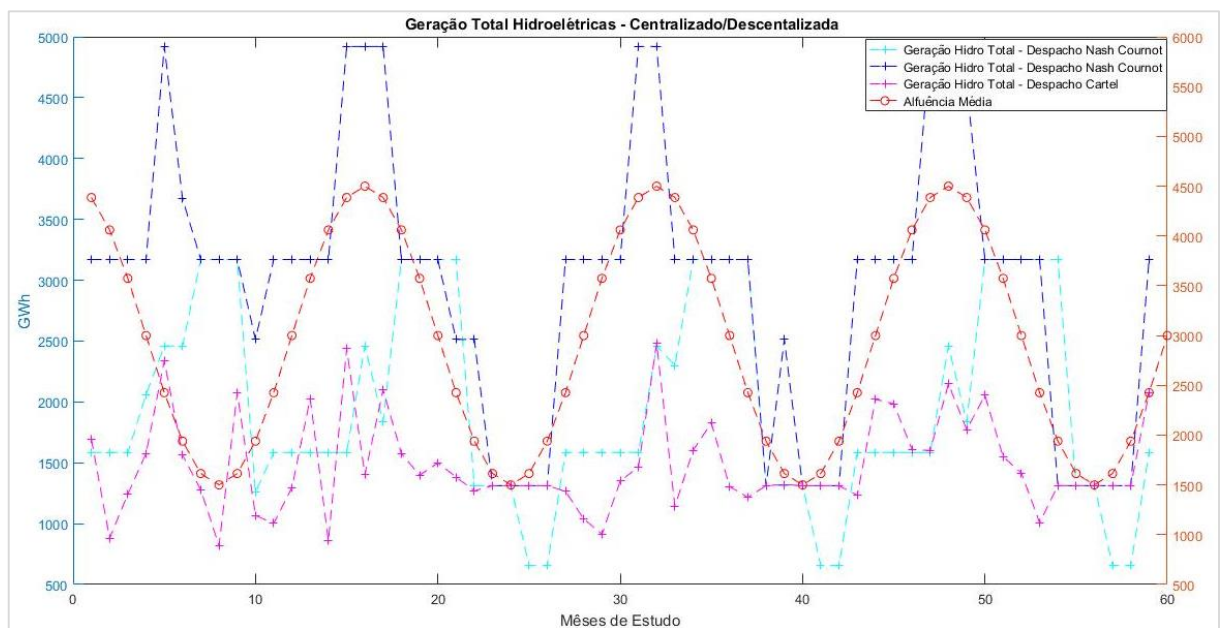
O gráfico mostrado na figura 7 demonstra que a geração hidroelétrica produzida pelas 2 usinas hidroelétricas price makers quando em operação de despacho descentralizado é sempre menor que a geração em despacho centralizado. Essa redução de geração é justamente utilizada para alterar o preço spot do mercado e obter o máximo lucro. Quando em colusão entre agentes a geração dos agentes price makers é mais reduzida que em despacho descentralizado visando garantir o preço spot mais elevado possível e que garanta a máxima receita.

Em período úmido onde as afluições são mais elevadas os geradores hidroelétricos aumentam sua geração, enquanto que em períodos secos essa geração é reduzida, aumentando então a operação de térmicas que tem maior custo operativo.

É importante destacar que em períodos úmidos as gerações em despacho descentralizado não são iguais ao despacho centralizado pois, como as usinas hidroelétricas possuem capacidade de armazenamento e isso gera a possibilidade de transferir energia ao longo do período e no despacho descentralizado busca-se a maximização dos lucros, as usinas hidroelétricas tendem a armazenar maior

quantidade de água durante o período chuvoso para utilizar no período seco quando o preço spot será mais elevado e assim exercer o poder de mercado maior no período seco. O comportamento dos agentes em colusão se dará da mesma forma que em despacho centralizado, porém como terão menor geração no momento de hidrologia alta, haverá maior quantidade de água para controlar o preço spot de forma mais linear.

Figura 8 - Geração Total Hidroelétricas



Fonte: Autor

4.1.3 ALTERNATIVAS REDUÇÃO DO PODER DE MERCADO

Essa seção analisa métodos de mitigação que visam minimizar possíveis abusos de preços advindos do poder de mercado dos agentes price makers. Como o uso de poder de mercado dos agentes geram prejuízos a sociedade devido a elevação de preços as agências reguladoras buscam constantemente procedimentos para reduzir o exercício do poder de mercado.

Dentre as sugestões descritas em Kelman (1999) para mitigação do poder de mercado destacam-se:

- ✓ Price Caps – o agente regulador estabelece um teto para a oferta máxima dos preços, preço spot e lucro das empresas;

- ✓ Incentivos a Competição – O governo incentiva a entrada de novos agentes no setor para que a competição seja ampliada e reduza a concentração de geradores. Uma quantidade suficiente de agentes irá reduzir também a probabilidade de colusão entre agentes;
- ✓ Níveis Mínimos de Contratação – o agente regulador determina as quantidades mínimas de energia que as usinas devem ter com suas capacidades de fornecimento. Essa medida visa reduzir a quantidade de energia disponível para venda em mercado a vista e assim diminua possíveis manipulações de mercado.

Para Hull (2016), um contrato a Termo é definido em como um contrato para comprar ou vender um ativo em uma determinada data futura por um preço específico.

Esses contratos têm como característica principal garantir que determinada quantidade de energia seja entregue em uma determinada data futura a um preço pré-determinado hoje. Diante disso, o uso de contratos a termo tem como função principal reduzir a quantidade de energia que fica exposta aos preços spot de mercado. Assim, o gerador irá receber um valor de \$/MWh pré-estabelecido em contrato e, portanto, terá menos energia exposta a volatilidade de mercado, pois essa quantidade de energia já contratada será entregue a preço determinado no contrato.

5 CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

O uso do poder de mercado pelos agentes em mercados de energia gera várias distorções que impede funcionamento do mercado de forma eficiente.

Esse trabalho apresentou um estudo do poder de mercado em sistemas hidrotérmicos para despacho centralizado e despacho descentralizado com e sem colusão entre agentes e apresentou alguns mecanismos que são eficazes na redução do poder de mercado de agentes price makers.

A partir de modelos analíticos pode-se verificar que o despacho descentralizado, que utiliza o modelo de equilíbrio de Nash-Cournot, e o despacho centralizado, que tem como princípio a operação com mínimo custo, apresentam diferenças relevantes na quantidade de energia produzida. Isso demonstra que os

produtores price makers tendem a modificar a quantidade de energia gerada no intuito de elevar o preço spot, o que irá lhe garantir um aumento nos lucros.

Para o modelo analítico também pode-se verificar que com a inclusão de novos agentes, a solução de Nash-Cournot tende a se aproximar da solução de mínimo custo, isso demonstra que para um mercado onde se tenha uma quantidade de agentes price makers competindo as quantidades de energia produzida e o preço se spot irão se aproximar dos valores de um mercado com despacho de mínimo custo.

Na solução estocástica apresentada, que considera o acoplamento temporal das decisões de operação e se aproxima de forma mais real ao comportamento de sistemas hidrotérmicos, foi demonstrado as soluções de mínimo custo, equilíbrio de Nash-Cournot e situações onde ocorre colusão entre os agentes. Os resultados demonstraram que os agentes price makers tendem a aumentar o preço spot reduzindo a quantidade e de energia ofertada para o sistema e isso é amplificado quando ocorre a colusão entre os agentes price makers.

Os resultados das simulações demonstram que o exercício de poder de mercado no despacho descentralizado gera uma ineficiência de mercado quando comparado ao despacho centralizado.

A proposta de adotar contratações mínimas dos agentes via contratos a termo foi demonstrada de forma analítica que pode ser eficiente no combate do poder de mercado. Verificou-se que se o nível de contratação for suficientemente alto todo poder de mercado pode ser eliminado e o sistema irá operar de forma muito próxima ao despacho de mínimo custo.

É necessárias ações governamentais de incentivo a entrada de novos competidores no mercado a fim de produzir uma redução natural no poder de mercado. Um melhor controle dos órgãos reguladores na busca de ações de manipulação de preços por grandes geradores, sem afetar as regras de mercado, se torna essencial para um correto funcionamento do mercado de energia.

REFERÊNCIAS

- Alfredo Garcia, James D Reitzes, and Ennio Stacchetti. Strategic pricing when electricity is storable. **Journal of Regulatory Economics**, 20(3):223{247, 2001.
- Barroso, L.A.N. – Competitive Schemes in a Hydrothermal Systems: Strategic Behavior of Agents in a Market Environment; M.Sc Thesis, IM/UFRJ, Maio 2000;
- Borenstein, S.; Bushnell, J. – An Empirical Analysis of the Potential for Market Power in California's Electricity Industry, University of California Energy Institute, 1997;
- Borenstein, S.; Bushnell, J. and Knittel, C. – Market Power in Electricity Markets: Beyond Concentration Measures, University of California Energy Institute, 1999;
- Gibbons, R. – Game Theory for Applied Economists, Princeton University Press, 1992.
- Green, R.; Newbery, D – Competition in the British Electricity Spot Market, **Journal of Political Economy**, 100(5), 1992, pp. 929-953;
- Hjalmarsson, E. – Nord Pool: A Power Market without Market Power, Goteborg University, July 2000;
- Hull, John C. – Opções, Futuros e outros Derivativos, Bookman, 2016;
- Kelman, R. – Esquemas Competitivos em Sistemas Hidrotérmicos: Eficiência Econômica e Comportamento Estratégico; Tese de M.Sc, COPPE/UFRJ, (1999).
- Kelman, R., Barroso, L. A. N., and Pereira, M. V. F. - Market power assessment and mitigation in hydrothermal systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16(3):354{359, Aug 2001.
- Lino, Priscila - Esquemas competitivos em sistemas hidrotérmicos: operação descentralizada de sistemas hidrotérmicos em ambiente de mercado, Dissertação de Mestrado, IM/UFRJ, Setembro 2001;
- Monte, Daniel; Moita, Rodrigo. Competition in Cascades, Abril 2017.
- Nicholson, W.; Snyder, C. - Microeconomics Theory – Basic Principles and Extensions, Thompson, 2010.
- Pozzo, et. Al – Long-Term Nash equilibria in Electricity Markets, **Electric Power Systems Research**, 2010.
- Scott, T.; Read, E. – Modelling Hydro Reservoir Operation in a Deregulated Electricity Market, *ITOR 3* (3-4): 243-252, 1996;
- VARIAN, H.R. Microeconomia: Uma Abordagem Moderna. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

APÊNDICE A

$$\sum_{k=1}^N E(k) * E(i)$$

Quando $K=i$:

$$\sum_{k=i}^N E(k) * E(k) = \sum_{k=1}^N E(i)^2 \rightarrow \frac{\partial \sum_{k=1}^N E(i)^2}{\partial E(i)} = 2 * E(i)$$

Quando $K \neq i$:

$$\sum_{k \neq i}^N E(k) * E(i) = \frac{\partial \sum_{k=1}^N E(k) * E(i)}{\partial E(i)} = \sum_{k \neq i}^N E(k)$$