



FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS  
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO



**DISCRICIONARIEDADE VS. COMPROMETIMENTO:  
A ANÁLISE DE REGRAS ÓTIMAS NUM CONTEXTO DE REGIME  
DE METAS DE INFLAÇÃO**

**Banca Examinadora**

**Prof<sup>ª</sup>. Orientadora Dr.<sup>ª</sup> Maria Carolina da Silva Leme**

**Prof<sup>ª</sup>. Dr.<sup>ª</sup> Fabiana Fontes Rocha**

**Prof. Dr. Arthur Barrionuevo Filho**



FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS  
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO



# DISCRICIONARIEDADE VS. COMPROMETIMENTO: A ANÁLISE DE REGRAS ÓTIMAS NUM CONTEXTO DE REGIME DE METAS DE INFLAÇÃO

**José Luciano da Silva Costa**



Fundação Getúlio Vargas  
Escola de Administração  
de Empresas de São Paulo  
Biblioteca



878/2002



1200200878

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação  
da FGV/EAESP como requisito para obtenção de título  
de mestre em Economia

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Carolina da Silva Leme

**São Paulo**

**Março de 2002**

Escola de Administração de S Empresas de São Paulo	
Data 09.05	Nº de Chamada 336.748.12 C837d
Tombo 878/2002	Dis. e. 1

SP00026180-0

DISCRICIONARIEDADE VS. COMPROMETIMENTO:  
A ANÁLISE DE REGRAS ÓTIMAS NUM CONTEXTO DE REGIME DE METAS DE  
INFLAÇÃO

**RESUMO**

O objetivo desta dissertação é analisar as regras de condução da política monetária em modelos em que os agentes formam suas expectativas de forma racional (*forward looking models*), no contexto do regime de metas de inflação. As soluções ótimas de pré-comprometimento e discricionária são derivadas e aplicadas a um modelo macroeconômico para a economia brasileira e os resultados são também comparados com os obtidos pela adoção da regra de Taylor. A análise do comportamento do modelo sob diferentes regras é feita através da construção da fronteira do *trade-off* da variância do hiato do produto e da inflação e da análise dinâmica frente a ocorrência de choques. A discussão referente à análise dinâmica do modelo é estendida para o caso onde a persistência dos choques é variada.

**Palavras-chave:** Regras de Política Monetária; Regime de Meta de Inflação; Modelos com Variáveis em Expectativas Racionais

**ABSTRACT**

The purpose of this dissertation is to analyze the case of monetary policy rules in models in which the agent's expectations are rational based in forward looking view for Inflation target regimes. The commitment and discretionary optimum solutions are derived and applied to a macroeconomic model for the Brazilian economy and the results are also compared to those obtained from the use of a Taylor rule. The behavior of the model, under the different rules, is analyzed using a Output-Inflation Trade-Off frontier and through the dynamic analysis for different shocks, including shocks of different persistence.

**Key-words:** Monetary Policy Rules; Inflation Targeting Regime; Forward Looking Models

## ***Agradecimentos***

---

*Gostaria de agradecer primeiramente à minha família que me apoiou e compartilhou de todas minhas ansiedades, sempre acreditando que tudo daria certo.*

*Agradeço também à dedicação e à paciência da minha orientadora, Maria Carolina Leme, que deu total liberdade e apoio para o desenvolvimento deste trabalho.*

*Na faculdade, o apoio dos amigos também foi essencial, em especial, gostaria de agradecer a Ana Paula que teve um papel fundamental para a evolução dessa dissertação, contribuindo ativamente através de discussões e sugestões sobre o trabalho.*

*Agradeço também ao grande amigo Marcos Vinícius que sempre se mostrou disponível a ajudar na elaboração do trabalho, e principalmente, incentivando e acreditando na qualidade final do trabalho.*

## SUMÁRIO

1.	<i>Introdução</i>	7
2.	<i>Uma breve Revisão da literatura</i>	10
2.1	Estrutura de decisão do regime de metas de inflação	15
3.	<i>Modelo Básico Para Análise Da Política Monetária</i>	18
3.1	O Modelo de Bonomo e Brito	18
3.2	Estimação e Calibração do Modelo	22
3.3	Procedimentos para a obtenção das regras ótimas de pré-comprometimento e discricionária	24
3.3.1	Forma Espaço-Estado	25
3.4	Solução de pré-comprometimento	27
3.4.1	Fronteira de <i>trade-off</i> da variância do hiato do produto e inflação	28
3.4.2	Análise Dinâmica do Modelo	31
3.5	Solução de discricionária	34
3.5.1	Fronteira de <i>trade-off</i> da variância do hiato do produto e inflação	35
3.5.2	Análise Dinâmica Do Modelo	37
3.6	Regra simples	41
3.6.1	Análise Dinâmica do Sistema	42
3.7	A persistência dos choques	45
3.7.1	A fronteira de <i>trade-off</i> da variância do hiato do produto e da inflação	45
3.7.2	Análise dinâmica do modelo	48
4.	<i>Conclusão</i>	56
	<i>Apêndice Técnico – Obtenção das Soluções de pré-comprometimento, discricionária e regra ótima simples.</i>	63
	<i>Exemplos: Aplicação da decomposição padrão de Schur e dos algoritmos de obtenção das regras ótimas em uma versão do simplificada do modelo de Fuhrer.</i>	88
	<i>Apêndice Computacional: Rotinas Usadas Para Obtenção Dos Resultados Do Trabalho</i>	105
	<i>Bibliografia</i>	112

## ÍNDICE DE FIGURAS E TABELAS

Gráfico 1	- Fronteira de <i>trade-off</i> da variância do hiato do produto e inflação para $q_i=0.01$	30
Gráfico 2	- Fronteira de <i>trade-off</i> da variância do hiato do produto e inflação para $q_i=0.1$	30
Gráfico 3	- Resposta a impulso para um choque de demanda	31
Gráfico 4	- Resposta a impulso para um choque de oferta	32
Gráfico 5	- Resposta a impulso para um choque de câmbio	33
Gráfico 6	- Fronteira de <i>trade-off</i> da variância do hiato do produto e inflação para $q_i=0.01$	36
Gráfico 7	- Fronteira de <i>trade-off</i> da variância do hiato do produto e inflação para $q_i=0.1$	36
Gráfico 8	- Resposta a impulso para um choque de demanda	38

Gráfico 9 - Resposta a impulso para um choque de oferta	39
Gráfico 10 - Resposta a impulso para um choque de câmbio	40
Gráfico 11 - Resposta a impulso para um choque de demanda	42
Gráfico 12 - Resposta a impulso para um choque de oferta	43
Gráfico 13 - Resposta a impulso para um choque de câmbio	44
Gráfico 14 - Fronteira para o caso de pré-comprometimento	46
Gráfico 15 - Fronteira para o caso discricionário	47
Gráfico 16 - Choque de demanda para o caso de pré-comprometimento	48
Gráfico 17 - Choque de demanda para o caso discricionário	49
Gráfico 18 - Choque de oferta para o caso de pré-comprometimento	51
Gráfico 19 - Choque de oferta para o caso discricionário	52
Gráfico 20 - Choque de câmbio para o caso de pré-comprometimento	53
Gráfico 21 - Choque de câmbio oferta para o caso discricionário	54
Gráfico 22 - Fronteira de trade-off da variância do hiato do produto e inflação versão forward looking	58
Gráfico 23 - Fronteira de trade-off da variância do hiato do produto e inflação para regra discricionária	59
Gráfico 24 - Função resposta a impulso para um choque de demanda sobre a solução discricionária	59
Gráfico 25 - Função resposta a impulso para um choque de demanda	60
Gráfico 26 - Função resposta a impulso para um choque de câmbio sobre a solução discricionária	60
Gráfico 27 - Função resposta a impulso para um choque de câmbio	61
Gráfico 28 - Função resposta a impulso para solução de pré-comprometimento	100
Gráfico 29 - Função resposta a impulso para solução de pré-comprometimento	102
Gráfico 30 - Função resposta a impulso para solução de pré-comprometimento	103
Tabela 1 - Estimativa e Calibração dos parâmetros do modelo	24
Tabela 2 - Coeficientes da regra para a solução de pré-comprometimento	27
Tabela 3 - Variância das variáveis objetivos e da função perda para diferentes valores dos ponderadores da estabilização do produto e suavização da taxa de juros	29
Tabela 4 - Coeficientes da regra para a solução discricionária	34
Tabela 5 - Variância das variáveis objetivos e da função perda para diferentes valores dos ponderadores da estabilização do produto e suavização da taxa de juros	37
Tabela 6 - Variância das variáveis objetivos e da função perda para diferentes valores dos ponderadores da estabilização do produto e suavização da taxa de juros para a regra simples	41

## 1. INTRODUÇÃO

---

A adoção do regime de metas de inflação por importantes Bancos Centrais, como por exemplo, da Inglaterra, do Canadá, da Austrália, trouxe nova vida ao debate sobre a condução da política monetária nos últimos anos e, como não poderia deixar de acontecer, paralelamente, foram desenvolvidos também um grande número de trabalhos acadêmicos, teóricos e empíricos, tratando da questão de regras de política monetária.

Os modelos de análise das regras de política monetária se dividem em dois grupos: os que assumem que os agentes formam suas expectativas olhando o comportamento passado das variáveis, chamados de *backward looking models*, e os que assumem que os agentes olham para frente formando suas expectativas de forma racional, são os *forward looking models*. Um dos principais elementos na discussão das regras de política monetária é o seu canal de transmissão e a hipótese a respeito de como os agentes formam suas expectativas determina quais canais estarão presentes. Desta forma, nos modelos em que as expectativas são determinadas pelo passado (*backward looking*) o canal de transmissão da política monetária se dá pela demanda agregada e pela taxa de câmbio, caso se esteja trabalhando com uma economia aberta. Já nos modelos onde os agentes olham para frente e as expectativas são formadas de forma racional (*forward looking*) além dos canais anteriores, há também a transmissão pelas expectativas, permitindo que a política monetária influencie as expectativas de inflação que, por sua vez, influenciam a própria inflação. Assim, as mudanças da política monetárias poderão impactar a inflação com menor defasagem de tempo.

Além disso, a definição da classe de modelos na qual a análise está sendo feita leva a grandes distinções no método de obtenção da regra de condução da política monetária pelo Banco Central. Nos modelos *forward looking*, há a distinção da regra ótima em dois casos: a solução de pré-comprometimento e a solução discricionária. Nos modelos *backward looking* tal distinção da regra ótima não ocorre, ou seja, a solução discricionária e de pré-comprometimento é a mesma.

Portanto, a hipótese sobre como são formadas as expectativas dos agentes cumpre um papel importante na condução da análise da política monetária, visto que determina o método de obtenção da regra.

A literatura de regras de política monetária em modelos *forward looking* tem sua origem no trabalho de Barro e Gordon (1983), onde os autores introduziram a distinção de discricionariedade e "regras" nessa classe de modelos. Em trabalhos subseqüentes, Backus e Driffill (1985) e Currie e Levine (1985) estendem a análise para modelos lineares estocásticos com expectativas racionais, onde discutem a forma de implementação "numérica" das soluções discricionária e pré-comprometimento.



No contexto atual da literatura de regras de política monetária, em especial no regime de metas de inflação, a busca por uma modelagem mais próxima a realidade, tem levado os principais autores<sup>1</sup> a desenvolver a análise em modelos *forward looking*, o que permite enfatizar o papel das expectativas dos agentes na transmissão da política monetária. Na análise atual, a distinção da regra de condução da política monetária entre a solução de pré-comprometimento e a solução discricionária continua a ser feita, mas é incluída a possibilidade do uso alternativo de regras simples na condução da política monetária, como por exemplo a regra proposta por Taylor. A necessidade de obtenção das soluções de pré-comprometimento e discricionária na discussão das regras de política monetária dentro do regime de metas de inflação implica no uso do método desenvolvido por Backus e Driffill e Currie e Levine, mas com algumas modificações que serão apresentadas neste trabalho.

Na literatura brasileira sobre política monetária, o uso da modelagem *backward looking* é mais comum, tendo como exemplos os textos de Andrade e Divino (2000), Moreira e Cavalcanti (2001), Springer e Muinhos (2000). O uso da modelagem *forward looking* é ainda incipiente, sendo que o texto de Bonomo e Brito (2001) e Springer, Goldfajn e Freitas (2001) são os únicos exemplos encontrados. Apesar disso, nos dois textos citados não há derivação das soluções ótimas de pré-comprometimento e discricionária, que surgem da resolução do problema de otimização confrontado pelo Banco Central de minimizar a função perda restrita ao modelo admitido de transmissão da política monetária. A proposta deste trabalho é analisar a questão de regras dentro do ambiente *forward looking* e obter a solução ótima de pré-comprometimento, e na sequência, estender a análise para obter a solução discricionária, de forma a discutir a questão de regra versus discricionariedade na condução da política monetária, especificamente para os regimes de metas de inflação. Além disso, a performance destas soluções será comparada à alternativa do uso da regra simples proposta por Taylor, sendo para isto será apresentada a fronteira eficiente das regras e a função resposta a impulso para análise das propriedades dinâmicas do modelo sobre as alternativas soluções.

A estrutura do trabalho é como segue. Na seção 2, são apresentadas a revisão bibliográfica da literatura de regras monetárias em modelos com variáveis em expectativas racionais e a discussão do regime de metas de inflação. Na seção 3, é discutido o modelo utilizado por Bonomo e Brito (2001), que é utilizado neste trabalho para aplicação dos métodos de obtenção das regras de condução da política monetária. Na sequência, são discutidos os resultados do modelo quando a solução de pré-comprometimento é aplicada, sendo apresentadas a fronteira da variância do hiato do produto e da inflação da regra e a análise dinâmica do modelo através das funções resposta a impulso para os diferentes choques. Nos mesmos moldes são discutidas a solução discricionária e a regra de Taylor. Na

---

<sup>1</sup> Mais precisamente, Svensson (1998), pp. 3, coloca que "Another purpose is to incorporate recent advances in the modelling of forward-looking aggregate supply and demand. Most of the previous work on inflation targeting has used simple representations

seção 4, são apresentadas as conclusões finais. No apêndice técnico, que constitui uma importante seção do trabalho, é apresentada detalhadamente a discussão dos métodos para obtenção das soluções de pré-comprometimento, discricionária e regra simples, bem como, a resolução do sistema de equações em diferença com variáveis em expectativas racionais usando a decomposição generalizada de Schur, sendo a principal modificação do método atual com relação ao proposto por Backus e Driffill e Currie e Levine. Na sequência da seção, apresentam-se dois exemplos de aplicação das soluções, buscando facilitar a compreensão da análise do modelo explorada no corpo do trabalho. No apêndice computacional, são apresentadas as rotinas usadas para a obtenção de todos os resultados do trabalho.

## 2. UMA BREVE REVISÃO DA LITERATURA

Nos últimos anos, o interesse a respeito de como deve ser conduzida a política monetária tem ressurgido, evidenciado pela publicação de vários trabalhos tratando desse tema<sup>2</sup>. Além disso, respeitados macroeconomistas, como John Taylor e Lars Svensson, passaram a recomendar regras de condução das taxas de juros, sendo que a partir da regra proposta por Taylor, surgiram várias das alternativas atualmente discutidas. Somando-se a essas evidências, há também a ampla disseminação do modelo de metas de inflação como referencial para a política monetária, que coloca em destaque a questão da condução da política monetária, em especial das taxas de juros.

A década de 90 foi marcada pela implementação do regime de metas de inflação por importantes Bancos Centrais, como da Nova Zelândia, Canadá, Inglaterra, Suécia e Austrália, entre outros, sendo uma transição normalmente marcada pelo abandono do regime de bandas cambiais prevalecente nestas economias. As principais características observadas nos países que adotam o regime de metas de inflação, segundo Svensson (1998), são:

- 1) uma explícita meta quantitativa de inflação;
- 2) um elevado grau de transparência e confiabilidade, no sentido que há a possibilidade de avaliação do desempenho do Banco Central;
- 3) um procedimento de implementação, chamado metas de previsão de inflação (*inflation-forecast targeting*), que usa a previsão condicional de inflação produzida pelo próprio Banco Central como variável objetivo intermediária.

A meta explícita de inflação normalmente é tanto na forma de um determinado valor ou um intervalo para a meta, com um valor central e uma banda. No regime de metas de inflação, o Banco Central está explicitamente comprometido com a meta anunciada, o que evidencia que o objetivo básico da política monetária é a estabilidade de preços. O modelo de metas de inflação desempenha o importante papel de oferecer uma âncora nominal, representada pela meta de inflação, para a política econômica. Esta última característica foi um fator importante, no caso brasileiro, para a adoção do regime de metas de inflação a partir de julho de 1999. Após a ocorrência da desvalorização cambial em janeiro de 1999, o câmbio deixou de ser a âncora nominal da economia, tornando-se necessário reintrodução de uma outra variável que desempenhasse essa função, pois a sua ausência poderia colocar em risco a estabilidade de preços alcançada até então dentro do modelo de bandas cambiais.

---

<sup>2</sup>Como por exemplo Romer e Romer (1989) "Does monetary policy matter? A new test in spirit of Friedman and Schwartz", NBER Macroeconomic Annual; Bernake and Blinder (1992) "The Federal Funds rate and the channels of monetary transmission", AER, 82:4, pg 901-21; Christiano, Eichenbaum e Evans (1996) "The effects of monetary policy shocks: evidence from the flow of funds", Rev. Econ. Statist., 78:1, pg 16-34; Leeper, Sims e Zha (1996) "What does monetary policy do?", Brookings Pap. Econ. Act. 2, pg 1-63.

Os regimes de metas de inflação também se caracterizam por um alto grau de transparência e confiabilidade. Os Bancos Centrais adotando este regime incorporam a rotina de emitir regularmente “relatórios de inflação”, onde visam explicar a atual condução da política monetária para o público. O papel da transparência na política monetária em geral, particularmente no regime de metas de inflação, é crucial para o êxito no alcance dos objetivos anunciados. Em um estudo recente, Faust e Svensson (2000) examinaram o papel da transparência na política monetária. Os autores demonstram que o aumento da transparência faz com que a reputação do Banco Central seja mais sensível às suas próprias ações, e assim, aumenta o custo para o Banco Central de desviar da meta de inflação anunciada.

Uma das principais dificuldades para a implementação do regime de metas de inflação é o controle imperfeito da inflação por parte do Banco Central. Esta dificuldade surge devido às defasagens no mecanismo de transmissão da política monetária sobre a inflação e à incerteza acerca deste mecanismo, do estado corrente da economia e dos futuros choques que atingirão a economia. Além disso, a inflação é também afetada por outros fatores além da política monetária, em especial pelos choques que ocorrem dentro da defasagem (*control lag*). Para a economia brasileira, estima-se que o período entre a mudança no instrumento da política monetária (taxa de juros) e seu efeito sobre a inflação, é em torno de 6 a 9 meses<sup>3</sup>. O controle imperfeito da inflação torna também o monitoramento do regime de metas de inflação pelo público inerentemente difícil, o que reduz a confiabilidade e a transparência do regime, e colocando em risco os potenciais benefícios do regime. Svensson (1996) propõe que a solução para este intrincado problema é o uso da previsão condicional de inflação do Banco Central como meta intermediária. Tornar esta previsão explícita simplifica ambos, o monitoramento e a implementação da política monetária. A razão para a previsão de inflação do Banco Central ser a meta intermediária ideal, deve-se ao fato desta ser a “variável corrente mais correlacionada com a meta, ela é mais controlável que a meta, e ela poder tornar-se mais observável que a meta” como colocado por Svensson (1996). A possibilidade de torná-la transparente, facilita a comunicação do Banco Central com o público, e o entendimento deste último a respeito da condução da política monetária. Desta maneira, o Banco Central deve buscar implementar as metas de previsão de inflação (*inflation forecast targeting*) como procedimento de implementação do regime, ou seja, utilizar explicitamente a sua previsão condicional de inflação como variável intermediária.

Desta maneira, a necessidade do Banco Central utilizar sua previsão condicional de inflação como variável intermediária, implica no desenvolvimento de uma modelagem econométrica capaz de estilizar, mesmo que imperfeitamente, o comportamento da economia.

---

<sup>3</sup> Ver Bogdanski, Tombini e Werlang (2000)

Uma importante dimensão a ser incorporada neste modelo é a inclusão do canal das expectativas. Uma modelagem mais realista deve admitir que o comportamento corrente dos agentes econômicos (firmas e famílias) depende das suas expectativas a respeito dos futuros eventos, como a futura condução da política monetária. A dimensão das expectativas é normalmente adicionada aos modelos macroeconômicos, admitindo-se que os agentes possuam expectativas racionais, ou seja, as expectativas dos futuros eventos devem ser modeladas como se elas fossem formadas por mecanismos de previsão que usam toda a informação disponível da melhor maneira possível. Os modelos na literatura que incorporam essa característica são denominados *forward looking rational expectations models*, que no restante do trabalho serão chamados simplesmente de modelos com variáveis em expectativas racionais.

Nos primeiros modelos de política monetária incorporando variáveis com expectativas racionais, como os trabalhos de Kidland e Prescott (1977), Calvo (1978) e Barro e Gordon (1983), surge a questão da inconsistência temporal da política ótima. Como afirmavam Kidland e Prescott (1977) *there is no way control theory can be made applicable to economic planning when expectations are rational*, ou seja, em modelos com variáveis em expectativas racionais, a técnica de programação dinâmica não gera uma regra de política ótima e que as regras ótimas são improváveis de serem implementadas porque elas não são consistentes temporalmente<sup>4</sup>. Posteriormente, Kidland e Prescott (1980) retomaram a esta questão e demonstraram que a obtenção da regra ótima é possível em tais modelos, utilizando um modelo de taxa ótima. No entanto, eles não implementaram o seu método de solução porque não conseguiram torná-lo compatível com a tecnologia computacional vigente à época. Foi apenas a partir dos trabalhos de Backus e Driffill (1986), que apresentam um método de solução geral para modelos lineares estocásticos com variáveis em expectativas racionais em tempo discreto e função objetivo quadrática, e de Currie e Levine (1986), que apresentam um método para obtenção das regras dentro de modelos da mesma classe, embora tratando o caso em tempo contínuo, que a solução tornou-se aplicável. A principal dificuldade contornada nas soluções destes autores, foi conseguir aplicar a teoria de controle ótimo aos modelos com variáveis em expectativas racionais, sendo que as hipóteses admitidas sobre as expectativas dos agentes frente as alternativas de comportamento da autoridade monetária são o elemento chave para a possibilidade do uso da teoria de controle ótimo para a obtenção das regras de condução da política monetária.

Tanto Backus e Driffill quanto Currie e Levine dividiram a solução do problema de obtenção da regra ótima em dois casos: a regra de política com pré-comprometimento

---

<sup>4</sup> A inconsistência temporal surge porque há a tentação da autoridade monetária de renegar o plano anunciado e re-otimizar num período subsequente ao anúncio, visando os ganhos obtidos em explorar as condições iniciais, que surgem como restrição de comportamento no problema de otimização confrontado pela autoridade monetária.

(*precommitment rule*) e a regra de política discricionária (*discretionary policy rule* ou *time-consistent rule*). Como é discutido detalhadamente no apêndice técnico, a regra de pré-comprometimento, apesar de ótima, é inconsistente temporalmente. Por outro lado, a regra discricionária é sub-ótima relativamente à solução de pré-comprometimento, mas é consistente temporalmente.

Deve-se fazer uma ressalva a respeito do termo “regra discricionária”, porque parece haver uma incoerência entre a idéia de regra e o comportamento discricionário por parte da autoridade monetária, que supõe a re-otimização a todo período pelo Banco Central na definição da sua política de condução da taxa de juros. Apesar do comportamento discricionário, é possível obter uma regra “estacionária” de condução da política monetária quando o problema enfrentado pelo Banco Central é otimizado numa perspectiva de horizonte de tempo infinita. Para obter esta regra estacionária ou convergida para o caso discricionário, é preciso que as seguintes hipóteses sejam admitidas: i) o Banco Central agindo de maneira discricionária, otimiza a cada período e toma o estado da economia como dado, sendo representado somente pelas variáveis pré-determinadas do período ( $x_{1t}$ ), ii) a autoridade monetária sabe que nos períodos subseqüentes aplicará o mesmo procedimento, iii) como o estado da economia está dado, representado por  $x_{1t}$ , então a regra de condução da política monetária no período  $t$  ( $F_t$ ) e as variáveis não pré-determinadas do período ( $x_{2t}$ ) são funções lineares de  $x_{1t}$ , iv) no equilíbrio de expectativas racionais, as expectativas dos agentes incorporam o comportamento discricionário do Banco Central, tornando as expectativas consistentes com a política. Estando presente este conjunto de hipóteses, pode-se provar matematicamente<sup>5</sup> que é possível encontrar a regra estacionária ou convergida ( $\bar{F}$ ) para o caso discricionário. O Banco Central seguirá a regra estacionária ( $\bar{F}$ ), segundo Currie e Levine (1985), como resultado de uma interação entre o atual e os futuros Bancos Centrais, sendo que o atual Banco Central usa a regra estacionária, porque é o melhor que ele pode fazer, visto que as futuras autoridades monetárias também usarão a regra estacionária.

A hipótese que permite a obtenção de duas soluções distintas diz respeito à existência de um mecanismo (tecnologia) de pré-comprometimento com a regra de política anunciada, de forma que o governo não tenha possibilidade de renegá-la e re-otimizar no período subseqüente. Esta possibilidade de re-otimização é a razão que torna a regra ótima inconsistente temporalmente.

Na visão de Backus e Driffill, o mecanismo que permitiria a regra ótima com pré-comprometimento ser sustentável seria o efeito reputacional que exerceria uma disciplina suficiente sobre o governo, tal que ele ficaria preso a sua política macroeconômica ótima.



Dentro da sua análise, os autores repudiam a visão tradicional sobre o comportamento do setor privado que levaria à inconsistência dinâmica, a saber: parte-se da hipótese do governo é “tentado” a renegar a regra ótima anunciada, pois há um ganho em re-otimizar. Por outro lado, postula-se que o setor privado acredita que qualquer nova regra de política será seguida depois de anunciada, sem nova re-otimização. Se tal tentativa existe e o setor privado comporta-se como descrito acima, então a regra de política ótima será dita ser inconsistente temporalmente.

Contudo este resultado, que torna a política implementada inconsistente, está baseado num modelo implausível de comportamento do setor privado, onde este possui expectativas racionais a respeito da economia, exceto no que diz respeito ao comportamento do governo, isto é o setor privado acredita nos novos anúncios de política do governo, mesmo resultando em erros sistemáticos de previsão a respeito da condução da política monetária.

Em seu texto Backus e Driffill colocam que o comportamento dos agentes privados deve ser modelado de tal forma que suas expectativas são racionais tanto a respeito do comportamento do governo como quanto a qualquer outro aspecto da economia. Desta forma, o comportamento do setor privado seria: se o governo tem sempre jogado a política ótima, o setor privado agirá na crença que o governo continuará a fazê-lo para sempre. Contudo, se o governo desvia da regra ótima em algum período (faz planos ou anúncios sobre a política futura num período que são repudiados no próximo período), o setor privado esperará a política discricionária, ou seja, que o governo em todos os períodos re-otimize e recalcule a regra a ser seguida para o período  $t$ .

Uma outra alternativa para lidar com o problema de inconsistência temporal da regra ótima obtida, admitindo-se que o governo não possui nenhum mecanismo de comprometimento, é a idéia de *timeless perspective* apresentada por Woodford (1999). A *timeless perspective* é uma restrição auto-imposta à autoridade monetária de forma a considerar que a regra ótima de longo prazo não depende do período em que o comprometimento é feito. Assim, por construção se elimina qualquer possibilidade de exploração da condição inicial, que como será visto na seção A.2 do apêndice técnico, é a fonte de inconsistência temporal da regra de pré-comprometimento.

A literatura a respeito da condução da política monetária em modelos com variáveis em expectativas racionais também tem focado, em especial Currie e Levine, na construção de regras de simples (*simple rules*). Os autores defendem este tipo de regra devido ao seu apelo de menor complexidade tanto na implementação quanto na comunicação com o público. Ao implementar uma regra simples, o Banco Central estará restringindo o vetor da função

---

<sup>5</sup> Para detalhes ver seção A.3 do apêndice técnico.

resposta (regra) da política monetária, de tal forma a responder a somente algumas variáveis que se supõem serem mais importantes para expressar o estado da economia. A vantagem desse método é a facilidade de comunicação entre a autoridade monetária e o público, pois a simplicidade da regra torna mais fácil a compreensão da mudança, pelo setor privado, da política monetária. Os autores argumentam que a facilidade de entendimento, conseqüentemente, ajuda o setor privado a determinar melhor suas respostas às mudanças na condução da política monetária, tendo o benefício de reações menos imprevisíveis por parte do setor privado.

Outro fator favorável à adoção de regras simples seria sua robustez, pois essas regras quando colocadas em modelos alternativos demonstram um comportamento relativamente estável em termos da perda associada a sua implementação, sendo essa uma qualidade importante em face à incerteza quanto ao modelo e ao valor de seus parâmetros.

Apesar dos pontos positivos apontados acima, as regras simples perdem a importante característica, encontrada nas soluções anteriores, de serem equivalente certo, ou seja, a da regra de decisão não depender da matriz de covariância dos erros do modelo e do vetor de estado inicial da economia. A propriedade do equivalente certo para uma regra de decisão somente valerá se as seguintes condições estão presentes no problema de otimização: i) uma função perda (objetivo) quadrática, ii) as equações que representam o mecanismo de transmissão da política monetária são lineares e iii) ausência de restrições sobre a forma da regra ótima. As regras simples violam exatamente a última condição, ao implicar uma restrição sobre a função reação (regra) obtida no problema de otimização.

## 2.1 ESTRUTURA DE DECISÃO DO REGIME DE METAS DE INFLAÇÃO

Na literatura atual que trata do regime de metas de inflação há duas visões a respeito do procedimento de decisão de um Banco Central que implementa o regime de metas. A primeira visão de regime é usada nos trabalhos de Haldane e Batini (1999), McCallum e Nelson (1999) e Bonomo e Brito (2001), entre outros. Segundo estes autores, o Banco Central implementa o regime através do uso de regras baseadas em previsões de inflação (*inflation forecast-based rules*), que são regras análogas a Regra de Taylor. Nas regras baseadas em previsão de inflação, o instrumento é fixado em resposta aos desvios dos valores esperados da inflação futura da meta. Desta forma, o regime de metas de inflação se define como o uso de regra de política tal como:

$$i_t = \gamma_{t-1} + \theta [E_t \pi_{t+j} - \pi^*] \quad (2.1)$$



onde  $i_t$  é taxa de juros nominal,  $E_t \pi_{t+j}$  é a previsão de inflação para o período  $t+j$  formada no período  $t$ ,  $\pi^*$  é a meta de inflação para o mesmo horizonte, e  $\theta > 1$ .

A vantagem dessa visão é que ela não implica necessariamente na concordância sobre todos os aspectos da especificação do modelo, a não ser a respeito da construção das previsões, o que não requer o uso do modelo inteiro. A razão para isto é que a regra (2.1) tem a propriedade de restringir os desvios da inflação com relação à meta em diversos modelos, sendo necessária para isto a fraca condição, que será encontrada em muitas das especificações dos modelos normalmente analisados em política monetária, de que a resposta no longo prazo da inflação a apertos na política monetária seja negativa. Assim, a equação (2.1) é uma regra de controle da inflação que todos os Bancos Centrais concordariam mesmo que não houvesse consenso sobre função objetivo ou o modelo da economia mais apropriado. A desvantagem desta visão é que ela é baseada numa regra simples que usa a informação de maneira menos eficiente que uma regra ótima obtida de um exercício de otimização.

A segunda visão, que será assumida ao longo da análise do presente texto, é a expressa por Svensson (1998) que coloca que o regime de metas de inflação pode ser visto como o anúncio e o comprometimento por parte do Banco Central de minimizar uma específica função perda. Segundo o autor, o procedimento de implementação do regime, metas de previsão de inflação, é interpretado como um meio de assegurar que as condições de primeira ordem obtidas no problema de otimização da função perda são aproximadamente seguidas pela autoridade monetária na condução da política monetária. Num trabalho de 1999, Svensson e Rudebusch também afirmam que a atual estrutura de decisão dentro do regime de metas de inflação é representada por uma *targeting rule*, que eles definem como o resultado do exercício de minimização da função perda do Banco Central que é crescente no desvio entre a variável objetivo e a meta estipulada para esta variável. Desta maneira, a *targeting rule* define a regra de condução da política monetária, pois expressa a taxa de juros em função das variáveis de estado do modelo, que constituem o conjunto de informação. Logo, nesta visão, o Banco Central resolve o problema de otimização da função perda sujeita ao modelo de transmissão da política monetária, e a política monetária é conduzida de acordo com a regra ótima obtida.

Esta visão possui a vantagem de refletir um método de decisão para a política, onde toda a informação disponível é usada. Ela também implica que a informação é processada de maneira eficiente, sendo uma característica desejável perseguida pelos Bancos Centrais. A desvantagem dessa visão é que a política é implementada de uma maneira complexa sendo

que o público pode encontrar dificuldades para entendê-la, em especial quando não há consenso sobre o modelo ou sobre a função objetivo a ser minimizada.

### 3. MODELO BÁSICO PARA ANÁLISE DA POLÍTICA MONETÁRIA

A próxima etapa da análise será a aplicação das soluções de pré-comprometimento, discricionária e regra simples a um modelo estrutural simples, que busca estilizar os principais canais de transmissão da política monetária. O modelo aqui adotado é o de Bonomo e Brito (2001). Antes de apresentar a estimação e a calibração feita por esses autores, serão descritas as características do modelo e as modificações que serão feitas na sua especificação para permitir alguns exercícios a respeito da persistência dos choques.

#### 3.1 O MODELO DE BONOMO E BRITO

Neste trabalho, adota-se o modelo macroeconômico log linear com variáveis em expectativas racionais para uma economia aberta, como o utilizado por Bonomo e Brito (2001) baseado no trabalho original de Haldane e Batini (1999). O modelo é constituído por um conjunto de 5 equações lineares que expressam, quando resolvidas, um equilíbrio geral dinâmico estocástico em expectativas racionais. O modelo assume uma rigidez nominal temporária sendo causada por uma equação de contratação salários escalonados, como em Fuhrer e Moore (1995).

O modelo é composto pelas 5 relações de comportamento, apresentadas abaixo:

$$h_t = \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 E_t(h_{t+1}) + \alpha_3 (i_{t-1} - E_{t-1}\pi_t) + \alpha_4 z_{t-1} + \varepsilon_{1t} \quad (4.1)$$

$$p_t^d = \frac{1}{2}(w_t + w_{t-1}) \quad (4.2)$$

$$w_t - p_t^c = \chi_0 [E_t(w_{t+1}) - E_t(p_{t+1}^c)] + (1 - \chi_0)[w_{t-1} - p_{t-1}^c] + \chi_1(h_t) + \varepsilon_{4t} \quad (4.3)$$

$$p_t^c = \phi p_t^d + (1 - \phi)(e_t + p_t^{ef}) \quad (4.4)$$

$$e_t = E_t e_{t+1} - (i_t - i_t^f) + \varepsilon_{3t} \quad (4.5)$$

Adicionalmente, sendo esta principal diferença com relação à especificação tanto de Bonomo e Brito quanto de Haldane e Batini, neste trabalho são incluídas mais 3 equações que permitirão que os choques das equações acima sejam auto-correlacionados, seguindo um processo AR(1) estacionário, a saber:

$$\varepsilon_{1t} = \gamma_1 \varepsilon_{1t-1} + \xi_{1t} \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_{4t} = \gamma_4 \varepsilon_{4t-1} + \xi_{4t} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{3t} = \gamma_3 \varepsilon_{3t-1} + \xi_{3t} \quad (4.8)$$

A equação (4.1) é uma curva IS do modelo, difere da especificação da curva IS tradicional porque o hiato do produto ( $h_t$ ), definido como a diferença entre o produto e o produto potencial, e portanto o produto hoje, depende da expectativa do hiato do produto no próximo período ( $E_t h_{t+1}$ ). A especificação da curva IS adicionada da expectativa do produto futuro é devido ao trabalho de McCallum e Nelson (1997)<sup>6</sup>. Desta maneira, quanto maior a expectativa do produto futuro maior o produto corrente, visto que os indivíduos desejam suavizar o consumo, e a expectativa de um maior consumo no próximo período, associada ao maior produto futuro esperado, leva-os a desejar consumir mais hoje, e assim aumentar a demanda corrente por produto. O hiato do produto também depende negativamente da taxa de juros real *ex ante* defasada ( $i_{t-1} - E_{t-1} \pi_t$ ). Este efeito negativo da taxa de juros real sobre o produto corrente reflete a substituição intertemporal do consumo, e o termo  $\alpha_3$  corresponde a elasticidade intertemporal de substituição. O hiato do produto depende positivamente do seu valor em defasagem ( $h_{t-1}$ ), buscando refletir os custos de ajustamento. Além disso, este também depende da taxa de câmbio real ajustada defasada ( $z_{t-1} = x_{t-1} + TT_{t-1}$ ), sendo igual à taxa de câmbio real ( $x_{t-1}$ ) corrigida pelos termos de troca ( $TT_{t-1}$ ). Esta correção do câmbio real, segundo os autores, busca expressar a pequena dimensão da economia no mercado internacional e permitir capturar os efeitos de curto prazo das mudanças do preço relativo dos bens que fazem parte do fluxo de comércio.

O conjunto formado pelas equações (4.2) a (4.4) refere-se ao lado da oferta. A especificação das equações é similar ao modelo de contratos salariais escalonados proposto por Fuhrer e Moore (1995). A equação (4.2) é uma equação de margem (*mark-up*). Segundo esta equação, os preços domésticos ( $p^d$ ) são formados através da adição de uma margem sobre a média ponderada dos salários contratados no período corrente ( $w_t$ ) e no período precedente ( $w_{t-1}$ ). A relação (4.3) é uma equação de contratação de salários. Dada sua especificação, os contratos salariais duram 2 períodos. Os trabalhadores que estão negociando o salário hoje, segundo a equação (4.3) buscam determinar o salário nominal ( $w_t$ ) de tal maneira que o salário real correspondente ( $w_t p_t^c$ ) seja uma média ponderada entre o salário real contratado no período prévio ( $w_{t-1} - p_{t-1}^c$ ) e a expectativa do salário real futuro ( $E_t(w_{t+1}) - E_t(p_{t+1}^c)$ ). Uma diferença com relação à especificação original de Fuhrer e Moore é a não imposição de simetria entre os coeficientes dos termos defasados ( $\chi_0$ ) e adiantado ( $1 - \chi_0$ ) do salário real na equação de contratação de salários. Essa especificação flexível, como mostrada em Fuhrer (1997) é empiricamente mais interessante, pois permite testar qual o grau de *forward-lookingness* no processo de negociação salarial. Apesar da não simetria

<sup>6</sup> Este termo é incluído quando obtém-se a curva IS a partir de uma aproximação log linear da equação de Euler, que condiciona a escolha intertemporal ótima do nível de consumo, que surge da decisão de poupança ótima das famílias depois de impor a

entre os termos defasado e adiantado, os mesmos são restritos a somar um, para manter a curva de Phillips vertical no longo prazo. Na equação de salários é incluído também um termo do hiato do produto, que visa capturar as condições de emprego no mercado de trabalho no momento da negociação salarial. A especificação da equação (4.3) possui a propriedade de gerar inércia inflacionária. O termo ( $\varepsilon_{4t}$ ) captura os distúrbios sobre o produto potencial e outros choques de oferta.

A equação (4.4) define o índice de preço ao consumidor formado por bens domésticos, com peso ( $\phi$ ), e por bens estrangeiros importados, com peso ( $1-\phi$ ). Segundo essa especificação não há defasagem entre a desvalorização cambial e seus efeitos sobre os preços ao consumidor (*immediate pass-through*), sendo que o efeito da desvalorização sobre os preços será ponderado por ( $1-\phi$ ), ou seja, o peso dos bens estrangeiros importados no índice de preços ao consumidor.

Para finalizar a discussão do bloco de equações do lado da oferta, a manipulação do sistema de equações (4.2) a (4.4) resulta na derivação da curva de Phillips para a economia aberta<sup>7</sup>:

$$\pi_t = \chi_0 E_t(\pi_{t+1}) + (1 - \chi_0)\pi_{t-1} + \chi_1(h_t - h_{t-1}) + \mu[(1 - \chi_0)\Delta x_t - \chi_0 E_t(\Delta x_{t+1})] + \varepsilon_{4t} \quad (4.9)$$

Onde  $\mu = \frac{2(1-\phi)}{\phi}$  e  $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ . Claramente, o valor de  $\mu$  nesta equação é

determinado a partir de  $\phi$ , sendo implicitamente admitido que o grau de repasse da desvalorização cambial para o índice de preços (*pass-through*) ocorre apenas de forma direta, via preços dos bens estrangeiros importados.

A equação (4.5) admite que o câmbio segue um processo derivado da condição de paridade descoberta da taxa de juros. Essa condição estabelece que o diferencial de taxa de juros interna e externa ( $i_t - i_t^f$ ) é positivamente relacionado à expectativa de desvalorização cambial para o período ( $E_t(e_{t+1})$ ) mais um termo aditivo ( $\varepsilon_{3t}$ ), que inclui o prêmio de risco e outros fatores que interfiram no mercado de câmbio.

A equação (4.5) pode ser manipulada de forma a se obter uma versão da paridade descoberta da taxa de juros em função da expectativa da taxa de variação do câmbio real, como segue<sup>8</sup>:

$$E_t(\Delta x_{t+1}) = i_t - E_t(\pi_{t+1}) + \varepsilon_{3t} \quad (4.10)$$

condição de equilíbrio que o consumo é igual ao produto menos o gasto governo.

<sup>7</sup> Para derivar a curva de Phillips: as equações (4.3) para o período  $t$  e para  $t-1$  podem ser adicionadas, em seguida as equações (4.2) e (4.4) devem ser substituídas na soma resultante das equações (4.3) em  $t$  e  $t-1$ .

<sup>8</sup> Para obter esta versão da paridade são somados e subtraídos os seguintes termos a equação (4.5): os preços domésticos e externo, e a expectativa dos preços doméstico e externo para o próximo período. Além disso, é admitido que a inflação externa e a taxa de juros externa são zero.

Segundo esta nova versão, a expectativa de variação da taxa câmbio real será igual à taxa de juros real *ex ante* mais o choque cambial do período.

As equações (4.6) a (4.8) estabelecem que os choques, respectivamente, de demanda agregada, de oferta agregada e do câmbio seguem processos AR(1) estacionários com  $0 < \gamma_1, \gamma_3 \text{ e } \gamma_4 < 1$ , e  $\xi_{1t}, \xi_{3t} \text{ e } \xi_{4t}$  serão ruídos brancos. Esta inclusão de processos para os erros das equações difere tanto da especificação de Bonomo e Brito (2001) e de Haldane e Batini (1999), que assumem que os erros são ruídos brancos, sendo que a hipótese que os erros seguem um processo estocástico estacionário possibilitará alguns experimentos com relação à natureza dos choques, permitindo que os mesmos tenham sua persistência variada. Esta hipótese a respeito do processo para os erros permitirá a análise das respostas diferentes da política monetária frente a choques de natureza temporária, de persistência média e de natureza quase permanente, sendo que para isto os coeficientes  $\gamma_1, \gamma_3 \text{ e } \gamma_4$  assumirão os valores 0, 0.5, 0.75, respectivamente.

Logo, após todas as substituições descritas acima, o modelo resultante é formado pelas equações (4.1), (4.9) e (4.10), como na especificação de Bonomo e Brito, e pelas equações (4.6), (4.7) e (4.8), que estão sendo incluídas neste trabalho, a saber:

$$h_t = \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 E_t(h_{t+1}) + \alpha_3 (i_{t-1} - E_{t-1} \pi_t) + \alpha_4 z_{t-1} + \varepsilon_{1t} \quad (4.11)$$

$$\pi_t = \chi_0 E_t(\pi_{t+1}) + (1 - \chi_0) \pi_{t-1} + \chi_1 (h_t - h_{t-1}) + \mu [(1 - \chi_0) \Delta x_t - \chi_0 E_t(\Delta x_{t+1})] + \varepsilon_{4t} \quad (4.12)$$

$$E_t(\Delta x_{t+1}) = i_t - E_t(\pi_{t+1}) - \varepsilon_{3t} \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{1t} = \gamma_1 \varepsilon_{1t-1} + \xi_{1t} \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{4t} = \gamma_4 \varepsilon_{4t-1} + \xi_{4t} \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{3t} = \gamma_3 \varepsilon_{3t-1} + \xi_{3t} \quad (4.16)$$

Há importantes considerações a respeito dos mecanismos de transmissão da política monetária no contexto do modelo. O canal convencional da demanda, presente também numa economia fechada e *backward looking*, permite que a política monetária afete a demanda agregada, com um período de defasagem, via seu efeito sobre a taxa de juros real de curto prazo. A demanda agregada, por sua vez, afeta a inflação com mais um período de defasagem, via a curva de oferta agregada (curva de Phillips). Portanto, este canal possuirá 2 períodos de defasagem para afetar a inflação.

O canal das expectativas, dada a especificação da curva IS e da equação de contratação de salários, e logo, da curva de Phillips, permite que a política monetária afete contemporaneamente a inflação mesmo na ausência do canal do câmbio. A curva IS contém um termo *forward-looking* do hiato do produto, permitindo que a expectativa do hiato do

produto amanhã afete o hiato do produto corrente. Dado que a curva de contratação de salários é especificada de tal forma que o produto afeta a barganha de salários contemporaneamente, logo a inflação é afetada imediatamente. Adicionando-se a este efeito, há o proveniente do termo *forward-looking* da equação de contratação de salários, que implica que o salário corrente depende da expectativa de salário no próximo período, sendo que este último depende da expectativa do hiato do produto no futuro.

Com a presença do câmbio, há a inclusão de canais adicionais de transmissão da política monetária. A taxa de câmbio real ao afetar as exportações líquidas contribui para o canal da demanda agregada de transmissão da política monetária. Há também um canal direto da taxa de câmbio para transmissão da política monetária, visto que a taxa de câmbio afeta os preços domésticos dos bens finais importados, que entram no índice de preço ao consumidor, e, portanto, afeta a inflação ao consumidor.

### 3.2 ESTIMAÇÃO E CALIBRAÇÃO DO MODELO

Como colocado no início da seção, será utilizada a calibração do modelo acima feita por Bonomo e Brito (2001) para a aplicação das soluções de pré-comprometimento, discricionária e regra simples. Porém antes de apresentar a calibração do modelo, deve-se discutir a estimação do mesmo, pois os autores basearam sua calibração nos valores estimados dos parâmetros do modelo. Os dados utilizados na estimação foram o Produto Interno Bruto dessazonalizado do IBGE, o índice de preços ao consumidor (IPCA), o índice de câmbio real construído através da cesta de moedas, segundo a ponderação dos 15 principais parceiros comerciais do Brasil, publicada pelo IPEA e a taxa ANBID do CDB pré-fixado de 30 dias calculado pela ANDIMA, como proxy para a taxa de juros. O intervalo das séries utilizadas na estimação corresponde ao período do terceiro trimestre de 1994 ao segundo trimestre de 2001. Os autores justificam a não utilização de dados anteriores ao terceiro trimestre de 1994, pela provável mudança estrutural ocorrida com o Plano Real, em especial com relação à curva de Phillips.

A estimação do modelo não foi uma tarefa trivial, visto que trata-se de um modelo de equações simultâneas com expectativas racionais, e além disso, as expectativas aparecem nas equações sob conjuntos diferentes de informação ( $E_t(\Delta x_{t+1})$  e  $E_{t-1}(\pi_t)$ ). A mais importante hipótese a ser feita para estimação, diz respeito a como tratar as expectativas. A primeira possibilidade é usar diretamente as séries de expectativas do mercado a respeito das variáveis, mas esta alternativa torna-se impraticável devido à falta de séries para todo o período de estimação. A possibilidade alternativa utilizada foi admitir a hipótese de



expectativas racionais abordadas pelo método dos erros em variáveis e a subsequente estimação por mínimos quadrados de 3 estágios<sup>9</sup>.

A estratégia para contornar o problema da presença de conjunto de informações diferentes foi eliminar  $E_t(\Delta x_{t+1})$  e  $E_{t-1}(\pi_t)$  do sistema de equações (4.11) a (4.13) e desta forma reduzi-lo para um subsistema de 2 equações com expectativas racionais das duas variáveis endógenas  $E_t(h_{t+1})$  e  $E_t(\pi_{t+1})$ . O subsistema, após as substituições<sup>10</sup>, toma a forma a seguir:

$$h_t = \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 E_t(h_{t+1}) + \alpha_3 \left( \frac{1}{1+\mu} \right) i_{t-1} - \frac{\alpha_3}{(1+\mu)\chi_0} \left\{ \pi_{t-1} - (1-\chi_0)\pi_{t-2} - \chi_1[h_{t-1} + h_{t-2}] \right\} + \alpha_4 x_{t-1} + \varepsilon_{1t} \quad (4.17)$$

$$\pi_t = \chi_0(1+\mu)E_t(\pi_{t+1}) + (1-\chi_0)\pi_{t-1} + \chi_1(h_t - h_{t-1}) + \mu[(1-\chi_0)\Delta x_t - \chi_0 i_t] - [\mu\chi_0\varepsilon_{3t-1} - \varepsilon_{4t}] \quad (4.18)$$

O sistema acima foi estimado para o período 1994:3 a 2001:2 através do método de mínimos quadrados de 3 estágios. Devido à provável correlação serial dos erros, os autores salientam que as variáveis candidatas a instrumentos devem estar determinadas antes da expectativa. Os instrumentos utilizados foram: uma *dummy* para a desvalorização cambial de janeiro 1999, uma tendência para o PIB dessazonalizado e a primeira e segunda defasagem da variação do nível de desemprego, da variação do salário nominal, da taxa de juros e do índice de câmbio real. A tabela abaixo apresenta as estimativas dos coeficientes, onde os valores entre parênteses referem-se ao valor da estatística t. O parâmetro  $\phi$  não foi estimado, mas obtido das contas nacionais assumindo o valor de 0.9, o que implica no valor de  $\mu$  igual a 0.1. Na terceira coluna da tabela abaixo é também apresentada a calibração assumida pelos autores, sendo que a única diferença com relação aos dados estimados será a mudança do valor do coeficiente ( $\alpha_4$ ) da taxa de câmbio real na equação IS de -0.01 para 0. Os autores salientaram que o coeficiente apresentou um valor pequeno e o sinal trocado com relação ao esperado pela teoria, sendo também insignificante estaticamente conforme a estatística t (-1,35) associada ao valor do coeficiente.

<sup>9</sup> O método utilizado foi proposto por Wickens (1982).

<sup>10</sup> Para eliminar  $E_t(\Delta x_{t+1})$  utilizou-se a versão da paridade descoberta dada por (4.13). Para eliminar  $E_{t-1}(\pi_t)$  substituiu-se a equação (4.13) defasada na equação (4.12) defasada, e o termo  $E_{t-1}(\pi_t)$  é isolado na equação resultante para ser substituído em (4.11).



**TABELA 1: Estimativa dos parâmetros do modelo**

Parâmetro	Estimativa	Calibração
$\alpha_1$	0,57 (4,29)	0,57
$\alpha_2$	0,35 (2,61)	0,35
$\alpha_3$	-0,20 (-2,86)	-0,20
$\alpha_4$	-0,01 (-1,35)	0
$\chi_0$	0,69 (3,93)	0,69
$\chi_1$	0,09 (0,66)	0,09
$\mu$	0,1	0,1

Fonte: Bonomo e Brito (2001)

### 3.3 PROCEDIMENTOS PARA A OBTENÇÃO DAS REGRAS ÓTIMAS DE PRÉ-COMPROMETIMENTO E DISCRICIONÁRIA

Na análise dessa seção, está se admitindo que o Banco Central adota o regime de metas de inflação e resolve o seguinte problema de otimização para obtenção da regra ótima de condução da política monetária, a saber:

$$\min_{i_t} E_t \sum_{\tau=t}^{\infty} \delta^{\tau-t} L_{t+\tau} \quad (4.19)$$

A função perda ( $L_t$ ) no período  $t$  toma a forma:

$$L_t = q_{\pi} (\bar{\pi}_t)^2 + q_y y_t^2 + q_i (i_t - i_{t-1})^2 \quad (4.20)$$

Onde  $\bar{\pi}_t$  é interpretado como o desvio da inflação de uma dada meta de inflação constante  $\pi$ , e os coeficientes  $q_{\pi}$ ,  $q_y$  e  $q_i$  são os ponderadores da inflação, da estabilização do produto e da suavização da taxa de juros, respectivamente. A meta de produto é a taxa natural (produto potencial), que é a razão para a inclusão direta do hiato do produto na função perda. Essa especificação evita a indução do problema de *inflation bias*. A inclusão do termo de suavização da taxa de juros ( $i_t - i_{t-1}$ ) na função perda é motivada pelo ajuste gradual observado nas mudanças das taxas de juros, pois a autoridade monetária percebe que movimentos bruscos podem levar a grandes perdas no sistema financeiro e deflagrar crises desnecessárias. As variáveis objetivos podem ser agrupadas para o vetor:

$$Y_t = \begin{bmatrix} \bar{\pi}_t \\ y_t \\ i_t - i_{t-1} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Para  $\delta \rightarrow 1$ , o valor da função perda intertemporal aproxima-se da soma infinita das médias da função perda por período,  $E(L_t)$ . Pode-se multiplicar a função perda (4.19) pelo termo  $(1-\delta)$  implicando que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} (1-\delta) E_t \sum_{\tau=t}^{\infty} \delta^{\tau-t} L_{t+\tau} = E[L_t] \quad (4.22)$$

Desta forma, defini-se o problema de otimização para  $\delta = 1$  e interpreta-se a função perda intertemporal como a média não condicional da função perda do período, que será igual a soma ponderada das variâncias não condicionadas das variáveis objetivos:

$$E[L_t] = q_\pi \text{var}(\pi_t) + q_y \text{var}(y_t) + q_i \text{var}(i_t - i_{t-1}) \quad (4.23)$$

Esta propriedade será usada mais a frente para a construção da fronteira da variabilidade do produto e da inflação.

### 3.3.1 FORMA ESPAÇO-ESTADO

Antes da aplicação dos algoritmos de solução, deve-se reescrever a forma final do modelo, sendo formado pelas equações:

$$h_t = \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 E_t(h_{t+1}) + \alpha_3 \left( \frac{1}{1+\mu} \right) i_{t-1} - \frac{\alpha_3}{(1+\mu)\chi_0} \left\{ \pi_{t-1} - (1-\chi_0)\pi_{t-2} - \chi_1[h_{t-1} + h_{t-2}] \right\} + \alpha_4 x_{t-1} + \varepsilon_{1t} \quad (4.17)$$

$$\pi_t = \chi_0(1+\mu)E_t(\pi_{t+1}) + (1-\chi_0)\pi_{t-1} + \chi_1(h_t - h_{t-1}) + \mu[(1-\chi_0)\Delta x_t - \chi_0 i_t] - [\mu\chi_0\varepsilon_{3t-1} - \varepsilon_{4t}] \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_{1t} = \gamma_1 \varepsilon_{1t-1} + \xi_{1t} \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{4t} = \gamma_4 \varepsilon_{4t-1} + \xi_{4t} \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{3t} = \gamma_3 \varepsilon_{3t-1} + \xi_{3t} \quad (4.16)$$

O próximo passo será apresentar uma representação espacial conveniente do sistema de equações acima, em linha com a especificação geral (A.1)<sup>11</sup> capaz de representar modelos alternativos de transmissão da política monetária numa economia:

<sup>11</sup> Ver apêndice técnico p. 63.

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t x_{2t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + B u_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{(n2 \times 1)} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

O vetor  $x_{1t} = [h_{t-1}, h_{t-2}, \pi_{t-1}, \pi_{t-2}, \Delta x_t, \Delta x_{t-1}, x_{t-1}, i_{t-1}, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{3t}, \varepsilon_{3t-1}, \varepsilon_{4t}, \varepsilon_{4t-1}]^T$  representa as variáveis pré-determinadas,  $x_{2t} = [E_t(h_{t+1}), E_t(\pi_{t+1})]^T$  é o vetor contendo as variáveis não pré-determinadas,  $\varepsilon_{t+1} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \xi_{1t+1}, \xi_{3t+1}, 0, \xi_{4t+1}, 0]^T$  é o vetor de choques aleatórios do modelo. As matrizes de coeficientes A e B serão de dimensões (15x15) e (15x1).

Como último passo, deve-se escrever as variáveis objetivos, presentes no vetor  $Y_t$ , em função das variáveis de estado e do instrumento. Isto pode ser feito como a seguir:

$$Y_t = \begin{bmatrix} h_t \\ \bar{\pi}_t \\ i_t - i_{t-1} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ i_t \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_t \\ i_t \end{bmatrix}$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} h_t \\ \bar{\pi}_t \\ i_t - i_{t-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_k \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ i_t \end{bmatrix}$$

Escrevendo a função perda para o período como:

$$L_t = q_\pi \bar{\pi}_t^2 + q_y h_t^2 + q_f (i_t - i_{t-1})^2 \Rightarrow L_t = Y_t^T W Y_t$$

Pode-se escrever o problema de otimização a qual o Banco Central está confrontado, seguindo o regime de meta de inflação para a política monetária, como minimizar a função perda:

$$\min_{\{i_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \{Y_t^T W Y_t\} = \min_{\{i_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [y_t \quad \bar{\pi}_t \quad i_t] \begin{bmatrix} q_y & 0 & 0 \\ 0 & q_\pi & 0 \\ 0 & 0 & q_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ \bar{\pi}_t \\ i_t \end{bmatrix}$$

$$\min_{\{i_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \{Y_t^T W Y_t\} = \min_{\{i_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [x_t^T \quad i_t^T] K^T \begin{bmatrix} q_y & 0 & 0 \\ 0 & q_\pi & 0 \\ 0 & 0 & q_f \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} x_t \\ i_t \end{bmatrix}$$

s.a: equação (4.24)

A seguir serão apresentados os resultados do obtidos para o modelo admitindo-se que os parâmetros assumem os valores apresentados na tabela 1. Adicionalmente, os coeficientes dos processos auto-regressivos dos erros ( $\gamma_1, \gamma_3$  e  $\gamma_4$ ) serão fixados em 0.5, dando-se uma persistência média para os choques que serão utilizados na simulação do

modelo. O modelo seguindo esta parametrização será referenciado, ao longo do texto, como “modelo base”.

### 3.4 SOLUÇÃO DE PRÉ-COMPROMETIMENTO

Admitindo-se que o Banco Central possua credibilidade ou outro mecanismo institucional capaz de tornar crível seus anúncios de política, a regra ótima de condução da taxa de juros será dada pela solução de pré-comprometimento.

O vetor resposta da taxa de juros (regra ótima) corresponde a terceira linha da matriz C resultante da aplicação do algoritmo de solução de pré-comprometimento, cujos coeficientes demonstram a relação da taxa de juros com respeito às variáveis pré-determinadas presentes no vetor estado e aos multiplicadores de Langrange (*shadow prices*) das variáveis não pré-determinadas, que neste caso são a expectativa do produto e da inflação. A tabela 2 abaixo foi construída fixando-se o ponderador da inflação ( $q_\pi$ ) igual a 1, e variando o ponderador do produto ( $q_y$ ) e de suavização da taxa de juros ( $q_i$ ).

**TABELA 2: Coeficientes da regra para a solução de pré-comprometimento**

$q_y$	0,1	0,5	0,5	1	1	1	2	5	5	100	100
$q_i$	0,01	0,1	0,01	0,1	0,01	0,5	0,01	0,1	0,01	0,1	0,01
$h_{t-1}$	0,512	0,423	1,069	0,485	1,281	0,257	1,467	1,020	1,657	1,766	1,864
$h_{t-2}$	-0,032	-0,023	-0,055	-0,024	-0,065	-0,014	-0,074	-0,052	-0,083	-0,089	-0,093
$\pi_{t-1}$	0,805	0,364	0,762	0,369	0,847	0,215	1,010	0,715	1,088	1,184	1,246
$\pi_{t-2}$	-0,109	-0,078	-0,189	-0,097	-0,223	-0,048	-0,254	-0,180	-0,286	-0,304	-0,322
$\Delta x_t$	0,061	0,023	0,041	0,023	0,042	0,014	0,046	0,038	0,052	0,057	0,060
$\Delta x_{t-1}$	-0,011	-0,008	-0,019	-0,051	-0,022	-0,005	-0,025	-0,018	-0,029	-0,030	-0,032
$x_{t-1}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$i_{t-1}$	-0,036	0,154	-0,314	0,153	-0,430	0,344	-0,535	-0,275	-0,640	-0,698	-0,752
$\varepsilon_{1t}$	2,733	2,013	4,215	2,218	4,717	1,292	5,138	3,783	5,551	5,702	5,988
$\varepsilon_{3t}$	-0,093	-0,060	-0,021	-0,063	-0,047	-0,056	-0,083	-0,119	-0,124	-0,173	-0,176
$\varepsilon_{3t-1}$	0,009	0,005	0,017	0,036	0,020	0,003	0,024	0,016	0,028	0,031	0,033
$\varepsilon_{4t}$	1,153	0,726	0,175	0,830	0,578	0,700	1,175	1,677	1,869	2,606	2,704
$\varepsilon_{4t-1}$	-0,355	-0,254	-0,609	-0,286	-0,718	-0,154	-0,818	-0,580	-0,922	-0,984	-1,037
$\rho(h_{t+1})$	-2,254	-0,381	-1,110	-0,190	-0,735	-0,113	-0,457	-0,123	-0,221	-0,013	-0,013
$\rho(\pi_{t+1})$	-1,281	-0,175	-0,456	-0,081	-0,258	-0,043	-0,137	-0,026	-0,052	0,004	0,004

Observando a tabela, vê-se que o coeficiente da regra com relação ao hiato do produto inicia em 0.512, quando há uma baixa preocupação com relação à estabilização do produto ( $q_y = 0.1$ ), sendo este caso referido na literatura de metas de inflação como *strict inflation targeting*, ou seja, na função perda do Banco Central não há preocupação com a atividade econômica na condução da política monetária visando atingir a meta estabelecida. Seguindo ao longo da primeira linha, percebe-se que para um mesmo ponderador de estabilização do produto, por exemplo  $q_y = 5$ , o aumento no ponderador da suavização da

taxa de juros ( $q_i$ ) de 0.01 para 0.1, significando uma menor volatilidade do instrumento, implica na diminuição da resposta da regra com respeito ao hiato do produto, que neste mesmo exemplo, passa de 1.657 para 1.020, fazendo com que a regra responda com menor intensidade ao hiato do produto. Da mesma forma, conforme o ponderador da estabilização do produto é aumentado, ao longo da primeira linha da tabela, nota-se que o coeficiente da regra com relação ao hiato do produto é crescente atingido 1.86, quando  $q_y = 100$ . Este caso é denominado de "flexible inflation targeting", sendo a situação onde o Banco Central preocupa-se com a estabilização do produto quando define a trajetória da taxa de juros visando atingir a meta de inflação anunciada.

O coeficiente da regra com relação à inflação também merece algumas considerações. Observando-se a linha 3 da tabela, o coeficiente da inflação também é crescente, por exemplo, para  $q_y = 0.1$  e  $q_i = 0.01$ , o valor do coeficiente é 0.80, enquanto que para  $q_y = 100$  e  $q_i = 0.01$ , o valor do coeficiente é 1.25. No exemplo, apesar do ponderador da suavização da taxa de juros ter sido mantido constante, a resposta da regra à inflação tornou-se crescente com aumento do ponderador do produto, que passou de 0.1 para 100. Esta característica da regra é esperada dado que diferentes graus de preocupação com a estabilização do produto, dada uma constante suavização da taxa de juros, representa uma diminuição da variância do produto e paralelamente um aumento da variância da inflação, lembrando que a função perda pode ser aproximada para a soma das variâncias das variáveis objetivos que a compõe. Esta propriedade poderá ser vista mais claramente na apresentação da fronteira de variância da inflação e do produto.

Outra variável importante da regra é a variação da taxa de câmbio real. Analisando-se a linha 5 da tabela, vê-se que os coeficientes da regra variam de 0.014, para  $q_y = 1$  e  $q_i = 0.5$ , a 0.061, para  $q_y = 100$  e  $q_i = 0.01$ . A baixa resposta da regra a variações da taxa de câmbio real, sendo essas variações basicamente explicadas pelas mudanças da taxa de câmbio nominal, é resultado do baixo coeficiente de passagem das desvalorizações para os preços, na equação do índice de preços (4.4), e que se reflete no valor de  $\mu$  na curva de Phillips (4.9).

### 3.4.1 FRONTEIRA DE *TRADE-OFF* DA VARIÂNCIA DO HIATO DO PRODUTO E INFLAÇÃO

No modelo, assumimos que não há *trade-off* de longo prazo entre o *nível* de produto e o *nível* de preços, ou seja, a curva de Phillips é vertical no longo-prazo. Apesar disso, há um *trade-off* de longo prazo entre as *flutuações* do produto e as *flutuações* da inflação. Como colocado por Taylor (1984) "*there is a "second order" Phillips curve which is not vertical in the long run*".

Desta forma, é possível construir uma fronteira eficiente da regra ótima para diferentes valores dos ponderadores e obter o *trade-off* entre a variabilidade (variância) do hiato do

produto e da inflação. Para obter essa fronteira, fixou-se o ponderador da inflação e da suavização da taxa de juros e variou-se o ponderador do hiato do produto.

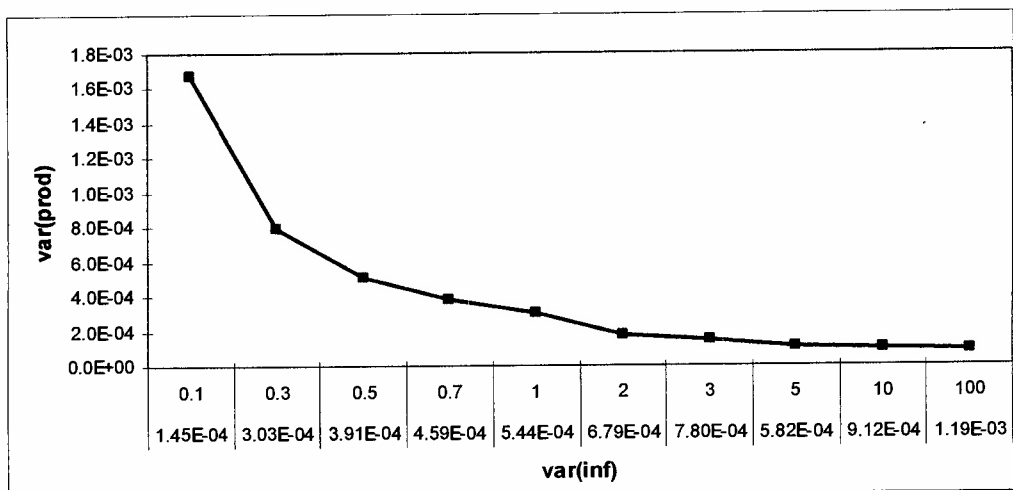
A tabela abaixo demonstra os diferentes valores obtidos para a variância da inflação, do hiato do produto e da suavização da taxa de juros, além do correspondente valor da função perda.

**Tabela 3: Variâncias das variáveis objetivos e da função perda para diferentes valores dos ponderadores da estabilização do produto e suavização da taxa de juros**

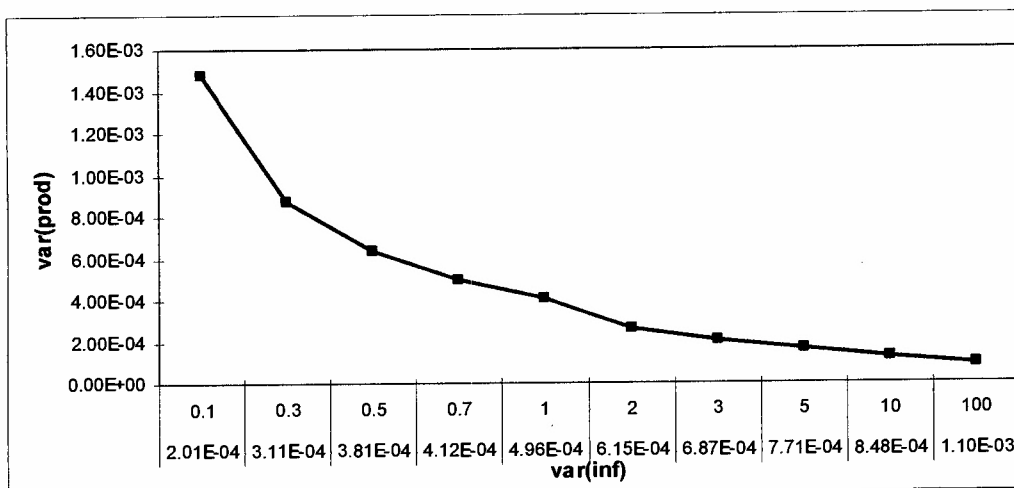
$q_i = 0.01$					$q_i = 0.1$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_y$	var(inf)	var(prod)	Var(jur)	Loss	var(inf)	var(prod)	var(jur)	Loss
0,1	1,45E-04	1,68E-03	1,98E-03	3,33E-04	2,01E-04	1,48E-03	7,41E-04	4,23E-04
0,3	3,03E-04	7,96E-04	1,97E-03	5,62E-04	3,11E-04	8,77E-04	8,24E-04	6,56E-04
0,5	3,91E-04	5,12E-04	2,42E-03	6,71E-04	3,81E-04	6,38E-04	9,95E-04	8,00E-04
0,7	4,59E-04	3,77E-04	2,90E-03	7,52E-04	4,12E-04	5,01E-04	1,19E-03	8,81E-04
1	5,44E-04	2,98E-04	3,62E-03	8,79E-04	4,96E-04	4,07E-04	1,48E-03	1,05E-03
2	6,79E-04	1,78E-04	5,47E-03	1,09E-03	6,15E-04	2,62E-04	2,24E-03	1,36E-03
3	7,80E-04	1,44E-04	6,69E-03	1,28E-03	6,87E-04	2,07E-04	2,87E-03	1,60E-03
5	5,82E-04	1,05E-04	7,52E-03	1,18E-03	7,71E-04	1,59E-04	3,82E-03	1,95E-03
10	9,12E-04	9,89E-05	9,99E-03	2,00E-03	8,48E-04	1,22E-04	5,35E-03	2,60E-03
100	1,19E-03	8,95E-05	1,27E-02	1,03E-02	1,10E-03	9,05E-05	1,08E-02	1,12E-02

Observando-se a tabela pode-se notar que o aumento do peso da estabilização do produto na função perda leva a uma menor variância hiato do produto, colunas 3 e 7 da tabela acima, em detrimento do aumento da variância da inflação, colunas 2 e 6 da tabela, este fato ilustra a razão para o aumento do coeficiente de resposta à inflação na regra quando há um aumento do peso dado a estabilização do produto na função perda do Banco Central. Esta relação mostra que a redução da variância do produto para acréscimos de  $q_y$  cresce a taxas decrescentes, ou seja, a diminuição da variância do produto para acréscimos do valor de  $q_y$  é grande no início, mas torna-se decrescente quando o ponderador da estabilização torna-se elevado, até o ponto onde diminuições das flutuações do hiato do produto serão possíveis somente através de grandes flutuações da inflação, correspondendo aos pontos abaixo e a direita do gráfico da fronteira apresentado a seguir:

**Gráfico 1: Fronteira de *trade-off* da variância do produto e inflação para  $q_i = 0.01$**



**Gráfico 2: Fronteira de *trade-off* da variância do produto e inflação para  $q_i = 0.1$**



Observando-se os gráficos acima, a fronteira é uma curva convexa em linha com a discussão do parágrafo anterior. Uma importante informação que poderá ser obtida analisando-se os gráficos acima juntamente com a tabela (2) para os valores dos coeficientes da regra, será a definição de qual o ótimo vetor da regra que deve ser escolhido dentre as alternativas, obviamente dentro do contexto do modelo.

A partir dos gráficos (1) e (2), pode-se observar que os pontos da fronteira além do ponderador da estabilização do produto igual a 2 levam a pequenas diminuições das flutuações do produto com acréscimos mais do que proporcionais na variância da inflação, ou seja, não é ótimo elevar o valor do ponderador da estabilização do produto além de 2 na

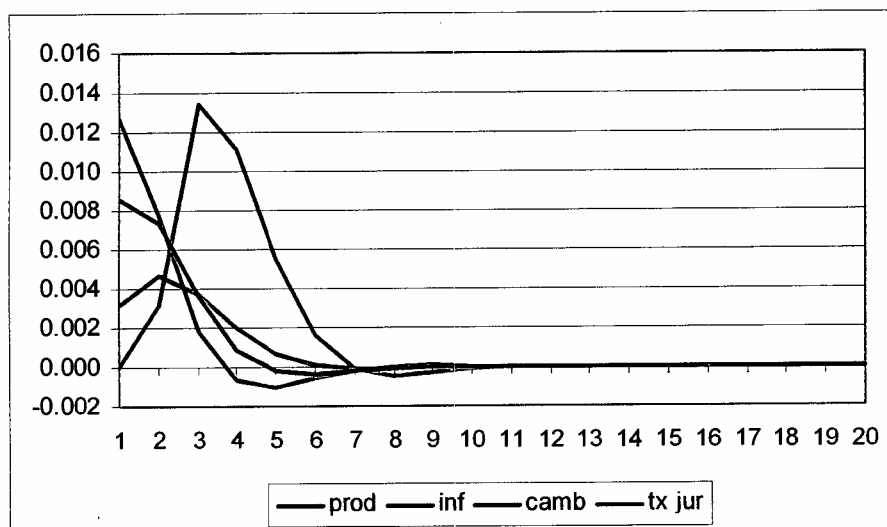


função perda, visto o efeito sobre a variância da inflação. Observando-se a tabela (2), a regra associada ao conjunto de valores  $q_y = 2$  e  $q_i = 0.01$ , possui uma importante propriedade das regras de política monetária, a saber: o coeficiente da regra referente a inflação deve ser igual ou superior a 1, pois assim a regra implicará que um aumento de 1 ponto percentual da inflação deverá ser respondido com o aumento da taxa de juros pelo menos proporcional, ou seja, resultará em taxa de juros reais positivas. Como exemplo, note que a regra simples proposta por Taylor,  $i_t = 1.5\pi_t + 0.5y_t$ , prescreve um coeficiente de resposta a inflação superior a 1. Portanto, a regra correspondente aos ponderadores  $q_\pi = 1$ ,  $q_y = 2$  e  $q_i = 0.01$  será usada na análise da dinâmica da economia quando atingida por choques, sendo traçadas as funções resposta a impulso.

### 3.4.2 ANÁLISE DINÂMICA DO MODELO

Nesta seção serão analisadas as funções resposta a impulso para o modelo dado um choque de oferta ( $\varepsilon_{4t}$ ), um choque de demanda ( $\varepsilon_{1t}$ ) e um choque de câmbio ( $\varepsilon_{3t}$ ). Seguindo os autores Bonomo e Brito, os exercícios serão feitos admitindo-se que todos os choques são de 1%.

**Gráfico 3: Resposta a impulso para um choque de demanda**

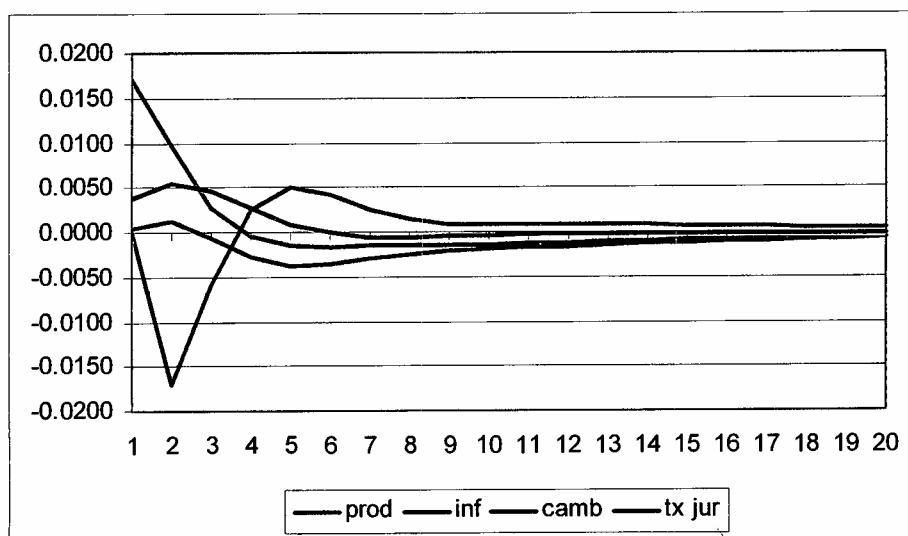


A resposta da taxa de juros frente a um choque de demanda, como previsto pela teoria, por exemplo Clarida, Galí e Gertler (1999), é uma forte elevação. A taxa de juros mantém-se elevada por cerca de 2 trimestres, e depois se torna cadente em linha com comportamento do hiato do produto e da inflação. É importante notar que durante todo o período inicial, há uma forte elevação das taxa de juros reais. O hiato do produto após o



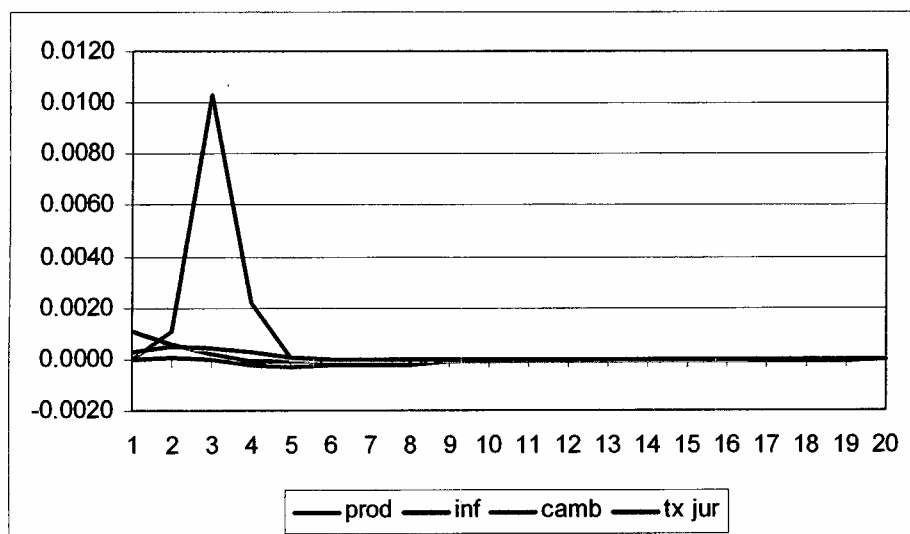
aumento decorrente do choque, passa a descrever uma trajetória de retorno ao equilíbrio, embora com oscilações, o que permite supor alguma "recessão" no processo. A taxa de inflação responde ao choque positivamente, como esperado pela teoria, e retorna ao equilíbrio depois de cerca de 5 trimestres, mas em seguida descreve um comportamento deflacionário, embora este movimento seja acompanhado pela taxa de juros nominal também abaixo do seu valor de equilíbrio. A taxa de câmbio real deprecia-se, atingindo o ápice desse processo após 3 trimestres, e então retorna ao equilíbrio inicial após 7 trimestres da ocorrência do choque, mas na seqüência apresenta um curto período de apreciação antes de finalmente convergir para o equilíbrio.

**Gráfico 4: Resposta a impulso para um choque de oferta**



A resposta da taxa de juros frente a um choque de oferta é elevar-se inicialmente menos do que inflação, levando a redução inicial da taxa de juros real. Porém, após 3 trimestres de manutenção da taxa de juros nominal elevada, e com a inflação já estando abaixo da sua trajetória de equilíbrio, observa-se uma elevação da taxa de juros real que se mantém até o sistema atingir o equilíbrio novamente. O hiato do produto eleva-se enquanto a taxa de juros real está diminuindo, sendo que a partir do terceiro trimestre, o hiato torna-se negativo quando a taxa de juros real volta a subir. A taxa de câmbio real inicialmente aprecia-se enquanto a inflação permanece acima da taxa de juros nominal, mas na seqüência quando a taxa de juros passa a ser maior do que a inflação, passa-se a um período de depreciação. O câmbio real retorna ao valor de equilíbrio quando a taxa de inflação volta a cruzar o valor de equilíbrio, mas depois seguindo o processo de inflação cadente, o câmbio real passa por um período de depreciação até convergir para o equilíbrio definitivamente.

**Gráfico 5: Resposta a impulso para um choque de câmbio**



A taxa de câmbio real descreve uma forte trajetória de reação a um choque de câmbio, podendo ser entendido como uma piora da percepção de risco. Após cerca de três trimestres, ela atinge seu pico e então descreve uma trajetória cadente. É importante notar que devido ao baixo coeficiente de passagem da desvalorização para a inflação e também devido à calibração ter imputado o valor zero para o coeficiente do câmbio real na equação IS, em linha com os dados estimados, o efeito sobre a trajetória da inflação e do produto é bem mais discreto para este choque, quando comparada à dinâmica observada para os choques anteriores. A inflação demonstra um efeito positivo inicial ao choque, mas quando novamente a taxa de juros nominal passa a ser superior a inflação, esta última demonstra uma trajetória cadente. Como no caso do choque de oferta, a taxa de juros é inicialmente elevada menos do que o efeito inicial do choque sobre a inflação, e somente após alguns trimestres permanecendo a taxa de juros nominal constante, a taxa de juros real volta a ser crescente. O hiato do produto descreve uma trajetória onde inicialmente é positivo, enquanto a taxa de juros real é cadente, e então se torna negativo quando a taxa de juros real volta a se elevar.

### 3.5 SOLUÇÃO DE DISCRICIONÁRIA

Numa situação onde o Banco Central não goza de credibilidade a ponto de tornar confiáveis os anúncios feitos a respeito da condução da política monetária, o setor privado passa a esperar que o Banco Central re-otimize a cada período, e a regra de condução da política monetária nesta situação é aproximada pela solução discricionária.<sup>12</sup>

A apresentação dos resultados segue a ordem da subseção anterior, visando facilitar a comparação dos mesmos. O vetor reação da regra discricionária para condução da taxa de juros difere do resultado obtido na solução de pré-comprometimento, visto que no caso discricionário não estão presentes no vetor da regra os multiplicadores de Lagrange das variáveis não pré-determinadas, sendo somente função das variáveis pré-determinadas. Da mesma forma que o caso anterior, a tabela abaixo foi construída fixando-se o ponderador da inflação igual a um na função perda, e variaram-se os ponderadores da inflação e da suavização da taxa de juros.

**Tabela 4: Coeficientes da regra para a solução discricionária**

$q_v$	0,1	0,5	0,5	1	1	1	2	5	5	100	100
$q_i$	0,01	0,1	0,01	0,1	0,01	0,5	0,01	0,1	0,01	0,1	0,01
$h_{t-1}$	0,690	0,413	1,088	1,285	0,569	0,246	1,472	1,031	1,671	1,768	1,892
$h_{t-2}$	-0,037	-0,023	-0,056	-0,065	-0,030	-0,014	-0,074	-0,053	-0,084	-0,089	-0,095
$\pi_{t-1}$	0,641	0,394	0,773	0,886	0,472	0,246	1,002	0,751	1,129	1,198	1,270
$\pi_{t-2}$	-0,129	-0,078	-0,192	-0,224	-0,104	-0,047	-0,256	-0,183	-0,289	-0,306	-0,326
$\Delta x_t$	0,041	0,026	0,041	0,045	0,029	0,017	0,050	0,041	0,055	0,058	0,061
$\Delta x_{t-1}$	-0,013	-0,008	-0,019	-0,022	-0,010	-0,005	-0,026	-0,018	-0,029	-0,031	-0,033
$x_{t-1}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$i_{t-1}$	-0,096	0,147	-0,324	-0,437	0,027	0,328	-0,542	-0,289	-0,649	-0,700	-0,763
$\varepsilon_{1t}$	3,507	1,976	4,294	4,699	2,455	1,247	5,100	3,791	5,535	5,714	6,025
$\varepsilon_{3t}$	0,103	-0,081	-0,010	-0,067	-0,097	-0,082	-0,112	-0,143	-0,150	-0,182	-0,184
$\varepsilon_{3t-1}$	0,010	0,005	0,017	0,021	0,008	0,003	0,025	0,016	0,029	0,031	0,034
$\varepsilon_{4t}$	-1,868	1,032	-0,031	0,886	1,290	1,098	1,619	2,048	2,257	2,771	2,828
$\varepsilon_{4t-1}$	-0,416	-0,253	-0,618	-0,724	-0,336	-0,153	-0,825	-0,589	-0,933	-0,986	-1,052

Os principais valores a serem analisados na tabela acima são os coeficientes de resposta da regra ao hiato do produto, à taxa de inflação e à variação da taxa de câmbio real. Com relação ao coeficiente do hiato do produto, como no caso anterior, fixando-se o ponderador do hiato, por exemplo, em  $q_y = 0.5$ , e reduzindo-se o ponderador da suavização da taxa de juros ( $q_i$ ) de 0.1 para 0.01, resulta no aumento do coeficiente da regra para o hiato do produto de 0.41 para 1.08. No caso extremo, onde o ponderador da estabilização do produto ( $q_y$ ) é fixado em 0.1, sendo um caso de *strict inflation targeting*, o coeficiente da regra para o hiato do produto seria 0.69. Seguindo ao longo da primeira linha, observa-se um

crescimento do coeficiente de resposta da regra ao hiato do produto, que atinge 1.89 quando  $q_y = 100$ , significando que o Banco Central possui uma grande preocupação com a estabilidade do produto durante a condução da política monetária para atingir a meta de inflação.

O coeficiente da inflação na regra, correspondente a linha 3 da tabela, também descreve uma trajetória de crescimento conforme o ponderador do produto é elevado sendo que inicia em 0.64, para  $q_y = 0.1$  e  $q_i = 0.01$ , e atinge 1.27, para  $q_y = 100$  e  $q_i = 0.01$ . Como visto anteriormente, esta característica da regra pode ser explicada porque ao se elevar o ponderador do produto, mantendo-se constante a suavização da taxa de juros, tem-se um aumento da variância da inflação, e como resposta, a regra deve passar a reagir mais a inflação para compensar o aumento da sua variabilidade. A fronteira novamente torna esta propriedade mais clara.

A resposta da regra às variações do câmbio real, linha 5 da tabela, possui valores similares aos encontrados na solução de pré-comprometimento. O coeficiente da regra com relação à taxa de câmbio real varia de 0.017 a 0.061, que novamente, pode ser explicado pelo baixo coeficiente da taxa de câmbio real na curva de Phillips, que implica num efeito baixo em termos de transmissão de desvalorizações cambiais para o nível de preços.

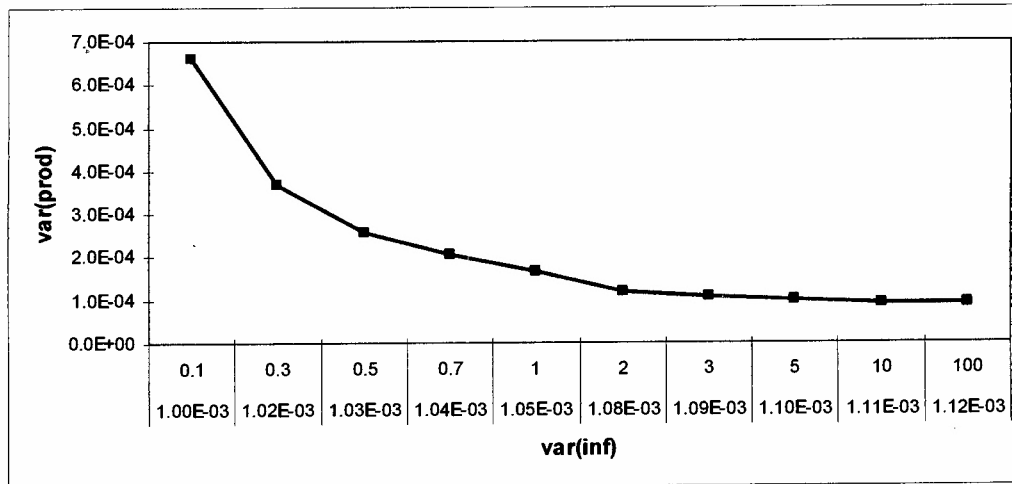
### 3.5.1 FRONTEIRA DE *TRADE-OFF* DA VARIÂNCIA DO HIATO DO PRODUTO E INFLAÇÃO

A construção da fronteira da regra seguiu o mesmo procedimento da subseção anterior, visando a possibilidade de comparação dos resultados. A primeira fronteira foi construída fixando-se o valor do ponderador da inflação ( $q_\pi$ ) e da suavização da taxa de juros ( $q_i$ ), em 0.1 e 0.01, respectivamente, e variou-se ao longo da curva o valor do ponderador da estabilização do produto ( $q_y$ ). A segunda fronteira resultou do mesmo procedimento, mas com a diferença que o ponderador da taxa de juros foi mantido constante em 0.1. As fronteiras são apresentadas abaixo.

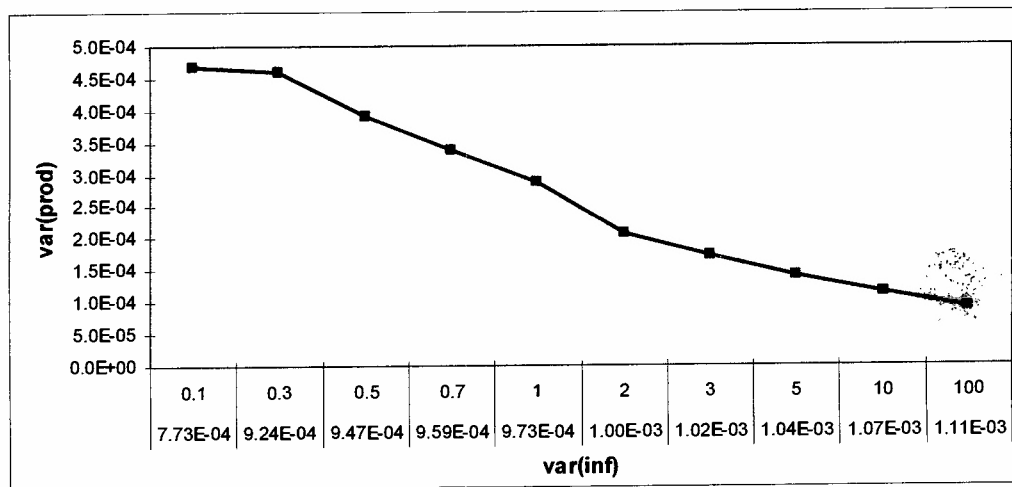
---

<sup>12</sup> Como discutido na seção 2, apesar do Banco Central re-otimizar todo o período, é possível obter uma "regra convergida" de condução da política monetária neste ambiente.

**Gráfico 6: Fronteira de *trade-off* da variância do produto e inflação para  $q_i = 0.01$**



**Gráfico 7: Fronteira de *trade-off* da variância do produto e inflação para  $q_i = 0.1$**



Observando-se o gráfico das duas fronteiras, vê-se que a diminuição da variância do produto com aumentos simultâneos da variância da inflação são vantajosos até o ponderador do produto ficar igual a 2, ou seja, além deste ponto, um aumento do ponderador hiato do produto não traz ganhos expressivos para a diminuição da variância do produto, mas implica em maiores acréscimos da variância da inflação. Esta informação pode ser associada à

tabela 4, para obter a regra correspondente ao ponderador  $q_y=2$ , e verificar se a propriedade do coeficiente da inflação na regra possui um valor igual ou superior a um é atendida. Observando-se a tabela 4, a regra correspondente ao par  $q_y=2$  e  $q_i=0.01$  possui um coeficiente de 1.002 associado à inflação.

Logo a regra associada aos ponderadores  $q_\pi=1$ ,  $q_y=2$  e  $q_i=0.01$  será usada na próxima subseção para a análise da dinâmica do modelo. Antes de passar a esta análise, deve-se comparar a tabela 3, que dá o valor correspondente das variâncias das variáveis objetivos e da função perda do caso de pré-comprometimento, à tabela abaixo.

**Tabela 5: Variâncias das variáveis objetivos e da função perda para diferentes valores dos ponderadores da estabilização do produto e suavização da taxa de juros**

$q_i = 0.01$					$q_i = 0.1$			
$q_y$	var(inf)	var(prod)	var(jur)	Loss	var(inf)	var(prod)	var(jur)	Loss
0,1	1,00E-03	6,59E-04	5,81E-03	1,13E-03	7,73E-04	4,68E-04	8,00E-03	1,62E-03
0,3	1,02E-03	3,68E-04	8,58E-03	1,21E-03	9,24E-04	4,60E-04	7,49E-03	1,81E-03
0,5	1,03E-03	2,59E-04	1,04E-02	1,26E-03	9,47E-04	3,91E-04	8,39E-03	1,98E-03
0,7	1,04E-03	2,06E-04	1,16E-02	1,30E-03	9,59E-04	3,39E-04	9,17E-03	2,11E-03
1	1,05E-03	1,65E-04	1,29E-02	1,35E-03	9,73E-04	2,88E-04	1,01E-02	2,27E-03
2	1,08E-03	1,20E-04	1,50E-02	1,47E-03	1,00E-03	2,07E-04	1,20E-02	2,61E-03
3	1,09E-03	1,06E-04	1,59E-02	1,57E-03	1,02E-03	1,73E-04	1,31E-02	2,84E-03
5	1,10E-03	9,72E-05	1,69E-02	1,75E-03	1,04E-03	1,41E-04	1,43E-02	3,18E-03
10	1,11E-03	9,21E-05	1,77E-02	2,21E-03	1,07E-03	1,14E-04	1,57E-02	3,78E-03
100	1,12E-03	9,01E-05	1,85E-02	1,03E-02	1,11E-03	9,04E-05	1,82E-02	1,20E-02

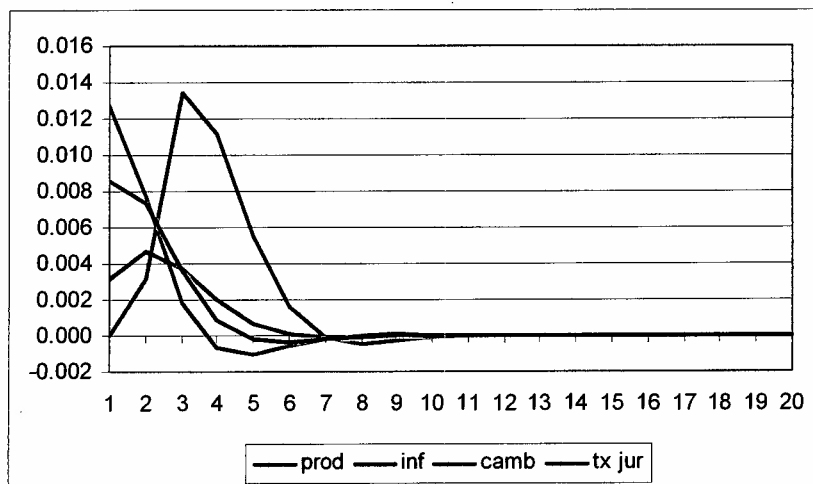
Pode-se notar que o valor da função perda para um mesmo caso de combinação de ponderadores é sempre superior no caso discricionário relativamente à solução de pré-comprometimento, isto confirma a afirmação da teoria anteriormente colocada que a solução de pré-comprometimento é ótima, na classe de regras de modelos com variáveis em expectativas racionais, no sentido que ela estará sempre associada ao menor valor da função perda possível. Em valores, por exemplo, para o caso onde  $q_\pi=1$ ,  $q_y=0.1$  e  $q_i=0.01$ , o valor da função perda na tabela acima é 0.00133, enquanto que o mesmo caso na tabela 4, o valor da função perda é 0.00033, ou seja, a perda associada à solução discricionária é 238% superior ao caso de pré-comprometimento. Obviamente, este é um caso extremo, para o caso onde  $q_\pi=1$ ,  $q_y=10$  e  $q_i=0.01$ , a solução discricionária estaria somente 10% acima do resultado de pré-comprometimento.

### 3.5.2 ANÁLISE DINÂMICA DO MODELO

Nesta subseção é analisada a dinâmica do modelo, a partir da construção das funções resposta a impulso para os diferentes choques que possivelmente estarão atingindo a economia no intervalo de cumprimento da meta, a saber: choque de demanda ( $\varepsilon_{1t}$ ), choque

de oferta ( $\varepsilon_{4t}$ ) e choque de câmbio ( $\varepsilon_{3t}$ ). Como anteriormente, o valor dos choques será fixado em 1%. Antes de apresentar as funções impulso, deve-se adiantar que devido à regra escolhida da solução discricionária possuir parâmetros próximos aos da regra de pré-comprometimento as dinâmicas serão qualitativamente parecidas.

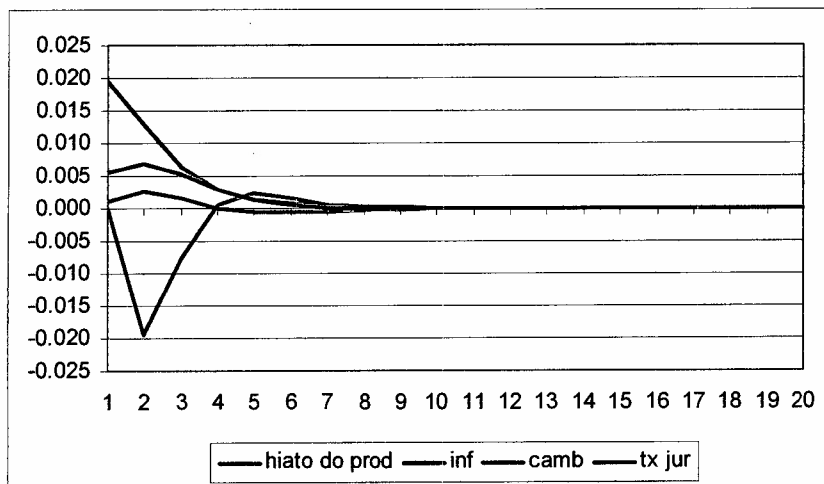
**Gráfico 8: Resposta a impulso para um choque de demanda**



Como no caso anterior, o choque de demanda implica na mais forte resposta da taxa de juros entre todos os choques considerados, como previsto pela teoria. A taxa de juros é elevada juntamente com o choque, mas diferentemente do caso anterior, não permanece constante por 2 trimestres, sendo que logo após seu aumento já descreve uma trajetória cadente. Durante a maior parte do tempo, ela permanece acima da inflação o que significa que a taxa de juros real permanecerá elevada. O hiato do produto, após elevar-se com a ocorrência do choque, descreve uma trajetória de retorno ao equilíbrio, e diferente do caso anterior, o período de valores negativos ("recessão") é seguido da convergência para o equilíbrio. A taxa de inflação apresenta seu pico após dois trimestres e então entra em declínio, não apresentando comportamento oscilatório. A taxa de câmbio real sofre um processo de depreciação durante 3 trimestres até atingir o ápice do processo, e então descreve uma trajetória declinante, sendo que novamente praticamente não descreve um comportamento oscilatório até a sua convergência. Portanto, comparando-se as respostas das variáveis para as duas soluções, é notório observar que a solução discricionária implica em menor volatilidade (oscilação) da trajetória das variáveis até a convergência para o equilíbrio.



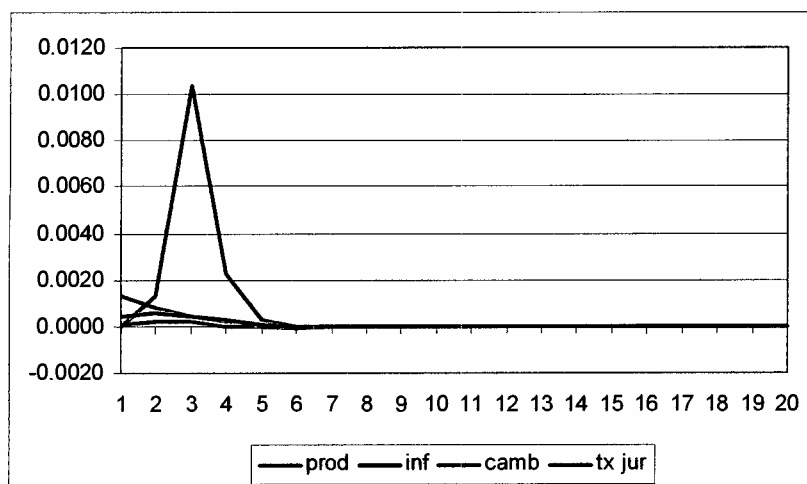
**Gráfico 9: Resposta a impulso para um choque de oferta**



Frente ao choque de oferta, a taxa de juros eleva-se menos que a inflação inicialmente, e como ocorrido anteriormente, há um período inicial de redução da taxa de juros real. A dinâmica posterior dos juros implica em juros reais crescentes, mas sem apresentar grandes valores positivos. A inflação neste caso apresenta uma elevação inicial com o choque, e em seguida uma trajetória cadente que faz com que ela retorne ao equilíbrio sem apresentar períodos de "deflação". O hiato do produto após atingir seu maior valor no final do 2º trimestre, descreve um comportamento de retorno ao equilíbrio e devido às taxas de juros reais não se tornarem expressivamente positivas, diferente do caso anterior, a trajetória não apresenta sinais de "recessão" durante a convergência ao equilíbrio. A taxa de câmbio real passa por um período inicial de apreciação atingindo o ponto mais baixo no final do segundo trimestre, e então inicia um processo de depreciação antes de voltar a convergir. Neste caso, a taxa de câmbio real deprecia-se menos do que o observado no caso de pré-comprometimento.



**Gráfico 10: Resposta a impulso para um choque de câmbio**



Os efeitos do choque de câmbio, entendido como uma piora da percepção do risco país, por exemplo, acabam ficando praticamente circunstanciados ao mercado cambial, não havendo grandes contaminações nas demais variáveis. Logo após o choque, a taxa de câmbio real deprecia-se fortemente e atinge o ápice do processo após 3 trimestres, quando então passa a convergir para o equilíbrio demorando cerca de 6 trimestres para a completa convergência. A inflação apresenta um pequeno aumento como reposta inicial ao choque, sendo que essa modesta elevação está em linha com o baixo coeficiente de passagem do câmbio para os preços implícito na especificação do modelo. Quando a taxa de juros nominal torna-se maior que a taxa de inflação, o processo de convergência desta última variável é acelerado. A taxa de juros, confirmando o baixo coeficiente da regra com relação à variação da taxa de câmbio real, eleva-se discretamente e permanece elevada até que o processo de "desinflação" tenha terminado. O hiato do produto também apresenta uma trajetória praticamente constante, em concordância com o valor zero imputado na calibração para o coeficiente da taxa de câmbio real na curva IS. Há uma pequena elevação do valor do hiato logo após o choque, mas tão logo as taxas de juros reais tornam-se crescentes, a trajetória passa a ser de convergência ao equilíbrio.

### 3.6 REGRA SIMPLES

Como alternativa aos dois casos anteriores, o Banco Central pode decidir seguir uma regra simples de condução da política monetária, onde a taxa de juros será somente função de algumas das variáveis presentes no vetor de variáveis de estado. A decisão de adotar uma regra simples é principalmente explicada pela intenção da autoridade monetária de tornar mais fácil a comunicação e entendimento do público em geral a respeito das decisões tomadas com relação ao curso da política monetária, como colocado na seção 2.

A regra proposta por Taylor (1993) será adotada nesta subseção com o objetivo de comparar as características e performance do modelo quando esta regra é aplicada *vis-à-vis* ao caso discricionário e de pré-comprometimento. Segundo sua formulação, a taxa de juros responde somente aos desvios da inflação da meta estipulada e aos desvios do produto da meta estipulada para este, sendo normalmente o produto potencial, e portanto, resulta no hiato do produto, sendo que a função de reação desta regra toma a seguinte forma:  $i_t = 1.5\pi_t + 0.5y_t$ . A adoção da regra simples implica em algumas modificações na resolução do problema de otimização do Banco Central, que foram discutidas no apêndice técnico. Como nos casos anteriores a discussão seguirá a mesma ordem, visando facilitar a comparação dos resultados.

Como a regra possui um vetor de coeficientes pré-determinado não será possível mostrar, como anteriormente, a tabela de valores de regras para diferentes ponderadores, que portanto será omitida essa discussão. Outra implicação da regra simples será ausência de modificação da variância das variáveis objetivos quando os ponderadores da função perda são mudados, ou seja, não será possível construir a fronteira de *trade-off* da variância da inflação e do hiato do produto como para o caso das regras ótima de pré-comprometimento e discricionária. A razão para essa invariabilidade está novamente no fato dos coeficientes da regra serem mantidos constantes, o que faz com a regra não mude o seu formato em resposta às mudanças nas preferências da autoridade monetária expressas nos ponderadores da função perda. Apesar disso, o valor global da função perda será alterada com a mudança dos ponderadores, podendo ser visto na tabela abaixo.

**Tabela 6: Variâncias das variáveis objetivos e da função perda para diferentes valores dos ponderadores da estabilização do produto e suavização da taxa de juros para a regra simples**

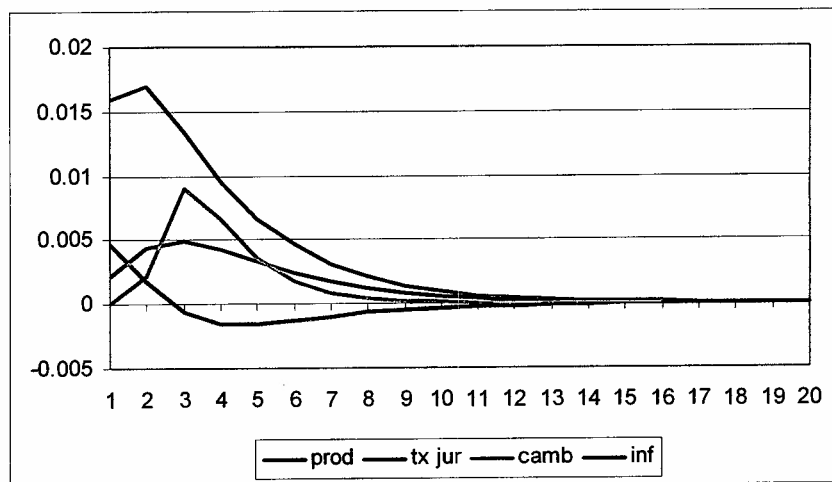
$q_i = 0.01$								
$q_y$	var(inf)	var(prod)	var(jur)	Função Perda (regra simples)	Função Perda (pré-comp.)	Função Perda (disc.)	Diferencial ( $d1 = a / b - 1$ )	Diferencial ( $d2 = a / b - 1$ )
				(a)	(b)	(c)		
0.1	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	6.85E-03	3.33E-04	1.13E-03	1958%	508%
0.3	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	1.14E-02	5.62E-04	1.21E-03	1935%	843%
0.5	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	1.60E-02	6.71E-04	1.26E-03	2287%	1167%
0.7	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	2.06E-02	7.52E-04	1.30E-03	2639%	1482%
1	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	2.75E-02	8.79E-04	1.35E-03	3024%	1937%
2	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	5.04E-02	1.09E-03	1.47E-03	4521%	3336%
3	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	7.32E-02	1.28E-03	1.57E-03	5630%	4579%
5	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	1.19E-01	1.18E-03	1.75E-03	9956%	6690%
10	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	2.34E-01	2.00E-03	2.21E-03	11572%	10479%
100	3.93E-03	2.29E-02	6.25E-02	2.29E+00	1.03E-02	1.03E-02	22243%	22143%

É importante notar que a perda relativa em termos da função perda, sendo as colunas dos diferenciais na tabela 6 acima, onde a solução de pré-comprometimento e discricionária são tomadas como base, é grande ao implementar a regra de Taylor, demonstrando a diminuição de eficiência associada à restrição ao conjunto de informação a qual a regra estará respondendo.

### 3.6.1 ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA

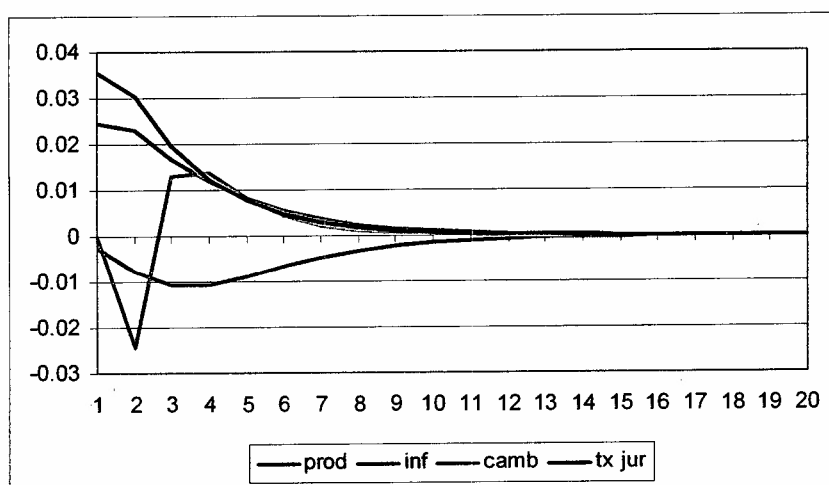
Como anteriormente feito, visando analisar a dinâmica do modelo frente a diferentes choques que normalmente estarão presentes na evolução da economia até o cumprimento da meta, serão apresentadas as funções resposta a impulso para os choques de demanda, de oferta e de câmbio. A magnitude de todos os choques foi mantida em 1%.

**Gráfico 11: Resposta a impulso para um choque de demanda**



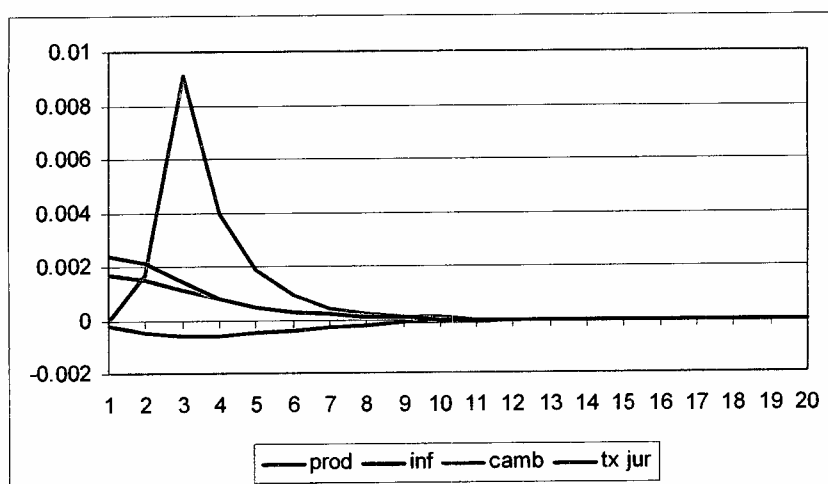
A regra de Taylor, ao imputar um valor de 0.5 para o coeficiente da regra com relação ao hiato do produto, faz com a resposta da taxa de juros frente a um choque de demanda seja menos intenso que nos casos anteriores. A taxa de juros é gradativamente elevada até atingir seu ápice no 3º trimestre, quando então descreve uma trajetória de retorno ao equilíbrio, acompanhando o movimento de convergência do hiato do produto. É importante notar que o tempo de convergência da taxa de juros neste caso é bem maior que nos casos anteriores, levando cerca de 12 trimestres para convergir. O hiato do produto apresenta uma forte elevação inicial pós-choque até o final do segundo trimestre, quando então passa a descrever uma trajetória cadente quando as taxas de juros reais tornam-se crescentes, sendo que durante todo o processo de convergência do hiato do produto as taxas de juros reais se mantêm elevadas. A inflação aumenta-se inicialmente com o choque, mas a dinâmica subsequente já é descendente, em linha com a trajetória da taxa de juros. No processo de retorno ao equilíbrio apresenta um período “deflacionário”, sendo prolongado relativamente aos casos anteriores. A taxa de câmbio real sofre uma depreciação até atingir o seu pico no final do 3º trimestre, quando então reverte sua trajetória, sendo que o início do processo de reversão ocorre juntamente no ápice do processo de elevação gradual da taxa de juros. Quando as taxas de juros reais tornam-se fortemente positivas há a apreciação da taxa de câmbio real até atingir o equilíbrio sem apresentar comportamento oscilatório. Uma diferença importante da implementação da regra de Taylor com relação aos casos anteriores é o demorado período de convergência das variáveis, induzindo a um longo período de manutenção das taxas de juros elevadas.

**Gráfico 12: Resposta a impulso para um choque de oferta**



Como a regra de Taylor prioriza reagir fortemente aos desvios da inflação, dado o coeficiente de 1.5 associado à esta variável, a resposta da autoridade monetária frente a um choque de oferta, é a elevação imediata da taxa de juros, sendo que esta será a reação mais intensa da regra dentro de todos os choques aqui analisados. A trajetória dos juros é elevar-se acima da inflação desde a ocorrência do choque, resultando em taxa de juros reais elevadas desde do início do choque. Na seqüência, acompanhando uma trajetória cadente da inflação, as taxas de juros são gradualmente reduzidas acompanhando o processo de retorno da inflação ao equilíbrio. O hiato do produto apresenta uma trajetória que sugere um processo “recessivo” de convergência ao equilíbrio pós-choque, e esta evolução do hiato reflete a permanência de elevadas taxas de juros reais necessárias para o retorno ao equilíbrio da economia. A reversão da trajetória cadente do hiato do produto ocorre juntamente com a fase onde as taxas de juros reais são cadentes, a partir do 4º trimestre e com o ápice do movimento de depreciação do câmbio real. A inflação apresenta uma trajetória cadente pós-choque. Este movimento está de acordo com a evolução da taxa de juros, mas como no caso discricionário não apresenta períodos “deflacionário” no processo de retorno ao equilíbrio. A taxa de câmbio real apresenta um período de apreciação atingindo o valor mais baixo após 2 períodos, e então respondendo a taxa de juros real positiva segue um período de depreciação até o final do 4º trimestre. Quando as taxas de juros reais não são mais crescentes, a taxa de câmbio real volta a se apreciar e retorna ao equilíbrio após 9 períodos.

**Gráfico 13: Resposta a impulso para um choque de câmbio**



A taxa de câmbio real apresenta uma forte depreciação como resposta ao choque de câmbio, e o processo atinge seu ápice ao final de 3 trimestres, e então segue uma trajetória cadente até o equilíbrio, sem apresentar períodos de apreciação. Da mesma forma que os

casos anteriores, devido à especificação do modelo, os impactos do choque de câmbio são relativamente pequenos na inflação e no hiato do produto. Apesar disso, dado a configuração da regra, a taxa de juros neste caso responde desde o início elevando-se acima da inflação e posteriormente, retornando ao equilíbrio de acordo com a trajetória de inflação. A inflação sofre um aumento inicial decorrente do choque e em seguida já descreve um processo de “desinflação”, respondendo a reação da taxa de juros. O hiato do produto, diferentemente dos casos anteriores, apresenta um processo de convergência marcado por valores negativos, sugerindo alguma recessão, e a sua evolução está refletindo o comportamento das taxas de juros reais durante o processo de convergência da economia pós-choque.

Uma última observação a ser feita diz respeito ao processo de convergência da economia quando a regra de Taylor é aplicada comparativamente ao caso discricionário e de pré-comprometimento. Em todos os choques descritos acima, percebe-se que um período de tempo de convergência das variáveis mais demorado, certamente refletindo a característica da regra simples que considera um conjunto de informação mais restrito relativamente aos outros casos, onde todo o vetor de variáveis de estado estará sendo levado em consideração na condução da política monetária. Percebe-se também que a taxa de juros permanece elevada por período mais longo, e esta característica acaba refletindo-se no comportamento do hiato do produto, que a não ser no choque demanda, estará sempre apresentando um processo “recessivo” de convergência ao equilíbrio.

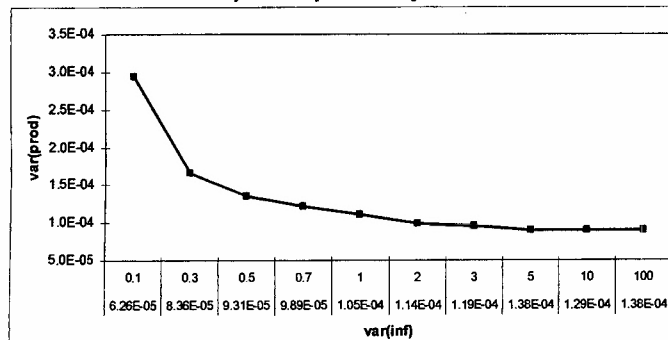
### **3.7 A PERSISTÊNCIA DOS CHOQUES**

A seguir são apresentados os resultados da fronteira eficiente da regra e das funções reposta a impulso, quando os valores dos coeficientes dos processos dos choques  $\gamma_1, \gamma_3$  e  $\gamma_4$  assumem os valores 0 e 0.75, visando representar, respectivamente, choques de natureza temporária e choques quase permanentes. Os resultados abaixo serão sempre comparados ao caso onde  $\gamma_1, \gamma_3$  e  $\gamma_4$  são iguais a 0.5, usado na construção dos resultados das seções, lembrando que o modelo com esta especificação foi chamado de “modelo base”.

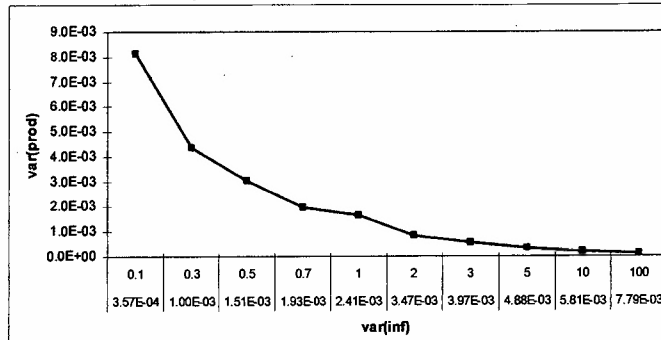
#### **3.7.1 A FRONTEIRA DE TRADE-OFF DA VARIÂNCIA DO HIATO DO PRODUTO E DA INFLAÇÃO**

**Gráfico 14: Fronteiras para o caso de pré-comprometimento**

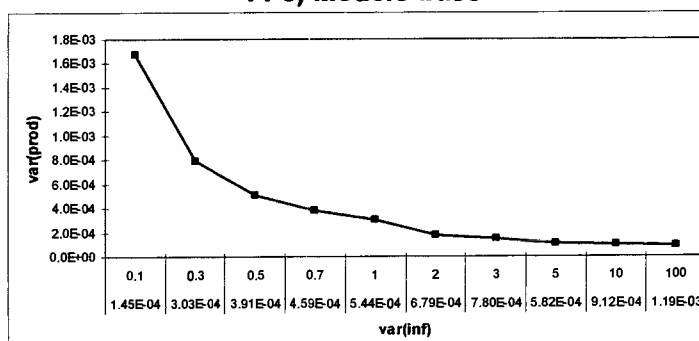
**14 a) Choque temporário**



**14 b) Choque quase permanente**



**14 c) Modelo base**



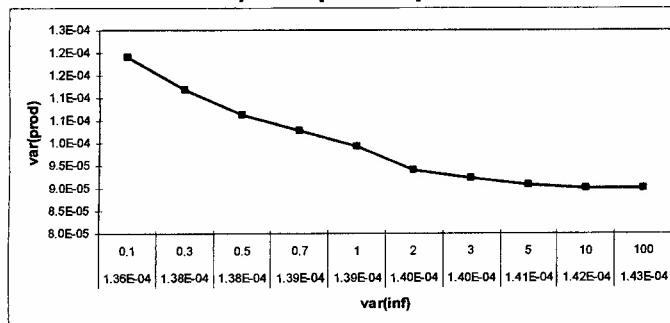
Para a solução de pré-comprometimento, a primeira diferença entre os choques temporários e quase permanentes com relação à fronteira do modelo base será a mudança de escala dos valores, tanto da variância do hiato do produto quanto da variância da inflação, no sentido de maiores valores associados aos choques permanentes e menores aos choques temporários, tendo como base o plano da fronteira para o modelo base. Para o choque temporário, a fronteira apresenta um aspecto bem menos convexo que o modelo base, demonstrando que os ganhos advindos do aumento do peso dado à estabilização do produto na função perda, representados pela diminuição da variância dessa variável rapidamente tornam-se pequenos, significando que na presença de choques de natureza temporária, o Banco Central deve buscá-los completamente, ou seja, não há ganhos em acomodá-los gradualmente para diminuir os efeitos sobre o produto, visto que a fronteira sugere que o peso para a estabilização do produto na função perda seja baixo, o que abre espaço para uma resposta mais forte da taxa de juros quando comparada ao modelo base. No caso do choque quase permanente, a forma da fronteira não difere tanto do modelo base sendo principalmente uma mudança de escala dos eixos. A curvatura sugere a



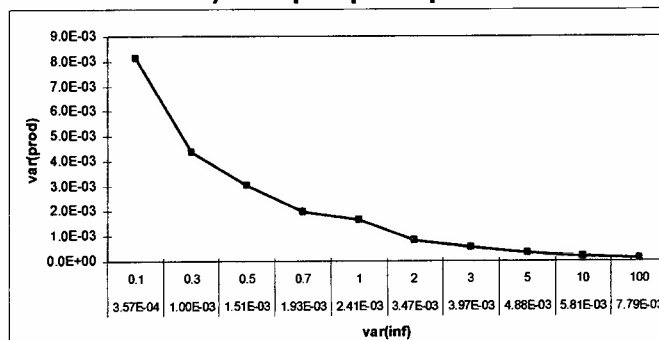
manutenção da preocupação com a estabilização do produto na definição dos ponderadores da função perda.

**Gráfico 15: Fronteiras para o caso discricionário**

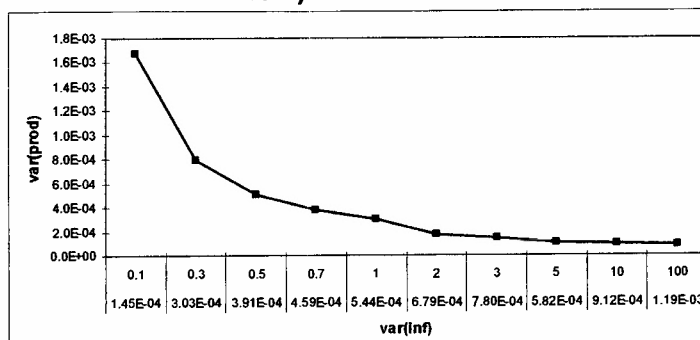
**15 a) Choque temporário**



**15 b) Choque quase permanente**



**15 c) Modelo base**



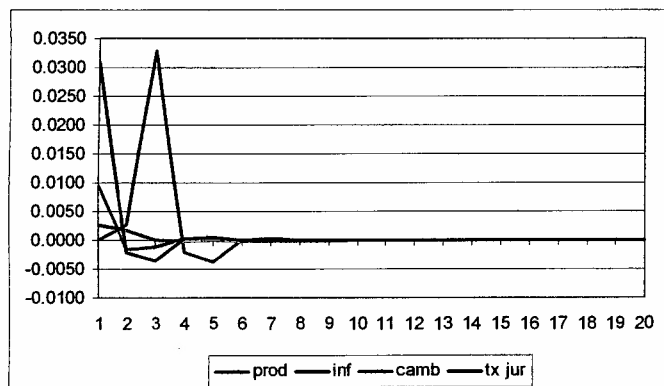
Para a solução discricionária, as fronteiras para os choques temporários e quase permanentes apresentam também uma mudança na dimensão da escala da variância do hiato do produto e da inflação. Diferente do caso de pré-comprometimento, a fronteira do choque quase permanente apresenta uma forte diminuição inicial da variância do hiato do produto como resposta à elevação do ponderador desta variável na função perda, mas rapidamente a fronteira torna-se plana sugerindo que não há ganhos adicionais com o aumento do ponderador da estabilização do produto na fronteira. Logo na ocorrência de um choque quase permanente, a reação da taxa de juros poderá ser forte, devido à baixa preocupação com a estabilização do produto na função perda do Banco Central.

A fronteira para o choque temporário apresenta menor convexidade com relação à fronteira do modelo base, sugerindo que a diminuição da variância do produto, quando o ponderador desta variável é aumentado na função perda, resulta em aumentos da variância da inflação em proporção praticamente igual. Apesar disso, a fronteira para o choque temporário sugere que função perda do Banco Central deve preocupar-se com a estabilização do produto na reação a choques desta natureza.

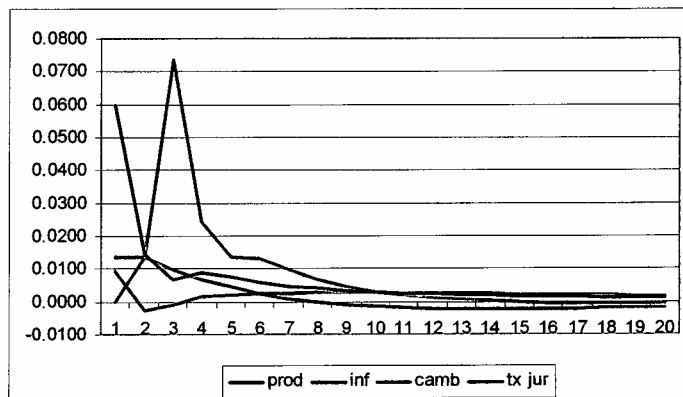
### 3.7.2 ANÁLISE DINÂMICA DO MODELO

**Gráfico 16: Choque de demanda para o caso de pré-comprometimento**

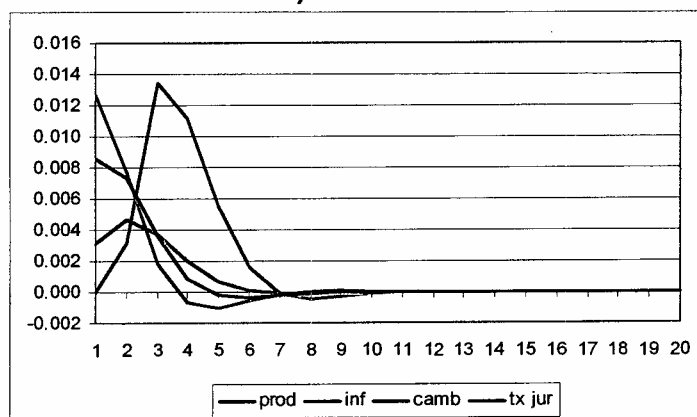
**16 a) Choque temporário**



**16 b) Choque quase permanente**



**16 c) Modelo base**

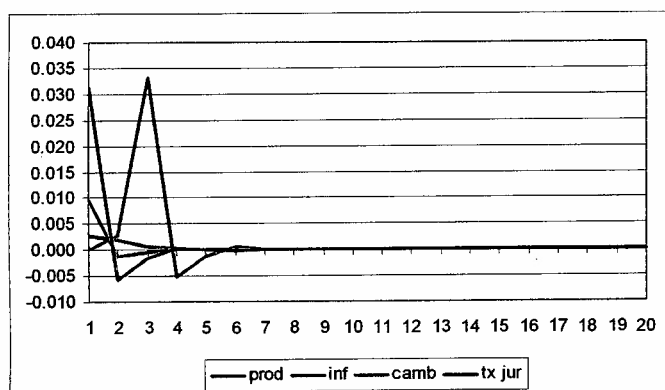


Observando-se o gráfico (16a), a resposta da política monetária, que segue a solução de pré-comprometimento, frente a um choque de demanda de natureza temporária é elevar fortemente a taxa de juros no primeiro trimestre buscando compensar completamente o efeito do choque já no final do 3º trimestre, levando a uma convergência para o equilíbrio pós-choque do hiato do produto bem mais rápida do que no caso do modelo base. Da mesma forma, a inflação apresenta uma pequena elevação, também menor a ocorrida no modelo base, e converge para o equilíbrio mais rápido. O câmbio real por sua vez apresenta uma trajetória de depreciação mais forte do que a trajetória do modelo base sugere, embora retorne mais rápido para o equilíbrio em seguida.

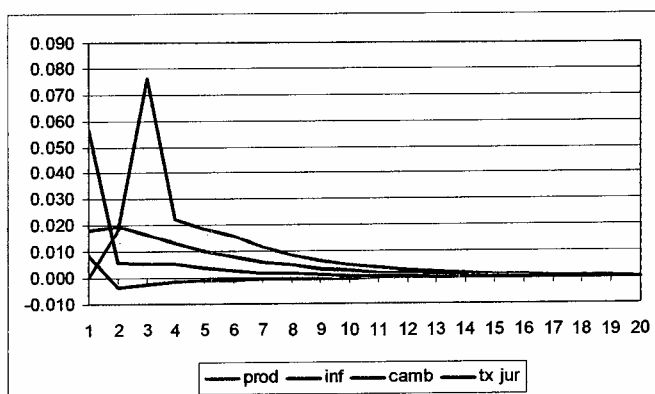
No caso do choque quase permanente, ver gráfico (16b), a taxa de juros é elevada de forma a atingir um patamar mais elevado do que no modelo base, e, dada a persistência do choque, a convergência do sistema requer a manutenção da taxa de juros elevada durante todo o processo. A resposta do hiato é pequena, reflexo do forte ajuste do juro real pós-choque, mas não apresenta grandes períodos de valores negativos como no caso base. A sua convergência é lenta e não chega a retornar completamente ao equilíbrio. A taxa de inflação atinge um ápice pós-choque, inferior ao modelo base, também refletindo o efeito do forte ajuste da taxa de juros nominal. No seu processo de convergência não apresenta valores negativos (“deflação”). A taxa de câmbio real sofre novamente uma forte depreciação pós-choque, mas não apresenta sinais de apreciação no retorno até equilíbrio.

**Gráfico 17: Choque de demanda para o caso de discricionário**

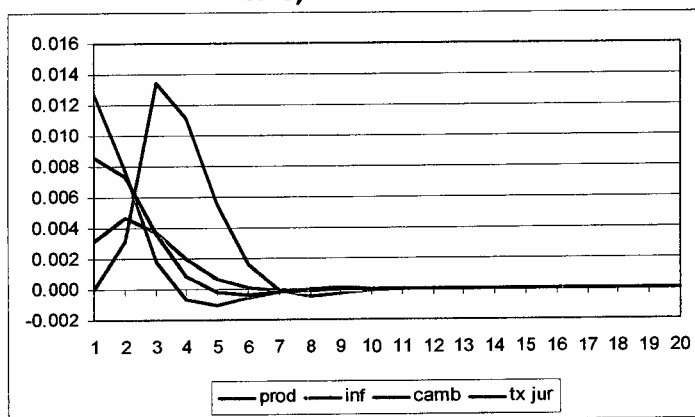
**17 a) Choque temporário**



**17 b) Choque quase permanente**



**17 c) Modelo base**



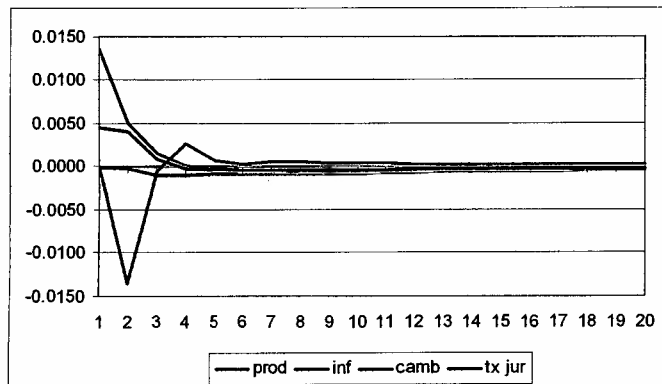
Na situação em que a política monetária segue a solução discricionária, a resposta inicial da taxa de juros ao choque de demanda temporário, apresentada no gráfico (17a) acima, é muito parecida com a regra de pré-comprometimento, mas no final do 2º trimestre já ocorre uma forte redução da taxa de juros nominal, e então sua convergência é mais rápida.

A trajetória das outras variáveis não muda de maneira expressiva, a não ser a taxa de câmbio real que, após a forte depreciação inicial, quando passar a se apreciar, atinge um patamar mais baixo que no caso do modelo base, e em seguida retorna ao equilíbrio.

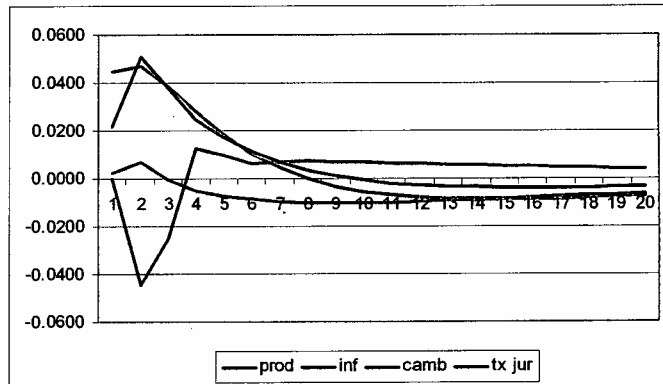
Quando ocorre um choque quase permanente de demanda, como se pode observar no gráfico (17b), a resposta da taxa de juros sobre a regra discricionária é elevar-se acima do nível do choque temporário, e durante o processo de convergência do sistema a taxa de juros mantém-se sempre acima dos valores de equilíbrio. A inflação atinge o seu maior valor dentre os 3 casos e mantém-se elevada até o terceiro trimestre. Em seguida, já apresenta uma trajetória de convergência ao equilíbrio, mas como esperado pela natureza do choque é o mais lento processo dos três casos. A taxa de câmbio de real sofre também forte depreciação atingindo o nível mais alto de todos os casos, e descreve então uma lenta trajetória de convergência ao equilíbrio, mas sem apresentar sinais de apreciação.

## Gráfico 18: Choque de oferta para o caso de pré-comprometimento

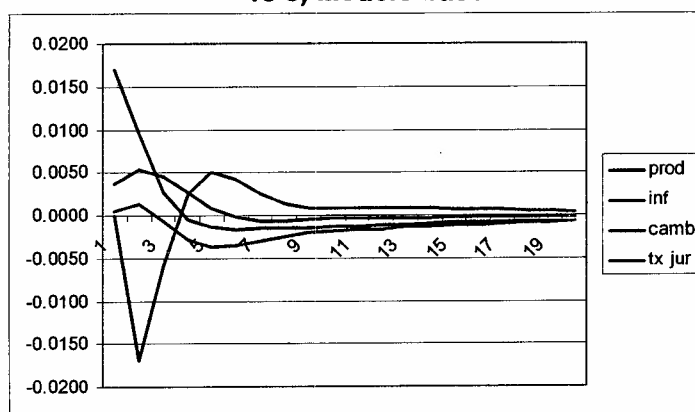
18 a) Choque temporário



18 b) Choque quase permanente



18 c) Modelo base

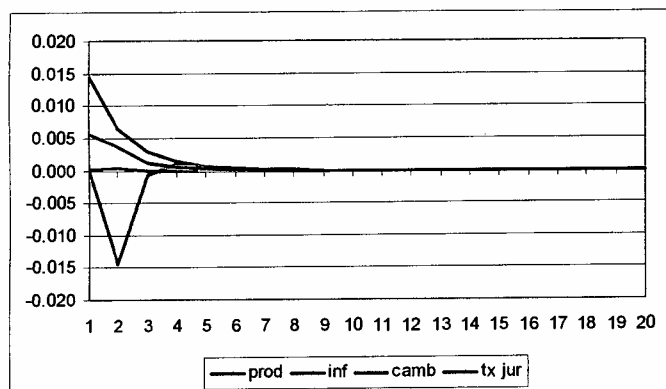


A característica mais marcante ao observar os gráficos (18a, 18b e 18c) acima, que descrevem o comportamento da economia quando ocorre um choque de oferta e a taxa de juros segue a regra de pré-comprometimento, é a não convergência do sistema quando o choque é de natureza quase permanente, ver gráfico (18 b). Isto ocorre embora a resposta ao choque seja um aumento forte da taxa de juros, que permanece elevada acompanhando a trajetória da inflação. Por outro lado, o comportamento da economia, quando a regra discricionária é adotada, não demonstra dificuldades de convergência ao equilíbrio após, a ocorrência de um choque quase permanente, como pode ser visto pelo gráfico abaixo (19 b). Uma explicação para este “melhor” comportamento do sistema seria a maneira como a regra discricionária é obtida. Como discutido no apêndice técnico, o comportamento discricionário possibilita o Banco Central re-otimizar todo o período, e desta forma, é capaz de ajustar a reação de maneira a possibilitar a convergência do sistema. Na regra de pré-comprometimento, por outro lado, a autoridade monetária está comprometida com a regra anunciada, principalmente com respeito a seu formato e valores dos coeficientes, e não pode

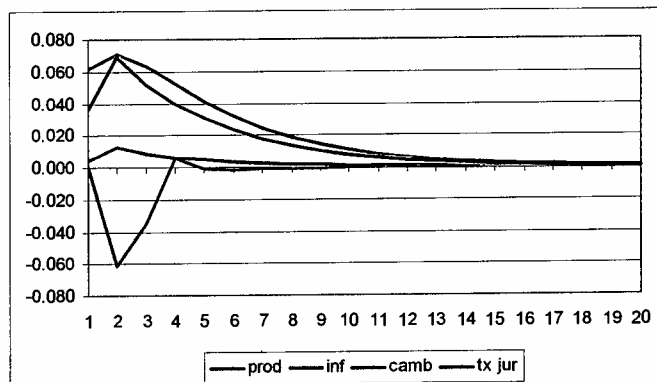
desviar-se do plano anunciado, e caso o faça perderá sua credibilidade junto ao setor privado. Portanto, os ganhos advindos do comprometimento de seguir o plano anunciado, podem, em situações como a vista acima, significar a dificuldade de lidar eficientemente com os desvios da trajetória das variáveis e levar a característica indesejada do sistema não ser mais estável.

**Gráfico 19: Choque de oferta para o caso de discricionário**

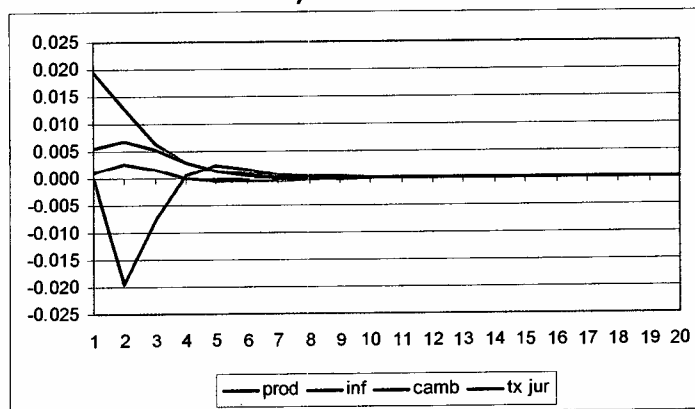
**19 a) Choque temporário**



**19 b) Choque quase permanente**



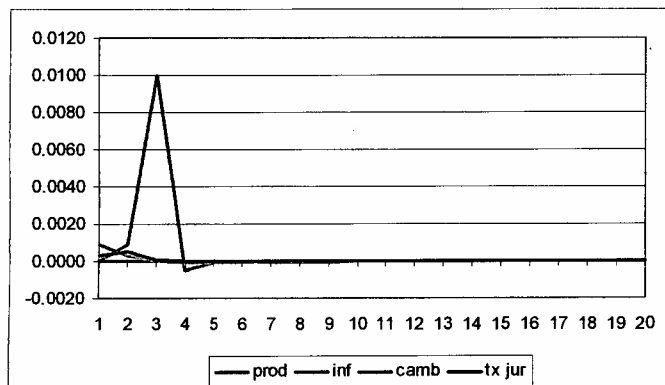
**19 c) Modelo base**



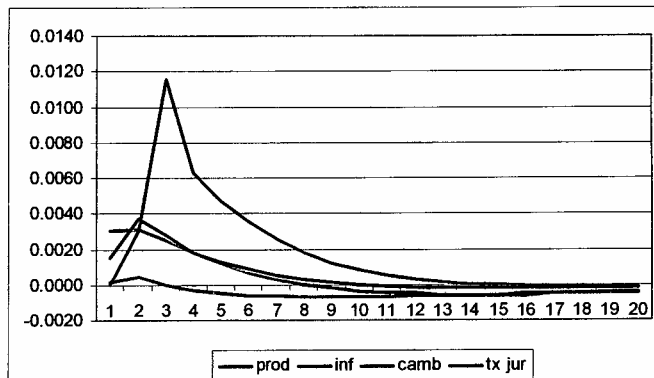
Como último exercício de análise da dinâmica do modelo são apresentados a seguir os resultados obtidos quando a persistência do choque de câmbio é variada e as soluções de pré-comprometimento e discricionária são implementadas.

**Gráfico 20: Choque de câmbio para o caso de pré-comprometimento**

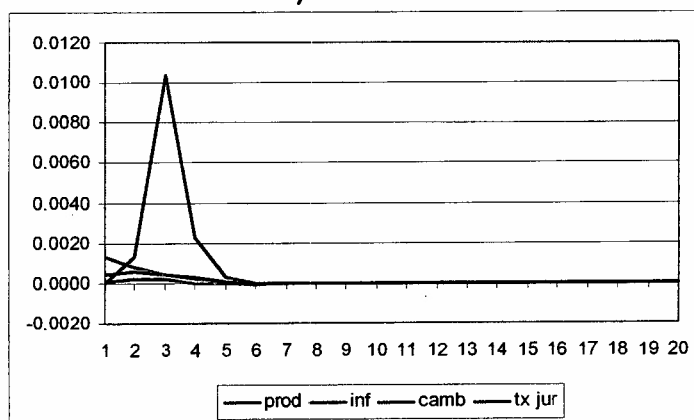
**20 a) Choque temporário**



**20 b) Choque quase permanente**



**20 c) Modelo base**

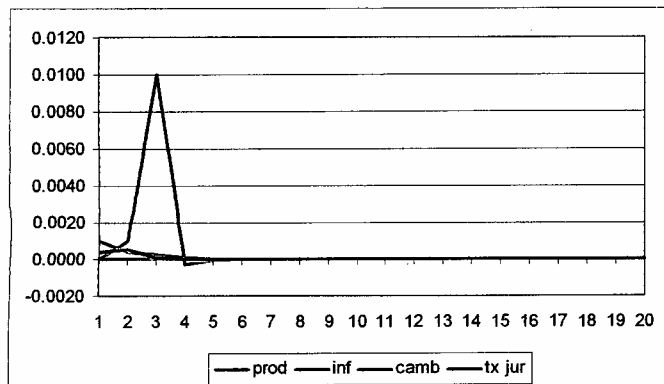


Quando a política monetária segue a solução de pré-comprometimento, a resposta da taxa de juros ao choque de câmbio de natureza temporária é elevar-se inicialmente, porém sem divergir da resposta ocorrida no modelo base, ver gráfico (20 a). A trajetória das demais variáveis não apresenta grandes diferenças com relação ao modelo base, sendo que somente o tempo de convergência será mais curto. No caso da ocorrência de um choque de câmbio quase permanente, o comportamento das variáveis, principalmente a inflação e a taxa de juros, difere bastante tanto do modelo base quanto do choque temporário. A taxa de juros reage fortemente ao choque e atinge seu ápice após três trimestres, quando então segue uma trajetória declinante acompanhando a convergência da inflação. A inflação também apresenta uma forte resposta ao choque, permanecendo elevada até o final do terceiro trimestre, quando passa a convergir para o equilíbrio em resposta a taxa de juros. A taxa de câmbio real apresenta a mais forte depreciação dentre os três casos, e seu processo de convergência para o equilíbrio é lento e não apresenta sinais de apreciação como nos caso anteriores, como observado no gráfico (20 b).

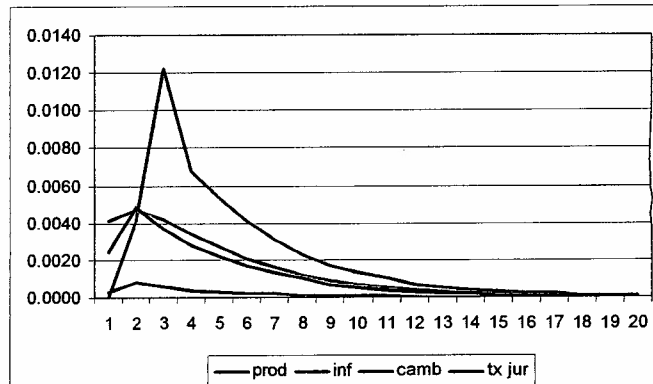


**Gráfico 21: Choque de câmbio para o caso de discricionário**

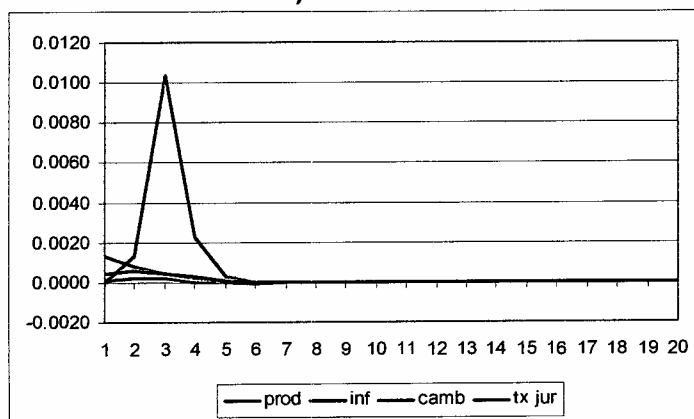
**21 a) Choque temporário**



**21 b) Choque quase permanente**



**21 c) Modelo base**



Para a situação aonde a política monetária implementa a solução discricionária, a trajetória das variáveis pós-choque não difere muito do caso de pré-comprometimento, sendo essa semelhança uma característica associada somente ao caso do choque de câmbio, como pode ser visto observando-se os gráficos anteriores para os outros choques. Uma observação deve ser feita com relação à trajetória da inflação e da taxa de juros, no caso do choque de câmbio quase permanente. A taxa de juros em resposta ao choque dessa natureza é elevada de forma a atingir um patamar mais elevado do que o observado na solução de pré-comprometimento e sua convergência ao equilíbrio será também mais demorada. Da mesma forma, a inflação atinge um maior nível e converge para o equilíbrio numa trajetória levemente acima da taxa de juros. A taxa de câmbio real também se deprecia mais fortemente e sua convergência é mais lenta do que o caso de pré-comprometimento, comparando-se os gráficos (20 b) e (21 b).

Da mesma maneira que o caso do choque de oferta quase permanente, a solução de pré-comprometimento demonstra dificuldades para levar o sistema a convergência frente a

um choque quase permanente de câmbio, por outro lado, a solução discricionária mantém sua boa propriedade de conseguir a convergência do modelo.

Portanto a resposta da política monetária frente aos choques dependerá da regra adotada e principalmente da persistência dos choques. Logicamente, não será possível que o Banco Central reconheça a natureza de todos os choques que atingirão a economia no intervalo de cumprimento da meta de inflação, mas a discussão acima demonstra a importância de buscar antever a trajetória da economia frente aos mais freqüentes choques para a definição apropriada da resposta da política monetária, pois há razoável diferença no comportamento da economia.

#### 4. CONCLUSÃO

Com adoção do regime de metas de inflação pelo Banco Central a partir de julho de 1999, a questão a respeito das regras de condução da política monetária ganhou relevância tanto prática quanto teórica. Apesar disso, a literatura brasileira tratando de regras monetárias é ainda incipiente, e principalmente, há poucos textos tratando do problema no contexto de modelos *forward looking*. O objetivo do trabalho foi desenvolver a aplicação de regras dentro desta modelagem e apresentar detalhadamente o método de obtenção das regras ótimas de condução da política monetária, assim como, aplicá-las a um modelo macroeconômico. O modelo utilizado foi o de Bonomo e Brito (2001), mas diferente desses autores, que utilizam regras simples e baseadas em previsões de inflação, neste trabalho foram derivadas regras ótimas a partir da minimização da função de perda do Banco Central.

A análise das regras monetárias na modelagem *forward looking* permitiu a comparação do comportamento do modelo na situação de pré-comprometimento, quando o Banco Central possui credibilidade para anunciar uma regra e este anúncio é visto como crível pelo setor privado e a situação alternativa onde o Banco Central não possui credibilidade e age discricionariamente re-otimizando todos os períodos. A comparação das soluções de pré-comprometimento e discricionária foi feita através da função perda associada a cada um dos casos e da análise dinâmica do sistema.

Com relação à função perda, a solução de pré-comprometimento apresentou sempre o menor valor possível, corroborando a afirmação teórica desta solução ser ótima na classe de modelos *forward looking*, mas a perda relativa, definida como a razão entre a função perda de pré-comprometimento e discricionária, não é tão elevada, variando entre 100% a 1%, dependendo dos ponderadores escolhidos para a função perda<sup>13</sup>. Em seguida, foram selecionadas as melhores regras a partir da fronteira da variância do hiato do produto e da inflação, para a análise dinâmica do modelo através das funções resposta a impulso para os diferentes choques. Um importante resultado obtido da análise da fronteira foi que as regras ótimas selecionadas, em ambas soluções, para um ponderador de inflação,  $q_{\pi} = 1$ , têm a função perda associada com os valores,  $q_y = 2$ ,  $q_i = 0.01$  para o ponderador da estabilização do produto e da suavização da taxa de juros, respectivamente. Esse formato da função perda implica que a política monetária ótima deve dar um peso razoável a atividade econômica no intervalo de cumprimento da meta e pouco peso a suavização da taxa de juros. A análise dinâmica permitiu observar que a solução discricionária apresenta melhor performance na estabilização do modelo frente aos diferentes choques, pois as variáveis descrevem um

<sup>13</sup> Estes valores são muito menores do que quando se compara com a regra de Taylor, onde as diferenças variam entre 22.000% e 500% quando comparada à solução discricionária e 22.000% e 2.000% quando comparada à regra de pré-comprometimento (ver tabela 6, seção 3.6).

comportamento com menor variabilidade (oscilações) e também um tempo mais curto de convergência para o equilíbrio, quando comparada à solução de pré-comprometimento.

Logo, em virtude das características de estabilizar melhor o sistema frente aos choques e a baixa perda relativa associada a sua implementação, pode-se concluir que para a condução da política monetária, a solução discricionária é preferível à alternativa de adotar a solução de pré-comprometimento no contexto do modelo aqui analisado. Além disso, a solução discricionária está mais próxima do comportamento observado de um Banco Central adotando o regime de metas de inflação, onde há grande discricionariedade nas decisões de política monetária.

Com o objetivo de comparar a performance das soluções discricionária e de pré-comprometimento frente à alternativa do uso de uma regra simples, foi analisado o caso onde a regra de Taylor é aplicada. O comportamento do modelo sobre esta regra foi inferior às duas soluções, tanto em relação à função perda quanto com respeito à dinâmica do modelo frente a choques. Este resultado confirma a baixa performance esperada teoricamente de uma regra simples num modelo *forward looking*, pois se trata de uma regra formada a partir de um conjunto de informações passadas e restrito num contexto os agentes colocam muito peso em suas expectativas.

A análise acima foi feita considerando que os choques têm persistência moderada ( $\gamma_1$ ,  $\gamma_3$ , e  $\gamma_4$  iguais a 0,5). Considerando choques quase permanentes ( $\gamma_1$ ,  $\gamma_3$ , e  $\gamma_4$  iguais a 0,75) a análise voltou a confirmar a superioridade da regra discricionária na estabilização do modelo pós-choque comparativamente à solução de pré-comprometimento.

Comparando-se os principais resultados deste trabalho aos resultados de Bonomo e Brito (2001), há três importantes observações a serem feitas. A primeira se refere à questão da ênfase a ser dada a estabilização do produto na condução da política monetária dentro do regime de metas. O trabalho encontrou que a melhor regra está associada a uma função perda da autoridade monetária, onde há razoável preocupação com a atividade econômica, porém este resultado contrasta com o obtido por Bonomo e Brito, que colocam "As principais conclusões em relação às regras ótimas são que se a economia for *forward looking* devemos dar mais peso à inflação do que ao produto". Svensson (2001) demonstra que um dos problemas com as regras baseadas em previsões de inflação, como as assumidas por Bonomo e Brito, seria que a função perda implicada pela regra não incorpora qualquer preocupação com a estabilização do hiato do produto, exceto indiretamente na definição do horizonte da previsão de inflação usada na regra<sup>14</sup>. Logo, a afirmação dos autores está

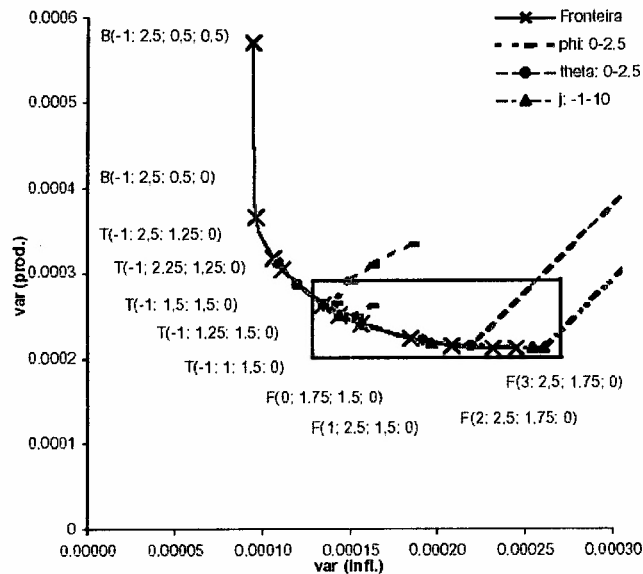
---

<sup>14</sup> Em Svensson (2001), o autor partiu da forma geral da regra baseada em previsões de inflação, a saber:  $i_t = \bar{f} + f_\pi(\pi_{t+T,t} - \pi^*) + f_i i_{t-1}$ , e assumiu que esta regra foi derivada da condição de 1º ordem de um problema de minimização de uma função perda, e por integração obteve a seguinte função perda correspondente:

relacionada a esta característica deste tipo de regra, e, portanto, a razão para esta diferença entre os resultados dos trabalhos é explicável.

A segunda observação diz respeito à fronteira das regras. Pode-se comparar a fronteira da variância do hiato do produto e da inflação para a regra discricionária, que aqui foi escolhida como melhor, com a correspondente fronteira obtida pelos autores. Observando-se os gráficos (22) e (23) abaixo, a fronteira para a solução discricionária estaria sempre abaixo da fronteira de Bonomo e Brito, o que significa que a perda associada ao comportamento discricionário do Banco Central é menor que a implicada pelo uso de regra baseada em previsões de inflação (*inflation forecast based rule*) proposta pelos autores.

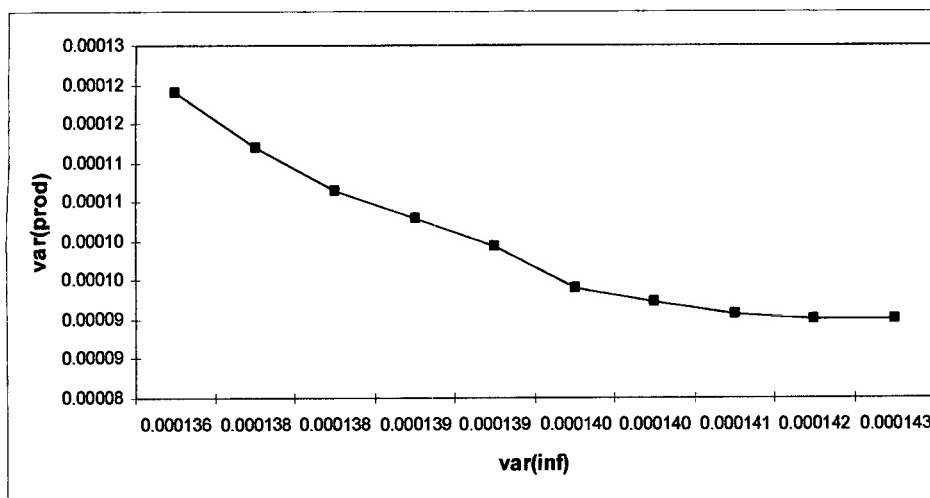
**Gráfico 22: Fronteira da variância do hiato do produto e inflação, versão forward looking do modelo**



Fonte: Bonomo e Brito (2001)

$$l_t = \frac{1}{2} \left[ \delta^T (\pi_{t+T,t} - \pi^*)^2 + \lambda_i (i_t - \bar{i})^2 + \lambda_{\Delta i} (i_t - i_{t-1})^2 \right]. \text{ Logo, a função perda não apresenta termos referentes ao hiato do produto.}$$

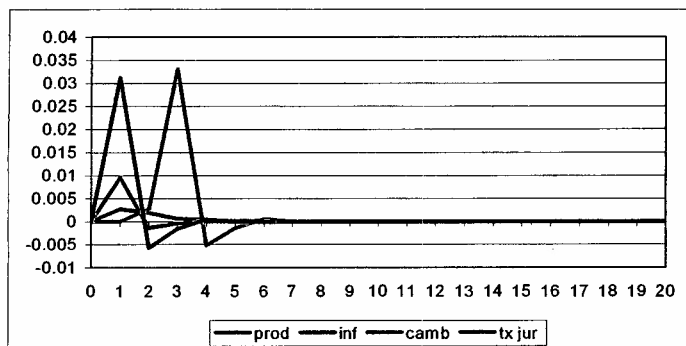
**Gráfico 23: Fronteira da variância do hiato do produto e da inflação para a regra discricionária<sup>15</sup>**



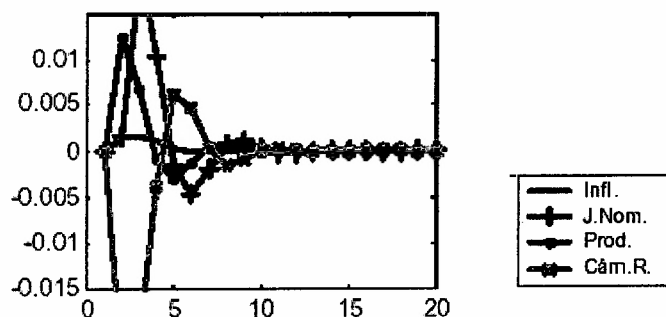
A última observação se refere ao comportamento do modelo quando ocorrem choques. Comparando as dinâmicas dos choques tratados nos dois trabalhos, choque de demanda e de câmbio, o gráfico (24) abaixo mostra que a resposta do modelo frente ao choque de demanda, quando a regra discricionária é aplicada, leva a um período médio de convergência das variáveis em torno de 6 trimestres. No caso do trabalho de Bonomo e Brito, com a regra baseada em previsão de inflação, o período seria mais longo, cerca de 10 trimestres, ver gráfico (25).

<sup>15</sup> A fronteira foi construída com os valores dos coeficientes do processo dos erros  $\gamma_1$ ,  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$  iguais a zeros, porque no seu trabalho Bonomo e Brito adotaram a hipótese de que os erros são não correlacionados.

**Gráfico 24: Função reposta a impulso para choque de demanda sobre a solução discricionária<sup>16</sup>**



**Gráfico 25: Função reposta a impulso para choque de demanda<sup>17</sup>**



Fonte: Bonomo e Brito (2001)

Com respeito ao choque de câmbio, representado por uma valorização do câmbio real, observa-se nos gráficos (26) e (27), que as trajetórias são bastante parecidas e o tempo de convergência para a regra assumida por Bonomo e Brito é razoavelmente menor. É interessante notar que a baixa transmissão do choque de câmbio para as demais variáveis do modelo ocorre também no caso desses autores. Logo, a comparação da dinâmica do modelo não permite afirmar se a regra discricionária é preferível à regra baseada em previsões de inflação, pois o resultado dependerá do tipo de choque. Porém, estas duas comparações demonstram que, diferentemente do caso da regra de Taylor que sempre apresenta resultados inferiores em modelos *forward looking*, o comportamento dinâmico do modelo quando as regras simples baseadas em previsões de inflação são aplicadas não é sempre inferior ao da solução discricionária, definida como complexa.

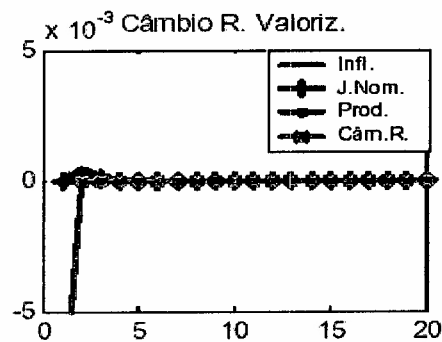
<sup>16</sup> Pela mesma razão da nota 15, os valores dos coeficientes do processo dos erros  $\gamma_1$ ,  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$  foram fixados iguais a zeros.

<sup>17</sup> A regra baseada em previsões de inflação usada por Bonomo e Brito para construir as funções impulso toma a forma:

$$r_t = r_t^* + 0.25[E_{t-1}\pi_{t+10} - \pi_t^*] + 1.5h_{t-1}$$
 Segundo os autores, esta regra foi a que apresentou a melhor performance no critério de minimização da variância do produto.

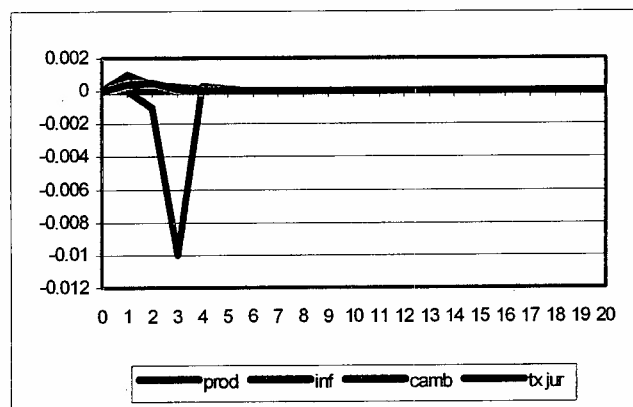


**Gráfico 26: Função reposta a impulso para choque de câmbio<sup>18</sup>**



Fonte: Bonomo e Brito (2001)

**Gráfico 27: Função reposta a impulso para choque de câmbio<sup>19</sup>**



Concluindo, o trabalho buscou demonstrar que a obtenção das soluções de pré-comprometimento e discricionária para os modelos *forward looking* é um importante exercício dentro da análise das regras de política monetária no contexto do regime de metas de inflação, pois elas possuem o importante papel de servir como parâmetro para a comparação de regras alternativas. Além disso, tentou-se contribuir para o preenchimento de uma lacuna na literatura de regras de política monetária ao tratar das duas soluções acima citadas, e principalmente, na discussão detalhada do método de obtenção de ambas. Claramente, os resultados obtidos no trabalho, quando aplicadas às soluções, estão fortemente relacionados ao contexto do modelo

<sup>18</sup> Idem a nota 17.

<sup>19</sup> Idem nota 16.

estudado, sendo que uma importante questão em aberto é a robustez destes resultados frente a mudanças tanto nos parâmetros quanto na especificação do modelo.

## APÊNDICE TÉCNICO – OBTENÇÃO DAS SOLUÇÕES DE PRÉ-COMPROMETIMENTO, DISCRICIONÁRIA E REGRA ÓTIMA SIMPLES.

---

Neste apêndice serão discutidos detalhadamente os procedimentos para obtenção da solução de pré-comprometimento, discricionária e regra simples, seguindo a apresentação de Soderlind (1999). Também serão apresentadas a solução de modelos com equações em diferença lineares sobre expectativas racionais propostas por Blanchard e Kahn (1980) e Klein (2000). Além disso, dentro da solução de pré-comprometimento será apresentada a alternativa de Woodford para o problema de inconsistência temporal da solução ótima (*timeless perspective*). Finalizando a seção serão apresentados dois exemplos visando facilitar a compreensão dos algoritmos das soluções propostos.

### A.1) Modelo linear geral para política monetária

Considere o seguinte modelo linear geral capaz de representar alternativos modelos de transmissão da política monetária numa economia:

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t x_{2t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + B u_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{(n_2 \times 1)} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Onde  $x_{1t}$  é um  $(n_1 \times 1)$  vetor de variáveis pré-determinadas (*backward looking variables*),  $x_{2t}$  é um vetor  $(n_2 \times 1)$  de variáveis não pré-determinadas (*forward looking variables*),  $u_t$  é um vetor coluna de  $k$  instrumentos do Banco Central (variáveis de controle),  $\varepsilon_{t+1}$  é um vetor coluna de  $n_1$  exógenos choques i.i.d. com média zero e matriz de covariância constante  $\Sigma$ . As matrizes  $A$  e  $B$  possuem coeficientes invariantes ao longo do tempo, sendo respectivamente de dimensão  $(n \times n)$  e  $(n \times n_u)$ , onde  $n = n_1 + n_2$ .

No início do período  $t$ , as realizações de  $\varepsilon_t$  e  $x_{1t}$  são conhecidas. Então, o Banco Central fixa o instrumento  $u_t$ . Em seguida,  $x_{2t}$  assume seu valor e o período  $t$  termina. Neste momento, cada variável é observável. Apesar do conjunto de informação no início do período  $t$  ser  $\{x_{1t}, x_{1t-1}, v_{t-1}, u_{t-1}, \dots\}$ , supõe-se que  $x_{1t}$  é estatisticamente suficiente no início do período  $t$ , ou seja,  $x_{1t}$  é uma variável de estado. Desta forma,  $x_{1t}$  inclui os indicadores no início do período  $t$ , os preços e as quantidades que contém as informações sobre o estado da economia para a autoridade monetária. A expressão  $E_t x_{2t+1}$  representa a expectativa (esperança matemática) de  $x_{2t+1}$  condicionada à informação disponível no final do período  $t$ , isto é,  $x_{1t}$ ,  $x_{2t}$  e  $u_t$ .

Definindo  $x_t$  como sendo o vetor composto por:

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

O problema de otimização enfrentado pelo Banco Central será minimizar a função perda, com respeito à seqüência ótima do vetor  $u_t$ , onde a matriz  $Q$  é simétrica definida negativa e a matriz  $R$  é simétrica semidefinida negativa.

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \begin{bmatrix} x_t^T & u_t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & U \\ U' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

sujeito à:

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t x_{2t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + B u_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{(n2 \times 1)} \end{bmatrix} \text{ ou} \\ x_{t+1} = A x_t + B u_t + \xi_{t+1} \quad (1.4) \text{ onde } \xi_{t+1} = (\varepsilon_{t+1}, x_{2t+1} - E_t x_{2t+1})$$

Este problema de otimização seria semelhante ao problema do regulador ótimo linear estocástico<sup>20</sup>, um conhecido caso da teoria de controle ótimo. Porém, devido às restrições apresentarem variáveis em expectativas racionais, o procedimento de resolução não será o mesmo. Em modelos desta natureza, a hipótese principal a respeito do comportamento do regulador (agente otimizador, no caso o Banco Central) determina o procedimento de solução a ser adotado. Como já discutido anteriormente, o Banco Central pode otimizar de duas formas distintas, dependendo da presença ou não de um mecanismo de comprometimento, resultando na solução de pré-comprometimento ou na solução discricionária.

A continuação da seção será a apresentação detalhada da obtenção das duas soluções, bem como, do caso onde a autoridade monetária decide seguir uma regra simples, seguindo o texto de Soderlind (1999).

## A.2) Solução de pré-comprometimento

A solução de pré-comprometimento é resultado da otimização *once for all* para escolha da regra de condução da política monetária e ocorre quando há um mecanismo de comprometimento que faz o Banco Central seguir a regra obtida no período  $t$  (primeiro período da otimização), não havendo possibilidades de desviar-se da regra, re-otimizando no futuro, e anunciando uma nova regra de política. A solução de pré-comprometimento será ótima na classe de modelos estocásticos lineares com variáveis em expectativas racionais, no sentido de obter o menor valor da função perda associada a uma política. Apesar disso, como

<sup>20</sup> Ver Sargent (1987)

já salientado anteriormente, a solução é inconsistente temporalmente, ou seja, a autoridade monetária possui uma forte tentação a re-otimizar depois do período inicial, questão que será formalizada abaixo na apresentação do método de solução.

A resolução do problema de controle ótimo, admitindo-se o caso de pré-comprometimento, será através do método de multiplicadores de lagrange, seguindo Söderlind (1999).

A função perda anteriormente apresentada pode ser reescrita como:

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \begin{bmatrix} x_t^T & u_t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & U \\ U^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}$$

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [x_t^T Q x_t + 2x_t^T U u_t + u_t^T R u_t] \quad (1.5)$$

A equação (1.5) juntamente com a restrição (1.4) formam o lagrangiano:

$$L_0 = \min_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [x_t^T Q x_t + 2x_t^T U u_t + u_t^T R u_t + 2\rho_{t+1}^T (Ax_t + Bu_t + \xi_{t+1} - x_{t+1})]$$

As k condições de primeira ordem com relação a  $u_t$  serão dadas por:

$$\frac{\partial L_0}{\partial u_t} = 2U^T x_t + 2Ru_t + 2B^T E_t \rho_{t+1} = 0 \quad (1.6)$$

Antes calcular as condições de primeira ordem com relação ao vetor  $x_t$ , deve-se reescrever a função perda de tal forma a explicitar a posição do sistema no início do período t dada pela restrição:  $x_t = Ax_{t-1} + Bu_{t-1} + \xi_t$ , que deve ser levada em consideração ao otimizar a função perda com respeito a  $x_t$ :

$$L_0 = \min_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \left[ x_t^T Q x_t + 2x_t^T U u_t + u_t^T R u_t + 2\rho_{t+1}^T (Ax_t + Bu_t + \xi_{t+1} - x_{t+1}) + 2\rho_t^T (Ax_{t-1} + Bu_{t-1} + \xi_t - x_t) \right] \quad (1.7)$$

Desta forma, as n condições de primeira ordem em relação à  $x_t$  são:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_t} = -2\beta^{-1} \rho_t + 2Qx_t + 2Uu_t + 2A^T E_t \rho_{t+1} = 0 \quad (\times 1/2\beta)$$

$$\beta A^T E_t \rho_{t+1} = \rho_t - \beta Q x_t - \beta U u_t \quad (1.8)$$

Pode-se escrever as equações (1.4), (1.6) e (1.8) como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times k} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times k} & \beta A^T \\ 0_{k \times n} & 0_{k \times k} & -B^T \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ u_{t+1} \\ E_t \rho_{t+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B & 0_{n \times n} \\ -\beta Q & -\beta U & I_n \\ U^T & R & 0_{k \times n} \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \\ \rho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{t+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

O sistema acima pode ser reescrito de uma forma conveniente para que possam ser aplicados os métodos para solução de modelos de expectativas racionais lineares, como o método de Blanchard e Kahn (1980) e o método proposto por Klein (1997).

Primeiramente, deve-se escrever o sistema reintroduzindo os vetores de variáveis  $x_{1t}$  e  $x_{2t}$ , que compõem o vetor  $x_t$ . Neste caso, como haverá dois conjuntos distintos de variáveis, a cada um deles deve-se associar um multiplicador de lagrange, respectivamente  $\rho_{1t}$  e  $\rho_{2t}$ . Além disso, as matrizes  $G$  e  $D$  devem ser particionadas de forma conveniente, fazendo com que o sistema (1.9) seja expresso como:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \\ u_{t+1} \\ E_t \rho_{1t+1} \\ E_t \rho_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ u_t \\ \rho_{1t} \\ \rho_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ e_{t+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Uma última modificação requerida é a reordenação das variáveis dentro do vetor, de tal forma que as variáveis pré-determinadas (*backward looking*) venham primeiro, formando o “bloco estável”, e em seguida as variáveis não pré-determinadas (*forward looking*), incluindo o instrumento  $u_t$ , representando o “bloco instável”. Logo, o sistema (1.10) é reescrito como:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{15} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t \rho_{2t+1} \\ x_{2t+1} \\ u_{t+1} \\ E_t \rho_{1t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{15} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ \rho_{2t} \\ x_{2t} \\ u_t \\ \rho_{1t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ e_{t+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\text{Definindo-se: } k_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ \rho_{2t} \end{bmatrix} \text{ e } \lambda_t = \begin{bmatrix} x_{2t} \\ u_t \\ \rho_{1t} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Portanto, o sistema pode ser expresso de uma forma resumida como:

$$G \begin{bmatrix} k_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} k_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Tomando-se as expectativas, baseada na informação em  $t$ , de (1.13), resulta em:

$$GE_t \begin{bmatrix} k_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} k_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

### A.2.1) Resolução de modelos de expectativas racionais lineares multivariados

No texto pioneiro de 1980, Bancharh e Kähn propuseram um método de solução de modelos com equações em diferença lineares sobre expectativas racionais. A exposição seguirá o texto original dos autores, o modelo, no qual o algoritmo proposto é aplicado, toma a forma:

$$\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ P_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_t \\ P_t \end{bmatrix} + \gamma Z_t \quad (1.15)$$

Onde  $X_t$  é um vetor ( $n \times 1$ ) de variáveis pré-determinadas em  $t$ ,  $P$  é um vetor ( $m \times 1$ ) de variáveis não pré-determinadas em  $t$ ,  $Z$  é um vetor ( $k \times 1$ ) de variáveis exógenas,  ${}_tP_{t+1}$  é a expectativa de  $P_{t+1}$  dos agentes, formada em  $t$ ,  $A$  e  $\gamma$  são matrizes invariantes ao longo do tempo, respectivamente,  $(n+m) \times (n+m)$  e  $(n+m) \times k$ .

A resolução do modelo acima implica na decomposição dos autovalores e autovetores da matriz  $A$  através da aplicação da Decomposição de Jordan, resultando:

$$A = C^{-1}JC \quad (1.16)$$

Ao aplicar o método, obtém-se a matriz  $J$ , onde os elementos da diagonal são ordenados por valores absolutos crescentes. A matriz  $J$  é adicionalmente particionada, de tal forma que todos os autovalores de  $J_1$  estão no ou dentro do ciclo unitário e todos autovalores de  $J_2$  estão fora do ciclo unitário. Logo, a resultante matriz  $J$  será:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$\begin{matrix} (ns \times ns) \\ (mu \times mu) \end{matrix}$

As matrizes  $C$  e  $C^{-1}$  são decompostas e particionadas da mesma forma:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$\begin{matrix} (ns \times n) & (ns \times m) \\ (mu \times n) & (mu \times m) \end{matrix}$

$\begin{matrix} (n \times ns) & (n \times mu) \\ (m \times ns) & (m \times mu) \end{matrix}$

Há três possibilidades que podem resultar da aplicação do método de decomposição de Jordan sobre a matriz  $A$ , sendo resumidas em três proposições, aqui reproduzidas literalmente:

Proposição 1: Se  $mu = m$ , ou seja, o número de autovalores de  $A$  fora do ciclo unitário é igual ao número de variáveis não pré-determinadas, então existe uma única solução.

Proposição 2: Se  $mu > m$ , ou seja, o número de autovalores de  $A$  fora do ciclo unitário excede o número de variáveis não pré-determinadas, não há solução.

Proposição 3: Se  $mu < m$ , ou seja, o número de autovalores de  $A$  fora do ciclo unitário é menor do que o número de variáveis não pré-determinadas, há infinitas soluções.



Apesar da solução de Blanchard e Kahn ser a mais difundida na literatura, a aplicação do método de decomposição de Jordan é muito difícil de calcular com precisão ( ver Golub e Van Loan (1989)). A este fato, soma-se também que em um modelo onde o sistema de equações em diferença toma a forma:

$$\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ H_t P_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_t \\ P_t \end{bmatrix} + \gamma Z_t \quad (1.19)$$

Onde a matriz H é singular, o método proposto por Blanchard e Kahn não é mais aplicável.

Buscando contornar estes problemas, Klein(1997) propõe utilizar uma Forma Generalizada de Schur para resolução deste tipos de sistemas. Dentro desta metodologia, a decomposição dos autovalores da matriz A será feita através da Decomposição Generalizada de Schur, que é um método mais robusto e mais fácil de aplicar que a decomposição de Jordan, sendo também disponível nos programas matemáticos mais recentes.

Antes de apresentar o método proposto por Klein em detalhes, deve-se apresentar alguns conceitos para a aplicação da decomposição de Schur.

Supondo uma matriz complexa A, defini-se  $A^H$  para denotar a transposta da matriz transposta A, tal que, por exemplo, se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i \end{bmatrix} \Rightarrow A^H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-3i \end{bmatrix}$$

A matriz quadrada de A ( $A^2$ ) é unitária (conceito similar a ortogonal), se  $A^H = A^{-1}$ , pois:

$$A^2 = A^H A = A^{-1} A = I$$

A decomposição padrão de Schur da matriz A (nxn) dá as matrizes T e Z, tal que:

$$A = Z T Z^H \quad (1.20)$$

Onde Z é uma matriz (nxn) unitária e T é a matriz (nxn) Schur triangular superior, com os autovalores ao longo da diagonal principal. Note que pré-multiplicando (1.20) por  $Z^H$ , com  $Z^H = Z^{-1}$ , e pós-multiplicando por Z, obtém-se:

$$Z^H A Z = Z^H Z T Z^H Z \Rightarrow Z^H A Z = Z^{-1} Z T Z^{-1} Z \Rightarrow Z^H A Z = T \quad (1.21)$$

A ordenação dos autovalores em T pode ser mudada, embora isto requeira que Z seja reordenada de forma conveniente para assegurar que (1.20) seja mantida. Esta reordenação será necessária no processo de solução proposto por Klein usando a decomposição de Schur, sendo que esta reordenação será com o mesmo intuito do método de Blanchard e Kahn de separar os autovalores estáveis e instáveis em dois blocos distintos.

Retornando a equação (1.14) que resultou do problema de otimização do Banco Central:

$$GE_t \begin{bmatrix} k_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} k_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

O primeiro passo para implementar o método de solução de Klein é aplicar a decomposição generalizada de Schur sobre as matrizes G e D, ambas de dimensão (nxn), o que resultará nas matrizes Q,S,T e Z, tais que Q e Z são unitárias e S e T são matrizes triangulares superiores. Elas satisfazem:

$$G = QSZ^H \quad \text{e} \quad D = QTZ^H \quad (1.23)$$

A decomposição generalizada de Schur resolve o problema do autovalor generalizado  $Dx = \lambda Gx$ , onde  $\lambda(G,D) = \{t_{ii}/s_{ii} : s_{ii} \neq 0\}$  são os autovalores generalizados, que serão iguais aos elementos da diagonal em T ( $t_{ii}$ ) divididos pelos correspondentes aos elementos da diagonal em S ( $s_{ii}$ ).

Note que da mesma forma que na decomposição padrão de Schur, as equações (1.23) quando pré-multiplicada por  $Q^H$  e pós-multiplicada por Z resulta em:

$$Q^H GZ = Q^H QSZ^H Z \Rightarrow Q^H GZ = S \quad \text{e} \quad Q^H DZ = Q^H QTZ^H Z \Rightarrow Q^H DZ = T$$

O próximo passo da resolução é tornar o sistema triangular ou desacoplar o sistema em dois blocos, um estável e outro instável. Antes disso, é preciso definir variáveis auxiliares:

$$\begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} = Z^H \begin{bmatrix} k_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

onde os autovalores estáveis serão associados com  $\theta$  e os instáveis, com  $\delta$ .

Usando a decomposição generalizada de Schur (1.22),  $G=QSZ^H$  e  $D=QTZ^H$ , em (.), obtém-se:

$$QSZ^H E_t \begin{bmatrix} k_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} = QTZ^H \begin{bmatrix} k_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Em seguida pré-multiplicada pela matriz  $Q^H$  não singular, sendo que nenhuma informação é perdida, no sentido que se obtém um sistema equivalente, tem-se:

$$Q^H QSZ^H E_t \begin{bmatrix} k_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} = Q^H QTZ^H D \begin{bmatrix} k_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$SZ^H E_t \begin{bmatrix} k_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} = TZ^H \begin{bmatrix} k_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Agora substituindo pelas variáveis auxiliares, segue-se que:

$$SE_t \begin{bmatrix} \theta_{t+1} \\ \delta_{t+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

A próxima etapa será resolver o sistema de  $E_t \theta_{t+1}$  e  $E_t \delta_{t+1}$ . Como já estabelecido ambos S e T são matrizes triangulares superiores, então (1.28) pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} S_{\theta\theta} & S_{\theta\delta} \\ 0 & S_{\delta\delta} \end{bmatrix} E_t \begin{bmatrix} \theta_{t+1} \\ \delta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\theta\theta} & T_{\theta\delta} \\ 0 & T_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Desde que  $S_{\delta\delta}$  e  $T_{\delta\delta}$  contém raízes (autovalores) fora do círculo unitário (autovalores instáveis),  $\delta_t$  divergirá quando t cresce ao menos que  $\delta_0 = 0$ . Qualquer solução estável, portanto, deve requerer que  $\delta_t = 0$  para todo t. As equações remanescentes são então:

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta} E_t \theta_{t+1} &= T_{\theta\theta} \theta_t & (x S_{\theta\theta}^{-1}) \\ E_t \theta_{t+1} &= S_{\theta\theta}^{-1} T_{\theta\theta} \theta_t \end{aligned} \quad (1.30)$$

A solução acima existe, pois  $S_{\theta\theta}$  é invertível. A razão é que o  $\det(S_{\theta\theta})$  será igual ao produto dos elementos da diagonal, visto que  $S_{\theta\theta}$  é triangular, e que todos elementos da diagonal são diferentes de zero dado que  $|l_{ii}/s_{ii}| < 1$  estão ordenados para serem os elementos dessa diagonal, de tal modo que não pode haver zeros na diagonal de  $S_{\theta\theta}$ . Deste modo, o  $\det(S_{\theta\theta})$  é não zero e  $S_{\theta\theta}$  é invertível.

O próximo passo é voltar a relacionar a variável original com sua correspondente variável auxiliar, para isso retornando a equação (1.24) e invertendo-a (lembrando que  $Z^{-1} = Z^H$ ) e particionando, tem-se:

$$\begin{bmatrix} k_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{k\theta} & Z_{k\delta} \\ Z_{\lambda\theta} & Z_{\lambda\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Desde que  $\delta_t = 0$ :

$$\begin{bmatrix} k_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{k\theta} \\ Z_{\lambda\theta} \end{bmatrix} \theta_t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_t = Z_{k\theta} \theta_t \\ \lambda_t = Z_{\lambda\theta} \theta_t \end{cases} \quad (1.32)$$

O sistema que está sendo resolvido possui  $n_1$  variáveis pré-determinadas e  $n_2$  variáveis não pré-determinadas, e a cada uma dessas variáveis está associado a um multiplicador de lagrange,  $\rho_{1t}$  e  $\rho_{2t}$ , respectivamente, lembrando da definição de  $k_t$  e  $\lambda_t$  na equação (1.12). Desta forma, há  $n = n_1 + n_2$  variáveis mais n multiplicadores de lagrange, totalizando  $2n$  variáveis no sistema. Para a completa solução, requer-se  $2n$  condições limites (*boundary conditions*). Se o estado terminal do sistema  $x(\tau)$  está não especificado, então n destas condições serão dadas pela "condição de transversalidade":

$$\rho(\tau) = 0 \quad (1.33)$$

Com relação as variáveis pré-determinadas,  $x_{10}$  é dado, fornecendo mais  $n_1$  condições limites. As condições restantes são obtidas pela necessidade dos multiplicadores das variáveis não pré-determinadas atenderem a seguinte restrição:

$$\rho_{20}=0 \quad (1.34)$$

As condições limites, que  $x_{10}$  é dado e  $\rho_{20}=0$ , juntamente com o relevante bloco em (1.32) resultam em:

$$k_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \rho_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0_{n_2 \times 1} \end{bmatrix} = Z_{k\theta} \theta_0 \quad (1.35)$$

A equação (1.34) permite obter a condição inicial para  $\theta_0$  se  $Z_{k\theta}$  é invertível. A matriz  $Z_{k\theta}$  possui  $n$  linhas ( $n_1$  em  $x_{1t}$  e  $n_2$  em  $\rho_{2t}$ ) e tantas colunas quanto forem o número de autovalores estáveis. Uma condição necessária é que a equação (1.22) tenha a propriedade da trajetória de ponto de sela da proposição 1 de Blanchard e Kahn já enunciada anteriormente, ou seja, que o número de variáveis pré-determinadas (número de linhas de  $Z_{k\theta}$ ) é igual ao número de autovalores estáveis (número de colunas de  $Z_{k\theta}$ ). Supondo que a proposição 1 é atendida, logo  $Z_{k\theta}^{-1}$  existe, então:

$$\theta_0 = Z_{k\theta}^{-1} k_0 \quad (1.36)$$

Da equação (1.1), tem-se que  $x_{1t+1} - E_t x_{1t+1} = \varepsilon_{t+1}$ . Além disso, Backus e Driffill (1986) mostram que  $\rho_{2t+1} - E_t \rho_{2t+1} = 0_{n_2 \times 1}$ . Resumindo estas expressões na equação  $k_{t+1} - E_t k_{t+1}$  (lembrando da definição de  $k_t$  na equação (1.12)), e usando  $k_t = Z_{k\theta} \theta_t$  obtida a partir da equação (1.32), pode-se expressá-la como:

$$k_{t+1} - E_t k_{t+1} = Z_{k\theta} (\theta_{t+1} - E_t \theta_{t+1}) = \begin{bmatrix} x_{1t+1} - E_t x_{1t+1} \\ \rho_{2t+1} - E_t \rho_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{n_2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Onde  $Z_{k\theta}$  sobre as mesmas condições anteriores é invertível, tem-se:

$$\theta_{t+1} = E_t \theta_{t+1} + Z_{k\theta}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{n_2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Substituindo  $E_t \theta_{t+1}$  de (1.30), obtém-se:

$$\theta_{t+1} = S_{\theta\theta}^{-1} T_{\theta\theta} \theta_t + Z_{k\theta}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{n_2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

As equações (1.32), (1.36) e (1.39) formam um sistema que oferece a completa descrição da evolução das variáveis do modelo.

Como último passo, deve-se agora expressar a dinâmica em termos de  $x_{1t}$ ,  $\rho_{2t}$ ,  $x_{2t}$  e  $\rho_{1t}$ , sendo para isto usadas as equações anteriores de evolução das variáveis auxiliares ( $\theta_t$ ). Primeiramente, a relação entre  $x_{1t}$ ,  $\rho_{2t}$  e  $\theta_t$  em (1.32) pode ser invertida para:

$$\theta_t = Z_{k\theta}^{-1} k_t = Z_{k\theta}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ \rho_{2t} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

A equação (1.40) pode ser usada em (1.39), obtendo-se:

$$Z_{k\theta}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ \rho_{2t+1} \end{bmatrix} = S_{\theta\theta}^{-1} T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ \rho_{2t} \end{bmatrix} + Z_{k\theta}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{n2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\times Z_{k\theta})$$

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ \rho_{2t+1} \end{bmatrix} = Z_{k\theta} S_{\theta\theta}^{-1} T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ \rho_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{n2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Da mesma forma, combinando (1.40) com a relação entre  $x_{2t}$ ,  $u_t$ ,  $\rho_{1t}$  e  $\theta_t$  em (1.32), tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_{2t} \\ u_t \\ \rho_{1t} \end{bmatrix} = Z_{\lambda\theta} Z_{k\theta}^{-1} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ \rho_{2t} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

As equações (1.41) e (1.42), juntamente com os valores iniciais de  $x_{10}$  e  $\rho_{20} = 0_{n2 \times 1}$ , oferecem uma completa descrição da evolução do sistema. A linha da matriz  $Z_{\lambda\theta} Z_{k\theta}^{-1}$ , na equação (1.42), referente a variável  $u_t$  representa a regra ótima de decisão para a solução de pré-comprometimento.

Como discutido na seção anterior, a solução de pré-comprometimento, apesar de ótima, é inconsistente temporalmente. Neste ponto após a exposição do método de obtenção da solução, pode-se formalizar mais facilmente a fonte de inconsistência da solução.

Quando foi apresentada a solução do sistema formado pela equação (1.9), uma das condições limites requeridas foi fixar o multiplicador de Lagrange (*costate variable*) associado a variável não pré-determinada igual a zero no período inicial, ou seja,  $\rho_{20} = 0$ . Depois do período inicial, o valor de  $\rho_{2t}$  não será mais igual a zero. Portanto, o conjunto de equações (1.6) e (1.8) formando as condições de primeira ordem do problema determinarão um valor da função perda no período  $t > 0$  superior ao valor ocorrido em  $t = 0$  (momento de implementação da regra), visto que  $\rho_{20} = 0$  é fixado. Porém, a autoridade monetária sabendo disto estará sempre tentada a explorar o ganho advindo de fixar  $\rho_{2t} = 0$ , para todo  $t > 0$ , mas ao fazer isto ela estará renegando a política formulada em  $t = 0$ . Se o comprometimento em seguir futuramente a política anunciada é duvidoso, uma questão crítica será até que ponto esta regra (solução de pré-comprometimento) encontrará credibilidade junto ao setor privado, ou se eles esperarão que o Banco Central renegará a regra no futuro. Se as expectativas são baseadas na perspectiva de renegar, e não são consistentes com a própria regra, então a regra é não ótima, pois suas propriedades de otimização são baseadas na hipótese que as expectativas são formadas consistentes com a regra.

A idéia “*timeless perspective*” defendida por Woodford (1999) para tornar a solução obtida por pré-comprometimento consistente temporalmente seria ignorar qualquer condição prevalecente no momento de implementação da regra, por imaginar que a decisão de aplicar a regra obtida pela da solução de (1.9) tenha feita num passado distante. Desta forma, a proposta de Woodford é essencialmente usar a regra de política que surge de resolver (1.9), mas somente em algum período  $t > 0$ , onde  $p_{2t}$  é fixado para algum valor não zero tal que a política é estacionária.

Como colocado na seção anterior, “*timeless perspective*” é uma restrição auto-imposta ao Banco Central de considerar somente regras numa perspectiva de longo prazo, que independem do período quando o comprometimento é feito. Outra maneira de descrever a idéia de *timeless perspective* seria especificar que o Banco Central está preocupado com a performance macroeconômica dentro e ao longo da implementação da regra, e não com transições de uma regra para outra. Neste caso, a análise supõe que a regra de política analisada está sendo aplicada por período de tempo longo o suficiente tal que as condições iniciais tenham tornado-se irrelevantes. Esta é a observação adotada por Lucas e Sargent (1981) e Taylor (1979).

### A.3) Solução Discricionária

Na ausência de uma tecnologia de comprometimento através da qual o Banco Central possa comprometer-se de maneira crível a seguir a regra anunciada, depois do primeiro período o Banco Central tem um incentivo a exercer seu direito de desviar da regra anterior, re-otimizar, e anunciar uma nova regra. Esta situação exemplifica o comportamento de inconsistência temporal anteriormente discutido. Logo, na ausência do mecanismo de comprometimento e agindo discricionariamente, o Banco Central re-otimiza a cada período. Ao otimizar de maneira discricionária, a autoridade monetária tomará o estado da economia, neste caso representado somente pelas variáveis pré-determinadas  $x_{1t}$ , como dado. Como consequência, a regra ótima ( $u_t$ ) e as variáveis não pré-determinadas ( $x_{2t}$ ) devem ser funções lineares de  $x_{1t}$ . Apesar do Banco Central re-otimizar todo o período, é possível encontrar uma regra convergida, como será mostrado na apresentação da solução.

No equilíbrio de expectativas racionais, as expectativas do setor privado incorporam esta restrição. Desta forma, segue que as variáveis não pré-determinadas para este período ( $x_{2t}$ ) dependerão somente das variáveis pré-determinadas neste período ( $x_{1t}$ ), e as expectativas das variáveis não pré-determinadas do próximo período ( $E_t x_{2t+1}$ ) somente dependerá das expectativas sobre as variáveis pré-determinadas ( $E_t x_{1t+1}$ ) do próximo período. Formalmente, isto significa que sobre discricção:

$$E_t x_{2t+1} = C E_t x_{1t+1} \quad (2.1) \quad \text{e} \quad x_{2t} = C x_{1t} \quad (2.2)$$

Portanto, agindo discricionariamente, o Banco Central toma as expectativas dos agentes privados como dadas, representada pela matriz C. Numa analogia a teoria de oligopólios, a solução discricionária seria um equilíbrio de Nash (Cournot), enquanto que no caso de pré-comprometimento o Banco Central é um “líder de Stackelberg”.

Apesar do Banco Central re-otimizar todo o período, pode-se encontrar uma regra de política estacionária, se o problema é otimizado numa perspectiva de horizonte de tempo infinita. Não existe uma solução analítica, mas é possível construir um algoritmo de solução que converge para a política estacionária, embora, como ressaltado por Backus e Driffill (1986) não haja prova da convergência do mesmo, exceto para o caso escalar. Abaixo será apresentada a derivação do algoritmo de solução para o caso discricionário.

### A.3.1) O MODELO

Antes de entrar na discussão do método de solução propriamente dito, deve-se retornar a estrutura geral do modelo de otimização para que algumas modificações sejam feitas.

Definindo o vetor  $x_t$  como sendo:

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Onde, como anteriormente,  $x_{1t}$  é um vetor ( $n_1 \times 1$ ) de variáveis pré-determinadas e  $x_{2t}$  é um vetor ( $n_2 \times 1$ ) de variáveis não pré-determinadas. Defina  $n = n_1 + n_2$ , tal que  $x_t$  é um vetor ( $n \times 1$ ).

O problema de otimização que o Banco Central se confronta continua a ser de minimizar a função perda:

$$J_t = E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \begin{bmatrix} x_{t+s}^T & u_{t+s}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & U \\ U^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+s} \\ u_{t+s} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

As restrições serão dadas por:

$$\begin{bmatrix} x_{1,t+1} \\ E_t x_{2,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ o_{(n_2 \times 1)} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Sendo que diferentemente do caso anterior, as matrizes A e B foram particionadas convenientemente com relação às variáveis  $x_{1t}$  e  $x_{2t}$ .

Uma das principais diferenças da solução discricionária será a utilização da técnica de programação dinâmica que assume o “Princípio de Otimização” de Bellman. O Banco Central otimiza a todo período, levando em consideração que será capaz de re-otimizar no próximo



período e, além disso, toma o processo pelo qual os agentes privados formam suas expectativas como dado, onde às expectativas são consistentes com a atual política. Visto que a *função valor* é linear quadrática, a solução em  $t+1$  parte do princípio que o “palpite” da função valor nas variáveis de estado ( $x_{1t}$ ), toma a forma:

$$fv(x) = x_{t+1}^T V_{t+1} x_{t+1} + v \quad (2.6)$$

E que também há uma relação linear entre as variáveis não pré-determinadas e as variáveis de estado (variáveis pré-determinadas):  $x_{2t+1} = C_{t+1} x_{1t+1}$  (2.7)

A *função valor* da autoridade monetária em  $t$  deve satisfazer a equação de Bellman:

$$Jt = x_{1t}^T V_t x_{1t} + v_t = \min_{u_t} \left\{ r_t + \beta E_t (x_{t+1}^T V_{t+1} x_{t+1} + v_{t+1}) \right\} \quad (2.8)$$

onde  $r_t$  será dada pelo valor da equação (2.4) no período  $t$ , onde particionando o vetor  $x_t$  e as matrizes  $Q$  e  $U$  convenientemente, tem-se:

$$r_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} u_t + u_t^T R u_t \quad (2.9)$$

onde  $V_{t+1}$  é uma matriz simétrica ( $n_1 \times n_1$ ) e  $v_{t+1}$  é um escalar. Assume-se também que  $R$  é simétrica. Uma característica difícil deste problema de otimização é que a função objetivo (2.9) depende dos valores futuros esperados de  $x_{1t}$  e  $x_{2t}$ .

Uma maneira capaz de contornar este obstáculo é expressar  $x_{2t}$  em (2.9) em termos de  $x_{1t}$  e  $u_t$ . Desde que  $x_{1t}$  seja pré-determinada, otimizar (2.8) torna-se o problema padrão do regulador linear ótimo estocástico. O valor de  $x_{2t}$  depende da expectativa de  $E_t x_{2t+1}$ , tal que o primeiro passo é usar uma aproximação de como as expectativas são formadas, isto é, que  $E_t x_{2t+1} = C_{t+1} E_t x_{1t+1}$ . Assume-se que a matriz  $C_{t+1}$  é conhecida. Usando essa regra de formação das expectativas na restrição (2.5), e tomando as expectativas, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} I \\ C_{t+1} \end{bmatrix} E_t x_{t+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_t \quad (2.10)$$

Notando que  $x_{1t}$  é dado e considerando o que acontece se um certo vetor  $u_t$  é escolhido, a equação (2.10) especifica  $n$  equações para  $n$  variáveis desconhecidas ( $n_1$  em  $E_t x_{1t+1}$  e  $n_2$  em  $x_{2t}$ ). Pode-se reescrever o sistema (2.10) como

$$\begin{bmatrix} I & A_{12} \\ C_{t+1} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t x_{t+1} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} x_{1t} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_t$$

$$\begin{bmatrix} E_t x_{t+1} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} x_{1t} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_t \right) \quad (2.11)$$

$$\text{Onde: } \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -A_{12} \\ C_{t+1} & -A_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

Da regra de inversas de matrizes particionadas, pode-se notar que:

$$P_{21} = (A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} C_{t+1} \quad (2.12)$$

$$P_{22} = (A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} \quad (2.13)$$

As últimas  $n_2$  equações em (2.11) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} x_{2t} &= (P_{21}A_{11} + P_{22}A_{21})x_{1t} + (P_{21}B_1 + P_{22}B_2)u_t \\ x_{2t} &= [(A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} C_{t+1}A_{11} - (A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} A_{21}]x_{1t} \\ &\quad + [(A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} C_{t+1}B_1 - (A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} B_2]u_t \\ x_{2t} &= [(A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} (C_{t+1}A_{11} - A_{21})]x_{1t} + [(A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} (C_{t+1}B_1 - B_2)]u_t \\ x_{2t} &= D_t x_{1t} + G_t u_t \quad (2.14) \end{aligned}$$

Onde:  $D_t = [(A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} (C_{t+1}A_{11} - A_{21})]$  é de dimensão  $(n_2 \times n_1)$

$G_t = [(A_{22} - C_{t+1}A_{12})^{-1} (C_{t+1}B_1 - B_2)]$  é de dimensão  $(n_2 \times k)$

Logo, o objetivo de expressar  $x_{2t}$  em função de  $x_{1t}$  e  $u_t$  foi alcançado.

Agora, pode-se usar a equação (2.14) nas primeiras  $n_1$  equações da restrição (2.5) para obter a "forma reduzida" de evolução das variáveis pré-determinadas:

$$\begin{aligned} x_{1t+1} &= A_{11}x_{1t} + A_{12}x_{2t} + B_1u_t + \varepsilon_{t+1} \\ x_{1t+1} &= A_{11}x_{1t} + A_{12}(D_t x_{1t} + G_t u_t) + B_1u_t + \varepsilon_{t+1} \\ x_{1t+1} &= (A_{11} + A_{12}D_t)x_{1t} + (A_{12}G_t + B_1)u_t + \varepsilon_{t+1} \\ x_{1t+1} &= A_t^* x_{1t} + B_t^* u_t + \varepsilon_{t+1} \quad (2.15) \end{aligned}$$

onde:  $A_t^* = (A_{11} + A_{12}D_t)$  é de dimensão  $(n_1 \times n_1)$

$B_t^* = (A_{12}G_t + B_1)$  é de dimensão  $(n_1 \times k)$

Usando (2.14) na função perda do período  $t$  (2.9), segue que:

$$r_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ D_t x_{1t} + G_t u_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ D_t x_{1t} + G_t u_t \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x_{1t} \\ D_t x_{1t} + G_t u_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} u_t + u_t^T R u_t \quad (2.16)$$

O segundo termo pode ser escrito, após a multiplicação e re-arranjar os termos como:

$$2x_{1t}^T (U_1 + D_t U_2) u_t + u_t^T (G_t^T U_2 + U_2^T G_t) u_t \quad (2.17)$$

Da mesma forma, o primeiro termo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & x_{1t}^T (Q_{11} + Q_{12} D_t + D_t^T Q_{21} + D_t^T Q_{22} D_t) x_{1t} + x_{1t}^T (Q_{12} G_t + D_t^T Q_{22} G_t) u_t + \\ & + u_t^T (G_t^T Q_{21} + G_t^T Q_{22} D_t) x_{1t} + u_t^T G_t^T Q_{22} G_t u_t \end{aligned} \quad (2.18)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16) e agrupando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} r_t = & \underbrace{x_{1t}^T (Q_{11} + Q_{12} D_t + D_t^T Q_{21} + D_t^T Q_{22} D_t) x_{1t}}_{Q_t^*} + \\ & \underbrace{x_{1t}^T (Q_{12} G_t + D_t^T Q_{22} G_t + U_1 + D_t^T U_2) +}_{U_t^*} \\ & \underbrace{u_t^T (G_t^T Q_{21} + G_t^T Q_{22} D_t + U_1^T + U_2^T D_t) x_{1t}}_{U_t^{*T}} + \\ & \underbrace{u_t^T (R + G_t^T Q_{22} G_t + G_t^T U_2 + U_2^T G_t) u_t}_{R_t^*} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Que pode ser escrita como:

$$r_t = x_{1t}^T Q_t^* x_{1t} + 2x_{1t}^T U_t^* u_t + u_t^T R_t^* u_t \quad (2.20)$$

Onde: As dimensões de  $Q_t^*$ ,  $U_t^*$  e  $R_t^*$  são, respectivamente,  $(n_1 \times n_1)$ ,  $(n_1 \times k)$  e  $(k \times k)$ .

Após estas substituições, pode-se reescrever o problema de otimização somente em função de  $x_{1t}$  e  $u_t$ . Usando a nova expressão para  $r_t$  (2.19) na função perda (2.8) para escrevê-la como:

$$J_t = x_{1t}^T Q_t^* x_{1t} + 2x_{1t}^T U_t^* u_t + u_t^T R_t^* u_t + \beta E_t \{x_{t+1}^T V_{t+1} x_{t+1} + v\} \quad (2.21)$$

Substituindo  $x_{1t+1}$  pela forma reduzida de evolução (2.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} J_t = & x_{1t}^T Q_t^* x_{1t} + 2x_{1t}^T U_t^* u_t + u_t^T R_t^* u_t \\ & + \beta E_t \left\{ \left[ A_t^* x_{1t} + B_t^* u_t + \varepsilon_{t+1} \right]^T V_{t+1} \left[ A_t^* x_{1t} + B_t^* u_t + \varepsilon_{t+1} \right] + v \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

A equação (2.22) deve ser minimizada com respeito ao vetor  $u_t$ , onde as condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial J_t}{\partial u_t} = 2(R_t^* + \beta B_t^{*T} V_{t+1} B_t^*) u_t + 2(U_t^{*T} + \beta B_t^{*T} V_{t+1} A_t^*) x_{1t} = 0$$

$$u_t = - \underbrace{(R_t^* + \beta B_t^{*T} V_{t+1} B_t^*)}_{F_t} (U_t^{*T} + \beta B_t^{*T} V_{t+1} A_t^*) x_{1t}$$

$$u_t = -F_t x_{1t} \quad (2.23)$$

Onde  $F_t$  ( $k \times n_1$ ) é a regra discricionária de política a ser implementada no período  $t$ .

Dado a regra de decisão (2.23), pode-se obter a matriz  $C_t$  implicada pela solução, para isto deve-se substituir  $u_t$  em (2.14) a fim de relacionar  $x_{2t}$  somente a  $x_{1t}$ :

$$x_{2t} = D_t x_{1t} + G_t u_t$$

$$x_{2t} = \underbrace{(D_t - G_t F_t)}_{C_t} x_{1t}$$

$$x_{2t} = C_t x_{1t} \quad (2.24), \quad \text{onde } C_t \text{ é uma matriz } (n_2 \times n_1).$$

Finalmente, pode-se agora reescrever a função perda somente em termos de  $x_{1t}$ .

Usando a regra de decisão (2.23) em (2.22):

$$\begin{aligned} J_t &= x_{1t}^T Q_t^* x_{1t} - x_{1t}^T (U_t^* F_t + F_t^T U_t^{*T}) x_{1t} + x_{1t}^T F_t^T R_t^* F_t x_{1t} \\ &+ \beta E_t \left\{ \left[ (A_t^* - B_t^* F_t) x_{1t} + \varepsilon_{t+1} \right]^T V_{t+1} \left[ (A_t^* - B_t^* F_t) x_{1t} + \varepsilon_{t+1} \right] + v \right\} \\ J_t &= x_{1t}^T \left[ Q_t^* - U_t^* F_t - F_t^T U_t^{*T} + F_t^T R_t^* F_t + \beta (A_t^* - B_t^* F_t)^T V_{t+1} (A_t^* - B_t^* F_t) \right] x_{1t} + \\ &E_t \varepsilon_{t+1}^T \beta V_{t+1} \varepsilon_{t+1} + \beta v \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando a propriedade da permutação do traço:  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$ , pode-se escrever o segundo termo de (2.25) como:

$$E_t \varepsilon_{t+1}^T \beta V_{t+1} \varepsilon_{t+1} = \beta \text{tr}(E_t V_{t+1} \varepsilon_{t+1} \varepsilon_{t+1}^T) = \beta \text{tr}(V_{t+1} \Sigma) \quad (2.26)$$

Logo, a equação (2.25) resulta em:

$$J_t = x_{1t}^T V_t x_{1t} + v, \quad \text{onde: } v = \frac{\beta}{1-\beta} \text{tr}(V_{t+1} \Sigma) \quad (2.27)$$

É importante notar que (2.27) é da mesma forma que o "palpite" da função valor em  $t+1$  na equação (2.6), o que sugere um algoritmo recursivo. Este algoritmo teria a seguinte estrutura lógica:

- 1) Inicia-se com algum "palpite" de  $C_{t+1}$  e uma simétrica e definida positiva matriz  $V_{t+1}$ ;
- 2) Encontrar  $F_t$ ,  $C_t$  e  $V_t$  de acordo com a prévia discussão;
- 3) Repetir os procedimentos 1 e 2 até a iteração  $F_t$ ,  $C_t$  e  $V_t$  convergir.

As matrizes  $D_t$ ,  $G_t$ ,  $A_t^*$  e  $B_t^*$  também mudarão durante o processo de iteração. Quando a iteração do algoritmo de solução tiver convergido serão obtidos, respectivamente, a regra de decisão e a relação entre  $x_{1t}$  e  $x_{2t}$  convergida:

$$u_t = -F x_{1t} \quad (2.28)$$

$$x_{2t} = C x_{1t} \quad (2.29)$$

O valor da função perda será:

$$J_t = x_{1t}^T V x_{1t} + \frac{\beta}{1-\beta} tr(V \Sigma) \quad (2.30)$$

A dinâmica do sistema em termos somente da variável  $x_{1t}$  pode ser obtida a partir das  $n_1$  primeiras equações de (2.5):

$$x_{1t+1} = A_{11}x_{1t} + A_{12}x_{2t} + B_1u_t + \varepsilon_{t+1} \quad (2.31)$$

Combinadas com a regra de decisão (2.23) e a relação entre  $x_{1t}$  e  $x_{2t}$  (2.24), obtém-se:

$$\begin{aligned} x_{1t+1} &= A_{11}x_{1t} + A_{12}Cx_{1t} + B_1(-Fx_{1t}) + \varepsilon_{t+1} \\ x_{1t+1} &= (A_{11} + A_{12}C - B_1F)x_{1t} + \varepsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como colocado no início da discussão da solução discricionária, apesar do Banco Central re-otimizar todos os períodos, é possível obter uma regra de condução da taxa de juros convergida para este caso, embora sem provas da convergência do algoritmo recursivo. Dado que o algoritmo converge, pode-se obter o valor estacionário de  $V$  e  $C$ , e portanto o vetor da regra convergida  $F$ . Assim, as crenças dos agentes privados sobre a relação entre  $x_{1t+1}$  e  $x_{2t+1}$  dada por  $C$  são consistentes com o equilíbrio de expectativas racionais. A maneira como a solução foi derivada deixa claro que serão as crenças (expectativas) do setor privado sobre a política futura, sintetizada em  $C$ , que tornará o Banco Central incapaz de manipular a economia com ameaças de futuras ações, e então restringe a regra discricionária a ser consistente temporalmente.

A solução discricionária discutida será consistente temporalmente, porém será sub-ótima quando comparada à regra com pré-comprometimento, no sentido que a perda em termos da função perda social será maior no caso discricionário do que em pré-comprometimento. A solução discricionária acaba possuindo um grande apelo empírico devido à possibilidade inerente de re-otimizar estar sendo utilizada na solução, o que a torna mais provável do ponto de vista prático de ser seguida pela autoridade monetária.

#### A.4) Regras simples de política monetária

Como alternativa de implementação de política monetária, um Banco Central pode preferir adotar uma regra simples que responde somente a algumas das variáveis presentes no vetor de estado e que são consideradas mais importantes para sintetizar a informação a respeito do estado da economia.

No caso da implementação de uma regra simples, o instrumento de política é assumido tomar a forma:

$$u_t = -F x_t \quad (3.1)$$

ou seja, é uma função linear de  $x_{1t}$  e  $x_{2t}$ .

Substituindo a regra (3.1) no modelo linear geral apresentado anteriormente(1.1):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t x_{2t+1} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + B u_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{(n2 \times 1)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t x_{2t+1} \end{bmatrix} &= (A - BF) \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{(n2 \times 1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tomando-se as expectativas condicionadas ao conjunto de informação em t, obtém-se:

$$\begin{aligned} \underbrace{IE_t}_G \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \end{bmatrix} &= \underbrace{(A - BF)}_D \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \\ GE_t \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \end{bmatrix} &= D \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Apesar da equação acima ser similar a equação (1.14), as definições de G e D serão diferentes, principalmente no caso da matriz  $G=I$ , o que implicará na resolução deste sistema de equações a diferenças sobre expectativas racionais aplicando-se a decomposição padrão de Schur, apresentada na seção anterior, ao invés da decomposição generalizada. No caso, a decomposição padrão de Schur aplicada sobre a matriz D resulta em:

$$D = ZTZ^H \quad (3.4)$$

Onde a matriz  $Z$  é unitária ( $Z^H Z = I$ ) e  $T$  é uma matriz triangular superior. A matriz  $T$  resultante será reordenada tal que os autovalores estáveis ( $n\theta$ ) virão primeiro ao longo da diagonal principal. Então, substituindo a decomposição de Schur da matriz  $D$  obtida em (3.4) na equação (3.3), e pré-multiplicando por  $Z^H$ , obtém-se:

$$E_t \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \end{bmatrix} = ZTZ^H \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad (\times Z^H)$$

$$Z^H E_t \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \end{bmatrix} = Z^H ZTZ^H \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Agora, o próximo passo será introduzir as variáveis auxiliares, como anteriormente, tal que:

$$\begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} = Z^H \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Em seguida, substituindo (3.6) em (3.5), tem-se que:

$$E_t \begin{bmatrix} \theta_{t+1} \\ \delta_{t+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Na sequência de resolução, deve-se resolver o sistema de  $E_t \theta_{t+1}$  e  $E_t \delta_{t+1}$ . Dado que, a matriz  $T$  é triangular superior e foi reordenada de tal forma que os autovalores dentro ou no ciclo unitário aparecerão primeiro, formando o "bloco estável" ( $T_{\theta\theta}$ ), e os autovalores fora do ciclo unitário em seguida, formando o "bloco instável" ( $T_{\delta\delta}$ ), pode-se escrever (3.7) como:

$$E_t \begin{bmatrix} \theta_{t+1} \\ \delta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\theta\theta} & T_{\theta\delta} \\ 0 & T_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Primeiramente, resolvendo o sistema para  $E_t \delta_{t+1}$ . Desde que  $T_{\delta\delta}$  contém raízes fora do ciclo unitário,  $\delta_t$  será divergente a não ser que  $\delta_0 = 0$ . Logo, qualquer solução estável requer que  $\delta_t = 0$  para todo  $t$ . O sistema (3.8) pode ser escrito como:

$$E_t \theta_{t+1} = T_{\theta\theta} \theta_t \quad (3.9)$$

O próximo passo será voltar a relacionar a variável original com sua respectiva auxiliar. Retornando a definição das variáveis auxiliares (3.6), deve-se invertê-la e particioná-la como:

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{k\theta} & Z_{k\delta} \\ Z_{\lambda\theta} & Z_{\lambda\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad \text{como } \delta_t = 0, \text{ tem-se:}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{k\theta} \\ Z_{\lambda\theta} \end{bmatrix} [\theta_t] \quad (3.10)$$

A condição inicial para o sistema é que  $x_{10}$  é dado. De (3.10), obtém-se:

$$x_{10} = Z_{k\theta} \theta_0 \quad (3.11)$$

que pode ser resolvido para  $\theta_0$  se  $Z_{k\theta}$  é invertível. A matriz  $Z_{k\theta}$  possui  $n_1$  linhas e  $n\theta$  colunas, tantos quantos forem os autovalores estáveis, então uma condição para obtenção da solução da trajetória de ponto de sela (proposição 1 de Blanchard e Kahn) é que o número de autovalores estáveis ( $n\theta$ ) seja igual ao número de variáveis pré-determinadas. Se este é o caso, portanto:

$$\theta_0 = Z_{k\theta}^{-1} x_{10} \quad (3.12)$$

Da equação (1.1), vê-se que  $x_{1t+1} - E_t x_{1t+1} = \varepsilon_{t+1}$ , logo, substituindo pela relação dada pela equação (3.10), a saber:  $x_{1t} = Z_{k\theta} \theta_t$ , tem-se:

$$x_{1t+1} - E_t x_{1t+1} = Z_{k\theta} (\theta_{t+1} - E_t \theta_{t+1}) = \varepsilon_{t+1} \quad (3.13)$$

Sendo que  $Z_{k\theta}$  sobre as mesmas condições anteriores é invertível, chega-se:

$$\theta_{t+1} = E_t \theta_{t+1} + Z_{k\theta}^{-1} \varepsilon_{t+1} \quad (3.14)$$

E finalmente, substituindo a equação (3.9) que dá a  $E_t \theta_{t+1}$ , obtém-se:



$$\theta_{t+1} = T_{\theta\theta} \theta_t + Z_{k\theta}^{-1} \varepsilon_{t+1} \quad (3.15)$$

As equações (3.15), (3.12) e (3.10) formam um sistema que descreve as variáveis do modelo. Como último passo, deve-se retornar a solução do sistema com relação as variáveis  $x_{1t}$  e  $x_{2t}$ , ou seja, relacionar as equações anteriores de evolução das variáveis auxiliares com as suas respectivas originais. A relação entre  $x_{1t}$  e  $\theta_t$  dada pela equação (3.10) pode ser invertida para:

$$\theta_t = Z_{k\theta}^{-1} x_{1t} \quad (3.16)$$

A equação (3.16) pode ser usada em (3.15), resultando:

$$\begin{aligned} Z_{k\theta}^{-1} x_{1t+1} &= T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1} x_{1t} + Z_{k\theta}^{-1} \varepsilon_{t+1} & (\times Z_{k\theta}) \\ x_{1t+1} &= \underbrace{Z_{k\theta} T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1}}_M x_{1t} + \varepsilon_{t+1} \quad \text{ou} \quad x_{1t+1} = M x_{1t} + \varepsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Da mesma forma, combinando (3.16) com a relação entre  $x_{2t}$  e  $\theta_t$  dada em (3.10):

$$\begin{aligned} x_{2t} &= Z_{\lambda\theta} \theta_t \\ x_{2t} &= \underbrace{Z_{\lambda\theta} Z_{k\theta}^{-1}}_C x_{1t} \quad \text{ou} \quad x_{2t} = C x_{1t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Calculando o valor da função perda associada a uma dada regra (vetor F)

A função perda pode ser escrita como:

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \begin{bmatrix} x_t^T & u_t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & U \\ U^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Pode-se utilizar a relação entre  $x_{2t}$  e  $x_{1t}$  dada por (3.18) para escrever o vetor  $x_t$  somente em função de  $x_{1t}$ , como:

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad x_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ C x_{1t} \end{bmatrix} \quad x_t = \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} x_{1t} \quad (3.20)$$

A regra de política é  $u_t = -F x_t$ , sendo função das variáveis pré-determinadas ( $x_{1t}$ ) e não pré-determinadas ( $x_{2t}$ ), logo para expressá-la como:

$$u_t = -F \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad u_t = -F \begin{bmatrix} x_{1t} \\ Cx_{1t} \end{bmatrix} \quad u_t = -F \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} x_{1t} \quad (3.21)$$

Por fim, pode ser escrever:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ C \\ -F \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_P x_{1t} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} = P x_{1t} \quad (3.22)$$

Então, a função perda pode ser reescrita como:

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t x_{1t}^T P^T \begin{bmatrix} Q & U \\ U^T & R \end{bmatrix} P x_{1t}$$

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t x_{1t}^T W x_{1t}, \text{ onde } W = P^T \begin{bmatrix} Q & U \\ U^T & R \end{bmatrix} P \quad (3.23)$$

A função de perda também pode ser formulada em termos das variáveis objetivos (*target variables*) que são relacionadas ao vetor de variáveis de estado e ao vetor de instrumentos pela fórmula:

$$Y_t = K \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ u_t \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Usando a equação (3.22), pode-se expressar somente em termos das variáveis pré-determinadas ( $x_{1t}$ ):

$$Y_t = K \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ u_t \end{bmatrix} \Rightarrow Y_t = K \begin{bmatrix} I \\ C \\ -F \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} \end{bmatrix} x_{1t} \Rightarrow Y_t = KP x_{1t} \quad (3.25)$$

A função perda então será:

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t Y_t^T D Y_t, \quad (3.26)$$

onde D é a matriz diagonal cujos elementos são os ponderadores da função perda.

Substituindo (3.25) em (3.26), obtém-se:

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t x_{1t}^T P^T K^T D K P x_{1t}$$

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t x_{1t}^T W x_{1t}, \text{ onde agora } W = P^T K^T D K P \quad (3.27)$$

Depois de todas as substituições que resultaram na função perda da forma (3.27) somente em termos de  $x_{1t}$ , retorna-se ao problema padrão do regulador linear ótimo descontado estocástico, podendo ser resolvido através de programação dinâmica. Admitindo-se que a função valor (função perda) é quadrática e iniciando com o *guess* para a mesma da forma:

$$J_t = x_{1t}^T V x_{1t} + v \quad (3.28)$$

Note que da equação (3.28), ela deve satisfazer:

$$J_t = x_{1t}^T W x_{1t} + \beta E_t J_{t+1} \quad (3.29)$$

Usando o *guess* para a função valor dado pela equação (3.28) para  $J_{t+1}$  e a equação de movimento para  $x_{1t}$  (3.17), tem-se:

$$J_t = x_{1t}^T W x_{1t} + \beta E_t (x_{1t+1}^T V x_{1t+1} + v)$$

$$J_t = x_{1t}^T W x_{1t} + \beta E_t (x_{1t}^T M^T + \varepsilon_{t+1}^T) V (M x_{1t} + \varepsilon_{t+1}) + \beta v$$

$$J_t = x_{1t}^T W x_{1t} + \beta x_{1t}^T M^T V M x_{1t} + \beta E_t(\varepsilon_{t+1}^T V \varepsilon_{t+1}) + \beta v \quad (3.30)$$

É claro, que (3.28) e (3.30) devem dar o mesmo valor para toda possível realização do vetor  $x_{1t}$ , isto implica que:

$$\begin{aligned} x_{1t}^T V x_{1t} + v &= x_{1t}^T W x_{1t} + \beta x_{1t}^T M^T V M x_{1t} + \beta E_t(\varepsilon_{t+1}^T V \varepsilon_{t+1}) + \beta v \\ x_{1t}^T V x_{1t} + v &= x_{1t}^T (W + \beta M^T V M) x_{1t} + \beta E_t(\varepsilon_{t+1}^T V \varepsilon_{t+1}) + \beta v \end{aligned} \quad (3.31)$$

Então:

$$V = W + \beta M^T V M \quad (3.32)$$

$$v = \beta E_t(\varepsilon_{t+1}^T V \varepsilon_{t+1}) + \beta v \quad (3.33)$$

A equação (3.32) tem uma única solução, que é aproximada no limite quando  $t \rightarrow \infty$  por iterações da equação a diferença da matriz Riccati (*matrix Riccati difference equation*):

$$V_{t+1} = W + \beta M^T V_t M \quad (3.34)$$

começando de  $V_0=0$ .

A segunda parte da solução,  $v$  é um escalar e será calculado como:

$$v = \frac{\beta}{1 - \beta} E_t(\varepsilon_{t+1}^T V \varepsilon_{t+1})$$

$$v = \frac{\beta}{1 - \beta} tr E_t(\varepsilon_{t+1}^T V \varepsilon_{t+1})$$

$$v = \frac{\beta}{1 - \beta} tr E_t(V \varepsilon_{t+1}^T \varepsilon_{t+1})$$

$$v = \frac{\beta}{1 - \beta} tr(V \Sigma), \text{ onde } \Sigma = E_t(\varepsilon_{t+1}^T \varepsilon_{t+1}) \quad (3.35)$$

O valor da função perda (3.28) é calculado para  $v$  e  $V$  dados, respectivamente por (3.34) e (3.35).

Na literatura de regra monetária, há diversos autores que têm considerado regras simples ótimas, onde os parâmetros do vetor  $F$  da regra são escolhidos otimamente buscando-se minimizar (3.19) e sobre a restrição que a escolha de  $F$  deva resultar numa única solução, ou seja, deve atender a proposição 1 de Blanchard e Kahn. Esta regra é, em geral, não a mesma que regra ótima global sobre pré-comprometimento desde que há restrições sobre os coeficientes da regra de decisão.

A regra simples ótima é encontrada a partir do seguinte procedimento: 1° ) iniciar com um valor inicial (*guess*) da regra de política ( $F$ ), 2°) resolver o modelo como descrito acima (com a decomposição de Schur) e calcular o valor da função perda associada, 3°) tentar outro valor da regra ( $F$ ) e calcular o valor da função perda para comparar com o já obtido, sendo que o procedimento cessa ao encontrar o  $F$  associado ao menor valor da função perda.

Como já salientado, a regra simples ou a regra simples ótima não são equivalente certo, tal que a regra de política dependerá da matriz de covariância  $\Sigma$  e do vetor de estado inicial da economia ( $x_{1t}$ )

## **EXEMPLOS: APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO PADRÃO DE SCHUR E DOS ALGORITMOS DE OBTENÇÃO DAS REGRAS ÓTIMAS EM UMA VERSÃO DO SIMPLIFICADA DO MODELO DE FUHRER.**

---

Antes da apresentação do exemplo da aplicação das soluções discutidas na seção 3 sobre um modelo macroeconômico, será feito um breve resumo das características das soluções.

### **a) Solução de pré-comprometimento**

⇒ Banco Central possui credibilidade para anunciar uma regra no período  $t$  que será seguida nos períodos subseqüentes;

⇒ Autoridade monetária age com a hipótese de que as expectativas são consistentes com a política. Neste caso, a solução do sistema de equações a diferença com variáveis em expectativas racionais será através da aplicação do método proposto por Klein, que usa a decomposição de Schur para resolver o sistema.

⇒ A solução para o problema de otimização será obtida através do método de multiplicadores de Lagrange.

⇒ A solução obtida será ótima, no sentido de associar o menor valor possível a função perda entre todos os casos. Porém, a solução será inconsistente temporalmente, dado a tentação de renegar a regra anunciada no período  $t$ , após o período inicial.

### **b) Solução de discricionária**

⇒ Banco Central não possui credibilidade ou outro mecanismo institucional para tornar crível o anúncio de política feito em um determinado período. Neste caso, o setor privado espera que o Banco Central otimize a cada período, tornando suas expectativas consistentes com esta situação. Diferentemente do caso anterior, a autoridade monetária toma as expectativas como dadas.

⇒ A solução ótima será obtida através da hipótese de que as expectativas das variáveis não pré-determinadas são uma função linear das expectativas das variáveis pré-determinadas do mesmo período, ou seja,  $E_t x_{2t+1} = C E_t x_{1t+1}$ . Desta forma, o Banco Central, ao fazer esta hipótese sobre o comportamento dos agentes privados, não resolverá mais o problema de otimização precisando resolver o sistema de equações a diferença com expectativas racionais.

⇒ A obtenção da solução do problema de otimização do BC será através da aplicação do método de programação dinâmica.

⇒ A solução obtida será sub-ótima, no sentido de associar um valor da função perda maior que para o caso de pré-comprometimento, mas será consistente temporal.

### **c) Solução da regra simples**

⇒ Buscando uma melhor comunicação com o público, a autoridade monetária prefere o uso de uma regra simples, limitando o vetor resposta do instrumento a responder somente a algumas variáveis de estado.

⇒ A solução implica no comprometimento do Banco Central à regra simples anunciada, sendo este comprometimento visto como sustentável pelo setor privado. Desta maneira, as expectativas dos agentes privados serão consistentes com a regra simples seguida pelo Banco Central.

⇒ Como no caso de pré-comprometimento, a hipótese de que as expectativas são consistentes com a política permitem a aplicação do método de Klein para a resolução do sistema de equações a diferença com variáveis em expectativas racionais.

A seguir serão apresentados dois exemplos. No primeiro exemplo, será apresentada a aplicação da decomposição padrão de Schur para a resolução de um modelo de expectativas racionais lineares, sendo que este método é aplicado na solução de pré-comprometimento e regra simples. No segundo exemplo, será apresentado um modelo linear estrutural com variáveis em expectativas racionais, onde os três casos alternativos de solução serão aplicados, e suas características serão apresentadas.

**Exemplo1: Aplicação da decomposição padrão de Schur na resolução de uma versão do modelo de demanda por moeda de Cagan.**

O modelo linear geral capaz de representar diferentes sistemas de equações a diferença com variáveis em expectativas racionais será dado por:

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t x_{2t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{(n_2 \times 1)} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

onde  $x_{1t}$  é um  $(n_1 \times 1)$  vetor de variáveis pré-determinadas (*backward looking variables*),  $x_{2t}$  é um vetor  $(n_2 \times 1)$  de variáveis não pré-determinadas (*forward looking variables*), e  $\varepsilon_{t+1}$  é um ruído branco com matriz de covariância igual a  $\Sigma$ .

Considerando uma versão do "modelo de Cagan" onde o nível de preços ( $P_t$ ) comporta-se como um ativo (*asset price*), no sentido que o valor do nível de preços em  $t$  dependerá da expectativa futura do comportamento do nível de preços, e a oferta de moeda ( $M_t$ ) segue um processo AR(1) exógeno:

$$\ln P_t = (1 - a) \ln M_t + a E_t \ln P_{t+1}, \quad \text{com } 0 < a < 1.$$

$$\ln M_{t+1} = \rho \ln M_t + \varepsilon_{t+1}$$

Reescrevendo o modelo acima da forma (1.1), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \ln M_{t+1} \\ E_t \ln P_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ \frac{a-1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} M_t \\ P_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \begin{cases} x_{1t} = \ln M_t \\ x_{2t} = \ln P_t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t x_{2t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{(n_2 \times 1)} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Tomando-se as expectativas de ambos os lados de (1.2), baseada na informação em  $t$ , segue que:

$$E_t \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Esta equação é um exemplo de um sistema de equações a diferença com variáveis em expectativas racionais. A estratégia de solução será baseada na aplicação da decomposição padrão de Schur sobre a matriz  $A$ .

Aplicando-se a decomposição de Schur sobre a matriz  $A$  ( $n \times n$ ), resultarão as seguintes matrizes  $T$  e  $Z$ , tal que:

$$A = TZ^{-1} \quad (1.4)$$

Onde a matriz  $Z$  é unitária ( $Z^H Z = I$ ) e  $T$  é uma matriz triangular superior, onde os autovalores estão ao longo da diagonal principal. A ordem dos autovalores em  $T$  pode ser mudada, embora isto requeira que  $Z$  seja reordenada da mesma forma para manter a relação obtida em (1.4). A matriz  $T$  resultante será reordenada tal que os autovalores estáveis ( $n\theta$ )



virão primeiro ao longo da diagonal principal. Então, substituindo a decomposição de Schur da matriz A obtida em (1.4) na equação (1.3), e pré-multiplicando por  $Z^H$ , obtém-se:

$$E_t \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \end{bmatrix} = ZTZ^H \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad (\times Z^H)$$

$$Z^H E_t \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \end{bmatrix} = Z^H ZTZ^H \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Agora, o próximo passo será introduzir as variáveis auxiliares, como anteriormente, tal que:

$$\begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} = Z^H \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Em seguida, substituindo (1.6) em (1.5), tem-se que:

$$E_t \begin{bmatrix} \theta_{t+1} \\ \delta_{t+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Na seqüência de resolução, deve-se resolver o sistema de  $E_t \theta_{t+1}$  e  $E_t \delta_{t+1}$ . Dado que, a matriz T é triangular superior e foi reordenada de tal forma que os autovalores dentro ou no ciclo unitário aparecerão primeiro, formando o "bloco estável" ( $T_{\theta\theta}$ ), e os autovalores fora do ciclo unitário em seguida, formando o "bloco instável" ( $T_{\delta\delta}$ ), pode-se escrever (3.7) como:

$$E_t \begin{bmatrix} \theta_{t+1} \\ \delta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\theta\theta} & T_{\theta\delta} \\ 0 & T_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Primeiramente, resolvendo o sistema para  $E_t \delta_{t+1}$ . Desde que  $T_{\delta\delta}$  contém raízes fora do ciclo unitário,  $\delta_t$  será divergente a não ser que  $\delta_0 = 0$ . Logo, qualquer solução estável requer que  $\delta_t = 0$  para todo t. O sistema (1.8) pode ser escrito como:

$$E_t \theta_{t+1} = T_{\theta\theta} \theta_t \quad (1.9)$$

O próximo passo será voltar a relacionar a variável original com sua respectiva auxiliar. Retornando a definição das variáveis auxiliares (1.6), deve-se invertê-la e particioná-la como:

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{k\theta} & Z_{k\delta} \\ Z_{\lambda\theta} & Z_{\lambda\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad \text{como } \delta_t = 0, \text{ tem-se:}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{k\theta} \\ Z_{\lambda\theta} \end{bmatrix} [\theta_t] \quad (1.10)$$

A condição inicial para o sistema é que  $x_{10}$  é dado. De (1.10), obtém-se:

$$x_{10} = Z_{k\theta} \theta_0 \quad (1.11)$$

que pode ser resolvido para  $\theta_0$  se  $Z_{k\theta}$  é invertível. A matriz  $Z_{k\theta}$  possui  $n_1$  linhas e  $n\theta$  colunas, tantos quantos forem os autovalores estáveis, então uma condição para obtenção da solução da trajetória de ponto de sela (proposição 1 de Blanchard e Kahn) é que o número de autovalores estáveis ( $n\theta$ ) seja igual ao número de variáveis pré-determinadas. Se este é o caso, portanto:

$$\theta_0 = Z_{k\theta}^{-1} x_{10} \quad (1.12)$$

Da equação (1.1), vê-se que  $x_{1t+1} - E_t x_{1t+1} = \varepsilon_{t+1}$ , logo, substituindo pela relação dada pela equação (1.10), a saber:  $x_{1t} = Z_{k\theta} \theta_t$ , tem-se:

$$x_{1t+1} - E_t x_{1t+1} = Z_{k\theta} (\theta_{t+1} - E_t \theta_{t+1}) = \varepsilon_{t+1} \quad (1.13)$$

Sendo que  $Z_{k\theta}$  sobre as mesmas condições anteriores é invertível, chega-se:

$$\theta_{t+1} = E_t \theta_{t+1} + Z_{k\theta}^{-1} \varepsilon_{t+1} \quad (1.14)$$

E finalmente, substituindo a equação (3.9) que dá a  $E_t \theta_{t+1}$ , obtém-se:

$$\theta_{t+1} = T_{\theta\theta} \theta_t + Z_{k\theta}^{-1} \varepsilon_{t+1} \quad (1.15)$$

As equações (1.15), (1.12) e (1.10) formam um sistema que descreve as variáveis do modelo.

Como último passo, deve-se retornar a solução do sistema com relação as variáveis  $x_{1t}$  e  $x_{2t}$ , ou seja, relacionar as equações anteriores de evolução das variáveis auxiliares com as suas respectivas originais. A relação entre  $x_{1t}$  e  $\theta_t$  dada pela equação (3.10) pode ser invertida para:

$$\theta_t = Z_{k\theta}^{-1} x_{1t} \quad (1.16)$$

A equação (3.16) pode ser usada em (3.15), resultando:

$$Z_{k\theta}^{-1} x_{1t+1} = T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1} x_{1t} + Z_{k\theta}^{-1} \varepsilon_{t+1} \quad (\times Z_{k\theta})$$

$$x_{1t+1} = Z_{k\theta} T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1} x_{1t} + \varepsilon_{t+1} \quad (1.17)$$

Da mesma forma, combinando (1.16) com a relação entre  $x_{2t}$  e  $\theta_t$  dada em (1.10):

$$x_{2t} = Z_{\lambda\theta} \theta_t$$

$$x_{2t} = Z_{\lambda\theta} Z_{k\theta}^{-1} x_{1t} \quad (1.18)$$

Considere os valores de  $a = 0.5$  e  $\rho = 0.9$  no modelo de Cagan, tal que a matriz A toma a forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando-se a decomposição de Schur e reordenando as matrizes Z e T conveniente segundo a exposição anterior, obtém-se:

$$Z = \begin{bmatrix} -0.74 & 0.673 \\ -0.673 & -0.74 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad Z^H = \begin{bmatrix} -0.74 & -0.673 \\ 0.673 & -0.74 \end{bmatrix}$$

Observando os resultados acima, nota-se que a matriz T é triangular superior, com os autovalores ao longo da diagonal principal, e a matriz Z é unitária, pois  $Z^H Z = I$ .

Da equação (1.18) tem-se:

$$x_{2t} = Z_{\lambda\theta} Z_{k\theta}^{-1} x_{1t}$$

Como neste caso  $x_{1t} = \ln Mt$  e  $x_{2t} = \ln Pt$ , e além disso, os valores de  $Z_{\lambda\theta}$  e  $Z_{k\theta}$  serão dados pelos elementos  $Z_{11}$  e  $Z_{12}$  da matriz Z obtida acima, sendo respectivamente -0.74 e -

0.673. Logo, substituindo esses dados na equação (1.18), obtém-se a trajetória do nível de preços em função da evolução da oferta de moeda:

$$\begin{aligned}\ln P_t &= Z_{\lambda\theta} Z_{k\theta}^{-1} \ln M_t \\ \ln P_t &= (-0.673) \times (-0.74)^{-1} \times \ln M_t \\ \ln P_t &= 0.909 \times \ln M_t\end{aligned}\quad (1.19)$$

Da mesma forma, a equação (1.17) dará a trajetória de evolução da oferta de moeda.

$$\begin{aligned}x_{1t+1} &= Z_{k\theta} T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1} x_{1t} + \varepsilon_{t+1} \\ \ln M_{t+1} &= Z_{k\theta} T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1} \ln M_t + \varepsilon_{t+1}\end{aligned}$$

Como já visto  $Z_{\lambda\theta} = -0.74$ , e o termo  $T_{\theta\theta}$  será dado pelo elemento  $T_{11}$  da matriz  $T$  anterior, sendo igual a 0.9. Deste modo, substituindo esses valores na equação (1.17), obtém-se:

$$\begin{aligned}\ln M_{t+1} &= (-0.74) \times (0.90) \times (-0.74)^{-1} \ln M_t + \varepsilon_{t+1} \\ \ln M_{t+1} &= 0.9 \ln M_t + \varepsilon_{t+1}\end{aligned}\quad (1.20)$$

Portanto, as equações (1.19) e (1.20), juntamente com a condição inicial para  $\ln M_0$ , descrevem a solução do "modelo de Cagan".

**Exemplo2: Aplicação dos algoritmos de obtenção das regras ótimas em uma versão simplificada do modelo de Fuhrer.**

Com o objetivo de exemplificar a implementação das soluções de pré-comprometimento, discricionária e da regra simples discutidas na seção 3 do trabalho, escolheu-se uma versão simples do modelo apresentado por Fuhrer em "Inflation /Output variance traded-offs and optimal monetary policy, 1997, Journal of Money, Credit and Banking, 29, pg 214-234", que se insere na classe de modelos estruturais com variáveis em expectativas racionais (*forward looking structural model*), onde as soluções tornam-se aplicáveis.

O modelo é apresentado abaixo (nesta primeira exposição, serão omitidas as passagens que permitem a derivação das fórmulas no formato que são apresentadas):

$$(E2.1) \quad y_{t+1} = \alpha_1 y_t + \alpha_p R_t + \varepsilon_{y,t+1}$$

$$(E2.2) \quad E_t \Delta x_{t+1} = -\frac{\gamma}{(1-\omega)^2} y_t - \frac{\gamma}{\omega(1-\omega)} E_t y_{t+1} + 2\Delta x_t - \Delta x_{t-1} - \frac{1}{\omega(1-\omega)^2} \varepsilon_{pt}$$

$$(E2.3) \quad E_t R_{t+1} = \frac{1+D}{D} R_t + \frac{1}{D} E_t [\omega \Delta x_{t+1} + (1-\omega) \Delta x_t] - \frac{1}{D} f_t$$

A equação (E2.1) é uma curva IS tradicional com o hiato do produto ( $y_t$ ) dependendo do seu valor defasado e da taxa de juros de longo-prazo ( $R_t$ ), que estará relacionada a taxa de juros de curto-prazo pela equação de arbitragem (3).

A equação (E2.2) representa o lado da oferta da economia, sendo obtida da manipulação do sistema de equações abaixo:

$$(E2.4) \quad p_t = \omega x_t + (1-\omega)x_{t-1}$$

$$(E2.5) \quad v_t = \omega (x_t - p_t) + (1-\omega)(x_{t-1} - p_{t-1})$$

$$(E2.6) \quad x_t - p_t = \omega (v_t + \gamma y_t) + (1-\omega)(E_t v_{t+1} + \gamma E_t y_{t+1}) + \varepsilon_{pt}$$

A equação (E2.4) é uma condição de mark-up tradicional, que relaciona o nível de preços do período  $t$  a média ponderada dos salários nominais entre  $t-1$  e  $t$ . A equação (E2.5) é o valor efetivo do salário real ( $v_t$ ) observado no período  $t$ , sendo uma média ponderada dos salários nominais observados nos períodos  $t$  e  $t-1$ . A equação (E2.6) representa a curva de contratação de salários, onde a especificação faz com que o salário nominal ( $x_t$ ) contratado em  $t$  implique que o salário real correspondente tenha como referência a média ponderada do valor efetivo do salário real em  $t$  ( $v_t$ ) e o valor esperado efetivo do salário real para  $t+1$  ( $E_t v_{t+1}$ ). Adiciona-se a essa média, o valor do hiato do produto em  $t$  ( $y_t$ ) e o valor

esperado para  $t+1$  ( $E_t y_{t+1}$ ), buscando-se representar as condições de emprego no mercado de trabalho no momento da negociação salarial.

Da equação (E2.4), a inflação trimestral entre  $t-1$  e  $t$ , expressa em termos anuais, será:

$$\begin{aligned}\pi_t &= 4[p_t - p_{t-1}] \\ p_t &= 4[\omega \Delta x_t + (1-\omega) \Delta x_{t-1}] \\ (E2.7) \quad p_t &= 4\omega \Delta x_t + 4(1-\omega) \Delta x_{t-1}\end{aligned}$$

Por último, a equação (E2.3) representa a condição de arbitragem, relacionando a expectativa de taxa de juros de longo prazo para  $t+1$  ( $R_{t+1}$ ) positivamente ao valor da taxa de juros de longo prazo em  $t$  ( $R_t$ ) e a taxa de inflação esperada para  $t$  ( $\pi_t$ ), p segundo termo entre colchetes, e negativamente a taxa de juros de curto prazo ( $f_t$ ).

Finalizando a manipulação do modelo, antes deste ser expresso no formato geral (1.1), deve-se escrever a equações (E2.1) a (E2.3) em termos do vetor de estado, que neste caso é formado pelas variáveis:

$$x_t = (\varepsilon_{pt}, y_t, \Delta x_{t-1}, R_t, \Delta x_t)^T$$

Para escrever a equações (E2.1) a (E2.3) em função do vetor de estado, deve-se substituir a variáveis  $E_t y_{t+1}$  e  $E_t \Delta x_{t+1}$  que aparecem no lado esquerdo das equações (E2.2) e (E2.3), respectivamente, pela expressão correspondente ao valor esperado dessas variáveis. Desta forma, as equações reescritas tomam a forma:

$$\begin{aligned}y_{t+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_p & 0 \end{bmatrix}}_{A_y} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \\ R_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} + \varepsilon_{yt+1} \\ E_t \Delta x_{t+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{\omega(1-\omega)^2} & -\left(\frac{\gamma\alpha_1}{\omega(1-\omega)} + \frac{\gamma}{(1-\omega)^2}\right) & -1 & -\frac{\gamma\alpha_p}{\omega(1-\omega)} & 2 \end{bmatrix}}_{A_x} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \\ R_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} + \varepsilon_{xt+1}\end{aligned}$$

$$E_t \Delta x_{t+1} = \frac{4}{D} \omega A_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1+D}{D} & \frac{4}{D}(1-\omega) \end{bmatrix}}_{A_r} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \\ R_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} - \frac{1}{D} f_t$$

Concluindo, pode-se escrever as três equações acima no formato do modelo linear geral para política monetária (1.1) da seção 3, obtendo-se:

$$(E2.8) \quad \begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t x_{2t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + B u_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0_{(n2 \times 1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{pt+1} \\ y_{t+1} \\ \Delta x_t \\ E_t R_{t+1} \\ E_t \Delta x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & A_y & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & A_r & & \\ & & A_x & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \\ R_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{D} \\ 0 \end{bmatrix} f_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt+1} \\ \varepsilon_{yt+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{onde: } x_{1t} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \end{bmatrix}, \quad x_{2t} = \begin{bmatrix} R_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{t+1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt+1} \\ \varepsilon_{yt+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e } u_t = f_t$$

Neste caso,  $n1=3$ ,  $n2=2$  e  $k=1$ .

O problema de otimização a qual o Banco Central está confrontado, seguindo o regime de meta de inflação para a política monetária, será minimizar a função perda:

$$(E2.9) \quad J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \begin{bmatrix} x_t^T & u_t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & U \\ U^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}$$

s.a: equação (E2.8)

por escolher a sequência ótima do vetor  $u_t$  de instrumentos de política, normalmente a taxa de juros.

O próximo passo para a aplicação dos algoritmos de obtenção das 3 soluções propostas na seção 3, deve-se definir as variáveis objetivos em função das variáveis de estado. Neste caso, a função perda no período  $t$  toma a forma:

$$(E2.10) \quad L_t = q_\pi \bar{\pi}_t^2 + q_y y_t^2 + q_f f_t^2 \quad \Rightarrow \quad L_t = Y_t^T W Y_t$$

onde  $\bar{\pi}_t$  é interpretada como o desvio da inflação da meta estipulada,  $q_\pi$ ,  $q_y$  e  $q_f$  são os ponderadores da inflação, da estabilização do produto e da suavização da taxa de juros, respectivamente.

Pode-se definir o vetor de variáveis objetivos, como sendo:

$$(E2.11) \quad Y_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \bar{\pi}_t \\ f_t \end{bmatrix}$$

Definindo-se também o vetor ( $X_t$ ) formado pelas variáveis de estado adicionado a variável de controle ( $f_t$ ):

$$(E2.12) \quad X_t = \begin{bmatrix} x_t \\ f_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \\ R_t \\ \Delta x_t \\ f_t \end{bmatrix}$$

Pode-se relacionar as variáveis objetivos ao vetor de variáveis de estado mais o instrumento, como a seguir:

$$(E2.13) \quad \begin{bmatrix} y_t \\ \bar{\pi}_t \\ f_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4(1-\omega) & 0 & 4\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \\ R_t \\ \Delta x_t \\ f_t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_t \\ \bar{\pi}_t \\ f_t \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}$$

A função perda (E2.9) pode ser reescrita, substituindo a forma da função perda do período  $t$  (E2.10), como:

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t Y_t^T W Y_t$$

$$J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \begin{bmatrix} y_t & \bar{\pi}_t & f_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_y & 0 & 0 \\ 0 & q_\pi & 0 \\ 0 & 0 & q_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ \bar{\pi}_t \\ f_t \end{bmatrix}$$

$$(E2.14) \quad J_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \begin{bmatrix} x_t^T & u_t^T \end{bmatrix} K^T \begin{bmatrix} q_y & 0 & 0 \\ 0 & q_\pi & 0 \\ 0 & 0 & q_f \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}$$

Comparando-se (E2.9) com (E2.14), pode-se verificar que:

$$\begin{bmatrix} Q & U \\ U^T & R \end{bmatrix} = K^T \begin{bmatrix} q_y & 0 & 0 \\ 0 & q_\pi & 0 \\ 0 & 0 & q_f \end{bmatrix} K$$

As equações (E2.14) e (E2.8) serão a estrutura geral do problema de otimização para os três casos. Na resolução da regra simples, uma adicional definição é necessária. No caso, para exemplificar uma regra simples, será a regra de Taylor:  $f_t = 1.5\pi_t + 0.5y_t$ . Para inserir



esta regra no modelo, deve-se restringir o vetor resposta do instrumento a responder somente aos termos do vetor das variáveis de estado, correspondentes ao produto e a inflação. Desta forma, o instrumento será uma função linear do vetor de estado, a saber:

$$(E2.15) \quad u_t = F \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix}, \text{ onde: } F = [0 \quad -0.5 \quad -6(1-\omega) \quad 0 \quad -6\omega]$$

No contexto desse modelo, serão apresentados os resultados obtidos para os 3 casos de solução da regra.

### 1) Solução de pré-comprometimento

Como apresentado na seção 3, a solução do sistema para o caso de pré-comprometimento será dada pelas equações (1.41) e (1.42), que para as variáveis do modelo seriam:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{pt+1} \\ y_{t+1} \\ \Delta x_t \\ \rho_{2t+1}^{R_t} \\ \rho_{2t+1}^{\Delta x_{t+1}} \end{bmatrix} = \underbrace{Z_{k\theta} S_{\theta\theta}^{-1} T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1}}_{M\_Com} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \\ \rho_{2t}^{R_t} \\ \rho_{2t}^{\Delta x_{t+1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt+1} \\ \varepsilon_{yt+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
  

$$\begin{bmatrix} R_t \\ \Delta x_t \\ f_t \\ \rho_{1t}^{\varepsilon_t} \\ \rho_{1t}^{y_t} \\ \rho_{1t}^{\Delta x_{t-1}} \end{bmatrix} = \underbrace{Z_{\lambda\theta} Z_{k\theta}^{-1}}_{C\_Com} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \\ \rho_{2t}^{R_t} \\ \rho_{2t}^{\Delta x_{t+1}} \end{bmatrix}$$

A seguir são apresentados os valores encontrados para as matrizes M\_Com e C\_Com:

M_Commit (5x5)				
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.4049	0.7967	-0.0337	-0.0032	0.0004
10.9383	0.0565	0.8703	-0.0010	0.0002
59.4603	2.3724	4.8070	0.9243	-0.0201
-601.7904	-10.9924	-51.0926	0.0194	0.8811

C_Commit (6x5)				
0.9877	0.1300	0.0823	0.0079	-0.0010
10.9383	0.0565	0.8703	-0.0010	0.0002
2.9730	0.1186	0.2404	0.0462	-0.0010
7434.1761	134.7539	631.3636	-0.9877	-10.9383
134.7539	6.1560	10.9335	-0.1300	-0.0565
631.3636	10.9335	55.3489	-0.0823	-0.8703

A matriz  $M\_Com$  representa a dinâmica do modelo com relação as variáveis pré-determinadas, sendo que a partir dela será possível construir as funções impulso a resposta para um determinado choque, que no caso do modelo poderá ser um choque de preços ( $\varepsilon_{pt}$ ) ou um choque de produto ( $\varepsilon_{yt}$ ).

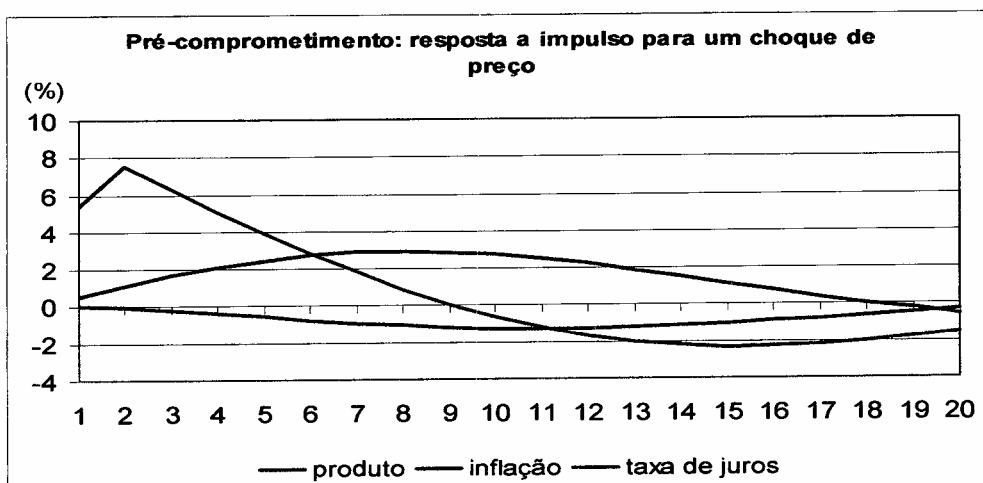
A matriz  $C\_Com$  relaciona as variáveis não pré-determinadas às variáveis pré-determinadas, sendo que a mais importante informação é o vetor resposta do instrumento para a solução de pré-comprometimento, sendo dado pela linha que relaciona ut as variáveis pré-determinadas, no caso da matriz acima será a terceira linha. Portanto, o vetor da regra ótima para esta solução será:

$$f_t = [2.9730 \quad 0.1186 \quad 0.2404 \quad 0.0462 \quad -0.0010] \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \\ \rho_{2t}^R \\ \rho_{2t}^{\Delta x_{t+1}} \end{bmatrix} \quad (E2.16)$$

É importante notar que a regra ótima neste caso dependerá dos multiplicadores de lagrange (*costate variable*) das variáveis não pré-determinadas, respectivamente,  $\rho_{2t}^R$  e  $\rho_{2t}^{\Delta x_{t+1}}$ . Esta dependência é uma das críticas freqüentes ao resultado de pré-comprometimento, pois se vincula o instrumento a variáveis não observáveis.

Como exercício, serão também apresentadas as funções impulso a resposta para o choque de preços ( $\varepsilon_{pt}$ ). O valor imputado para este choque será a soma dos quadrados dos resíduos da regressão, que neste caso é 0.19.

**Gráfico 28: Função resposta a impulso para solução pré-comprometimento**



## 2) Solução Discricionária

Seguindo a exposição da seção 3, a solução discricionária para o modelo será dada pelas equações (2.28), (2.29) e (2.31), que no contexto do modelo, tomam a forma:

$$u_t = -F_{disc} x_{1t} \Rightarrow f_t = -F_{disc} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \end{bmatrix} \quad (E2.17)$$

$$x_{2t} = C_{disc} x_{1t} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = C_{disc} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \end{bmatrix} \quad (E2.18)$$

$$x_{1t+1} = \underbrace{(A_{11} + A_{12}C - B_1F)}_{M_{disc}} x_{1t} + \varepsilon_{t+1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt+1} \\ y_{t+1} \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = M_{disc} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \end{bmatrix} + \varepsilon_{t+1} \quad (E2.19)$$

A fórmula (E2.17) acima representa a regra ótima para a solução discricionária, onde o vetor resposta do instrumento, dado pela matriz  $F$ , está somente relacionado as variáveis pré-determinadas, diferentemente do caso de pré-comprometimento onde o vetor era também função dos multiplicadores de lagrange (*shadow price*) das variáveis não pré-determinadas.

Na continuação da apresentação da solução discricionária será reportado os valores de

$F_{disc}$ ,  $C_{disc}$  e  $M_{disc}$ , a saber:

$F_{disc}$ (1x3)
-48.919    -1.952    -3.902

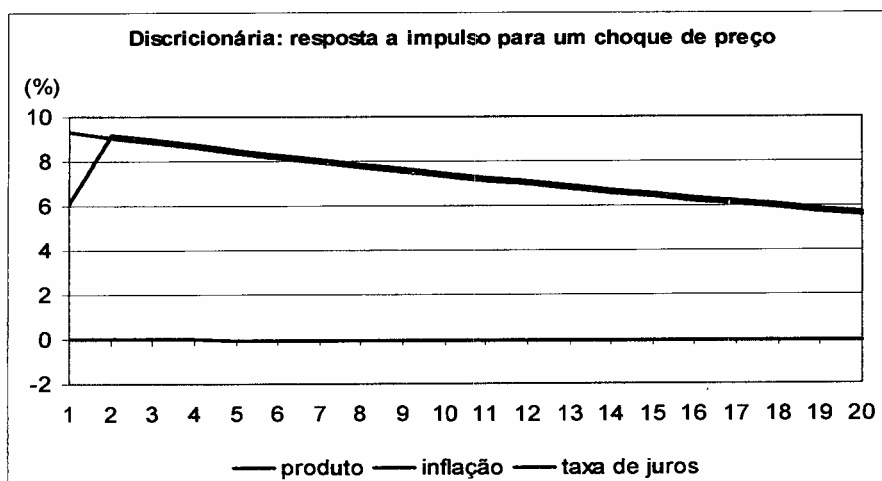
$C_{disc}$ (2x3)
0.158    0.149    0.013
12.262    0.099    0.976

$M_{disc}$ (3x3)
0.000    0.000    0.000
-0.065    0.789    -0.005
12.262    0.099    0.976

Como na solução anterior, a matriz  $M_{disc}$  possibilitará obter a dinâmica do sistema para um dado choque que atinja o mesmo. É importante notar que o vetor resposta do instrumento  $F_{disc}$  obtido difere razoavelmente do vetor resposta para a solução de pré-comprometimento (E2.16), obviamente comparando-se somente os 3 primeiros valores deste último, pois serão as mesmas variáveis nos dois casos. Uma implicação desta diferença será a distinta dinâmica do mesmo sistema quando este é atingido por um choque. Para demonstrar isto, será

apresentada a função resposta a impulso para um choque de preços ( $\varepsilon_{pt}$ ), refazendo o exercício anteriormente apresentado na solução de pré-comprometimento.

**Gráfico 29: Função resposta a impulso para solução discricionária.**



Comparando-se com o gráfico 1, a resposta do sistema a um choque de preço é bem distinta. A inflação estará permanecendo elevada por um período bem mais longo, e dentro do horizonte de 20 trimestres, a inflação não teria convergido, sendo que na solução de pré-comprometimento, ela retornaria a zero depois de 9 trimestres. Da mesma forma, a dinâmica da taxa de juros é visivelmente pior neste caso, pois deverá permanecer elevada durante todo o período, diferentemente do caso anterior, onde a taxa de juros possui uma trajetória mais suave. Por fim, a trajetória do hiato do produto não difere nos dois casos.

### 3) Regra simples

Como última possibilidade, o Banco Central pode decidir seguir uma regra simples para condução da política monetária, que neste caso assumiu-se ser uma regra de Taylor. A solução do sistema será dada pelas equações (3.17) e (3.18) da seção 3, que para as variáveis do modelo toma a forma:

$$x_{1t+1} = \underbrace{Z_{k\theta} T_{\theta\theta} Z_{k\theta}^{-1}}_{M_{simp}} x_{1t} + \varepsilon_{t+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt+1} \\ y_{t+1} \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = M_{simp} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \end{bmatrix} + \varepsilon_{t+1} \quad (E2.20)$$

$$x_{2t} = \underbrace{Z_{\lambda\theta} Z_{k\theta}^{-1}}_{C_{simp}} x_{1t} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} R_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = C_{disc} \begin{bmatrix} \varepsilon_{pt} \\ y_t \\ \Delta x_{t-1} \end{bmatrix} \quad (E2.21)$$

As equações acima são similares, na estrutura geral, ao caso anterior discricionário, apesar das definições de  $M_{simp}$  e  $C_{simp}$  serem bem diferentes. A seguir, são apresentados os valores obtidos para as matrizes  $M_{simp}$  e  $C_{simp}$ :

$M_{simp}$ (3x3)			
0.000	0.000	0.000	
-0.731	0.808	-0.074	
11.527	0.085	0.916	

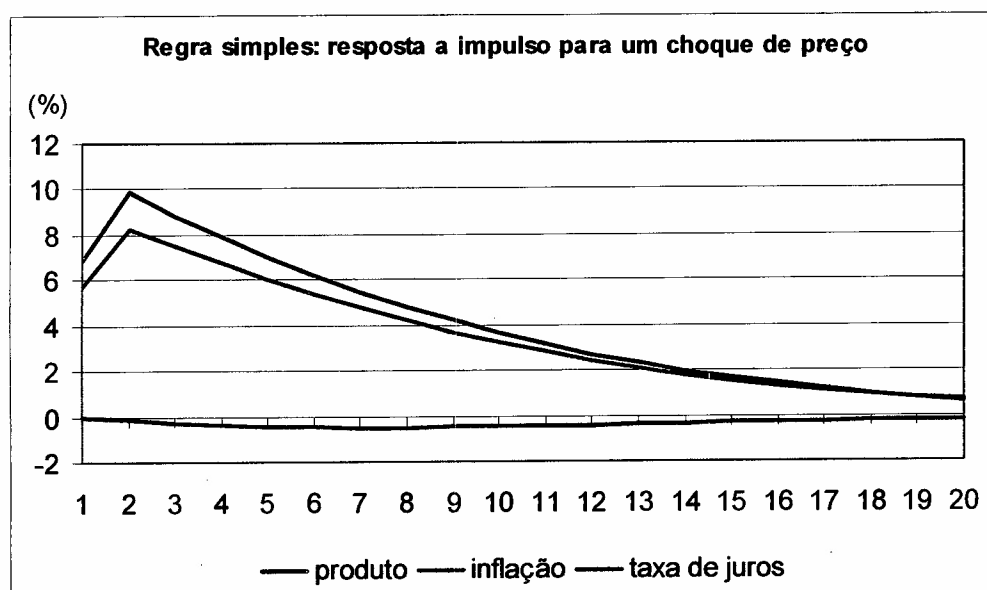
$C_{simp}$ (2x3)			
1.783	0.102	0.181	
11.527	0.085	0.916	

Neste caso, o vetor resposta do instrumento é pré-determinado, tomando a forma:  

$$F = [0 \quad -0.5 \quad -6(1-\omega) \quad 0 \quad -6\omega]$$

Da mesma maneira, a matriz  $M_{simp}$  representará a dinâmica do sistema, sendo possível a partir da equação (E2.20) construir a trajetória das variáveis em resposta a um choque que atinja a economia. Como forma de possibilitar a comparação com as dinâmicas anteriores, admiti-se que a economia será atingida por um choque de preço.

**Gráfico 30: Função resposta a impulso para regra simples.**



Observando-se a evolução do sistema acima, vê-se que a configuração é razoavelmente similar ao caso de pré-comprometimento. Uma boa propriedade desta regra é a convergência das variáveis após o choque, demonstrando que o sistema mantém-se controlável. A dinâmica da inflação demonstra que após um período inicial de crescimento do

nível de preços, ela retorna gradualmente a seu nível anterior, embora essa convergência seja lenta. Durante todo este processo, a taxa de juros mantém elevada praticamente acompanhando a trajetória da inflação. A trajetória do hiato do produto é bem estável, e não difere dos casos anteriores.

## APÊNDICE COMPUTACIONAL: ROTINAS USADAS PARA OBTENÇÃO DOS RESULTADOS DO TRABALHO

### Modelo1.m

```
function [A,B,K,Wbig,Q,U,R] = Modelo1 (a1,a2,a3,a4,x0,x1,mi,te1,te3,te4,qy,qpi,qf);
```

```
%%model->general setup
```

```
Ay = [ ( -(1/a2)*(a1+(a3*x1)/((1+mi)*x0)) ) ...      %%h (t-1) 1
        ( (1/a2)*((a3*x1)/((1+mi)*x0)) ) ...          %%h (t-2) 2
        ( (1/a2)*((a3)/((1+mi)*x0)) ) ...             %%pi(t-1) 3
        ( -(1/a2)*(a3)*(1-x0)/((1+mi)*x0)) ) ...      %%pi(t-2) 4
        ( 0 ) ...                                       %%dx(t) 5
        ( -(1/a2)*((a3)*mi*(1-x0)/(1+mi)) ) ...        %%dx(t-1) 6
        ( a4 ) ...                                       %%x(t-1) 7
        ( -(1/a2)*((a3)/(1+mi)) ) ...                  %%i(t-1) 8
        ( (1/a2) ) ...                                  %%e1(t) 9
        ( 0 ) ...                                       %%e3(t) 10
        ( (1/a2)*((a3*mi)/(1+mi)) ) ...                 %%e3(t-1) 11
        ( 0 ) ...                                       %%e4(t) 12
        ( -(1/a2)*((a3)/(1+mi)) ) ...                   %%e4(t-1) 13
        ( (1/a2) ) ...                                  %%h (t) 14
        ( 0 ) ];                                       %%pi(t) 15
```

```
Ap = [ ( (1/(x0*(1+mi)))*(x1) ) ...                  %%h (t-1) 1
        ( 0 ) ...                                       %%h (t-2) 2
        ( -(1/(x0*(1+mi)))*(1-x0) ) ...               %%pi(t-1) 3
        ( 0 ) ...                                       %%pi(t-2) 4
        ( 0 ) ...                                       %%dx(t) 5
        ( 0 ) ...                                       %%dx(t-1) 6
        ( 0 ) ...                                       %%x(t-1) 7
        ( 0 ) ...                                       %%i(t-1) 8
        ( 0 ) ...                                       %%e1(t) 9
        ( (1/(x0*(1+mi)))*(mi*x0) ) ...                %%e3(t) 10
        ( 0 ) ...                                       %%e3(t-1) 11
        ( (1/(x0*(1+mi))) ) ...                        %%e4(t) 12
        ( 0 ) ...                                       %%e4(t-1) 13
        ( -(1/(x0*(1+mi)))*(x1) ) ...                  %%h (t) 14
        ( (1/(x0*(1+mi))) ) ];                        %%pi(t) 15
```

```
A = [ zeros(1,13) 1      zeros(1);      %%x(t+1)=A*x(t)+B*u(t)+ e(t+)
      1      zeros(1,14);
      zeros(1,14) 1;
      1      zeros(1,14);
      zeros(1,15);
      zeros(1,4) 1      zeros(1,10);
      zeros(1,15);
      zeros(1,15);
      zeros(1,8) te1     zeros(1,6);
      zeros(1,9) te3     zeros(1,5);
      zeros(1,9) 1      zeros(1,5);
      zeros(1,11) te4    zeros(1,3);
      zeros(1,11) 1      zeros(1,3);
      Ay;
      Ap ];
```





```

D12 = D(:,n1+1:n1+n2);
D13 = D(:,n1+n2+1:n1+n2+k+n1);
D14 = D(:,n1+n2+k+n1+1:n1+n2+k+n1+n2);

G = [ G11 G14 G12 G13 ];      %%x1,x2,(u,p1),p2 -> x1,p2,x2,(u,p1)
D = [ D11 D14 D12 D13 ];

if ThisIsOctavePs == 1;        %%Octave
    [S,T,Z,lambda] = qz(G,D,'B');
else;                          %%MatLab
    [S,T,Q,Z] = qz(G,D);      %%MatLab: G=Q'SZ' and D=Q'TZ'; Paul S: G=QSZ' and D=QTZ', but Q isn't used
    [S,T,Q,Z] = reorder(S,T,Q,Z); % reordering of generalized eigenvalues in ascending order
end;

Stt = S(1:n,1:n);
Ttt = T(1:n,1:n);
Zkt = Z(1:n,1:n);
Zlt = Z(n+1:n+k+n,1:n);

if (cond(Zkt) > 1e+14) | (cond(Stt) > 1e+14);
    error('Zkt or Stt is singular');
end;
Zkt_1 = inv(Zkt);      %%inverting
Stt_1 = inv(Stt);

M = real(Zkt*Stt_1*Ttt*Zkt_1); %%[x1(t+1),p2(t+1)] = M*[x1(t),p2(t)]+e(t+1)
C = real(Zlt*Zkt_1);      %%[x2(t),u(t),p1(t)] = C*[x1(t),p2(t)]
%%-----

```

#### DiscAlgonomo.m

```

function [M,C,V,F] = DiscAlgonomo( A,B,Q,R,U,disc,n1,n2,Vt1,Ct1,...
    ConvCrit,Vweight,Fweight,CritLags,step,PrintIt );
%DiscAlg Solves the LQ problem under discretion,
%
% Purpose: Solving the LQ problem under discretion, iterating
%           backwards in time.
%
% Usage:    [M,C,V,F] = DiscAlg( A,B,Q,R,U,bet,n1,n2,Vt1,Ct1,...
%           ConvCrit,Vweight,Fweight,CritLags,Step,PrintIt );
% Input:    A,B,Q,R,U,bet,n1,n2: - see ComItAlg
%           Vt1    n1xn1 matrix: initial guess of value matrix
%           Ct1    n2xn1 matrix, initial guess of C in x2(t)=C*x1(t)
%           ConvCrit 2x1 convergence criteria for abs(V-Vt1)labs(F-Ft1)
%           Vweight scalar or n1xn1 matrix with weights for
%                   difference criterion for V
%           Fweight scalar or (n1+n2)x1 vector with weights for
%                   difference criterion for F
%           CritLags #lags of CritVar compared with ConvCrit
%           Step scalar in (0,1): factor of updating of V and F as
%                   in Vt1 = step*V + (1-step)*Vt1
%           PrintIt 1: printing iteration number
%                   2: printing iteration number and convergence criteria
%
% Output: M n1x1 matrix, x1(t+1) = M*x1(t) + e(t+1)
%         C n2xn1 matrix, x2(t)=C*x1(t)
% Paul Söderlind, Paul.Soderlind@hhs.se, Aug 2000
%-----
n = n1 + n2;
Ft1 = 1000;

Cdiff = 1000*ones(1+CritLags,2);
iter = 1;

```

```

while any( max(Cdiff) > (ConvCrit));    %%iterations

[ M,C,F,V ] = DiscAlgonomo2( A,B,Q,R,U, disc,n1,n2,Ct1,Vt1 ); %%solve period t

Vdiff = max( max( Vweight.*abs(V-Vt1) ) );    %%changes t+1 -> t
Fdiff = max( max( Fweight.*abs(F-Ft1) ) );
Cdiff = [Cdiff; Vdiff Fdiff];
Cdiff = Cdiff(2:size(Cdiff,1),:);    %%latest is last

Vt1 = step*V + (1-step)*Vt1;    %%"downdating"
Ct1 = C;
Ft1 = step*F + (1-step)*Ft1;

if PrintIt == 1;
    disp(iter);
elseif PrintIt == 2;
    disp([iter max(Cdiff)]);
end;

iter = iter + 1;

end;    %%end iterations
%-----

```

#### DiscAlgonomo2.m

```

function [M,C,Fs,Vs] = DiscAlgonomo2( A,B,Q,R,U, disc,n1,n2,Ct1,Vst1 );
%DiscAlg2 Solves the LQ problem under discretion in t.
% Purpose: Solving the LQ problem under discretion in t, given
%          C(t+1) and V(t+1).
%
% Usage:   [ M,C,Fs,Vs ] = DiscAlg2( A,B,Q,R,U,bet,n1,n2,Ct1,Vst1 );
%
% Input:   A,B,Q,R,U,bet,n1,n2: see ComItAlg
%          Ct1    - n2xn1 matrix, C(t+1) in x2(t+1) = C(t+1)x1(t+1)
%          Vst1   - n1xn1 matrix, V(t+1) value function matrix in t+1
%
% Output:  M       n1xn1 matrix,
%          C       n2xn1 matrix,
%          Fs      kxn1 matrix,
%          Vs      n1xn1 matrix,
% Paul Söderlind, Paul.Soderlind@hhs.se, Aug 2000
%-----
n = n1 + n2;

A11 = A(1:n1,1:n1);
A12 = A(1:n1,(n1+1):n);
A21 = A((n1+1):n,1:n1);
A22 = A((n1+1):n,(n1+1):n);
Q11 = Q(1:n1,1:n1);
Q12 = Q(1:n1,(n1+1):n);
Q21 = Q((n1+1):n,1:n1);
Q22 = Q((n1+1):n,(n1+1):n);

B1 = B(1:n1,:);
B2 = B(n1+1:n,:);
U1 = U(1:n1,:);
U2 = U(n1+1:n,:);

d1mat = inv(A22-Ct1*A12);
D = d1mat * (Ct1*A11-A21);
G = d1mat * (Ct1*B1-B2);

```

```

As = A11 + A12*D;
Bs = B1 + A12*G;

Qs = Q11 + Q12*D + D*Q21 + D*Q22*D;
Us = Q12*G + D*Q22*G + U1 + D*U2;
Rs = R + G*Q22*G + G*U2 + U2*G;

Fs = inv(Rs + disc*Bs*Vst1*Bs) * (Us' + disc*Bs*Vst1*As); %%u(t) = -F*x1(t)
Vs = Qs - Us*Fs - Fs*Us' + Fs*Rs*Fs + disc*(As-Bs*Fs)*Vst1*(As-Bs*Fs);

C = D - G*Fs;          %%x2(t)=C*x1(t)
M = A11 + A12*C - B1*Fs;  %%x1(t+1) = M*x1(t) + e(t+1)
%%-----

```

#### Função Impulso\_C.m

```

k = VarImpRespPs( M,Shock1,Tbig ); %%VAR of x1(t),p2(t)
lambda = k*C';          %%x2(t),u(t),p1(t)
uu = lambda(:,n2+1:n2+1); %%u(t)
x = [ k(:,1:n1) lambda(:,1:n2) ]; %%x(t) = [x1(t),x2(t)]
ypii_C = [ x(:,14) x(:,15) uu ];

tid = linspace(1,Tbig,Tbig)';
if ThisIsOctavePs == 1;    %%Octave is used
    title('Commitment: impulse response to a one std of price shock');
    plot( tid,ypii_C(:,1),'-1;Output;',...
          tid,ypii_C(:,2),'-2;Inflation;',...
          tid,ypii_C(:,3),'-3;Short interest rate;');
else;                      %%MatLab is used
    figure(1);
    plot( tid,ypii_C(:,1),'-1;Output;',...
          tid,ypii_C(:,2),'-2;Inflation;',...
          tid,ypii_C(:,3),'-3;Short interest rate;');
    legend('Output','Inflation','Short interest rate');
end;
disp('Commitment: impulse response to a one std of price shock (y,pi,i)');
disp( [linspace(1,Tbig,Tbig)' ypii_C(:,1:3)] );
%%-----

```

#### Função Impulso \_D.m

```

%%DISCRETION
x1 = VarImpRespPs( M_D,Shock1,Tbig ); %%VAR of x1(t)
x2 = x1*C_D';          %%x2(t)
x = [x1 x2];          %%x(t) = [x1(t),x2(t)]
uu = -x1*F';          %%u(t)
imp_D = [ x(:,14) x(:,15) uu ];

tid = linspace(1,Tbig,Tbig)';
if ThisIsOctavePs == 1;
    title('Discretion: impulse response to a one std of price shock');
    plot( tid,imp_D(:,1),'-1;Output;',...
          tid,imp_D(:,2),'-2;Inflation;',...
          tid,imp_D(:,3),'-3;Short interest rate;');
else;
    figure(2);
    plot( tid,imp_D(:,1),'-1;Output;',...
          tid,imp_D(:,2),'-2;Inflation;',...
          tid,imp_D(:,3),'-3;Short interest rate;');
    legend('Output','Inflation','Short interest rate');
end;

disp('Discretion: impulse response to a one std of price shock (y,pi,i)');
disp( [linspace(1,Tbig,Tbig)' imp_D(:,1:3)] );
%%-----

```

#### loss\_C.m

```

n=n1+n2
ek1=[0;0;0;0;0;0;0;0;0.01;0.01;0;0.01;0;0;0]
ek1_2=ek1*(ek1')
k1=reshape(inv(eye(n*n)-kron(M,M))*reshape(ek1_2,n*1,1),n,n);
H=[eye(n);C];
EK=H*k1*(H');
x1t=EK(1:13,1:13);
x2t=EK(1:13,16:18);
rx2t=EK(16:18,16:18);
Xi=[x1t x2t; x2t' rx2t];
Z=K*Xi*(K')
P=diag([qy;qpi;qf])
loss1=trace(P*Z)
%%-----

```

loss\_D.m

```

n=n1+n2
ek1=[0;0;0;0;0;0;0;0;0.01;0.01;0;0.01;0]
ek1_2=ek1*(ek1')
k1=reshape(inv(eye(n1*n1)-kron(M_D,M_D))*reshape(ek1_2,n1*1,1),n1,n1);
Cx=[ zeros(1,13) 1 zeros(1,1);          %%[y,pi,f] = K*[x,u]
     zeros(1,14) 1;
     zeros(1,7) -1 zeros(1,7)];
J=[eye(n1);C_D];
Ci=[0;0;1]
D=Cx*J+Ci*F
Ek1=D*k1*(D');
P=diag([qy;qpi;qf])
lossD=trace(P*Ek1)
%%-----

```

qzswitch.m

```

function [A,B,Q,Z] = qzswitch(i,A,B,Q,Z)
% Written by Chris Sims
% Takes U.T. matrices A, B, orthonormal matrices Q,Z, interchanges
% diagonal elements i and i+1 of both A and B, while maintaining
% Q'AZ' and Q'BZ' unchanged. Does nothing if ratios of diagonal elements
% in A and B at i and i+1 are the same. Aborts if diagonal elements of
% both A and B are zero at either position.

```

```

a = A(i,i); d = B(i,i); b = A(i,i+1); e = B(i,i+1);
c = A(i+1,i+1); f = B(i+1,i+1);
wz = [c*e-f*b, (c*d-f*a)'];
xy = [(b*d-e*a)', (c*d-f*a)'];
n = sqrt(wz*wz');
m = sqrt(xy*xy');
if n == 0
    return
else
    wz = n\wz;
    xy = m\xy;
    wz = [wz; -wz(2)', wz(1)'];
    xy = [xy; -xy(2)', xy(1)'];
    A(i:i+1,:) = xy*A(i:i+1,:);
    B(i:i+1,:) = xy*B(i:i+1,:);
    A(:,i:i+1) = A(:,i:i+1)*wz;
    B(:,i:i+1) = B(:,i:i+1)*wz;
    Z(:,i:i+1) = Z(:,i:i+1)*wz;
    Q(i:i+1,:) = xy*Q(i:i+1,:);
end
%%-----

```

reorder.m

```

function [s,t,q,z] = reorder(s,t,q,z)
% Takes U.T. matrices S, T, orthonormal matrices Q,Z, rearranges them

```

```

% so that abs(T(i,i)/S(i,i)) are in ascending order
% while preserving U.T. and orthonormal properties and Q'AZ' and
% Q'BZ'.
n = size(s,1);
i = 1;
while i<=n-1;
    if abs(t(i,i)*s(i+1,i+1))>abs(s(i,i)*t(i+1,i+1));
        [s,t,q,z] = qzswitch(i,s,t,q,z);
        if ~(i==1);i = i-2;end
    end
    i=i+1;
end
end
%%-----

```

#### VarImpRespPs.m

```

function xM = VarImpRespPs(aa,epsilon_1,Tbig);
%VarImpRespPs Calculates impulse response function of a VAR(1) system.
%      x(t) = aa * x(t-1) + epsilon(t)
%
% Usage:  xM = VarImpResp(aa,epsilon_1,Tbig);
%
% Input:  aa      - VAR(1) matrix, see above
%         epsilon_1 - vector of shocks in initial period.
%         Tbig    - scalar, last period to calculate for
% Paul.Soderlind@hhs.se
%-----
xM = zeros(Tbig,n); %%Simulate impulse response function
xM(:,1) = NaN;
x1_t_1 = zeros(n,1); %%starting vector
t = 1;
while t <= Tbig;
    if t == 1;
        epsilon = epsilon_1;
    else;
        epsilon = zeros(n,1);
    end;
    x1 = aa*x1_t_1 + epsilon;
    xM(t,:) = x1';
    x1_t_1 = x1;
    t = t + 1;
end;
%%-----

```

## BIBLIOGRAFIA

---

- Andrade, J.P. & Divino, J.A. (2001), *Optimal Rules for Monetary Policy in Brazil*, IPEA, texto para discussão 806
- Backus, D. & Driffill, J. (1986), *The Consistency of Optimal Policy in Stochastic Rational Expectations Models*, CEPR, discussion paper 124
- Blanchard, O. & Kahn, C. (1980), *The Solution of Difference Models under Rational Expectations*, *Econometrica* 48 (5): 1305-1311
- Ball, L. (1997), *Efficient Rules for monetary policy*, NBER working paper 5952
- Ball, L. (1999), *Policy Rules for Open Economy*, in Taylor, J.B. (ed.), *Monetary Policy Rules*, London: The University of Chicago Press, p127-156
- Barro, R. & Gordon, D. (1983), *A positive theory of Monetary Policy in a natural rate model*, *Journal of Political Economy* 91, 589-610
- Battini, N. & Haldane, A.G. (1999), *Forward-looking rules for monetary policy*, in Taylor, J.B. (ed.), *Monetary Policy Rules*, Bank of England working paper 119
- Battini, N. & Nelson, E. (2000), *Optimal Horizons for Inflation Targeting*, in Taylor, J.B. (ed.), *Monetary Policy Rules*, London: The University of Chicago Press, p.157-92
- Bogdanski, J, Tombini, A. A. & Werlang, S. R. C. (2000) *Implementing Inflation Targeting in Brazil*, Banco Central do Brasil, Working Paper Series n °1
- Bonomo, M.A. & Brito, R.D (2001), *Regras Monetárias e Dinâmica Macroeconômica no Brasil: Uma Abordagem de Expectativas Racionais*, Banco Central do Brasil, Working Paper Series n° 28
- Currie, D. & Levine, P. (1985), *Optimal Feedback Rules in an Open Economy Macromodel with Rational Expectations*, *European Economic Review*, 27: 141-63
- Currie, D. & Levine, P. (1993), *Rules, Reputation and Macroeconomic Policy Coordination*, Cambridge, Cambridge University Press
- Chow, G.C. (1970), *Analysis and Control of Dynamic Economic System*, John Wiley & Sons, New York
- Clarida, R, Gali, J. & Gertler, M (1999), *The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective*, *Journal of Economic Literature*, vol. XXXVII, p. 1661-1707
- Dennis, R. (2001), *Optimal Policy in Rational Expectations Models: New Solution Algorithms*, Economic Research Department Federal Reserve Bank of San Francisco
- Faust, J. W. , & Svensson, L. E. O. (2000) *Credibility and Transparency: Monetary Policy with Unobservable Goals*, *International Economic Research*, Texto não publicado disponível no url <http://www.iies.su.se/leosven/>
- Freitas, P.S & Muinhos, M. K (2001), *A Simple Model for Inflation Targeting in Brazil*, Banco Central do Brasil, trabalhos para discussão 18

Freitas, P.S, Goldfajn, I. & Freitas, A.A. (2001), *Inflation Targeting in Brazil: Shocks, Backward-Looking Prices and IMF Conditionality*, Banco Central do Brasil, trabalhos para discussão 24

Fuhrer, J. C. (1994) *Optimal Monetary Policy and the sacrifice Ratio*, em Jeffrey C. Fuhrer (ed.), *Goals, Guidelines and Constraints Facing Monetary Policymakers*, Federal Reserve Bank of Boston

Fuhrer, J. C. & Moore, G. R. (1995) *Inflation Persistence*, *Quarterly Journal of Economics*, vol 110, 127-59

Fuhrer, J. C. (1997) *Inflation/ Output Variance Trade-offs and Optimal Monetary Policy*, *Journal of Money, Credit, and Banking* 29, 214-34

Klein, P. (1997), *Using the generalized schur form to solve a system of linear expectational difference equations*, In: *Papers on the Macroeconomics of Fiscal Policy* (Dissertation, Monograph Series No. 33, Institute for International Economic Studies, Stockholm University)

Klein, P. (2000), *Using the generalized schur form to solve a multivariate linear rational expectations model*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 24, p. 1405-23

Kylland, F. E. & Prescott, E. C. (1977) *Rules and than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans*, *Journal of Political Economy* 85, 473-93

Kylland, F. E. & Prescott, E. C. (1980) *Dynamic Optimal Taxation, Rational Expectations, and Optimal Control*, *Journal of Economic Dynamics and Control* 2, 79-91

Leitemo, K. & Soderstrom, Ulf (2001), *Simple monetary policy rules and exchange rate uncertainty*, *Research Department of Norges Bank*, working papers

Lucas, R.E. (1976), *Econometric policy evaluation: A critique*, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 1:19-46

Moreira, A. R. B. & Cavalcanti, M. A. F. H. (2001), *Robustness and Stabilization Properties of Monetary Policy Rules in Brazil*, IPEA, Texto para Discussão n° 798

McCallun, B.T. (2000), *The Present and Future of Monetary Policy Rules*, Paper não publicado, pode ser encontrado no url: <http://wpweb2k.gsia.cmu.edu/faculty/mccallum/research.html>

McCallun, B.T. & Nelson, E (2000), *Timeless Perspective vs. Discretionary Monetary Policy in forward-looking models*, Paper não publicado, pode ser encontrado no url: vide acima.

Muinhos, M.K., Freitas, P.S. & Araújo, Fabio (2001), *Uncovered Interest Parity with Fundamentals*, Banco Central do Brasil, trabalhos para discussão 19

Muinhos, M.K. (2001), *Inflation Targeting in na Open Financially Integrated Emerging Economy: the case of Brasil*, Banco Central do Brasil, trabalhos para discussão 26

Orphanides, A. & Wilcox, D.W. (1996), *The Opportunistic Approach to Disinflation*, *Finance Economic Discussion*, Paper Series 96-24, Federal Reserve Board.

Rudebusch, G.D & Svensson, L.E.O. (1999), *Policy Rules for Inflation Targeting*, in Taylor, J.B. (ed.), *Monetary Policy Rules*, London: The University of Chicago Press, p. 203-262

Sargent, T.J. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press, Cambridge, MA

- Soderlind, Paul (1999), *Solution and Estimation of RE Macromodels with Optimal Policy*, European Economic Review 43:813-23
- Svensson, L.E.O. (2000), *Open-Economy Inflation targeting*, Journal of International Economics 50: 155-183
- Svensson, L.E.O. (1994), *Why Exchange the Rate Bands?: Monetary independence in spite of fixed exchange rates*, Journal of Monetary Economics 33:157-99
- Svensson, L.E.O. (1997b), *Inflation targeting: Some extensions*, NBER working paper 5962
- Svensson, L.E.O. & Woodford, M. (1999), *Implementing Optimal Policy through Inflation-Forecast Targeting*, Texto não publicado disponível no url <http://www.iies.su.se/leosven/>
- Svensson, L.E.O. (2000), *Open-Economy Inflation targeting*, Journal of International Economics 50: 155-183
- Svensson, L.E.O. (2001), *What is wrong with Taylor Rules? Using Judgment in Monetary Policy through Targeting Rules*. Texto não publicado disponível no url <http://www.iies.su.se/leosven/>
- Taylor, J.B. (1993), *Discretion versus policy rules in practice*, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 39:195-214
- Taylor, J.B. (1999), *Introduction*, in Taylor, J.B. (ed.), *Monetary Policy Rules*, London: The University of Chicago Press, p. 1-14
- Taylor, J.B. (2000), *How the Rational Expectations Revolution Has Changed Macroeconomic Policy Research*, 12<sup>th</sup> World Congress of the International Economic Association, Bueno Aires, revised draft.
- Taylor, J.B. (2000), *Recent Developments in the Use of Monetary Policy Rules*, Speech at the conference "Inflation Targeting and Monetary Policies in Emerging Economies", Jakarta
- Woodford, M. (1999), *Comentary: How Should Monetary Policy Be Conducted in a Era of Price Stability?*, In: *New Challenges for Monetary policy: A Symposium Sponsored by the Federal Reserve Bank of Kansas City*. Federal Reserve Bank of Kansas City. 277-316.