Fundação Getulio Vargas

Escola de Pós-Graduação em Economia - EPGE

Economia de Lucas e Consumidores Heterogêneos

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia

da Fundação Getulio Vargas como requisito de obtenção do

título de Mestre em Economia

Aluno: Pedro Barreira Albano de Aratanha

Orientador: Luis Henrique Bertolino Braido

Rio de Janeiro

Julho 2008

Fundação Getulio Vargas

Escola de Pós-Graduação em Economia - EPGE

Economia de Lucas e Consumidores Heterogêneos

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia

da Fundação Getulio Vargas como requisito de obtenção do

título de Mestre em Economia

Aluno: Pedro Barreira Albano de Aratanha

Banca Examinadora:

Luis Henrique Bertolino Braido (FGV/EPGE)

Ricardo de Oliveira Cavalcanti (FGV/EPGE)

José Valentim Vicente (Banco Central do Brasil)

Rio de Janeiro

Julho 2008

Agradecimentos

Agradeço a Luis Braido pelas proveitosas discussões, ao apoio da família e aos suportes da CAPES e da FAPERJ.

Resumo

Esta dissertação descreve três abordagens utilizadas para incorporar heterogeneidade numa economia de Lucas. Em mercados incompletos, essa hipótese oferece uma oportunidade de enriquecimento dos resultados de apreçamento obtidos de um modelo de agente representativo.

Métodos recursivos são explorados como poderosa ferramenta para se modelar economias, encontrar equilíbrios, bem como desenvolver algoritmos computacionais. Na primeira abordagem, é mostrada a existência de uma função transição, que pode ser arbitrariamente complicada, mapeando o estado hoje nos possíveis estados amanhã. Na segunda abordagem, insere-se a possibilidade de *default* com colateral. Agora também é possível se construir uma função política que mapeia choques exógenos e distribuição de riqueza em preços e decisões de carteira.

Finalmente, na terceira abordagem, que difere completamente das outras, uma equação de Euler modificada é obtida convenientemente modelando-se choques idiossincráticos e persistentes.

Abstract

This dissertation describes three approaches used to incorporate heterogeneity in a Lucas tree economy. In incomplete markets, this assumption may offer the opportunity to enrich the pricing implications of the representative-consumer model.

The recursive method is explored as a powerful tool in modeling economies, finding equilibria and developing computer algorithms as well. In the first approach, it is shown the existence of transition function, which can be arbitrarily complicated, mapping the state today into the state tomorrow. In the second approach, default and collateral are considered. Now it is also constructed a policy function that maps exogenous shock and wealth distribution into prices and portfolio choices.

Finally, in the third approach, which differs completely from the former ones, a modified Euler equation is attained by judiciously modelling idiossincratic and persistent shocks.

Palavras-chave: árvore de Lucas; heterogeneidade; equilíbrio recursivo

Sumário

1 Introdução

A explicação de fenômenos econômicos a partir do comportamento de indivíduos e firmas talvez seja a principal característica incorporada às teorias macroeconômica e de finanças modernas.

Um objetivo muito perseguido, por exemplo, é o de explicar preços na economia como resultado de várias decisões tomadas individualmente e 'na margem', como se costuma dizer. Afinal, por que pagamos 'x reais' pelo seguro do carro e 'y reais' pela ação de uma determinada empresa?

Um arcabouço muito usado para responder a perguntas desse tipo tem sido os modelos de equilíbrio geral. Nele, cada agente da economia quer o melhor para si mesmo. Se forem indivíduos, tomarão decisões de consumo e de alocações de renda com esse fim. Na prática, cada um deles tentará redistribuir sua riqueza ao longo do tempo e entre diferentes estados da economia, através de mercados competitivos.

Mas o que o seguro do carro ou a ação de certa empresa têm há ver com isso? Ora, eles são justamente alguns dos instrumentos que permitem ao indivíduo redistribuir sua renda. O seguro do carro, por exemplo, permite que ele leve o dinheiro dos instantes em que está tudo bem com seu automóvel, para aquele período de ocorrência do sinistro. O preço desse seguro deverá 'equilibrar' as decisões de todos os outros indivíduos em relação a esse instrumento, bem como, todos os demais acontecimentos da economia em questão.

Apesar de todo o esforço, esses modelos ainda estão muito aquém de explicar o comportamento dos preços que observamos. Basicamente, é essa a mensagem que Mehra e Prescott (1985) passam ao analisar a abordagem de Lucas (1978) acerca dos preços de ativos.

Grosso modo, o que Lucas (1978) elegantemente mostra é que os preços dos ativos, em uma economia de trocas puras, podem ser descritos como função apenas dos choques exógenos. Mehra e Prescott (1985) rebatem, mostrando que se assim fosse, então estaríamos inexplicavelmente pagando prêmios de risco muito elevados, ou então detestaríamos terrivelmente correr riscos.

Dentre as várias propostas para se contornar o problema, esta dissertação se concentra naquela que ataca a homogeneidade dos agentes na economia de Lucas. Assim, serão descritos aqui três artigos que tomam como ponto de partida uma economia de Lucas, porém, sem agente representativo.

Para começar, a próxima seção descreve muito concisamente o que é uma economia de Lucas, como concebida em seu artigo *Asset Prices in an Exchange Economy,* além do resultado mencionado acima. Outras conseqüências imediatas, e da mesma forma interessantes, sobre apreçamento de ativos são explicadas.

A seções três e quatro têm em comum o fato de abordarem a questão da heterogeneidade sob a perspectiva dos métodos recursivos. Aliás, nessas duas seções, a dissertação ganha uma nova dimensão, qual seja, a de modelagem de economias com estruturas recursivas.

A seção três, baseada no artigo *Stationary Markov Equilibria,* lida com o problema de uma maneira tão geral que traz pouco *insight* sobre o comporta-

mento dos preços quando os indivíduos são diferentes e os mercados incompletos. Por outro lado, explora habilmente a recursividade da economia, e se utiliza disso para provar que existe equilíbrio. Os estados contém tanto variáveis exógenas quanto endógenas. Inclui, portanto, os preços. O que se mostra é a existência de uma função transição que mapeia estado hoje em estados amanhã. Contudo, essa função pode ser arbitrariamente complicada.

Na seção quatro, vemos como o artigo *Stationary Equilibria in Asset-Pricing Models with Incomplete Markets and Collateral* modela essa mesma economia, no entanto, com a possibilidade de *default* com colateral. Continuamos com uma função transição mapeando estados, mas agora para auxiliar uma correspondência política que mapeia choque exógeno e distribuição de riqueza em preços e carteiras de ativos. A nova modelagem permite que se implemente computacionalmente um equilíbrio, e que se tire daí alguns resultados mais concretos sobre o comportamento dos indivíduos frente ao risco. Fica ainda exposta a vantagem de se aproveitar a estrutura recursiva da economia para simulações e outros cálculos.

A seção cinco finalmente desenvolve, como no artigo *Asset Pricing with Heterogeneous Consumers*, uma expressão que poderia explicar preços de ativos em economias onde não é possível a representação por um único agente. Para tanto, a técnica utilizada para encontrar equilíbrios difere completamente daquelas descritas nas seções anteriores. Com efeito, a caracterização dos preços de equilíbrío segue justamente do fato de haver primitivos com estrutura não recursiva. Uma nova equação de Euler é obtida, modelando-se cuidadosamente choques idiossincráticos persistentes.

2 Árvore de Lucas

Em seu artigo seminal de 1978, *Asset Prices in an Exchange Economy*, Robert Lucas aborda o problema de como avaliar uma trajetória incerta de fluxos de pagamentos ao longo do tempo. Seu objetivo principal é analisar teoricamente o comportamento estocástico de preços de equilíbrio dos ativos, em uma certa economia. Sua grande conquista: obtenção de preços como função de choques exógenos e como reflexo do padrão recursivo da economia.

Inicialmente, suponha uma economia de trocas puras, um único bem e infinitos indivíduos. Considere-os maximizadores de uma utilidade esperada von Neumann-Morgenstern. Para que soluções de canto sejam evitadas, considere a função utilidade Bernuilli $u : R_+ \to R_+$ estritamente côncava. E além disso, crescente e duas vezes diferenciável. Esses agentes vivem infinitos períodos t, nos quais devem decidir o quanto consumir, c_t, do bem e os *shares* dos n ativos a serem comprados e vendidos, $\theta_t \in R^n$.

A cada período ocorre a realização de um estado da natureza, $y \in Y$. Os ativos pagam, em valores reais, de acordo com o estado sorteado. Assim, em y o ativo j gera um dividendo de $d_{jt}(y)$. Mercados competitivos abrem-se seqüencialmente. Ou seja, os indivíduos, a cada período, são capazes de observar os preços, $p_t \in R^n$, e de realizar suas negociações, após receberem seus dividendos.

Dado um fator de desconto $\beta \in (0,1)$, um indivíduo, portanto, resolve o seguinte problema de otimização:

$$\max_{\{c_t,\theta_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(c_t\right)\right] \qquad \text{s.a.} \qquad \begin{aligned} c_t+\theta_{t+1}p_t \quad \leq \quad & \theta_t\left(p_t+d_t\right) \quad \forall t \\ & c_t,\theta_{t+1}\geq 0 \quad \forall t \\ & \theta_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

Observe nas restrições a estrutura dos mercados. Do lado direito da primeira inequação, o valor de toda riqueza que o sujeito possui no tempo t. Do lado esquerdo, de que maneira poderá distribuí-la: consumi-la hoje ou transferi-la para amanhã, entre os possíveis estados da natureza.

Substitua, primeiramente, as restrições na função objetivo. As condições de primeira ordem podem assim ser calculadas:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_{j,t+1}}\left\{E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left[\theta_t\left(p_t+d_t\right)-\theta_{t+1}p_t\right]\right\}=0$$

$$E_t\left[u'\left(c_{t+1}\right)\left(p_{j,t+1}+d_{j,t+1}\right)-u'\left(c_t\right)p_{jt}\right]=0$$

$$E_t\left[u'\left(c_{t+1}\right)\left(p_{j,t+1}+d_{j,t+1}\right)\right]=u'\left(c_t\right)p_{jt}$$

Dessa forma, obtemos que a solução é uma seqüência de consumos e portfólios ao longo do tempo, satisfazendo, necessariamente, em cada período t e para cada ativo j uma equação funcional para os preços, a equação de Euler estocástica, como se segue:

$$p_{jt}=E_t\left[\beta\frac{u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)}\left(p_{j,t+1}+d_{j,t+1}\right)\right] \tag{1}$$

ou, se definirmos o retorno bruto do ativo como $R_{j,t+1}=\frac{\left(p_{j,t+1}+d_{j,t+1}\right)}{p_{jt}}$,

$$E_t\left[\beta\frac{u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)}R_{j,t+1}\right]=1 \tag{2}$$

A expressão (1) também pode ser concisamente escrita na forma de uma equação básica de apreçamento:

$$p_{jt}=E_t\left[m_{t+1}x_{j,t+1}\right]$$

onde $m_{t+1}\equiv\beta\frac{u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)}$ é o fator estocástico de desconto e $x_{j,t+1}\equiv p_{j,t+1}+d_{j,t+1}$ é simplesmente o *payoff* do ativo j em $t+1$. Vale observar que a equação básica de apreçamento pode ser obtida por outras vias que não a do problema do consumidor. No nosso caso, o fator estocático de desconto ficou caracterizado como acima.

Em poucas palavras, o preço do ativo nada mais é do que um valor esperado de seu *payoff* futuro descontado por um fator extraído da economia.

O referido artigo é reconhecido como uma significante contribuição à literatura de finanças e de macroeconomia. Até aqui, entretanto, nada que o caracterize como tal. A aparente simplicidade da equação (1) não reflete a real dificuldade para se computar o preço de **equilíbrio** do ativo.

Observe novamente a equação (1). Primeiro: para cada ativo j, ela irá gerar uma seqüência de preços dependente de toda a trajetória estocástica de consumo. Note que para se calcular a seqüência de planos de consumos de equilíbrio, devemos considerar, além das restrições orçamentárias de cada um dos indivíduos, também as condições de *market clearing* da economia. Segundo: as esperanças são condicionais a cada tempo t. Isto é, a probabilidade de se realizar um certo estado da natureza em $t+1$ dependerá tanto do estado em t quanto do próprio período t em que se encontra a economia.

Tal complexidade também pode ser notada da seguinte maneira. Suprima em (1) o índice j, para simplificar a notação. Reescreva (1) para $t+1$ e substitua-a na original. Use a lei das expectativas iteradas. Reescreva novamente (1), agora para $t+2$, e substitua-a na expressão anterior, usando a mesma lei. Repita esse procedimento para $t+3$, $t+4$, e assim sucessivamente até que se possa reconhecer um padrão. Vejamos:

$$
\begin{aligned}
p_t &= E_t\left[\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}(p_{t+1}+d_{t+1})\right] \\
&= E_t\left[\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\left(E_{t+1}\left[\beta\frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_{t+1})}(p_{t+2}+d_{t+2})\right]+d_{t+1}\right)\right] \\
&= E_t\left[E_{t+1}\left[\beta^2\frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t)}(p_{t+2}+d_{t+2})\right]+\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}d_{t+1}\right] \\
&= E_t\left[\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}d_{t+1}+\beta^2\frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t)}d_{t+2}\right]+E_t\left[\beta^2\frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t)}p_{t+2}\right] \\
&= \ldots \\
&= E_t\left[\sum_{i=1}^{\infty}\beta^i\frac{u'(c_{t+i})}{u'(c_t)}d_{t+i}\right]+\lim_{i\to\infty}E_t\left[\beta^i\frac{u'(c_{t+i})}{u'(c_t)}p_{t+i}\right]
\end{aligned}
$$

Suponha, por fim, a condição de transversalidade: o segundo termo do lado direito da igualdade acima deve tender a zero. Em palavras, estamos impedindo que os preços cresçam a uma rápida velocidade tal que o indivíduo queira comprar o ativo hoje só para vendê-lo no futuro, mesmo não gerando dividendos. Então teremos que:

$$p_t = E_t\left[\sum_{i=1}^{\infty}\beta^i\frac{u'(c_{t+i})}{u'(c_t)}d_{t+i}\right]$$

ou, usando-se a definição de fator estocástico de desconto:

$$p_t = E_t\left[\sum_{i=1}^{\infty}m_{t+i}d_{t+i}\right] \tag{3}$$

O preço, portanto, pode ser obtido do valor esperado da soma de todos os dividendos gerados no futuro, devidamente descontados. Agora note: além das

duas dificuldades mencionadas anteriormente, há aquela relacionada ao cálculo numérico de uma série, computacionalmente inviável!

Para contorná-las, Lucas (1978) se apóia numa condição central: a existência de um agente representativo. Para tanto, impõe que os indivíduos sejam idênticos. Esse ponto, base para grande parte da macroeconomia moderna, é crucial.

Observe, no entanto, que a representatividade por um único agente também pode ser obtida quando se tem indivíduos heterogêneos, desde que se imponha a completeza dos mercados. De fato, com suficiente número e tipos de ativos para se criar o efeito de mercados completos, prova-se a existência de equilíbrio competitivo (Bewley (1972)), donde, pelo Primeiro Teorema do Bem Estar, também constituirá o equilíbrio de um planejador central convenientemente escolhido. Grosso modo, o mercado completo permite que se iguale as razões da utilidades marginais entre os indivíduos, criando, assim, o efeito de um único agente que os represente.

Enfim: o agente representativo, em equilíbrio, irá deter todos os ativos existentes e consumirá todos os frutos (dividendos) gerados por cada árvore (ativo), em cada período:

$$\theta_t = \bar{1} \qquad \forall t$$
$$c_t = \sum_{j=1}^{n} d_{jt} \qquad \forall t \tag{4}$$

Uma economia assim descrita costuma ser denominada *endowment economy*. Nas palavras de Cochrane (2005):

> *Nondurable consumption appears every period. There is nothing anyone can do to save, store, invest, or otherwise transform consumption goods this period to consumption goods next period. Hence, asset prices must adjust until people are just happy consuming the endowment process. In this case, consumption is exogenous and asset prices adjust.*

Dessa forma, a análise fica restrita ao comportamento dos preços diante das variações exógenas dos pagamentos dos ativos. Observe que, em contrapartida, esses preços não mais poderão refletir o comportamento de cada agente ou gerar qualquer informação acerca dos seus riscos idiossincráticos (pois, obviamente, estes são redundantes sob a hipótese de homogeneidadeou de mercados completos). É perdida, portanto, a capacidade de se analisar mais profundamente o comportamento do indivíduo frente ao risco intertemporal e entre estados, já que não há negociações de qualquer espécie. Seria como se o consumo e o portfólio fossem trajetórias exógenas. Daí o nome *endowment economy*. Esses são os principais custos decorrentes da hipótese feita.

Por fim, Lucas (1978) supõe que d_t segue um processo Markoviano, definido por uma função de transição dada. Na economia até aqui exposta, essa função de transição pode ser representada por uma matriz P, cujo elemento P_{lm} é a probabilidade de realização do estado y_m dado que no período anterior ocorreu

y_l. Grosso modo, a propriedade Markoviana significa que a probabilidade de ocorrência de uma variável aleatória, dado todo o histórico de realizações até aquele momento é simplesmente a probabilidade de sua ocorrência condicionada unicamente à realização no período anterior. Ora, daí se segue as bases para a construção de uma estrutura recursiva da economia.

Podemos agora analisar a equação (1) sob essas condições: agente representativo e processo Markoviano. Os consumos são substituídos pela expressão (4), lembrando-se que os dividendos são funções apenas dos estados da natureza. A esperança condicional em t torna-se condicional apenas ao estado realizado, digamos, y_l. O preço do ativo j em $t+1$ não depende mais de tal período, mas simplesmente dos possíveis estados. Isto é, d_k e p_k são variáveis aleatórias sobre Y, o conjunto de estados da natureza, qualquer que seja o ativo k. Assim, tem-se que:

$$p_j\left(y_l\right)=E\left[\beta\frac{u'\left(\sum\limits_{k=1}^{n}d_k\right)}{u'\left(\sum\limits_{k=1}^{n}d_k\left(y_l\right)\right)}\left(p_j+d_j\right)\right]$$

Faça uso da matriz de transição para obter:

$$p_j\left(y_l\right)=\sum_m P_{lm}\beta\frac{u'\left(\sum\limits_{k=1}^{n}d_k\left(y_m\right)\right)}{u'\left(\sum\limits_{k=1}^{n}d_k\left(y_l\right)\right)}\left(p_j\left(y_m\right)+d_j\left(y_m\right)\right) \tag{5}$$

Note que, para cada ativo, há simplesmente tantos preços quanto estados da natureza. Cada preço de equilíbrio dependerá do choque exógeno, isto é, dos dividendos do próprio e dos outros ativos. Dessa forma, os cálculos tornam-se incrivelmente facilitados, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1 *Considere uma economia a la Lucas com dois estados da natureza: crescimento, y_1, e recessão, y_2. A matriz de transição é dada por:*

$$P=\left[\begin{array}{cc}2/3 & 1/3\\ 1/2 & 1/2\end{array}\right]$$

Há dois ativos: um livre de risco, pagando $(1,1)$, e outro arriscado, gerando dividendos $(3,2)$, respectivamente em y_1 e y_2. Denomine-os ativos 1 e 2.

O agente representativo maximiza uma função utilidade CRRA, $u(c)=\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, com $\gamma=0,5$. Suponha $\beta=0,98$. Quais os preços de equilíbrio do ativo arriscado nessa economia?

Para resolver esse problema, comece supondo que a economia hoje se encontra em estado de crescimento. Note que a probabilidade de, amanhã, continuar em crescimento é $2/3$. De entrar em recessão, $1/3$. Basta aplicar a equação (5). Como $u'(c)=c^{-\gamma}$, temos:

$$p_2\left(y_1\right)=\frac{0,98}{\left(1+3\right)^{-0,6}}\left[\frac{2}{3}\left(1+3\right)^{-0,6}\left(p_2\left(y_1\right)+3\right)+\frac{1}{3}\left(1+2\right)^{-0,6}\left(p_2\left(y_2\right)+2\right)\right]$$

Se supomos que hoje a economia se encontra em recessão, analogamente teremos:

$$p_2(y_2) = \frac{0,98}{(1+2)^{-0,6}}\left[\frac{1}{2}(1+3)^{-0,6}(p_2(y_1)+3) + \frac{1}{2}(1+2)^{-0,6}(p_2(y_2)+2)\right]$$

Resolvemos o sistema de equações lineares anteriores e obtemos que o preço do ativo arriscado quando a economia está crescendo é $p_2(y_1) = 133,5$ *e quando está em recessão é* $p_2(y_2) = 115,5$. *O mesmo pode ser feito para os preços do ativo livre de risco.*

Suponha agora que exista um ativo livre de risco. Isto é, possui *payoff* unitário em qualquer estado. Logo se $R_{F,t+1}$ é seu retorno, então da equação de Euler (2), temos:

$$E_t[m_{t+1}R_{F,t+1}] = 1 \Rightarrow R_{F,t+1} = \frac{1}{E_t[m_{t+1}]}$$

Podemos desenvolver (2), usando o fato de que $cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$:

$$E_t[m_{t+1}R_{j,t+1}] = 1$$
$$cov(m_{t+1}, R_{j,t+1}) + E_t[m_{t+1}]E[R_{j,t+1}] = 1$$
$$E[R_{j,t+1}] = \frac{1}{E_t[m_{t+1}]} - cov(m_{t+1}, R_{j,t+1})$$
$$E[R_{j,t+1}] - R_{F,t+1} = -R_{F,t+1}cov(m_{t+1}, R_{j,t+1})$$

ou ainda,

$$E[R_{j,t+1}] - R_{F,t+1} = -R_{F,t+1}cov\left(\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, R_{j,t+1}\right) \tag{6}$$

A expressão do lado esquerdo dessa igualdade é conhecida como o retorno esperado em excesso do ativo j, ou mais usualmente, como prêmio de risco.

Observe que o prêmio de risco será positivo (negativo) sempre que seu retorno covariar negativamente (positiv.) com o fator estocástico de desconto.

Se a função utilidade for como no exemplo acima, CRRA, então $m_{t+1} = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}$. Suponha que um ativo possua retornos cada vez maiores, à medida que o fator estocástico de desconto diminui, i.e., covariância negativa. Isso significa que ele 'paga bem' em momentos em que a economia cresce, $c_{t+1} > c_t$. Como conseqüência, seu prêmio de risco é positivo, ou seja, os indivíduos esperam que tenha um retorno suficientemente mais alto que a taxa livre de risco para comprá-lo. Por outro lado, se o ativo 'paga bem' em períodos de crise, então os indivíduos irão demandá-lo mesmo tendo prêmio de risco negativo. É o caso do seguro, por exemplo.

O problema com a expressão (6) reside no fato de que os prêmios de risco observados são significativamente maiores do que aqueles gerados por (6), quando

são utilizados dados históricos de consumo agregado. Para explicar os retornos em excesso realmente observados, é preciso uma maior volatilidade nos padrões de consumo agregado.

O que acabamos de descrever pode ser entendido como uma versão do *equity premium puzzle*. Originalmente, Mehra e Prescott (1985) chegaram à conclusão de que, ao se partir da equação de Euler de uma economia de agente representativo (2) e usando os retornos observados historicamente, os indivíduos apresentariam uma aversão ao risco absurdamente alta, se comparada com a realidade.

Alguns economistas acreditam que o *puzzle* seja gerado pelo fato de se considerar um agente representativo. Isso de certa maneira 'esconderia' os efeitos de riscos idiossincráticos sobre os preços dos ativos.

3 Lucas com Heterogeneidade

E se agora os indivíduos não forem idênticos e os mercados forem incompletos? A representação por um único agente não mais será possível. Cada indivíduo irá se deparar com riscos idiossincráticos e não poderá compartilhá-los completamente. De forma a se previnirem de incertezas futuras, negociações surgirão a cada período. Por sua vez, a estrutura de ativos não permitirá que pessoas se protejam de certos eventos como desejariam. Os preços de equilíbrio, portanto, estarão intrinsicamente ligados a essas características, período a período. Eles dependerão de como os ativos estarão alocados, mas essas alocações podem mudar ao longo do tempo. Dependerão até das dotações iniciais de cada agente.

Portanto, para se descrever o equilíbrio em termos de um único processo de Markov é preciso incluir tanto as variáveis exógenas quanto as endógenas na descrição do estado.

Descreverei aqui como o artigo *Stationary Markov Equilibria* aborda essas novas indagações. Pode-se dizer que o *paper* é dividido em duas partes. Na primeira, é desenvolvida uma técnica para provar a existência de equilíbrios recursivos. Na segunda, tal técnica é aplicada a três situações, dentre as quais, a árvore de Lucas, agora com agentes heterogêneos e mercados não necessariamente completos.

3.1 Teoria Central

Exponho nessa seção as técnicas desenvolvidas por Duffie et al. (1994) para provar a existência de um certo objeto matemático. Aplicada a uma economia, tal objeto é um equilíbrio recursivo.

A teoria parte de dois elementos principais: um conjunto S, que na verdade é um espaço de Borel não-vazio, e uma correspondência com gráfico fechado $G : S \to \mathcal{P}(S)$, sendo $\mathcal{P}(S)$ o conjunto de medidas de probabilidade em S. O que se busca é demonstrar que:

i) existe um conjunto $J \subset S$ tal que $G(s) \cap \mathcal{P}(J) \neq \varnothing$, para todo $s \in J$,

ii) existe uma função $\Pi : J \to \mathcal{P}(J)$, que é uma seleção da correspondência G restrita a J.

Denominaremos G como *correspondência de expectativas,* e J como conjunto *auto-justificado para* G.

Se J for fechado então, pelo teorema de Kuratowski-Ryll-Nardzewski, (i)⇒(ii). Mais ainda, Π é mensurável, e portanto, por definição, uma *transição.* Logo, basta provarmos (i) e que J é fechado.

Dado $T \in \mathbb{N}$, definimos um *equilíbrio de horizonte* T *para* G como sendo um processo estocástico $\{s_1, ..., s_T\}$ em algum espaço de probabilidades e com valores em S, tal que, para todo $t < T$, a distribuição condicional de s_{t+1} dado $\{s_1, ..., s_t\}$ está em $G(s_t)$ quase sempre.

Observe que há um propósito ao denominarmos o objeto matemático acima de *equilíbrio.* Constituirá, de fato, um equilíbrio de uma economia de horizonte finito para alguma G convenientemente escolhida. Uma G que carregue consigo as características de tal economia.

Assim, podemos enunciar o principal resultado dessa primeira parte de Duffie et al. (1994):

Teorema 1 *Seja $K \subset S$ compacto e $T \in \mathbb{N}$. Se existe um equilíbrio de horizonte T para G, $\{s_1, ..., s_T\}$, tal que, para todo t, $s_t \in K$ quase sempre, então existe um conjunto compacto J auto-justificado para G.*

A compacidade de J contribuirá para uma propriedade especial de Π, abordada na subseção a seguir.

A demonstração desse teorema segue a seguinte estratégia. Primeiro, 'constrói-se' um candidato para J; em seguida, prova-se que ele é auto-justificado. Vejamos brevemente quem é o candidato:

Dado $K \subset S$ compacto, comece construindo indutivamente uma seqüência de conjuntos. Defina $C_{00} = K$, e para todo $j \geq 1$, considere $C_{0j} = \{s \in K;\text{ existe } \nu \in G(s) \text{ com } \nu_*(C_{0j-1}) = 1\}$[1]. Poderíamos interpretar C_{0j} como o conjunto que contém o estado inicial de qualquer equilíbrio de horizonte j para G, que permanece em K. Da hipótese do teorema, segue-se que $C_{0j} \neq \varnothing$, para qualquer j. Faça então $J = \cap_j \bar{C}_{0j}$, que é não-vazio pois $C_{00} \supset C_{01} \supset C_{02}...$; e assim obtemos nosso candidato, que será, de fato, auto-justificado para G.

3.1.1 Ergodicidade

A transição Π encontrada anteriormente pode, sob determinadas hipóteses, apresentar algumas propriedades interessantes. A principal delas é a ergodicidade. Além de ser uma noção mais restritiva de estacionariedade, se aproxima do conceito econômico de *steady-state,* em modelos determinísticos.

Começamos por algumas definições.

Uma *medida invariante* para uma transição $\Pi : J \to \mathcal{P}(J)$ é uma medida $\mu \in \mathcal{P}(J)$ tal que $\mu\Pi = \mu$. Note que $\mu\Pi(A) = \int_J \Pi_s(A)\, d\mu(s)$, para $A \subset J$.

[1] $v_*(C_{0,j-1})$ é a medida interna de $C_{0,j-1}$.

Seja μ uma medida invariante. Um conjunto A *μ-invariante* é um subconjunto de J, mensurável, satisfazendo $\Pi_s \in \mathcal{P}(A)$ para $s \in A$ μ-q.s..

Finalmente, uma medida invariante μ é *ergódica* para $\Pi : J \to \mathcal{P}(J)$ se, para qualquer conjunto A μ-invariante, $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

A seguir ilustramos esse conceito mais abstrato com um exemplo:

Exemplo 2 *(Duffie et al. (1994)) Sejam* $J = \{0,1\}$, $\mu = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}$ *e* $\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Temos que* $\mu\Pi = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} = \mu$, *donde* μ *é invariante. Os conjuntos* $\{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ *são* μ*-invariantes, pois obviamente* $\Pi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ *pertence a* $\mathcal{P}(\{0\})$ *e a* $\mathcal{P}(\{0,1\})$ *e* $\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ *pertence a* $\mathcal{P}(\{1\})$ *e também a* $\mathcal{P}(\{0,1\})$. *Se* $\alpha = 0$ *então* $\mu(\{0\}) = 0$, $\mu(\{1\}) = 1$ *e* $\mu(\{0,1\}) = 1$. *Logo,* μ *é ergódica. Análogo se* $\alpha = 1$.

Por fim, pode se provar que para se obter uma tal medida ergódica, μ, para a transição Π é preciso que a correspondência de expectativas G seja *convex-valued* e J compacto.

3.2 Aplicação à Economia de Lucas

3.2.1 Modelo

A árvore de Lucas aqui modelada é uma economia de trocas puras que segue os mesmos moldes daquela descrita anteriormente. Um único bem e n ativos reais. Há incertezas quanto aos estados futuros, mercados competitivos abrem-se a cada período. No entanto, tem-se agora m agentes, que são heterogêneos.

O horizonte de tempo dessa economia é $T \in \mathbb{N}$. Existe um conjunto finito de choques exógenos, Y, e $\{y_t\}$ é um processo de Markov com transição $P : Y \to \mathcal{P}(Y)$ independente do tempo. Isto é, a distribuição condicional de y_{t+1} dadas as realizações $\{y_1, ..., y_t\}$ será $P(y_t)$, para todo t.

Os dividendos reais pagos pelos ativos são representados pela função $d : Y \to R^n_+$, com $d_j(y)$ sendo o dividendo que o ativo j paga ao ocorrer o choque y. A função $e : Y \to R^m$ é tal que $e_i(y)$ é a dotação de bens do indivíduo i dado o choque y.

As preferências de um agente i são definidas pela função de utilidade Bernuilli $u_i : R_{++} \to R$, C^1, côncava, estritamente monótona, limitada superiormente e ilimitada inferiormente. O fator de desconto é $\beta_i \in (0,1)$.

Dada uma seqüência $C = \{C_t\}_{t=1}^T$ de variáveis aleatórias em algum espaço de probabilidades, com valores em R_{++}, a função de utilidade von Neumann-Morgenstern de i será:

$$U_i^T(C) = E\left[\sum_{t=1}^T \beta_i^t u_i(C_t)\right]$$

Denominamos $u = (u_1, ..., u_m)$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_m)$. Dessa forma, os primitivos da economia são $\xi = (P, e, u, \beta, d)$.

O próximo passo em direção à construção de uma estrutura recursiva para esse modelo será definir a variável de estado da economia. Uma variável de estado deve ser uma completa descrição das atuais variáveis, tanto exógenas quanto endógenas, além de servir como uma estatística suficiente para a evolução futura da economia.

Seja $\Lambda = \left\{\theta \in R_{+}^{n\times m}; \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1\right\}$ o conjunto de possíveis portfólios num instante qualquer e Λ^{-} uma cópia sua. Observe que ao indivíduo não é permitido ficar 'vendido'. Definimos o conjunto de variáveis endógenas como $Z = \Lambda^{-} \times \Lambda \times R_{++}^{m} \times R_{+}^{n}$, cujo elemento $\left(\theta^{-}, \theta, c, p\right)$ representa, respectivamente, as carteiras adquiridas pelos agentes no período anterior, aquelas formadas no atual período, os consumos atuais e todos os preços nos atuais mercados.

Assim, o espaço de estados, já restritos a condições de factibilidade, será:

$$S = \left\{ \left[y, \left(\theta^{-}, \theta, c, p\right)\right] \in Y \times Z; \sum_{i} \left[c_i - e_i\left(y\right)\right] = \sum_{j} d_j\left(y\right) \right\}$$

Note portanto que a trajetória estocástica de equilíbrio deverá, necessariamente, assumir valores em S.

3.2.2 Equilíbrio

Para chegarmos a um conceito formal de equilíbrio é importante compreendermos por que seu principal componente é um processo estocástico. Em poucas palavras, ele é uma representação matemática dos planos contingentes idealizados pelos indivíduos. Consideram-se todas as possíveis trajetórias que se iniciam num mesmo nó, do período inicial, e terminam em pontos do período final. A esses caminhos estocásticos são atribuídas probabilidades.

Para a economia acima, seja a seqüência $\{s_t\}_{t=1}^{T}$ um processo estocástico em algum espaço de probabilidades, com as funções mensuráveis s_t com valores em S. Logo é conhecida, por exemplo, a probabilidade de ocorrer um estado $\left[\bar{y}_t, \left(\bar{\theta}_t^{-}, \bar{\theta}_t, \bar{c}_t, \bar{p}_t\right)\right]$ 'retirado' de s_t. Ou as chances de que tal estado se realize dado que até aquele período as ocorrências foram $\{s_1, ..., s_{t-1}\}$ (Abusarei da notação daqui por diante, pois é sempre claro quando o contexto se refere a realização da função ou a função em si. Note ainda que temos funções mensuráveis e não variáveis aleatórias, que é um caso particular de quando $S = R$).

Espera-se, antes de tudo, que esse processo estocástico respeite os primitivos da economia, inclusive a lei de movimento para os choques exógenos. Assim, dizemos que $\{s_t\}$ é *consistente para* ξ desde que, para todo $t < T$, a distribuição condicional de y_{t+1} dado $\{s_1, ..., s_t\}$ seja $P\left(y_t\right)$ quase sempre.

Define-se agora do que consistem as decisões de um indivíduo i. Primeiro, a observância de sua restrição orçamentária: uma *política factível* para i seria um processo estocástico $\{(\Theta_t, C_t)\}$ no mesmo espaço de probabilidades de $\{s_t\}$, com valores em $R_{+}^{n} \times R_{++}$, tal que para todo t, (Θ_t, C_t) é $(s_1, ..., s_t)$-mensurável e

$$p_t \Theta_t + C_t = \Theta_{t-1}\left[p_t + d\left(y_t\right)\right] + e_i\left(y_t\right)$$

com $\Theta_0 = \theta_{i1}^-$.

Assim, uma política factível $\{(\Theta_t, C_t)\}$ será *ótima* para i quando $U_i^T(\{C_t\}) \geq U_i^T\left(\left\{C_t^{'}\right\}\right)$ qualquer que seja $\left\{\left(\Theta_t^{'}, C_t^{'}\right)\right\}$ factível.

Por fim, formalizamos a noção mais usual de equilíbrio Walrasiano, ou competitivo, para essa economia.

Um *equilíbrio para* ξ é um processo consistente de estados $\{s_t\}$ tal que, para todo i, a política $\{(\theta_{it}, c_{it})\}$ é ótima.

Observe que este é um conceito seqüêncial. O objetivo é, no entanto, mostrar que existe um equilíbrio com estrutura recursiva. Então, defina-o da seguinte maneira:

Uma *transição de equilíbrio para* ξ é uma transição $\Pi : J \to \mathcal{P}(J)$ com J subconjunto mensurável de S, tal que:

i) para qualquer $\left(\bar{\theta}, \bar{y}\right) \in \Lambda^- \times Y$ existe $\left[\bar{y}, \left(\bar{\theta}, \theta, c, p\right)\right] \in J$,

ii) cada processo de Markov $\{s_t\}$ com valores em J e transição Π é um equilíbrio para ξ com $T = +\infty$.

O item (i) diz apenas que qualquer parâmetro inicial é admissível. No entanto, observe a sutilidade do item (ii). Dada uma transição Π, a teoria de processos estocásticos mostra como construir um processo de Markov $\{s_t\}$ em um espaço de probabilidades, tal que, para todo t, a distribuição condicional de s_{t+1} dado $\{s_1, ..., s_t\}$ é $\Pi(s_t)$ quase sempre. Como a transição independe do tempo, diz-se que é estacionária. Note, portanto, que de um processo markoviano com transição estacionária decorre a recursividade: é suficiente conhecermos em que estado se encontra a economia em t para entendermos como ocorrerá a transição para $t+1$, independentemente de t ou da trajetóra percorrida até aquele momento.

Finalmente, podemos enunciar outro importante resultado de Duffie et al. (1994) para a economia de Lucas com agentes heterogêneos em mercados incompletos:

Teorema 2 *Existe uma transição de equilíbrio* $\Pi : J \to \mathcal{P}(J)$ *para* ξ*, com uma medida ergódica.*

Grosso modo, o resultado acima é obtido da aplicação do teorema 1 ao conjunto S de estados factíveis, e a uma correspondência $g : S \to \mathcal{P}(S)$, devidamente definida.

Comece então definindo a correspondência $g : S \to \mathcal{P}(S)$, tal que para todo $\mu \in g(s_0)$, com s_0 dado, tem-se:

i) o suporte de μ é o gráfico de alguma função $h : Y \to Z$;

ii) a marginal de μ em Y é $P(y_0)$ e a marginal de μ em Λ^- é δ_{θ_0}, quase sempre;

iii) $\forall i,\ \ p_0\theta_{i0} + c_{i0} = \theta_{i0}^-[p_0 + d(y_0)] + e_i(y_0)$;

iv) $\forall i$, $\lambda_i \equiv \beta_i E\left[u'(c_{i1})(p_1 + d(y_1))\right] - u'(c_{i0})p_0 \geq 0$ e $\lambda_i \theta_{i0} = 0$ para qualquer s_1 com distribuição μ;

v) $c_1 \geq \bar{c}$ quase sempre, onde $\bar{c}_i$ é tal que se consumido em cada período gerará utilidade inferior a de autarquia.

O item (i) implica que toda medida em $g(s)$ terá suporte finito. Note que a cada choque exógeno só é atribuído um único sistema de preços, consumos e carteiras. Além disso, esse item será necessário para se obter um equilíbrio *spotless* em um certo sentido.

O item (ii) visa a respeitar, primeiro, a lei de movimento dos choques, segundo, o fato de que a carteira escolhida no período anterior seja a mesma que está pagando no período atual. Por sua vez, os itens (iii) e (iv) refletem as condições de primeira ordem do problema de otimização dos agentes, mais precisamente, as restrições orçamentárias e a equação de Euler.

O maior desafio é mostrar que g satisfaz as hipóteses do teorema 1. Feito isto, teremos um conjunto compacto J auto-justificado para g. Por fim, 'convexificamos' g, para então obtermos uma transição Π com uma medida ergódica.

O fato fundamental para mostrar que, para todo T, existe um equilíbrio de horizonte T para g, é a existência do equilíbrio para ξ, com horizonte finito. Esta, por sua vez, segue, com adaptações, a prova padrão feita por Radner (1972).

Seja T finito. Comece definindo $\eta(T)$ como o conjunto de equilíbrios para ξ. Denomine também $S_T = \{s \in S;\text{ existe } \{s_t\} \in \eta(T+1) \text{ com } s_1 = s\}$ como o conjunto de estados iniciais em algum equilíbrio para ξ, com horizonte T.

Mostra-se que para todo $\left(\bar{\theta}, \bar{y}\right) \in \Lambda^- \times Y$ existe $\left[\bar{y}, \left(\bar{\theta}, \theta, c, p\right)\right] \in S_T$, pois já se sabe que, de fato, existem equilíbrios para ξ.

Agora defina $K = \{s \in S;\, c \geq \bar{c} \text{ e } p \leq \bar{p}\}$[2]. Note que K é compacto. Considere também C_{0T} definido como anteriormente, isto é, o conjunto que contém o estado inicial de qualquer equilíbrio de horizonte T para g.

Prova-se que $S_T \subset C_{0T}$, donde $C_{0T} \neq \varnothing$. Logo, pelo teorema 1, $J = \cap_j \bar{C}_{0j}$ é compacto e auto-justificado para g.

Finalmente, define-se $G : S \to \mathcal{P}(S)$ com $G(s)$ sendo o fecho da envoltória convexa de $g(s)$. Não é difícil concluir que J também será auto-justificado para G, e portanto, existirá uma transição $\Pi : J \to \mathcal{P}(J)$ com medida ergódica. Em particular, dado $\left(\bar{\theta}, \bar{y}\right) \in \Lambda^- \times Y$, pode-se construir um processo de Markov $\{s_t\}$ com valores em J, com transição Π, tal que $\left(\theta_1^-, y_1\right) = \left(\bar{\theta}, \bar{y}\right)$.

Observe que, para concluirmos que Π é uma transição de equilíbrio para ξ, resta a prova de que um processo de Markov $\{s_t\}$ como o acima será um equilíbrio para ξ, quando $T = +\infty$. Ora, isso decorre diretamente da construção da G. De fato, a consistência desse processo é obtida do item (ii) da definição de g. Enquanto que, para todo i, a otimalidade da política $\{(\theta_{it}, c_{it})\}$ decorre, principalmente dos itens (iii) e (iv). Um ponto a ser ressaltado é que tal otimalidade só ocorre quando levamos T para o infinito.

[2]Lema 3.2 de Duffie et al. (1994) mostra que existe $\bar{p} \in R_+^n$, tal que os preços de equilíbrio da economia com horizonte finito são quase sempre menores que $\bar{p}$.

É importante mencionar um último detalhe. Quando convexificamos a correspondência g, por um lado ganhamos uma medida ergódica. Por outro, perdemos a propriedade de equilíbrio sem *sunspots*. O equilíbrio encontrado acima, portanto, é *spotless* num sentido mais fraco.

4 Lucas com Heterogeneidade e *Default*

Uma outra forma de lidar com a heterogeneidade dos agentes em economias com mercados incompletos é abordada no artigo *Stationary Equilibria in Asset-Pricing Models with Incomplete Markets*. A economia é de trocas puras com as mesmas características das descritas anteriormente, porém com um adicional: a possibilidade de *default* com colateral. Os autores justificam essa modificação com o seguinte argumento: é preciso um significado econômico às restrições de escolha dos indivíduos. Com efeito, em economias de horizonte infinito, os investidores devem ter suas estratégias restritas para que se evite o jogo de Ponzi. Nas economias vistas até agora, simplesmente proibia-se vendas 'descobertas'.

Descreverei aqui as seções do artigo que tratam da modelagem da economia e da construção de um equilíbrio recursivo. Neste último ponto, claramente o artigo incorpora idéias de Duffie et al. (1994). As diferenças também serão salientadas. Por exemplo, segundo os próprios autores, em Duffie et al. (1994) tem-se que:

> *...the transition function that maps the state today into the state tomorrow can be arbitrarily complicated, and it is often impossible to determine even the set over which it is defined.*

Além disso, há uma maior preocupação com o desenvolvimento de um algoritmo para encontrar o equilíbrio e com sua implementação computacional. Partes do artigo foram, de fato, dedicadas exclusivamente a esse fim, mas não serão aqui abordadas.

4.1 Modelo

Considere agora uma economia um pouco mais sofisticada. Além dos ativos físicos, ou árvores de Lucas, existem ainda ativos financeiros. Acrescente ainda a possibilidade de os indivíduos darem calote (ou *default*).

A cada período t, acontece um choque exógeno $y \in Y = \{1, ..., Y\}$ (abusaremos da notação). A incerteza dessa economia é representada pela árvore de eventos $\sum$. O nó inicial dessa árvore σ_0 é dado por um estado fixo y_0, no qual a economia começa. Cada nó é caracterizado pela história de choques, $\sigma = (y_0, ..., y_t)$. O nó σ possui Y possíveis sucessores, (σy), $y = 1, ..., Y$; e um único antecessor, σ^*. Os choques exógenos seguem um processo de Markov com matriz de transição P.

Em cada nó σ, existe um bem de consumo não-durável e m indivíduos. O indivíduo i recebe em cada nó uma dotação que depende unicamente do choque exógeno e é dada pela função $e_i : Y \to R_{++}$. Além disso, ele possui participações

em n ativos físicos, ou árvores. No período zero, cada agente i possui um *share* $\theta_{ij}(\sigma_0^*) \geq 0$ da árvore j. Normalize $\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij}(\sigma_0^*) = 1$ para todo $j = 1, ..., n$.

Faremos aqui uma suposição ligeiramente diferente: comprando uma árvore, o agente receberá seus dividendos no final do mesmo período. O dividendo que um ativo j produz quando na posse do agente i é dado pela função $d_{ij} : Y \to R_+$, dependendo exclusivamente do choque corrente. Note que, diferentemente do modelo de Lucas original, os frutos da árvore dependerão do capital humano daquele que fará a colheita. Assim, se $\sigma = \sigma^* y$, e o agente i possui $\theta_{ij}(\sigma)$ da árvore j, então receberá $\theta_{ij}(\sigma).d_{ij}(y)$ como dividendos.

Constata-se, portanto, que o consumo agregado será dependente da distribuição de ativos, e conseqüentemente endógeno. Defina, para cada choque y, o limite superior para o consumo agregado por $\bar{e}(y) = \sum_i e_i(y) + \sum_j \max_i d_{ij}(y)$.

Como anteriormente, o agente i maximiza uma função de utilidade esperada separável no tempo:

$$U_i(c) = E \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t u_i(c_t)$$

A função $u_i : R_{++} \to R$ é estritamente monótona, C^2, estritamente côncava, limitada superiormente e não-limitada inferiormente. O parâmetro de impaciência $\beta_i \in (0, 1)$.

Os mercados para a negociação de ativos abrem-se a cada período. A árvore j é negociada pelo preço $p_j(\sigma)$. Além deles, há também nessa economia A ativos financeiros. O ativo financeiro a negociado no nó σ pelo preço $q_a(\sigma)$ promete um *payoff* de $b_a(y)$ nos nós sucessores (σy). Denotaremos por ϕ_i o portfólio de ativos financeiros do agente i.

Por sua vez, o indivíduo só poderá vender (a descoberto) um ativo financeiro se possuir *shares* em árvores como colateral. Assim, definimos o vetor n-dimensional $k^a(\sigma) > 0$ como o colateral associado ao ativo financeiro a no nó σ. Isto é, se um agente vende uma unidade do ativo a, então ele é obrigado a possuir $k_j^a(\sigma)$ reais em cada árvore $j = 1, ..., n$. Equivalentemente, se uma árvore j pode ser usada como colateral para diferentes ativos financeiros, então o agente é obrigado a investir $k_j^a(\sigma)$ para cada ativo $a = 1, ..., A$.

No período seguinte, o indivíduo poderá dar calote em sua promessa b_a. Nesse caso, o comprador deverá receber o colateral associado.

A margem k_j^a pode variar nos nós, mas para se manter uma estacionaridade é preciso defini-la como uma função do choque corrente e das variáveis endógenas correntes. Para alguma função $\bar{k}_j^a(., y)$ contínua, escreva:

$$k_j^a(\sigma) = \bar{k}_j^a(p(\sigma), q(\sigma), \theta(\sigma), c(\sigma), y)$$

Como não há penalizações para *default*, um vendedor de um ativo a dará calote no nó $\sigma = \sigma^* y$ sempre que $b_a(y) > \sum_j k_j^a(\sigma^*) \frac{p_j(\sigma)}{p_j(\sigma^*)}$. Logo o *payoff* do

ativo a em $\sigma = \sigma^* y$ será sempre dado por:

$$f_a(\sigma) = \min \left\{ b_a(y), \sum_j k_j^a(\sigma^*) \frac{p_j(\sigma)}{p_j(\sigma^*)} \right\}$$

Note que essa forma de se modelar *default* é questionável já que não afeta a capacidade do devedor de se endividar no futuro, tampouco leva a uma redução direta do consumo no período do calote.

Finalmente, podemos resumir essa economia na coleção:

$$\xi = \left((u_i, \beta_i, e_i, \theta_i(\sigma_0^*), d_i)_{i=1}^m, b, P, k \right)$$

4.2 Equilíbrio

A noção usual de equilíbrio competitivo para a economia com ativos financeiros e possibilidade de *default* é assim definida: um *equilíbrio financeiro* para uma economia ξ com choque inicial y_0 e participações iniciais $(\theta_i(\sigma_0^*))_{i=1}^m$ são as coleções de alocações e preços

$$\left(\left(\bar{\theta}_i(\sigma), \bar{\phi}_i(\sigma), \bar{c}_i(\sigma) \right)_{i=1}^m \right)_{\sigma \in \sum}$$

$$\left((\bar{p}_j(\sigma))_{j=1}^n, (\bar{q}_a(\sigma))_{a=1}^A \right)_{\sigma \in \sum}$$

satisfazendo as seguintes condições:

i) *market clearing*: $\sum_i \bar{\theta}_i(\sigma) = 1$ e $\sum_i \bar{\phi}_i(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in \sum$;

ii) para cada agente i:

$$\left(\bar{\theta}_i(\sigma), \bar{\phi}_i(\sigma), \bar{c}_i(\sigma) \right) \in \arg_{\theta \geq 0, \phi, c \geq 0} \max U_i(c)$$

tal que para todo $\sigma = \sigma^* y$,

$$c_i(\sigma) = e_i(y) + \phi_i(\sigma^*) f(\sigma) + \theta_i(\sigma^*) \bar{p}(\sigma) + \theta_i(\sigma) (d_i(y) - \bar{p}(\sigma)) - \phi_i(\sigma) \bar{q}(\sigma)$$

e $j = 1, ..., n$,

$$\bar{p}_j(\sigma) \theta_{ij}(\sigma) + \sum_{a; \phi_{ia}(\sigma) < 0} k_j^a(\sigma) \phi_{ia}(\sigma) \geq 0$$

Como nos modelos anteriores, continuamos com restrições de *short sales* nas árvores de Lucas. A restrição orçamentária é a usual, com a modificação para mercados de ativos financeiros e para as árvores que geram frutos no mesmo período. A maior diferença reside na introdução da restrição de colateral.

Em qualquer equilíbrio financeiro os preços dos ativos físicos são positivos, $p > 0$, pois, caso contrário, haveria oportunidade de arbitragem.

Adicionalmenete, o artigo define uma nova variável que facilitará a construção de um equilíbrio recursivo. Denote $\omega_i(\sigma)$ como a fração da riqueza

financeira (*cash at hand*) na economia em poder do indivíduo i, no início do nó $\sigma = \sigma^* y$:

$$\omega_i(\sigma) := \frac{\theta_i(\sigma^*)p(\sigma) + \phi_i(\sigma^*) f(\sigma)}{\sum_j p_j(\sigma)}$$

Seja $\Omega(\sigma) = (\omega_1(\sigma), ..., \omega_m(\sigma))$. Pela definição de f, em equilíbrio Ω sempre pertencerá ao simplex $(m-1)$-dimensional, Δ^{m-1}. Isto é, $\omega_i \geq 0$ para todo i e $\sum_i \omega_i = 1$.

Para mostrar a existência do equilíbrio competitivo, Kubler e Schmedders (2003) definem e constroem um equilíbrio de recursivo e demonstram que tal equilíbrio é, de fato, um equilíbrio financeiro. Um equilíbrio de Markov, como será denotado, apresenta estrutura semelhante a daquele descrito em Duffie et al. (1994), porém com as adaptações necessárias à implementação computacional.

Descreveremos aqui o espaço de estados utilizado e a construção do equilíbrio de Markov.

O espaço S de estados da economia ξ consistirá do conjunto finito de choques exógenos Y, e do conjunto Z de todas as possíveis variáveis endógenas que ocorrem no nó σ, i.e., $S = Y \times Z$. Mais especificamente:

$$Z = \left\{ z \in \Delta^{m-1} \times R_+^m \times R_+^{mn} \times R^{mA} \times R_+^n \times R_+^A : \sum_i \theta_i = 1, \sum_i \phi_i = 0 \right\}$$

onde $z(\sigma) = \left(\Omega(\sigma), (c_i(\sigma), \theta_i(\sigma), \phi_i(\sigma))_{i=1}^m, p(\sigma), q(\sigma)\right)$. Observe que, por definição, em qualquer equilíbrio financeiro todas as variáveis endógenas pertencem a Z. Por vezes, usaremos a notação $Z = \Delta^{m-1} \times \hat{Z}$, onde $\hat{Z}$ é o conjunto das variáveis endógenas com exceção das variáves de riqueza financeira.

Nesse modelo, define-se *correspondência de expectativas* como uma correspondência $g : S \to Z^Y$ que, dado um estado $s = (y, z)$, descreva todos os estados do próximo período que sejam consistentes com o *market clearing* e com as condições de primeira ordem dos indivíduos. Mais precisamente, o vetor de variáveis exógenas $\left(z_1^+, ..., z_Y^+\right) \in g(s)$ se para cada agente valem as seguintes três condições:

i) para todo $y = 1, ..., Y$,

$$\omega_{iy}^+ = \frac{\theta_i p_y^+ + \sum_a \phi_{ia} \min\left\{ b_a(y), \sum_j k_j^a \frac{p_{jy}^+}{p_j} \right\}}{\sum_j p_{jy}^+}$$

$$c_{iy}^+ = e_i(y) + \omega_{iy}^+ \sum_j p_{jy}^+ + \theta_{iy}^+ \left(d_i(y) - p_y^+\right) - \phi_{iy}^+ q_y^+ \geq \tilde{c}_i$$

ii) existem multiplicadores $\lambda_i \in R_+^n$ e $\mu_i \in R_+^n$ tal que para todo j,

$$\mu_{ij} p_j + \lambda_{ij} + (d_{ij} - p_j) u_i'(c_i) + \beta_i E_s \left[p_j^+ u_i'\left(c_i^+\right)\right] = 0$$

$$\lambda_{ij}\theta_{ij} = 0$$

$$\mu_{ij}\left(p_j\theta_{ij} + \sum_{a;\phi_{ia}(\sigma)<0} k_j^a \phi_{ia}\right) = 0$$

$$p_j\theta_{ij} + \sum_{a;\phi_{ia}(\sigma)<0} k_j^a \phi_{ia} \geq 0$$

iii) se definimos $\phi_{ia}(-) = \max\{0, -\phi_{ia}\}$ e $\phi_{ia}(+) = \max\{0, \phi_{ia}\}$, então existem multiplicadores $\nu_i(+), \nu_i(-) \in R_+^A$, tais que para todo $a \in A$,

$$\sum_j \mu_{ij} k_j^a - q_a u_i'(c_i) + \beta_i E_s\left[f_a u_i'\left(c_i^+\right)\right] - \nu_{ia}(-) = 0$$

$$-q_a u_i'(c_i) + \beta_i E_s\left[f_a u_i'\left(c_i^+\right)\right] + \nu_{ia}(+) = 0$$

$$\nu_i(+)\,\phi_i(+) = 0$$

$$\nu_i(-)\,\phi_i(-) = 0$$

Note que a condição (i) é simplesmente a definição de riqueza financeira e a restrição orçamentária[3]. Na (ii), tem-se as condições de primeira ordem relativas à carteira de ativos físicos. E na (iii), as condições de primeira ordem relativas à carteira de ativos financeiros, onde as decisões de compra e venda são tratadas separadamente.

Kubler e Schmedders (2003) adotam uma definição menos abstrata que Duffie et al. (1994) para um equilíbrio recursivo. Descrevem-no por uma 'correspondência política' que mapeia a distribuição de riqueza no início do período nos preços e portfólios correntes, e dessa correspondência infere-se uma 'função transição' que leva o estado atual da economia nos estados endógenos do próximo período, de uma forma consistente.

Mais especificamente, seja $Q : Y \times \Delta^{m-1} \to \hat{Z}$ uma *correspondência política*, não-vazia. Note que $graf(Q) \subset S$. Agora considere a *função transição* $\Pi : graf(Q) \to Z^Y$ tal que para todo $s \in graf(Q)$ e $y \in Y$ tem-se $\Pi(s) \in g(s)$ e $(y, \Pi_y(s)) \in graf(Q)$.

Define-se *equilíbrio de Markov* como a dupla (Q, Π).

O primeiro ponto a ser observado é que a correspondência política Q funciona, para essa economia, como uma regra de decisão, com base nos choques exógenos e nas riquezas financeiras de cada agente. Em segundo lugar, note que função transição Π sugere uma lei de movimento entre estados da economia que respeite a regra de decisão e que satisfaça a otimalidade do problema do indivíduo e *market clearing*.

A parte central da demonstração de existência de equilíbrio de Markov está na construção de uma correspondência política apropriada e se assemelha à técnica usada em Duffie el al. (1994). Em linhas gerais, a estratégia é a seguinte:

Comece escolhendo um conjunto compacto $\tau \subset \hat{Z}$, grande o suficiente para conter os valores de equilíbrio dos preços, alocações de consumo e portfólio de

[3] $\tilde{c}_i$ é um limite inferior positivo ao consumo ótimo de agente. Segue das oservações feitas por Duffie et al. (1994).

qualquer economia truncada. Suponha que amanhã todas as variáveis de equilíbrio possam ser descritas por alguma correspondência que mapeia o choque e a distribuição de riqueza de início de período em τ, ou seja, $V^l : Y \times \Delta^{m-1} \rightarrow \tau$. Defina uma nova correspondência V^{l+1}, tal que para cada choque y e distribuição de riqueza Ω, $V^{l+1}(y, \Omega)$ é o conjunto de todas as variáveis endógenas hoje que são consistentes com algum $(z_1, ..., z_Y)$ com $\hat{z}_{y'} \in V^l(y', \Omega_{y'})$. Consistentes no sentido de satisfazerem as condições de primeira ordem dos agentes e o fechamento dos mercados. Note o método de 'indução para trás': retrocede-se no tempo à medida que o índice l avança. Grosso modo, dados os equilíbrios de amanhã, obtém-se os equilíbrios de hoje que os suportariam.

Mais especificamente, a existência de τ decorre da existência de equilíbrios financeiros de economias com horizonte finito. Para se construir a sequência $V^0, V^1, V^2, ...$, primeiro define-se, para cada y e Ω, $V^0(y, \Omega) = \tau$. Indutivamente, V^{l+1} é obtido aplicando-se um operador H em V^l. H mapeia uma correspondência $V : Y \times \Delta^{m-1} \rightarrow \tau$ em outra $W : Y \times \Delta^{m-1} \rightarrow \tau$ de tal forma que, para cada y e Ω, tem-se:

$$W(y, \Omega) = \left\{ \begin{array}{r} \hat{z} = (c, \theta, \phi, p, q) \in \tau; \exists (z_1^*, ..., z_Y^*) \in g(y, \Omega, \hat{z}) \text{ tal que} \\ \text{para todo } y',\ \hat{z}_{y'}^* \in V(y', \Omega_{y'}) \end{array} \right\}$$

Por fim, para cada y e Ω, denomine $V^*(y, \Omega) = \cap_{l=1}^{\infty} V^l(y, \Omega)$, que é por construção não-vazia, e obtenha a correspondência política desejada. A existência da função transição de equilíbrio decorre da definição do operador H. O principal teorema de Kubler e Schmedders (2003) pode ser assim enunciado:

Teorema 3 *A correspondência V^* é não-vazia. Existe um equilíbrio de Markov com correspondência política V^*.*

O referido artigo é finalizado com uma aplicação computacional do modelo desenvolvido. Resumiremos aqui os resultados obtidos.

Exemplo 3 *(Kubler e Schmedders (2003))*

Considere uma economia com dois agentes com funções utilidades idênticas CRRA e coeficiente de aversão ao risco igual a 2. Possuem o mesmo $\beta = 0,95$. Há quatro choques exógenos. Dotações agregadas são dadas por $\bar{e} = (9,9; 10,5; 9,9; 10,5)$. Os payoffs das árvores não dependem de seus donos e são dados por $d(y) = 0,3\bar{e}(y)$, para cada y. Dotações individuais são $e_1 = (1,386; 2,205; 5,544; 5.145)$ e $e_2 = 0,7\bar{e} - e_1$. As probabilidades de transição dos choques são $P(y \mid y') = 0,4$ se $y, y' = 1,2$ ou se $y, y' = 3,4$ e $P(y \mid y') = 0,1$ caso contrário.

Primeiramente, é analisado o impacto no bem-estar dos indivíduos ao se introduzir a possibilidade de default. Compara-se uma economia ξ cujo único ativo disponível é uma árvore de Lucas, com uma economia ξ' onde essa ávore pode ser usada como colateral na negociação de um ativo financeiro livre de risco. Supõe-se que a margem seja de $k = 1,3$ em todos os estados e o choque inicial $y_0 = 1$. A medida de bem-estar usada está em termos de variação equivalente do consumo.

O agente 1, que começa em seu pior choque idiossincrático, tem ganhos significativos. Por exemplo, quando possui apenas 10% *da árvore, seu consumo na economia* ξ *teria que aumentar em* $7,4\%$ *em cada estado de forma a deixá-lo tão bem quanto na economia com default. Já os ganhos do indivíduo 2 são bem menores, com a exceção de quando o agente 1 possui quase a totalidade da árvore.*

Em seguida, analisa-se como a variação da margem k *influencia as decisões de default e, por consequência, o bem-estar.* k *é gradualmente reduzido de* $1,3$ *para baixo. Quantitativamente, os efeitos sobre o bem-estar são relativamentes pequenos.*

Nos equilíbrios computados, quando $k > 1,2$ *o calote nunca ocorre. A margem é tão alta que para o indíviduo é sempre melhor pagar os dividendos do ativo financeiro. Quando* $k = 1,1$*, a taxa de default é de* $5,9\%$ *e quando* $k = 1,02$*, os indíviduos dão calote* $25,9\%$ *das vezes.*

Por outro lado,quando os níveis iniciais de riqueza são bem diferentes, os indíviduos discordam da margem ótima a ser imposta. O mais rico quer menores margens e o outro prefere margens maiores e que levem a menores taxas de default. Por exemplo, quando o agente 1 detém 90% *da riqueza inicial, ele tem um ganho de bem-estar de* $0,08\%$ *ao se reduzir o colateral de* $1,3$ *para* $1,02$*. Já o mais pobre perde* $0,12\%$ *de bem-estar com essa redução. No entanto, se* k *passa de* $1,3$ *para* $1,2$ *apenas, então o ganho do indivíduo mais pobre é de* $0,19\%$*, enquanto o outro ganha* $0,02\%$*.*

5 Preços e Heterogeneidade

Nesta seção, descrevo como Constantinides e Duffie abordam a questão da heterogeneidade dos agentes em mercados incompletos, no artigo *Asset Pricing with Heterogeneous Consumers*. Diferentemente das duas seções anteriores, aqui não se recorre aos métodos recursivos. Nem poderia, pois trabalhará com choques persistentes, que geram passeios aleatórios; e não com processos markovianos apenas.

Aqui, os riscos idiossincráticos são convenientemente modelados, de forma a gerar qualquer padrão de consumo agregado e preços de ativos. Em poucas palavras, veremos como obter uma equação de Euler modificada, que incorpore a heterogeneidade. Resgata-se, assim, a discussão iniciada na seção dois.

5.1 Modelo

Considere uma economia de trocas puras com um único bem de consumo numerário. Existem n ativos, indexados por j. No período t, um ativo j paga d_{jt} de dividendos e possui preço p_{jt}. Sejam $d = (d_1, ..., d_n)$ e $p = (p_1, ..., p_n)$ os processos estocásticos n-dimensionais de dividendos e preços. Defina $D_t = \sum_j d_{jt}$ como o dividendo agregado dessa economia num certo momento.

Além desses ativos, existem títulos (*bonds*) com maturidades variando de 1 a T, fixado. O valor de face de cada título é uma unidade do bem de consumo.

Seja $q_t = (q_{t,t+T}, ..., q_{t,t+1})$ o processo T-dimensional dos preços dos títulos. Defina também $\hat{q}_t = (q_{t,t+T-1})$ e suponha que a oferta líquida de títulos seja zero.

Essa economia possui uma quantidade infinita de consumidores distintos. O indivíduo i é dotado de uma renda de trabalho e_{it} e consome C_{it} no período t. A renda agregada do trabalho é e_t e o consumo agregado é $C_t = e_t + D_t$. Suponha $e_t + D_t > 0$ para todo t.

$\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...$ é uma sequência crescente de conjuntos de informação, tal que ψ_t contém, no mínimo, a história da renda agregada do trabalho, as histórias dos dividendos dos ativos e as histórias dos preços dos ativos e títulos. O conjunto de informação $\mathcal{F}_t$ para um consumidor no tempo t é a união de ψ_t com as histórias das rendas individuais do trabalho $\{e_{is}; 0 \leq s \leq t, \forall i\}$. Note que pode parecer muito estranho que um indivíduo tenha sempre conhecimento das rendas dos outros. No entanto, o equilíbrio nesse modelo será o mesmo independentemente de eles conhecerem ou não as rendas dos outros.

No período t, o indivíduo i detém o portfólio $\theta_{it} = \{\theta_{ijt}; j = 1, ..., n\}$ de ativos e $\phi_{it} = \left\{\phi_{ijt}; j = n+1, ..., n+T\right\}$ de títulos. Suponha que os consumidores comecem com uma mesma dotação de ativos, $\theta_{i,-1} = \theta_{k,-1}$ para todo i, k, e nenhuma de títulos, $\phi_{i,-1} = (0, ..., 0)$.

Então, para todo t, a restrição orçamentária pode ser escrita como:

$$C_{it} = e_{it} + \theta_{i,t-1}(p_t + d_t) + \phi_{i,t-1}\hat{q}_t - \theta_{it}p_t - \phi_{it}q_t$$

Os consumidores estão restritos a estratégias de troca limitadas. Note que os portfólios θ_{it} e ϕ_{it} devem pertencer ao conjunto de informação $\mathcal{F}_t$.

Por fim, os agentes possuem preferências homogêneas representadas por uma função utilidade von Neumann-Morgenstern. Diferentemente dos modelos anteriores, aqui é dada uma forma funcional, com coeficiente de aversão ao risco relativo costante, $\alpha > 0$, e taxa de desconto subjetiva constante, ζ:

$$U_i(C_i) = E\left[(1-\alpha)^{-1}\sum_{t=0}^{\infty} e^{-\zeta t} C_{it}^{1-\alpha} \mid \mathcal{F}_0\right]$$

Assim, a economia pode ser resumida na coleção:

$$\xi = \left(\alpha, \zeta, d, e, \left(\theta_{i,-1}, \phi_{i,-1}\right)_i\right)$$

onde e é o processo de renda do trabalho agregada.

5.2 Equilíbrio

Como sempre, uma estratégia ótima para o consumidor i é (θ_i, ϕ_i, C_i) tal que, dados os preços, maximiza a função utilidade sujeito à restrição orçamentária, definidas acima.

O equilíbrio também segue a definição usual de equilíbrio competitivo. Será o processo de preços de ativos e títulos (p, q), e as estratégias ótimas $\{(\theta_i, \phi_i, C_i); \forall i\}$

dado (p, q) tais que os mercados de ativos e títulos fecham, $\sum_i \theta_{ijt} = 1$ e $\sum_i \phi_{ijt} = 0$, para todo j e t.

Observe que o *market clearing* implica que $\sum_i C_{it} = C_t = e_t + D_t$, para qualquer t.

Constantinides e Duffie (1996) consideram que o processo de preços dos ativos e dos títulos é livre de arbitragem, uma vez que é sabido que a existência de equilíbrio competitivo implica a ausência de arbitragem.

Ademais, pode-se provar que a ausência de arbitragem, por sua vez, implica a existência, para cada t, de um M_t estritamente positivo no conjunto de informação ψ_t, tal que:

$$p_{jt} = \frac{1}{M_t} E\left[\sum_{s=t+1}^{\infty} d_{jt} M_s \mid \psi_t\right], \quad j = 1, ..., n$$

$$q_{t,t+s} = \frac{1}{M_t} E\left[M_{t+s} \mid \psi_t\right], \quad s = 1, ..., T$$

Denominamos M_t um *pricing kernel*. Observe a semelhança do preço livre de arbitragem descrito acima com a equação (3), onde o preço do ativo e o fator estocástico de desconto são obtidos do problema do consumidor na economia de Lucas. Ora, M_t nada mais é do que um fator estocático de desconto para essa economia.

O artigo ainda impõe duas condições sobre M_t, a saber:

i) $E\left[M_t\right] \to 0$ quando $t \to \infty$;

ii) $\frac{M_{t+1}}{M_t} \geq e^{-\zeta}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha}, \quad t = 0, 1, ...$

Essa última condição permitirá a construção de choques idiossincráticos bem definidos. Além disso, implica uma espécie de 'desigualdade' de Euler do consumo agregado para qualquer ativo ou portfólio com retorno $R_{t+1} = \frac{p_{t+1}+d_{t+1}}{p_t}$ entre t e $t+1$:

$$E\left[R_{t+1} e^{-\zeta}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} \mid \psi_t\right] \leq 1$$

Agora poderemos descrever o ponto central do artigo. Ele se refere à construção muito conveniente de processos de renda individuais, isto é, de riscos idiossincráticos. Mais do que isso, os choques na renda de cada trabalhador são modelados de forma a serem permanentes, como veremos.

De maneira formal, como são conhecidos o dividendo e a renda agregados, podemos definir o processo de renda individual como $e_{it} = \delta_{it} C_t - D_t$ onde

$$\delta_{it} = \exp\left[\sum_{s=1}^{t}\left(\eta_{is}\nu_s - \frac{\nu_s^2}{2}\right)\right]$$

$$\nu_t = \left[\frac{2}{\alpha + \alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\log\left(\frac{M_t}{M_{t-1}}\right) + \zeta + \alpha \log\left(\frac{C_t}{C_{t-1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

e $\{\eta_{it}\}$ são choques idiossincráticos tais que:

i) para todo i e t, η_{it} segue uma normal padrão independente de $\mathcal{F}_{t-1}$ e ν_t e

ii) quaisquer subconjuntos distintos de $\{\eta_{it}\}$ são independentes.

Veremos adiante que, em equilíbrio, a definição do choque η_{it} sugere uma interpretação econômica para ν_t, qual seja, o de grau de heterogeneidade entre os agentes. Além disso, os processos de renda individuais definidos acima têm como objetivo obter um equilíbrio que seja tratável, com uma solução explícita, $C_{it} = \delta_{it}C_t$,para os processos de consumo.

Antes de enunciar o resultado principal de Constantinides e Duffie (1996), deve-se ressaltar que o conjunto de indivíduos dessa economia, χ, é cuidadosamente escolhido de maneira que, em equilíbrio, $\sum_{i\in\chi}\delta_{it} = 1$ (note que estamos simbolizando uma integração sobre o conjunto χ), e assim $C_t = e_t + D_t$.

Teorema 4 *Sob as condições (i) e (ii), existe um equilíbrio, onde não há trocas, que suporta os processos dos preços dos ativos e títulos dados.*

A idéia da prova é como se segue. Primeiro, calcula-se as taxas marginais de substituição do consumidor i, considerando que não há trocas na economia. Depois, calcula-se a avaliação privada que i possui acerca do ativo j, sob essas taxas de substituição. Então se prova que esse valor é igual ao preço de j, dado. Além disso, qualquer desvio factível da estratégia de não se negociar ativos não irá aumentar a utilidade do indivíduo (mas não mostraremos isso aqui).

Mais especificamente, na ausência de trocas, a taxa marginal de substituição do consumidor i, de t para $t+1$ é:

$$\begin{aligned}
TMS_{t,t+1}(i) &= e^{-\zeta}\left(\frac{C_{i,t+1}}{C_{it}}\right)^{-\alpha} \\
&= e^{-\zeta}\left(\frac{e_{i,t+1}+D_{t+1}}{e_{it}+D_t}\right)^{-\alpha} \\
&= e^{-\zeta}\left(\frac{\delta_{i,t+1}C_{t+1}}{\delta_{it}C_t}\right)^{-\alpha} \\
&= e^{-\zeta}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha}\exp\left[-\alpha\left(\eta_{i,t+1}\nu_{t+1}-\frac{\nu_{t+1}^2}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Logo, a avaliação privada que i possui sobre o ativo j no tempo t é:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{jt}(i) &= E\left[\left(p_{j,t+1}+d_{j,t+1}\right)TMS_{t,t+1}(i)\mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\left(p_{j,t+1}+d_{j,t+1}\right)e^{-\zeta}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha}W_{it}\mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}$$

onde, usando a lei das expectativas iteradas,

$$W_{it} = E\left[\exp\left[-\alpha\left(\eta_{i,t+1}\nu_{t+1}-\frac{\nu_{t+1}^2}{2}\right)\right]\mid \mathcal{F}_t\cup\{\nu_{t+1}\}\right]$$

Da independência de η_{it} em relação a $\mathcal{F}_{t-1}$ e ν_t, temos que:

$$W_{it} = \exp\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\nu_{t+1}^2\right] = e^{\zeta}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\alpha}\left(\frac{M_{t+1}}{M_t}\right)$$

Logo,

$$\hat{P}_{jt}(i) = E\left[(p_{j,t+1} + d_{j,t+1})\left(\frac{M_{t+1}}{M_t}\right) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Por outro lado, da definição de M, segue-se que uma espécie de equação básica de apreçamento:

$$p_{jt} = E\left[(p_{j,t+1} + d_{j,t+1})\left(\frac{M_{t+1}}{M_t}\right) \mid \psi_t\right]$$

Como ψ_t e $\mathcal{F}_t$ diferem apenas por variáveis condicionais que não exercem qualquer papel no cálculo das esperanças condicionais acima, conclui-se que $\hat{P}_{jt}(i) = p_{jt}$. Isto é, a avaliação privada que o consumidor i tem acerca do ativo j é igual ao preço dado no mercado, livre de arbitragem, independentemente de quem seja o indivíduo.

Agora, do equilíbrio encontrado, podemos derivar uma equação de Euler. Sabemos que a equação de Euler do consumo do indivíduo i para o ativo j é:

$$E\left[R_{j,t+1}e^{-\zeta}\left(\frac{C_{i,t+1}}{C_{it}}\right)^{-\alpha} \mid \mathcal{F}_t\right] = 1$$

Além disso, como não há trocas no equilíbrio encontrado, $C_{it} = e_{it} + D_t = \delta_{it}C_t$. Substituindo-a na equação acima, podemos encontrar:

$$E\left[R_{j,t+1}e^{-\zeta}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha}\exp\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\nu_{t+1}^2\right] \mid \psi_t\right] = 1 \qquad (7)$$

Novamente, é interessante a comparação com a equação de Euler (2) da economia de Lucas tradicional (considerando, é claro, função utilidade potência). Observe que diferem uma da outra pelo termo $\exp\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\nu_{t+1}^2\right]$. Grosso modo, este traduz a heterogeneidade dos indivíduos, os choques idiossincráticos. Para entendê-lo melhor, podemos nos concentrar em ν_{t+1}^2.

O termo ν_{t+1}^2 pode ser interpretado como a variância da distribuição *cross-sectional* do crescimento do consumo. De fato, observe que:

$$\log\left(\frac{C_{i,t+1}/C_{t+1}}{C_{it}/C_t}\right) = \log\left(\frac{\delta_{i,t+1}}{\delta_{it}}\right) = \eta_{i,t+1}\nu_{t+1} - \frac{\nu_{t+1}^2}{2} \sim N\left(-\frac{\nu_{t+1}^2}{2}, \nu_{t+1}^2\right)$$

Em poucas palavras, ν_{t+1} mede como o crescimento do consumo varia entre os indivíduos dessa economia. Note que se os consumidores são homogêneos, então $\nu_{t+1}^2 = 0$ e (7) se reduz à equação de Euler (2) de uma economia com agente

representativo. Se são heterogêneos, e, em particular, $\nu_{t+1}^2 = a + b \log\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)$, então (7) é escrita como:

$$E\left[R_{j,t+1} e^{-\hat{\zeta}} \left(\frac{C_{i,t+1}}{C_{it}}\right)^{-\hat{\alpha}} \mid \psi_t\right] = 1$$

onde $\hat{\zeta} = \zeta - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} a$ e $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} b$. Observe que ela é isomorfa àquela de uma economia com agente representativo, mas com a taxa de desconto e o coeficiente de aversão ao risco modificados.

A conseqüencia prática é imediata: se fôssemos estimar a equação de Euler, e ignorássemos a heterogeneidade dos indivíduos, estaríamos subestimando ou superestimando sua aversão ao risco e impaciência.

O exemplo dado por Constantinides e Duffie (1996) não deixa dúvida: suponha que a variância da distribuição cross-sectional do crescimento do consumo aumente em períodos de recessão econômica ($C_t < C_{t-1}$). Como $\log\left(C_{t+1}/C_t\right) < 0$, então deve-se ter b negativo, a fim de respeitar $\nu_{t+1}^2 > 0$. Logo, $\hat{\alpha} > \alpha$. Ou seja, se um econometrista não considerasse a heterogeneidade, estaria superestimando o coeficiente de aversão ao risco.

No caso mais geral, podemos calcular o retorno em excesso esperado do ativo j e obtermos:

$$E\left[R_{j,t+1} \mid \psi_t\right] - R_{F,t+1} = -\frac{cov\left(R_{j,t+1}, H_{t+1} \mid \psi_t\right)}{E\left[H_{t+1} \mid \psi_t\right]} \tag{8}$$

onde $R_{F,t+1}$ é o retorno do título e

$$H_{t+1} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} \exp\left[\frac{\alpha\left(\alpha+1\right)}{2} \nu_{t+1}^2\right]$$

Logo, um ativo terá prêmio de risco positivo (negativo) se seu retorno covariar negativamente (positiv.) com H_{t+1}.

Aqui se sugere uma nova fonte para o prêmio de risco. De fato, a equação de Euler de uma economia com agente representativo implica um prêmio de risco baixo, uma vez que empiricamente o consumo agregado covaria muito pouco com o retorno dos ativos. Repare na equação (6). Como exemplo extremo, considere o caso no qual o crescimento do consumo agregado é constante. Então teremos prêmio de risco zero para qualquer ativo! Em contrapartida, a equação (8) nos diz que o prêmio de risco para um ativo será positivo (negativo) sempre que seu retorno covariar negativamente (positiv.) com ν_{t+1}^2.

Portanto, sugere-se que o prêmio de risco possa ser gerado a partir de choques idiossincráticos na renda. Um ponto central ao modelo é que tais choques determinam o **crescimento** do consumo, e portanto, são persistentes. Caso contrário, os indivíduos poderiam se proteger dos riscos idiossincráticos negociando o conjunto de ativos existentes, emprestando, tomando emprestado ou estocando, como já demonstrado na literatura (exemplo, Telmer (1993)). Isto é, riscos idiossincráticos transitórios podem, sim, ser totalmente compartilhados

em mercados com estrutura muito reduzida de ativos. E assim, a volatilidade da renda estaria suvizada, assim como a do consumo, e voltaríamos ao *equity premium puzzle.*

6 Conclusão

Esta dissertação descreveu, brevemente, três das maneiras de se incorporar heterogeneidade entre indivíduos à árvore de Lucas.

Pode-se analisá-la sob duas óticas. Por um lado, expõe a a praticidade de se usar métodos recursivos para a modelagem de economias e obtenção de equilíbrios. Por outro, explora a heterogeneidade para aperfeiçoar nossa capacidade de apreçar ativos.

Constatamos que ao deixarmos o arcabouço do agente representativo, encontrar preços pode se tornar uma tarefa extremamente difícil. Ou eles passam a fazer parte de uma variável de estado, como nos modelos markovianos das seções três e quatro; ou passam a obedecer a uma certa equação de Euler de economias judiciosamente construídas, como na seção anterior.

Ao se explorar as propriedades de Markov dos primitivos da economia, vimos que podemos encontrar equilíbrios competitivos representados por um conjunto de estados que incluem variáveis exógenas e endógenas, e por uma transição que mapeia estados hoje em estados amanhã.

Quando se tem, ao invés da propriedade Markoviana, choques nas rendas individuais que são permanentes, vimos ser possível obter uma equação de Euler que relaciona preços de ativos a tais idiossincrasias.

Enfim, talvez estejamos na direção correta ao presumirmos que a avaliação dos ativos da economia esteja muito ligada aos nossos choques idiossincráticos, pois, afinal, é certo que poucos de nós conseguem compartilhar completamente todo risco a que nos expomos.

Referências

[1] Araújo, A. (2007): *Introdução à Economia Dinâmica e Mercados Incompletos.* Rio de Janeiro, RJ: IMPA Publicações Matemáticas

[2] Bewley, T. (1972): "Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities,"*Journal of Economic Theory*, 4, 514-540

[3] Cochrane, J.H. (2005): *Asset Pricing.* Princeton, NJ: Princeton University Press

[4] Constantinides, G., D. Duffie (1996): "Asset Pricing with Heterogeneous Consumers,"*Journal of Political Economy*, 104, 219-240

[5] Duffie, D., J. Geanakoplos, A. Mas-Colell, A. McLennan (1994): "Stationary Markov Equilibria,"*Econometrica*, 62, 745-781

[6] Kubler, F., K. Schmedders (2002): "Recursive Equilibria in Economies with Incomplete Markets,"*Macroeconomic Dynamics*, 6, 284-306

[7] Kubler, F., K. Schmedders (2003): "Stationary Equilibria in Asset-Pricing Models with Incomplete Markets and Collateral,"*Econometrica*, 71, 1767-1793

[8] Lucas, R. (1978): "Asset Prices in an Exchange Economy,"*Econometrica,* 46, 1429-1445

[9] Mehra, R., E. Prescott (1985): "The Equity Premium Puzzle,"*Journal of Monetary Economics*, 15, 145-161

[10] Radner, R. (1972): "Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectation in a Sequence of Markets,"*Econometrica*, 40, 283-303

[11] Ramsey, F.P. (1928): "A Mathematical Theory of Saving,"*Economic Journal,* 38, 543-559

[12] Telmer, C. (1993): "Asset Pricing Puzzles and Incomplete Markets," *Journal of Finance*, 48, 1803-32