

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS  
Escola de Matemática Aplicada

Leilões: a utilização do Fictitious Play para  
simular o comportamento dos agentes

Luis Eduardo Craizer

Rio de Janeiro  
2016

Luis Eduardo Craizer

Leilões: a utilização do Fictitious Play para simular o  
comportamento dos agentes

Dissertação submetida à Escola de Matemática Aplicada como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática da Informação.

Orientador: Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva

Rio de Janeiro

2016

Craizer, Luis Eduardo

Leilões: a utilização do fictitious play para simular o comportamento dos agentes / Luis Eduardo Craizer. – 2016.

66 f.

Dissertação (mestrado) – Fundação Getulio Vargas, Escola de Matemática Aplicada.

Orientador: Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva.

Inclui bibliografia.

1. Leilões. 2. Simulação (Computadores). 3. Algoritmos. I. Silva, Moacyr Alvim Horta Barbosa da. II. Fundação Getulio Vargas. Escola de Matemática Aplicada. III. Título.

CDD – 511.8



**LUIS EDUARDO TORRES DE MELLO CRAIZER**

**LEILÕES: A UTILIZAÇÃO DO FICTITIOUS PLAY PARA SIMULAR O  
COMPORTAMENTO DOS AGENTES.**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Modelagem Matemática da Informação da Escola de Matemática Aplicada da Fundação Getúlio Vargas para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática da Informação.

Data da defesa: 11/03/2016.

**ASSINATURA DOS MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA**

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Moacyr H. B. da Silva', written over a horizontal line.

**Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva**  
Orientador (a)

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Antonio Carlos Saraiva Branco', written over a horizontal line.

**Antonio Carlos Saraiva Branco**

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Edson D. Lopes Gonçalves', written over a horizontal line.

**Edson Daniel Lopes Gonçalves**

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu pai, que, com seus "palpites matemáticos", foi de fundamental importância para a conclusão do trabalho.

Agradeço também à minha mãe, meu padrasto e minhas irmãs Renata e Rafaela, que sempre me encorajaram em momentos mais difíceis, injetando doses de confiança para a realização deste projeto.

Agradeço bastante aos meus companheiros de sala, que estiveram presentes durante todo o período do curso de mestrado e agradeço especialmente a Eliane Martins, que sempre me ajudava com ótimas ideias para o trabalho.

Agradeço especialmente ao meu orientador Moacyr Alvim, que sempre me ajudou bastante, tanto nos cálculos quanto na parte mais teórica do projeto. O professor é um orientador que tem boas ambições sob o ponto de vista de uma dissertação de mestrado, o que me motivou bastante para chegar aos objetivos traçados no início do projeto.

Agradeço aos membros da banca, tanto ao meu orientador Moacyr Alvim, quanto aos professores Antonio Carlos Branco e Edson Daniel Lopes Gonçalves, pelo tempo, pela dedicação e principalmente pelas críticas construtivas que serão essenciais para a continuação deste projeto no futuro.

## **Resumo**

Em um leilão, tanto o vendedor quanto os potenciais compradores desejam maximizar suas receitas: no caso do leiloeiro, ele quer obter o maior valor possível pela venda de seu bem; no caso dos agentes participantes, eles desejam pagar o menor valor possível pelo objeto e, ainda assim, vencer o leilão. Tendo como base de estudo o cenário descrito, este trabalho sugere um algoritmo baseado no Fictitious Play que visa simular o comportamento dos agentes perante um certo tipo de leilão específico. Esta simulação pretende também incorporar a aversão ao risco e pretende-se prever o comportamento racional dos agentes participantes perante este cenário. O objetivo principal desta dissertação é realizar uma comparação entre as funções que descrevem as estratégias que maximizam as utilidades dos participantes já catalogadas na literatura e as estratégias ótimas que são obtidas na simulação através do algoritmo proposto.

Palavras-chave: Leilões. Fictitious Play. Simulação computacional.

### **Abstract**

In an auction, both the good's seller and the potential buyer desire to maximize their profit. The seller aims to obtain the highest possible value for the good, whereas the buyers want to win the auction paying the less they can for the object. In this scenario, this study suggests an algorithm based on the Fictitious Play, which seeks to simulate the agents' behavior for the different kinds of auctions. In this simulation, we are also going to embed the risk aversion and try to forecast rational behavior of the agents. The main goal of the work is to make a parallel between the strategy functions, which maximize the agents' utilities cataloged on books and texts, and the optimal strategies, which are obtained in the simulation through the usage of the proposed algorithm.

**Keywords:** Auctions. Fictitious Play. Computer simulation.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Tipos de Leilões</b>	<b>10</b>
2.1	Leilão de Primeiro Preço . . . . .	11
2.2	Leilão de Segundo Preço . . . . .	13
2.3	Leilão de Desconto na Tarifa . . . . .	13
2.4	Leilão de Valor Comum . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Simulação com jogadores fictícios</b>	<b>16</b>
3.1	Fictitious Play . . . . .	17
3.2	Descrição do algoritmo . . . . .	18
3.3	Elementos da simulação . . . . .	19
3.4	Exemplo de simulação . . . . .	20
3.5	Simulação com agentes neutros ao risco . . . . .	21
3.5.1	Leilão de Primeiro Preço . . . . .	22
3.5.2	Leilão de Segundo Preço . . . . .	24
3.5.3	Leilão de Desconto na Tarifa . . . . .	26
3.5.4	Leilão de Valor Comum . . . . .	26
3.6	Agentes avessos ao risco . . . . .	28
3.6.1	Leilão de Primeiro Preço . . . . .	30
3.6.2	Leilão de Segundo Preço . . . . .	31
3.6.3	Leilão de Desconto na Tarifa . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Preço de Reserva</b>	<b>36</b>
<b>5</b>	<b>Simulação do Preço de Reserva</b>	<b>40</b>
5.1	Elementos da Simulação . . . . .	41
5.2	Resultados da Simulação . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>44</b>
<b>7</b>	<b>Trabalhos futuros</b>	<b>45</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>48</b>
	<b>Appendix A Códigos implementados</b>	<b>48</b>
A.1	Leilões de Primeiro Preço e de Segundo Preço . . . . .	48
A.2	Leilão de Desconto na Tarifa . . . . .	52
A.3	Leilão de Valor Comum . . . . .	55
	<b>Appendix B Gráficos dos resultados</b>	<b>59</b>



# 1 Introdução

Leilão é uma forma de comércio em que um vendedor, licitante, ou apenas leiloeiro, deseja se desfazer de um bem, seja um produto físico ou até um serviço e, para isso, o coloca à venda para que um certo número de pessoas possa disputá-lo. Em [8], o autor define o leilão como simplesmente um mecanismo de alocação de um bem ou de vários bens, que conta com um vendedor e vários potenciais compradores.

Historicamente, este tipo de comércio começou a ser usado por volta do ano de 500 a.C. na Babilônia [5]. Na ocasião, leiloavam-se mulheres para casamento até que a mulher mais bonita e mais atraente, de acordo com o resultado do leilão, vencia e assim era vendida. Na época, era proibida a venda de uma filha para se casar fora deste tipo de comércio [9]. Outro exemplo é relatado na época do Império Romano, em que as "sobras das guerras", ou seja, os escravos remanescentes no império, eram vendidos na forma de leilões.

Segundo [12], a primeira casa de leilão foi construída no ano de 1674 em Estocolmo, na Suécia, que atualmente é a segunda maior casa de leilão do mundo. Diversos itens são vendidos na casa através de leilões que duram cerca de 90 segundos por item.

Devido ao crescimento cada vez maior do comércio eletrônico, hoje temos uma grande variedade de leilões online. Este tipo de comércio é bastante utilizado quando deseja-se atingir uma grande quantidade de compradores geograficamente dispersos sem a necessidade da locação de uma casa de leilão e do transporte dos participantes e do leiloeiro.

Este trabalho tem como objetivo analisar de maneira mais profunda alguns tipos específicos de leilão. De fato, será feita uma simulação computacional destes leilões visando observar as estratégias que os participantes devem tomar a fim de maximizarem sua receitas. Esta simulação será baseada no Fictitious Play, que é um método de aprendizado que foi desenvolvido por G. W. Brown em 1951, em que os potenciais compradores do bem em questão têm um histórico de lances ofertados e seus respectivos payoffs, para uma certa avaliação que fizeram deste bem, e que toma uma nova ação baseada somente neste histórico de ações passadas. Este algoritmo será descrito com mais detalhes no capítulo 3.

O que queremos observar de fato é se, após uma quantidade suficiente de leilões, as estratégias dos participantes convergem para um Equilíbrio de Nash. Em [8], o autor define Equilíbrio de Nash como perfil de estratégias dos participantes em que nenhum deles se beneficia se optar por mudar sua estratégia. Vamos analisar também se essas estratégias ótimas se mantêm até o final da simulação, caracterizando realmente que convergiram a um equilíbrio, e se

estes equilíbrios alcançadas, estão de acordo com o que está tabulado na literatura.

## 2 Tipos de Leilões

Quando o assunto é leilão, a primeira ideia que se tem é de um espaçoso salão fechado, com um grande número de participantes, em que leiloeiro deseja vender um certo bem, por exemplo uma peça de arte. O vendedor então define um preço mínimo e, a cada vez que alguém levanta a mão para dar um lance, ele grita "quem dá mais, quem dá mais?". O leilão conhece o seu vencedor no momento em que esta pergunta não é mais respondida por nenhum participante, alcançando o triunfo o dono do último lance dado. O item é então vendido a este sujeito pelo preço referente ao seu lance.

Apesar de nos remetermos a este tipo específico de leilão, temos hoje uma grande diversidade deste comércio, podendo defini-los por: sua forma (aberto ou fechado); caso seja aberto, pela variação de lances, se é ascendente ou descendente; por seu preço de fechamento (primeiro preço, segundo preço, etc.); se a venda é de apenas uma unidade ou de múltiplas unidades e por aí vai.

Dentre os mais variados tipos, temos os leilões clássicos, os que são de maior conhecimento comum. Assim, vamos começar a contextualizá-los nos próximos parágrafos.

O leilão inglês é o mais clássico dentre eles. Neste leilão, o vendedor define um preço mínimo inicial (Preço de Reserva), que mais adiante iremos descrevê-lo com mais detalhes, a partir do qual os jogadores baseam seus lances. Os lances variam de forma ascendente por um incremento mínimo definido pelo leiloeiro. Assim, o jogador que der o lance final, consequentemente, o maior lance, vence o leilão e adquire o bem pagando o preço referente ao lance dado. Este é o leilão mais comum em casas de leilão e leilões online, daí a razão de ser o mais conhecido pelas pessoas.

O leilão japonês é parecido com o leilão inglês no fato de o preço variar de forma ascendente, porém é dado de uma forma diferente. Ao invés de os jogadores darem sucessivos lances cada vez maiores, neste caso o leiloeiro começa com um preço mínimo e vai aumentando este preço de forma regular, ou seja, somando a ele um incremento já definido anteriormente pelo mesmo. A cada mudança de preço, os jogadores decidem se continuam ou não participando do leilão e, no momento em que um jogador desiste de permanecer no jogo, ele não pode voltar atrás. Quando há apenas um jogador restante, o jogo acaba e este jogador leva o bem pagando pelo item o preço referente ao lance atual. Este leilão teve início no Japão, que utiliza este tipo de comércio para a venda de peixes no mercado.

No leilão holandês, diferentemente do inglês e do japonês, os preços variam descendentemente. Neste caso, o leiloeiro começa com um preço alto e vai baixando este valor também de maneira regular. Cada participante tem acesso a um botão que pode ser apertado a qualquer momento do jogo. O leilão acaba no momento em que um dos participantes aperta este botão, indicando que o mesmo adquirirá o bem pagando o preço referente ao momento em que o botão foi apertado. Este tipo de leilão é usado até hoje para a venda no famoso mercado de flores de Amsterdã, por isso, o nome de Leilão Holandês. Em geral, é um leilão que tem objetivo realizar uma venda rápida de um certo bem.

Os leilões que foram descritos até o momento são chamados de leilões abertos, uma vez que os lances dados pelos jogadores são de acesso de todos os participantes. Por outro lado, temos os leilões de envelopes selados, ou leilões fechados. Neste caso, cada jogador só tem conhecimento de sua própria avaliação do objeto em questão. Este é o tipo de leilão que será simulado e analisado nesta dissertação, descrevendo resultados sobre os leilões de primeiro preço, de segundo preço, leilão com desconto na tarifa e leilão de valor comum. Depois disso, analisaremos o leilão do ponto de vista do leiloeiro: qual deve ser o preço inicial (preço de reserva) que ele deve definir para obter a maior receita esperada pelo bem.

## 2.1 Leilão de Primeiro Preço

No leilão de primeiro preço, o jogador que der o maior lance leva o objeto e paga pelo preço de seu próprio lance, o lance que o fez vencer o leilão. Desta forma, o lucro esperado de cada jogador neste leilão é:

$$\Pi_i = \begin{cases} v_i - b_i & \text{se } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{c.c} \end{cases},$$

sendo  $v_i$  a avaliação do objeto pelo jogador  $i$ ,  $b_i$  o lance dado pelo mesmo e  $b_j$  o lance do jogador  $j$ .

O fato que mais nos interessa neste leilão é o lance ótimo que cada participante deve dar a fim de otimizar seu lucro esperado. Em [8], Proposição 11.1.2, o autor prova que em um leilão de primeiro preço com dois jogadores neutros ao risco de valores privados i.i.d (independentes e identicamente distribuídos) no intervalo uniforme  $[0, 1]$ ,  $(\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{2}v_2)$  é um equilíbrio de Nash para os respectivos lances dos jogadores 1 e 2.

De modo geral, o lance ótimo varia de acordo com o número de participantes  $N$  e é dado pela seguinte fórmula para o caso de neutralidade ao risco:

$$b_i^* = \frac{(N-1)v_i}{N}.$$

Para chegarmos a esta fórmula, inicialmente escrevemos o lucro esperado para o jogador  $i$  da maneira que segue:

$$\pi(v_i, b_i) = (v_i - b_i) \cdot \Pr(\max\{B_{-}\} < b_i) = (v_i - b_i) \cdot F_{\beta}(b_i),$$

onde  $B_{-}$  é o vetor que contém os lances dos demais participantes e  $\beta$  é o máximo de  $B_{-}$ . Assim, afim de alcançar uma fórmula para o lance ótimo de  $i$ , desenvolvemos o cálculo inicial da fórmula inicial derivando o lucro esperado em relação ao lance e igualamos a zero.

$$\begin{aligned}\pi'(b_i) &= -F_{\beta}(b_i) + (v_i - b_i)f_{\beta}(b_i) = 0 \\ \Rightarrow (b_i - v_i)f_{\beta}(b_i) &= -F_{\beta}(b_i) \\ \Leftrightarrow b_i &= v_i - \frac{F_{\beta}(b_i)}{f_{\beta}(b_i)}\end{aligned}$$

A troca de variáveis de  $b_i$  para  $v_i$  se dá da seguinte maneira:

$$F_{\beta}(b_i(v_i)) = \Pr(\beta < b_i) = \Pr(V < v_i) = F_V(v_i),$$

onde  $V$  é o vetor que contém os valores dos demais participantes. A segunda igualdade se dá por assumirmos que o lance segue uma função monotonicamente crescente, então a probabilidade do lance do jogador  $i$  ser o maior é a mesma que o seu valor  $v_i$  ser maior do que os dos outros. Assim, derivando  $F_{\beta}(b_i(v_i))$  e  $F_V(v_i)$  temos que:

$$\begin{aligned}f_{\beta}(b_i) \cdot b'_i(v_i) &= f_V(v_i) \\ \Leftrightarrow f_{\beta}(b_i) &= \frac{f_V(v_i)}{b'_i(v_i)}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}b_i &= v_i - \frac{F_V(v_i)}{f_V(v_i)} \cdot b'_i \\ \Leftrightarrow b'_i &= (v_i - b_i) \cdot \frac{f_V(v_i)}{F_V(v_i)}.\end{aligned}$$

Sabemos que  $F_V(v_i)$  é a densidade acumulada de  $v_i$  (ou seja, a probabilidade de  $i$  ganhar o leilão), que por sua vez veio de uma distribuição uniforme  $U[0, 1]$ . Então  $F_V(v_i) = v_i^{N-1}$  e sua derivada, que é sua densidade,  $f_V(v_i) = (N - 1)v_i^{N-2}$ . Então,

$$b'_i = (v_i - b_i) \cdot \frac{N - 1}{v_i}.$$

Esta equação diferencial é resolvida utilizando um fator integrante e o resultado obtido é:

$$b_i^* = \frac{(N - 1) v_i}{N}.$$

## 2.2 Leilão de Segundo Preço

No Leilão de Segundo Preço, também conhecido como Leilão de Vickrey, o vencedor adquire o bem pagando o preço do segundo maior lance. O payoff  $s$  do jogador  $i$  neste caso é dado pela fórmula:

$$\Pi_i = \begin{cases} v_i - b_2 & \text{se } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{c.c} \end{cases},$$

sendo  $b_2$  o segundo maior lance.

Para este tipo de leilão, é fácil demonstrar que, independente do número de jogadores  $N$ , os agentes têm incentivo a revelar suas verdadeiras avaliações do item. Em outras palavras, um equilíbrio de Nash é alcançado quando a função de oferta é  $b_i = v_i$  para todo jogador  $i$ .

Para demonstrar o porquê desta estratégia ser um equilíbrio de Nash, primeiramente iremos assumir que todos, exceto o jogador  $i$ , darão seus lances iguais às suas respectivas avaliações. Desta maneira, podemos pensar em dois cenários possíveis para a avaliação  $v_i$  do jogador  $i$ :  $v_i > \max_{j \neq i} v_j$  e  $v_i < \max_{j \neq i} v_j$  (vamos excluir o caso de empate, já que o mesmo ocorre com probabilidade 0 na teoria). No primeiro cenário,  $i$  vence o leilão apenas dando um lance igual à sua avaliação e paga o segundo maior lance. Se ele aumentar seu lance, ele continua vencendo o leilão e pagando o valor do segundo maior lance. Se ele o diminuir, ele ou vence pagando o segundo maior lance ou perde e paga 0.0 caso essa diminuição tenha sido suficiente para ficar abaixo da avaliação do jogador de segundo maior lance. Já no segundo cenário,  $i$  perde o leilão dando um lance igual à sua avaliação e paga 0.0. Se ele diminuir seu lance, ele continua perdendo e pagando 0.0. Se ele o aumentar, ou ele continua perdendo e pagando 0.0 ou ele vence, caso tenha aumentado o valor suficientemente a ponto do mesmo ultrapassar a avaliação do jogador vencedor, e paga um valor maior do que sua avaliação, resultando em um payoff negativo para ele. Desta maneira, em ambos os casos,  $i$  não ganha nada ao tentar sair da estratégia de dar um lance honesto à sua avaliação, fato este que faz desta estratégia um Equilíbrio de Nash.

## 2.3 Leilão de Desconto na Tarifa

Este leilão foi baseado na referência [7]. É um modelo bastante utilizado no Brasil para concessões de serviços públicos. Neste leilão, os jogadores são licitantes de um serviço público e neste caso os lances são descontos nas tarifas que os mesmos estão dispostos a ceder ao governo em caso de vitória no leilão. Como o governo assume o papel do leiloeiro, o licitante que der como lance o maior desconto vence o leilão.

No mesmo texto, define-se uma receita máxima  $R$  para a empresa que vencer

o leilão, um custo  $c_i$  de entrega do comprador  $i$  e um lance  $b_i$ , que é o valor que o mesmo pretende abrir mão de seu lucro para dar ao governo. Desta maneira, o lucro esperado de um dado jogador  $i$  é definido por:

$$\Pi_i = \begin{cases} R(1 - b_i) - c_i & \text{se } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}.$$

A autora se baseia em [5] para chegar ao resultado da oferta ótima dos participantes. Segue abaixo a equação alcançada por ela:

$$b_i^* = \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{c_i}{R}\right).$$

Por conseguinte, o lucro esperado para o vencedor do leilão é dada pela fórmula:

$$\Pi_i = \frac{R - c_i}{N}.$$

## 2.4 Leilão de Valor Comum

Em todos os leilões descritos até o momento, cada jogador tem sua própria avaliação sobre o bem ou o serviço que está sendo leiloado e vence o indivíduo que der o maior lance. No Leilão de Valor Comum, como o próprio nome já diz, o objeto em questão tem um valor comum a todos os participantes, ou seja, não há uma divergência na avaliação do objeto em questão. Este tipo de leilão ocorre em situações em que o bem leiloado é algo que não contém nenhum valor subjetivo, mas puramente um valor monetário que o vencedor do leilão irá pagar com o objetivo de revender este bem. Um exemplo disto é a venda de uma área de exploração de petróleo. O governo, neste caso, é o leiloeiro e os jogadores são os participantes da licitação, que querem comprar a área para explorar o petróleo (bem leiloado) e revendê-lo, gerando-lhe receita com o comércio. O problema aqui é que, apesar de o bem ter um valor comum a todos, já que estamos falando de valor monetário, este valor exato não é de conhecimento dos participantes. No caso da exploração do poço de petróleo, isto se deve ao fato de que não se pode ter certeza da quantidade exata que há de petróleo na região, a menos que haja uma exploração e um estudo da mesma. Desta forma, o que os licitantes fazem é chamarem um especialista para que este lhes dê uma estimativa, um sinal de quanto vale o bem.

Sendo assim, neste leilão temos: um bem a ser leiloado de valor comum  $v$ , um leiloeiro e  $N$  participantes, cada um com um sinal  $s_i$  do valor real do bem. Para fins de estudo e implementação, iremos minudenciar um pouco mais este leilão.

Para este leilão, iremos analisar o caso do mesmo ser selado e de primeiro preço. Em [4], o autor define o valor real do objeto como  $v$ , sendo que este valor vem de uma distribuição uniforme com um valor mínimo  $V_L$  e um valor máximo  $V_H$ . Dado o valor  $v$  proveniente desta distribuição, os sinais  $s_i$  de cada

jogador vêm também de uma uniforme com valor mínimo  $v - \epsilon$  e valor máximo  $v + \epsilon$ , sendo  $\epsilon$  um valor que define o quanto a crença sobre  $v$  pode variar dentro deste intervalo.

Assim como nos outros leilões, estamos interessados na função que descreve o lance ótimo  $b_i$  de cada jogador, dado o sinal  $s_i$  que o mesmo recebe.

Em [4], o lance de cada jogador que define um Equilíbrio de Nash, para  $V_L + \epsilon \leq s_i \leq V_H - \epsilon$  é dado pela fórmula:

$$b_i^* = s_i - \epsilon + Y,$$

onde  $Y = \frac{2\epsilon}{N+1} \cdot e^{\frac{-(N/2\epsilon)}{s_i - (V_L + \epsilon)}}$ .

Neste caso, o jogador  $i$  que der o lance  $b_i^*$  tem um payoff positivo, e mais do que isso, o melhor possível para aquele contexto. No entanto, observamos que na prática não é exatamente isso que acontece.

### A maldição do Vencedor

Sem saber da função de lance ótimo, os jogadores, ao se depararem com um leilão de valor comum, dão seus lances em função dos sinais que recebem. O que se observa frequentemente é que os jogadores dão como lance o próprio sinal que recebem sobre o valor do bem leilado, ou algo muito próximo a ele.

Neste cenário, temos o valor  $v$  real do bem e  $N$  sinais, em geral, alguns maiores e outros menores que  $v$ . Supondo que o leilão seja economicamente eficiente, ganhará o leilão o agente que receber o maior sinal dentre os participantes. Neste caso, temos que o Payoff deste indivíduo é  $\Pi_i = v - b_i$ . Como  $b_i \simeq s_i$ , então temos que  $\Pi_i = v - s_i$ . Como  $s_i > v$ , então o vencedor do leilão, na grande maioria dos casos, terá uma receita negativa. Este é o fenômeno da Maldição do Vencedor, em que o participante vencedor não gostaria de ter vencido o leilão. A figura ilustra de forma clara este fenômeno, porém com os valores e os sinais variando em uma distribuição normal. Na figura,  $\bar{E}$  é o valor real do bem.

De acordo com [10], a maldição do vencedor não é apenas quando o vencedor do leilão tem um payoff negativo, mas quando o mesmo superestima o bem. Neste caso, mesmo que o vencedor tenha um payoff positivo, ele tem um resultado abaixo do esperado, ou seja, seu payoff poderia ter sido maior. A referência [11] elabora algumas explicações para esse fenômeno.

Uma explicação, dado por [10] é que os participantes não tem informação suficiente sobre o valor esperado condicionado ao fato de vencer o leilão, ou seja, não sabem que quem vencer o leilão será quem deu o maior lance, neste caso, quem mais superestimou o bem.

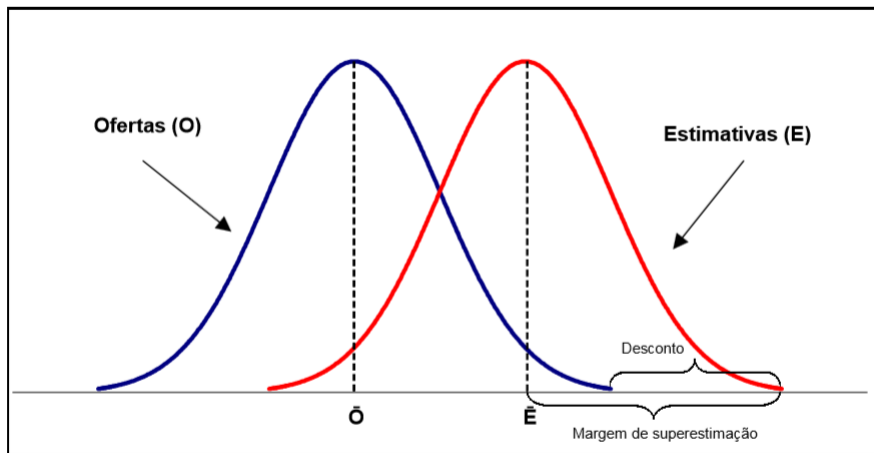


Figure 1: Maldição do Vencedor

Esta figura foi extraída da referência [11], que por sua vez foi retirada do texto [1].

O texto [4] alega que as ofertas dos jogadores baseiam-se apenas em suas estimativas. Como já descrito antes, este é o caso em que o vencedor superestima o valor do bem e acaba pagando um valor maior que o devido pelo mesmo.

Em [1], o autor afirma que não é feita uma inferência correta pelos participantes para assim reduzirem suas ofertas, gerando desta maneira resultados financeiros abaixo do esperado.

Em contraposição a este fato, o texto [2] afirma que se todos os agentes tiverem um comportamento racional, não ocorrerá o fenômeno. Neste caso, as ofertas apresentadas serão abaixo do valor esperado condicionado a se vencer o leilão.

### 3 Simulação com jogadores fictícios

Nesta seção, será descrito minuciosamente como foi feito e o que foi utilizado como ferramenta para a implementação dos leilões de primeiro preço, de segundo preço, de desconto na tarifa e de valor comum.

A ideia principal é a utilização do Fictitious Play para simular o comportamento de agentes humanos perante um certo tipo de leilão. É claro que deve-se levar em consideração que há um grau de aversão ao risco dos jogadores, que varia de pessoa a pessoa, levando-as a cederem parte de seus lucros a fim de aumentar a probabilidade de triunfarem. Por exemplo, para um jogador avesso



ao risco, pode ser preferível ganhar \$1000,00 com probabilidade de 100% a ganhar \$10.000,00 com probabilidade de 90%, mesmo sabendo-se que este cenário corresponde a um valor de lucro esperado maior do que o do primeiro cenário. No caso do leilão, o risco é associado à probabilidade do participante ganhar ou perder o leilão. Jogadores mais neutros ao risco optam por aumentar seus lances a fim de minimizar o risco de perderem o leilão.

Neste trabalho, serão simulados leilões de envelopes lacrados, ou seja, leilões nos quais os jogadores não sabem quais são as ofertas dadas pelos outros agentes. O que eles têm conhecimento é a maneira como esses lances variam dentro de um certo intervalo de valores. Em outras palavras, nenhum agente sabe qual é oferta dada pelos demais participantes no momento que devem definir seus respectivos lances, mas é de conhecimento comum a distribuição que origina a avaliação do bem de cada participante.

### 3.1 Fictitious Play

O conceito de Fictitious Play pode ser entendido como um algoritmo em que os jogadores, a cada rodada, jogam suas melhores estratégias baseando-se apenas nos resultados anteriores. Cada jogador tem um histórico de jogadas e, a cada rodada, ele acessa este histórico para tomar sua decisão na rodada atual. A decisão tomada nesta rodada é então anexada ao histórico para que, aos poucos, ele vá aprendendo qual a sua melhor estratégia, visando alcançar um Equilíbrio de Nash.

Em [3], a proposição 2.1 diz que, se em algum momento todos os jogadores jogarem uma estratégia que corresponde a um Equilíbrio de Nash, então eles a jogarão novamente em todas as rodadas subsequentes, tornando este equilíbrio um estado absorvente do Fictitious Play.

Este tipo de aprendizado ocorre de forma mais concreta em animais e crianças pequenas. Um exemplo disto é a maneira pela qual uma criança começa a aprender certas coisas, como quando ela pode ou não colocar o dedo em um bule de café quente. Na primeira vez em que fica curiosa em relação ao objeto nunca visto antes, ela coloca o dedo e se queima. Nas próximas oportunidades que ela tem de decidir se coloca o dedo ou não no bule, ela acessa o histórico de resultados das oportunidades anteriores em sua memória e toma uma decisão. Se ela colocar o dedo, pode ser que se queima, ou pode ser que não. Caso ela esteja medrosa em relação ao possível fracasso e opte por não colocar o dedo no objeto, ela logicamente não se queima, porém perde a chance de saciar sua curiosidade de colocar o dedo e não se queimar. Aos poucos a criança vai aprendendo em que situações ela deve ou não colocar o dedo. Passado um tempo, após inúmeras vezes que a mesma se confronta com esta situação, ela aprende que só se deve colocar o dedo quando não há fumaça saindo do bule

e que, caso contrário, deve permanecer passiva em relação ao objeto.

### 3.2 Descrição do algoritmo

Iremos tratar de leilões de envelopes selados de apenas um bem em jogo. Temos um leiloeiro, que pode ser considerado a máquina, cuja função é de basicamente decidir qual a oferta vencedora e temos os  $N$  agentes participantes.

Como queremos observar o comportamento e o aprendizado dos agentes perante os leilões, teremos  $n$  rodadas, sendo que em cada rodada há um leilão. Desta forma, queremos observar se há convergência nos valores dos lances dos jogadores para cada valor ou sinal recebido após um número de rodadas considerado suficiente.

Cada jogador  $i$  tem um valor do bem  $v_i$ . Se o leilão for de valores privados, os participantes terão valores diferentes, enquanto se estivermos no leilão de valor comum, todos os valores  $v_i$  são iguais, ou seja,  $v_1 = v_2 = \dots = v_N = v$ .

Podemos definir também a função lucro de cada agente em função de seus lances:  $\pi_i : b_i \rightarrow \mathbb{R}$ . Exemplo: em um leilão selado de primeiro preço de valores privados, a função lucro do participante  $i$  é dada por:

$$\pi_i(b_i, b_{-i}) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{se } b_i > \max \{b_{-i}\} \\ 0 & \text{c.c} \end{cases},$$

Cada jogador recebe uma estimativa (sinal)  $s_i$  do valor  $v_i$ . Em valores privados, consideramos que  $s_i = v_i$ . No caso de valores comuns, sorteamos os valores de  $s_i$  de uma distribuição com média centrada em  $v$ , como por exemplo  $s_i \sim U[v - \epsilon, v + \epsilon]$ .

O payoff (ou utilidade) do lucro esperado é uma função côncava e crescente de von Neumann-Morgenstern  $u_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Assumimos  $u' > 0 \geq u''$  e normalizamos  $u(0) = 0$ . Podemos supor a mesma função utilidade para todos os participantes. Funções lineares modelam participantes neutros ao risco e funções estritamente côncavas modelam participantes avessos ao risco. Uma função côncava usada na prática por sua simplicidade e que será usada para efeitos de simulação é  $u(x) = x^r$ , onde  $r \in (0, 1]$ .

#### O lance racional

O participante  $i$  recebe um sinal  $s_i$  e decide dar o lance  $b_i$ . Seu payoff esperado é:

$$E[u_i | s_i] = \int_B u(\pi(b_i(s_i), y)) f_{b_{-i}}(y | s_i) dy,$$

onde  $f_{b_{-i}}(y | s_i)$  é a função de densidade de probabilidade de vetor  $y$  que contém os lances dos demais participantes, dado que o participante  $i$  recebeu o

sinal  $s_i$ . Se os valores forem independentes, como por exemplo no caso de leilões de valores privados, o sinal não interfere na função de densidade, ou seja,  $f_{b_i}(y|s_i) = g_{b_i}(y)$ .

Cada participante procura maximizar seu payoff esperado. Para isso, ele precisa saber qual é a função  $f_{b_i}(y|s_i)$ , porém esta depende da estratégia dos outros jogadores. Nesse contexto, o Fictitious Play tem o papel de estimar esta função, aprendendo-a pouco a pouco, na medida em que os participantes jogam suas melhores respostas de acordo com o histórico de ações dos demais.

### 3.3 Elementos da simulação

As simulações dos leilões foram feitas na linguagem Python e, para isto, foram considerados alguns elementos e algumas variáveis para alcançar os objetivos finais.

Um dos elementos é o valor  $v_i$ , que é um número aleatório gerado a cada rodada, simulando que em cada leilão o jogador  $i$  tem uma certa avaliação do objeto em questão.

Outro elemento utilizado foi uma matriz de Utilidade Esperada, que é atualizada a cada rodada, calculando, para cada valor possível que o jogador poderia ter recebido, a utilidade proveniente do lucro esperado para cada lance que o jogador poderia dar.

A variável  $b_i$  que indica a oferta do jogador  $i$  é selecionada após o mesmo observar sua matriz de Utilidade Esperada para definir qual é o lance que lhe retornará o maior lucro para aquela rodada.

Além desses elementos, a implementação também leva em consideração um fator de esquecimento  $\alpha$ , onde  $0 < \alpha \leq 1$ . Este fato é utilizado no momento de atualizar as matrizes de Utilidade Esperada e tem como objetivo dar um peso maior a valores recentemente calculados do que a valores que foram calculados há muitas iterações atrás. Este elemento tem um papel fundamental sob o ponto de vista da convergência, já que as entradas das matrizes vão convergindo aos poucos para um certo valor final, o que significa que os valores mais antigos estarão mais distantes dessa média alcançada, enquanto os mais recentes estarão cada vez mais perto do valor desejado. o Cálculo da média iterativa com o uso do fator de esquecimento se dá da seguinte maneira:

$$media_{n+1} = media_n \cdot \alpha \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha^{n+1}} + L_{n+1} \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^{n+1}},$$

onde  $L_{n+1}$  é o valor do lucro na rodada  $n+1$ . Quando calculamos o limite para

$\alpha = 1$ , estamos dando importância a todas as rodadas de maneira equivalente. Neste caso, seria o mesmo utilizar a já conhecida fórmula da média iterativa

$$media_{n+1} = \frac{media_n \cdot n}{n+1} + \frac{L_{n+1}}{n+1}.$$

As dimensões de cada matriz dependem de uma certa precisão que é escolhida pelo usuário. Esta precisão nos dá exatamente o número de linhas que a matriz recebe ao ser criada, sendo cada linha referente a um valor e sendo estes valores uniformemente espaçados na distribuição uniforme  $[0, R]$ , onde  $R$  o valor de teto da distribuição.

Vamos dividir nossos experimentos em duas partes: com agentes neutros ao risco e com agentes avessos ao risco. No segundo caso, levaremos em consideração o coeficiente de aversão ao risco  $r$ , onde  $r \neq 1$ , já que este é o caso de neutralidade ao risco.

Para ambos os casos, utilizaremos uma regressão linear que utiliza como entrada os pontos  $(v_i, b_i^*)$  de cada jogador  $i$ , tornando o algoritmo capaz de prever, para qualquer valor real no intervalo  $[0, R]$ , qual a melhor oferta a ser dada.

### 3.4 Exemplo de simulação

Será descrito nesta seção um exemplo do algoritmo, descrevendo o mesmo em uma rodada específica, qual o lance a ser dado pelos jogadores nesta rodada e como a matriz é atualizada para a etapa seguinte.

Para o exemplo, foi utilizado o Leilão de Primeiro Preço, com  $N = 2$  jogadores neutros ao risco nas rodadas  $n = 10$  e  $n = 11$  e fator de esquecimento  $\alpha = 0.9999$ .

Primeiro passo: o jogador 1 recebe  $v_1 = 0.6$  e consulta sua matriz de Utilidade Esperada.

Ele observa que, para este o melhor lance a ser dado é  $b_1 = 0.2$ , já que sua utilidade  $U_1(v_1 = 0.6) = 0.27272546$  é a maior para este valor específico. Observe que as utilidades dos possíveis lances estão distribuídos em duas linhas da matriz para facilitar a visualização.

Segundo passo: a matriz é atualizada através da fórmula iterativa

$$U_i[v_i, b_i] = U_i[v_i, b_i] \cdot \alpha \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha^{n+1}} + L_n(v_i, b_i) \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^{n+1}},$$

Este procedimento é repetido rodada após rodada, até chegarmos finalmente a uma situação de equilíbrio.

```

0.0 [[ 0.          -0.04545273 -0.13636273 -0.24545455 -0.34546   -0.47727955
      -0.6          -0.7          -0.8          -0.9          ]
0.2 [ 0.03636091  0.04545273  0.          -0.08181818 -0.17273   -0.28636773
      -0.4          -0.5          -0.6          -0.7          ]
0.4 [ 0.07272182  0.13635819  0.13636273  0.08181818  0.          -0.09545591
      -0.2          -0.3          -0.4          -0.5          ]
0.6 [ 0.10908273  0.22726364  0.27272546  0.24545455  0.17273   0.09545591
      0.          -0.1          -0.2          -0.3          ]
0.8 [ 0.14544364  0.3181691  0.40908819  0.40909091  0.34546   0.28636773
      0.2          0.1          0.          -0.1          ]]

```

Figure 2: Matriz na rodada n = 10 - Leilão de Primeiro Preço (agentes neutros ao risco) com N = 2

```

0.0 [[ 0.          -0.05000084 -0.14166875 -0.2500025  -0.3500075  -0.47917396
      -0.6          -0.7          -0.8          -0.9          ]
0.2 [ 0.04166709  0.05000084  0.          -0.08333417 -0.17500375 -0.28750438
      -0.4          -0.5          -0.6          -0.7          ]
0.4 [ 0.08333417  0.15000251  0.14166875  0.08333417  0.          -0.09583479
      -0.2          -0.3          -0.4          -0.5          ]
0.6 [ 0.12500126  0.25000418  0.2833375  0.2500025  0.17500375  0.09583479
      0.          -0.1          -0.2          -0.3          ]
0.8 [ 0.16666834  0.35000585  0.42500626  0.41667083  0.3500075  0.28750438
      0.2          0.1          0.          -0.1          ]]

```

Figure 3: Matriz na rodada n = 11 - Leilão de Primeiro Preço (agentes neutros ao risco) com N = 2

```

0.0 [[ 0.          , -0.03087442, -0.10187588, -0.21374852, -0.36327888,
      -0.49988706, -0.6          , -0.7          , -0.8          , -0.9          ],
0.2 [ 0.02068736, 0.03087442, 0.          , -0.07124951, -0.18163944,
      -0.29993223, -0.4          , -0.5          , -0.6          , -0.7          ],
0.4 [ 0.04137473, 0.09262327, 0.10187588, 0.07124951, 0.          ,
      -0.09997741, -0.2          , -0.3          , -0.4          , -0.5          ],
0.6 [ 0.06206209, 0.15437212, 0.20375176, 0.21374852, 0.18163944,
      0.09997741, 0.          , -0.1          , -0.2          , -0.3          ],
0.8 [ 0.08274945, 0.21612097, 0.30562764, 0.35624753, 0.36327888,
      0.29993223, 0.2          , 0.1          , 0.          , -0.1          ]]

```

Figure 4: Matriz na rodada final - Leilão de Primeiro Preço (agentes neutros ao risco) com N = 2

### 3.5 Simulação com agentes neutros ao risco

A primeira rodada é apenas um lance aleatório que os jogadores dão, uma vez que a matriz de Utilidade Esperada está zerada. A cada rodada subsequente, o jogador  $i$  recebe um valor  $v_i$  aleatório e ele deve dar um lance  $b_i$  em função de  $v_i$ , sem saber qual a sua melhor opção. Para ele saber qual o melhor lance a ser dado, o mesmo irá consultar sua matriz de Utilidade Esperada para avaliar, para a linha da matriz correspondente ao seu valor  $v_i$  recebido, qual o lance  $b_i$  que lhe retornará o maior lucro esperado. O jogador então escolhe esse lance

como sua oferta para aquela rodada.

Depois disso, o segundo passo é atualizar as matrizes de cada um deles. Para um jogador  $i$ , atualizamos a matriz de Utilidade Esperada, calculando, para cada valor, para cada lance distinto, qual seria o seu lucro se ele tivesse recebido aquele valor específico e tivesse dado aquele lance específico correspondentes àquela entrada da matriz. A cada rodada, este procedimento é realizado até que sejam atualizadas todas as entradas da matriz para cada jogador.

Assim, para uma rodada  $n$ , realizamos iterativamente o cálculo do lucro médio de cada jogador através da fórmula:

$$U_i[v_i, b_i] = U_i[v_i, b_i] \cdot \alpha \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha^{n+1}} + L_n(v_i, b_i) \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^{n+1}},$$

onde  $L_n(v_i, b_i)$  é o payoff do jogador  $i$  na rodada  $n$  para aquele  $v_i$  e aquele  $b_i$  específicos.

Neste cenário simulatório, um empate pode ocorrer, já que estamos trabalhando com valores discretos definidos pela precisão optada pelo usuário. Em caso de empate, dividimos o lucro entre os jogadores que empataram. Por exemplo, se houver um empate entre dois jogadores, o lucro da rodada  $L_n$  de cada um deles será  $(v - b)/2$ .

### 3.5.1 Leilão de Primeiro Preço

Como foi visto na literatura, temos como equilíbrio de Nash-Bayes, perante um cenário de neutralidade ao risco, os jogadores darem seus lances da maneira  $b = \frac{N}{N-1}v$ . Para  $N$  pequeno, o número de rodadas de leilões foi de  $n = 2000$ , não havendo a necessidade de mais, já que os jogadores convergem rapidamente para suas estratégias ótimas. Em geral, foi utilizada uma precisão igual a 50, ou seja, arredondamos cada valor  $v$  e cada lance  $b$  para múltiplos de 0.02. Os resultados obtidos são ilustrados a seguir.

**Para  $N = 2$ :**

Conforme visto na literatura, com dois jogadores participando deste tipo de leilão, um equilíbrio de Nash é alcançado quando eles ofertam  $\frac{v_i}{2}$ , equilíbrio este que é praticamente capturado pela simulação. Note, figura 2, que temos uma regressão linear passando muito próxima aos pontos  $(v_i = 0.0, b_i^* = 0.0)$  e  $(v_i^* = 1.0, b_i = 0.5)$ , ou seja, ela aproxima a função  $b_i^* = \frac{v_i}{2}$  neste intervalo.

**Para  $N = 3$ :**

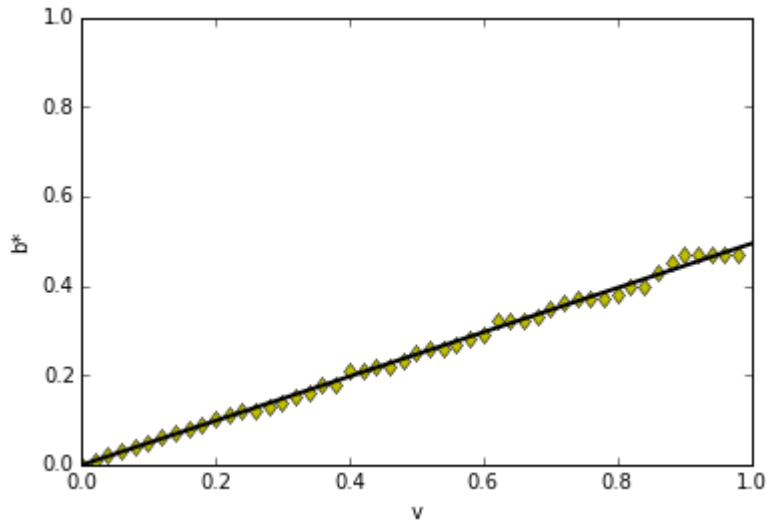


Figure 5: Leilão de Primeiro Preço (agentes neutros ao risco) com  $N = 2$

Para um cenário de 3 jogadores, observamos uma quase perfeita captura do resultado esperado. Almejávamos obter a função  $b_i^* = \frac{2v_i}{3}$  e é isto que ocorre. De novo, o ponto  $(0,0)$  está contido na reta de regressão e, além dele, temos um ponto bem próximo ao desejado  $(1.0, 0.666\dots)$ . Desta forma, para  $N = 3$  jogadores, a implementação foi capaz de simular o comportamento racional dos indivíduos diante deste leilão. Vide apêndice B.

#### Para $N = 4$ :

Com uma quantidade de  $N = 4$  participantes, um agente que tem uma avaliação virtual muito baixa dará uma oferta que não irá exceder sua avaliação (já que o mesmo não busca um payoff negativo) e, conseqüentemente, raramente vai ganhar o leilão. Assim, o payoff deste jogador  $j$  será zero. Na figura 4 podemos observar que é isto que ocorre para as avaliações abaixo de 0.2.

De qualquer forma, a simulação ainda consegue capturar a essência do resultado esperado: a reta passa próxima aos pontos  $(0.0, 0.0)$  e  $(1.0, 0.75)$ , aproximando de forma eficaz a função  $b_i^* = \frac{3v_i}{4}$ . Vide apêndice B.

#### Para $N = 8$ :

Podemos pensar que, conforme aumentamos  $N$ , os jogadores com avaliações mais baixas, que conseqüentemente também darão ofertas baixas, ganharão o

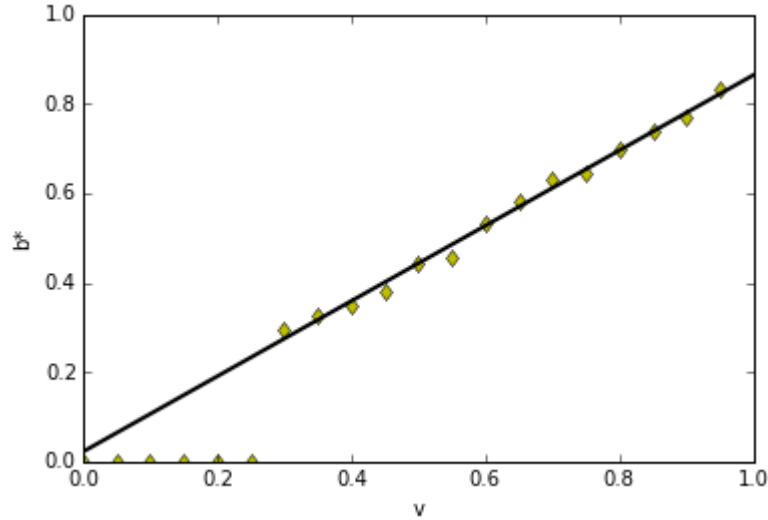


Figure 6: Leilão de Primeiro Preço (agentes neutros ao risco) com  $N = 8$

leilão cada vez menos frequentemente. Isto ocorre porque a probabilidade de vitória destes agentes com baixas avaliações do bem vai cada vez se aproximando de zero, fazendo com que sejam necessárias cada vez mais rodadas de leilões para que aquela entrada da matriz tenha um lance ótimo específico maior do que zero. Com o objetivo de tentar registrar alguma vitória no caso de baixas avaliações, o número de rodadas para este cenário foi aumentado para 50000. Consequentemente, para o programa não ficar muito pesado, a precisão utilizada neste caso foi de 20.

De qualquer forma, ainda se observa que alguns lances ótimos são iguais a zero. A solução encontrada para desviar deste problema foi a de utilizar somente os pontos cujas ofertas são maiores que zero para realizar a regressão e, uma vez que esta foi obtida, utilizá-la para aproximar todos os valores, conforme ilustrado na figura 5.

### 3.5.2 Leilão de Segundo Preço

Já foi provado que em um Leilão de Segundo Preço, independentemente do número de jogador, a melhor estratégia para os mesmos é ofertar  $b_i = v_i$ . As imagens subsequentes são resultados de simulações deste tipo de leilão para  $N = 2, 3, 4$  e 8 jogadores. Para  $N = 2$  e para  $N = 3$ , o número de rodadas é igual a 2000 e a precisão utilizada é de 50. Já para  $N = 4$  e  $N = 8$ , foi utilizada a mesma metodologia realizada no Leilão de Primeiro Preço.



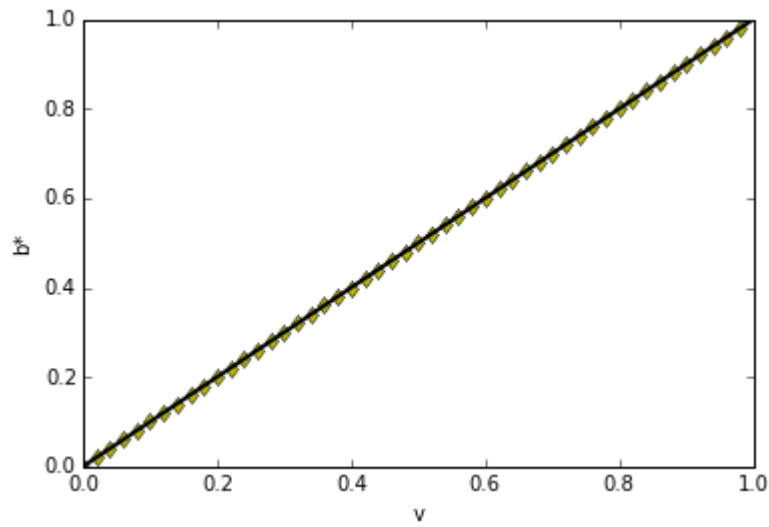


Figure 7: Leilão de Segundo Preço (agentes neutros ao risco) com  $N = 2$

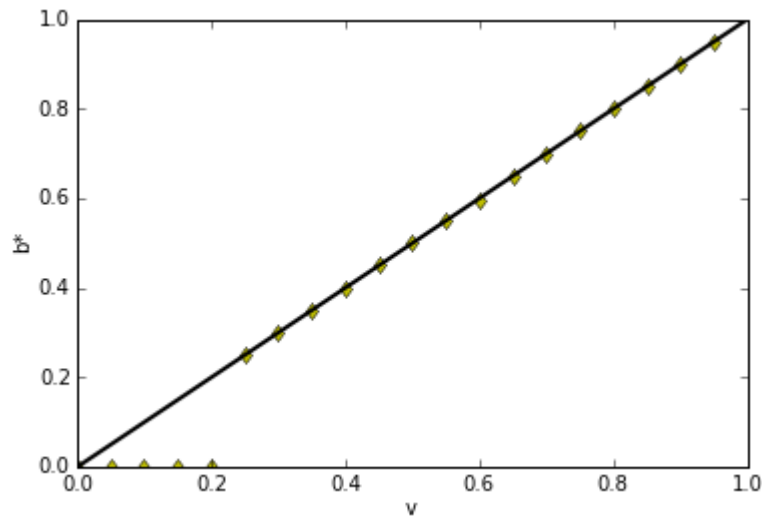


Figure 8: Leilão de Segundo Preço (agentes neutros ao risco) com  $N = 8$

Pelas imagens referentes a esta seção, percebemos uma eficaz captura dos resultados para um número pequeno de jogadores. Para  $N$  pequeno, podemos observar claramente que a regressão acompanha a reta  $b_i^* = v_i$ .

Todavia, conforme aumentamos  $N$ , observamos um fenômeno similar ao ob-

servado na implementação do Leilão de Primeiro Preço: os jogadores com baixas avaliações raramente vencem o leilão e, portanto, têm payoff médio igual a zero, sendo necessário aumentar o número de rodadas e realizar a regressão tomando como base somente os pontos cujos lances são maiores que zero.

### 3.5.3 Leilão de Desconto na Tarifa

Para este leilão, foi mantida a precisão de 50, agora para diferentes valores de  $R$ , sendo este a receita máxima obtida pelo licitante caso o mesmo vença o leilão. A fórmula da oferta ótima a ser dada pelos participantes neste caso é  $b_i^* = \frac{N-1}{N} (1 - \frac{c_i}{R})$ . Perceba que neste caso, temos uma função monótona decrescente: à medida que aumentamos  $c_i$ , a função de oferta ótima diminui.

As imagens que se seguem para diferentes valores de  $N$  e de  $R$  (receita máxima do licitante) são resultados obtidos da simulação do Leilão de Desconto na Tarifa. Para este cenário, temos que o eixo  $x$  é o custo de entrega do licitante  $c_i$  e o eixo  $y$  representa o melhor lance  $b_i^*$  que o mesmo deve ofertar para este dado custo.

Note que, para qualquer valor de  $R$ , o melhor lance a ser dado quando  $c_i = 0.0$  é  $\frac{N-1}{N}$ , o que resulta em um valor menor do que 1.0. Desta forma, para otimizar a visualização e a compreensão das imagens, os eixos foram fixados em  $[0, R]$  e  $[0, 1]$  para os eixos  $x$  e  $y$  respectivamente.

Assim como nos leilões de primeiro e segundo preço, para uma pequena quantidade de licitantes  $N$ , se analisarmos o ponto inicial ( $c_i = 0.0, b_i = \frac{N-1}{N}$ ) e o ponto final ( $c_i = 1.0, b_i = 0.0$ ), a reta da regressão passa perto dos mesmos. Conforme aumentamos o número de participantes, a função que descreve o lance ótimo começa a comportar de maneira estranha para a precisão fixada. Então, quanto maior  $N$ , mais difícil é de se chegar no resultado desejado, necessitando cada vez mais de uma precisão maior.

### 3.5.4 Leilão de Valor Comum

A diferença principal deste leilão para os outros é a parte de atualização da matriz de Payoffs. Nos leilões vistos até aqui, a cada rodada são atualizadas todas as entradas da matriz. Já neste caso, atualizamos apenas a linha referente ao sinal recebido pelo agente naquela rodada. Logicamente que, para que as entradas da matriz convirjam para o valor esperado, serão necessárias mais rodadas.

Para as imagens subsequentes, iremos analisar resultados para diferentes valores de  $N$  e de  $\epsilon$ .

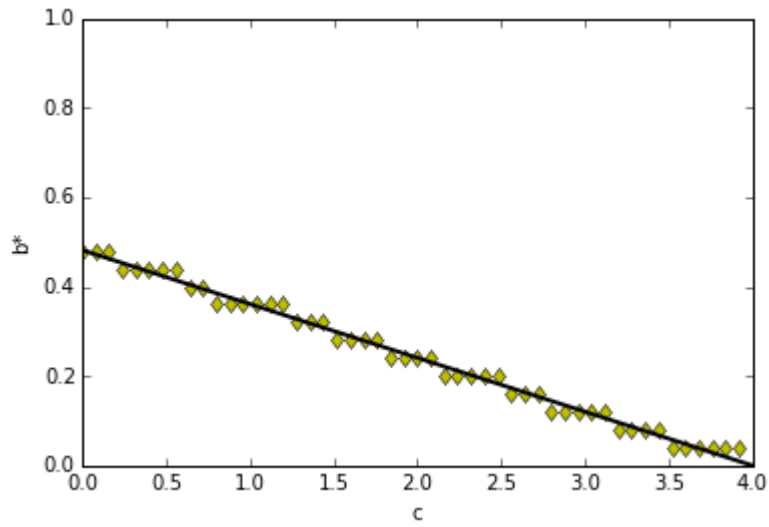


Figure 9: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes neutros ao risco) com  $N = 2$  e  $R = 4$

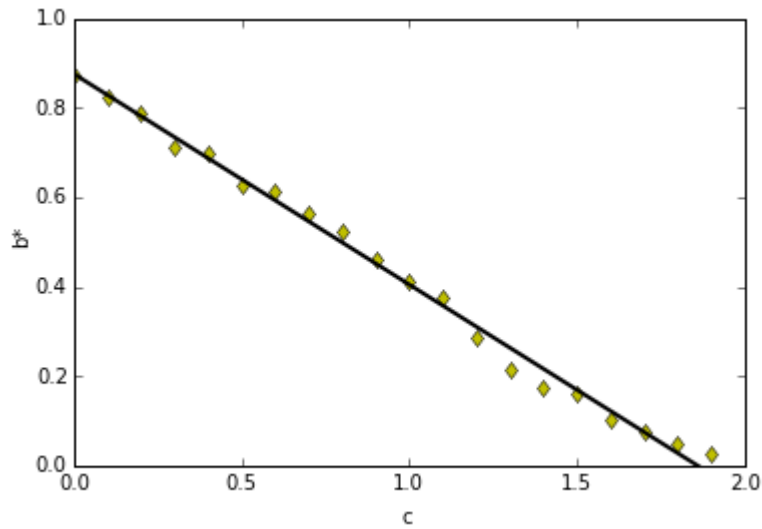


Figure 10: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes neutros ao risco) com  $N = 8$  e  $R = 2.0$

Uma observação importante é que o foco aqui será no intervalo de sinais contidos entre  $[V_L + \epsilon, V_H - \epsilon]$ , uma vez que fora destes intervalos a análise é prejudicada. Desta forma, a regressão compreenderá apenas os pontos contidos no

intervalo. Queremos chegar em uma aproximação da fórmula já descrita no capítulo anterior da oferta ótima para este intervalo, que é:

$$b_i^* = s_i - \epsilon + \frac{2\epsilon}{N+1} \cdot e^{-(N/2\epsilon)(s_i - (V_L + \epsilon))}$$

Para casos de  $N = 2, 4, 6$  e  $10$  e diferentes  $R$  em diferentes intervalos  $[V_L, V_H]$ , temos imagens das curvas obtidas além de imagens comparando estas curvas com a curvas obtidas na literatura da referência [4].

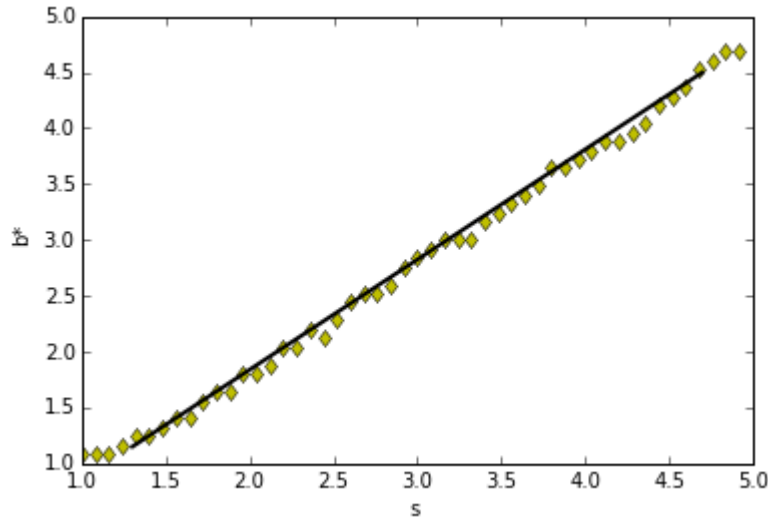


Figure 11: Leilão de Valor Comum (agentes neutros ao risco) com  $N = 2$  e  $\epsilon = 0.3$  no intervalo  $[1.0, 5.0]$

Como a regressão é feita apenas para pontos contidos no intervalo  $[s_i - \epsilon, s_i + \epsilon]$ , quanto maior for a razão  $\frac{\epsilon}{V_H - V_L}$ , menos pontos temos como entrada para encontrar os coeficientes da regressão. Assim, quanto maior for esta razão, menor será a precisão do resultado.

### 3.6 Agentes avessos ao risco

Neste caso, os agentes estão mais dispostos a sacrificar parte de seus lucros, dando lances mais altos do que no caso de neutralidade ao risco, para assim aumentar a probabilidade de triunfar no leilão.

Em [5], o autor afirma que para se examinar um leilão cujos jogadores são

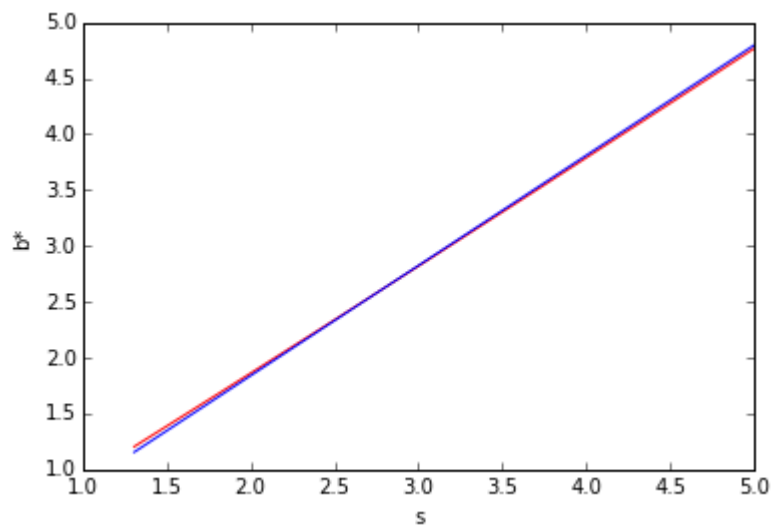


Figure 12: Leilão de Valor Comum (agentes neutros ao risco) com  $N = 2$  e  $\epsilon = 0.3$  no intervalo  $[1.0, 5.0]$ . Vermelho: literatura; azul: simulação.

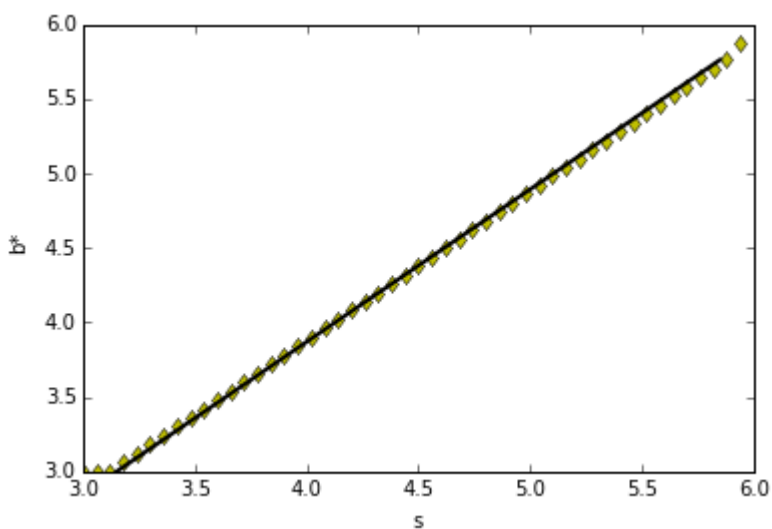


Figure 13: Leilão de Valor Comum (agentes neutros ao risco) com  $N = 10$  e  $\epsilon = 0.15$  no intervalo  $[3.0, 6.0]$

avessos ao risco, podemos assumir que os mesmos possuem uma função de utilidade von-Neumann-Morgenstern que satisfaz  $u(0) = 0$ ,  $u' > 0$  e  $u'' < 0$ .

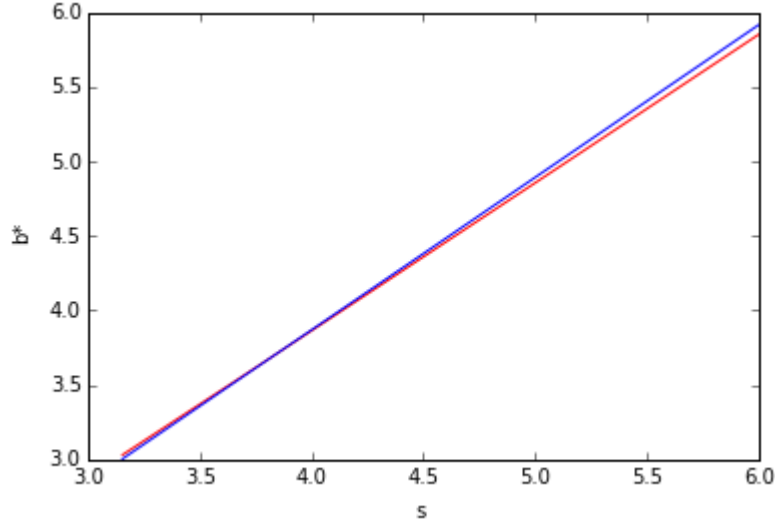


Figure 14: Leilão de Valor Comum (agentes neutros ao risco) com  $N = 10$  e  $\epsilon = 0.15$  no intervalo  $[3.0, 6.0]$ . Vermelho: literatura; azul: simulação.

Iremos assumir aqui também que todos os jogadores têm o mesmo coeficiente de aversão ao risco e, portanto, têm a mesma função utilidade  $u(x) = x^r$ , sendo  $x$  o lucro do agente.

### 3.6.1 Leilão de Primeiro Preço

Em [6], o autor chega à seguinte equação diferencial para o lance ótimo de um dado jogador no Leilão de Primeiro Preço:

$$b'(v) = (v - b(v)) \frac{\gamma(v)}{r},$$

onde  $r$  é o coeficiente de aversão ao risco ( $r \in [0, 1]$ ) e  $\gamma(v) = \frac{f_{V|V_-}(v|v)}{F_{V|V_-}(v|v)}$ , sendo  $V_-$  o conjunto que contém os valores de todos os demais jogadores. Esta é a fórmula geral para  $\gamma(v)$ , para valores correlacionados. Para o propósito deste estudo, como estamos assumindo que os valores dos agentes são independentes e identicamente distribuídos, a fórmula para  $\gamma(v)$  a ser utilizada se resume a  $\frac{f_V(v)}{F_V(v)}$ .

O próximo passo é calcular qual é a função  $\gamma(v)$  para este leilão.

$$F_V(v) = Pr(\max\{V_-\} \leq v)$$

$$\begin{aligned}
&= Pr(v_1 \leq v; v_2 \leq v; \dots; v_N \leq v) \\
&= F(v)^{N-1}
\end{aligned}$$

E como a distribuição de valores é uniforme no intervalo  $[0,1]$ ,

$$F_V(v) = v^{N-1}.$$

Para calcular  $f_V(v)$ , basta derivarmos  $F_V(v)$ , o que resulta em  $f_V(v) = (N-1)v^{N-2}$ . Finalmente, temos que:

$$\gamma(v) = \frac{(N-1)v^{N-2}}{v^{N-1}}.$$

Então  $\gamma(v) = \frac{N-1}{v}$ . Desta forma, podemos resolver a equação diferencial  $b'(v) = (v - b(v))\frac{N-1}{vr}$  utilizando o método do fator integrante e chegar à seguinte fórmula de oferta ótima:

$$b^*(v) = \frac{N-1}{N-1+r}v.$$

Note que ao escolhermos  $r = 1$ , caímos exatamente no caso de neutralidade ao risco.

Os resultados podem ser vistos nas imagens referentes a cada caso, para diferentes valores de  $N$  e de  $r$ . Para os casos com poucos jogadores, foi escolhida uma precisão de 50 e apenas 2000 rodadas, o que já é suficiente para observarmos o equilíbrio ótimo. À medida que  $N$  aumenta, mais rodadas são necessárias, já que o triunfo de um jogador com um valor aleatório baixo ocorre com uma probabilidade muito baixa. Para estes casos, a precisão escolhida foi de 20 e o número de rodadas cresceu para 10000. Por exemplo, quando  $N = 8$ , o jogador que tem um baixo valor  $v$  quase nunca vence o leilão, gerando ao mesmo um payoff esperado de 0.0 para qualquer lance  $b, b \leq v$  que o mesmo realizar. Neste caso, foi feita uma regressão linear envolvendo apenas os pontos a partir do menor valor para o qual o jogador obtém um payoff acima de zero, para algum lance que o mesmo der, em diante.

### 3.6.2 Leilão de Segundo Preço

Já vimos anteriormente que, para agentes neutros ao risco, a função de lance ótimo para o leilão de segundo preço é  $b_i^* = v_i$ , provando que este é um Equilíbrio de Nash, ou seja, nenhum agente sob estas circunstâncias tem incentivo para aumentar ou diminuir seu lance. Partindo do raciocínio de que o jogador avesso ao risco pretende abdicar parte de seu lucro para reduzir o risco de perda, isto significa que o mesmo está disposto a aumentar seu lance para a mesma avaliação do bem. Mas se este agente avesso ao risco aumentar seu lance, este será maior que a sua própria avaliação, ou seja, ele terá grandes chances de ganhar o leilão e obter um payoff negativo, sendo preferível não ganhar e ter um payoff igual a zero.

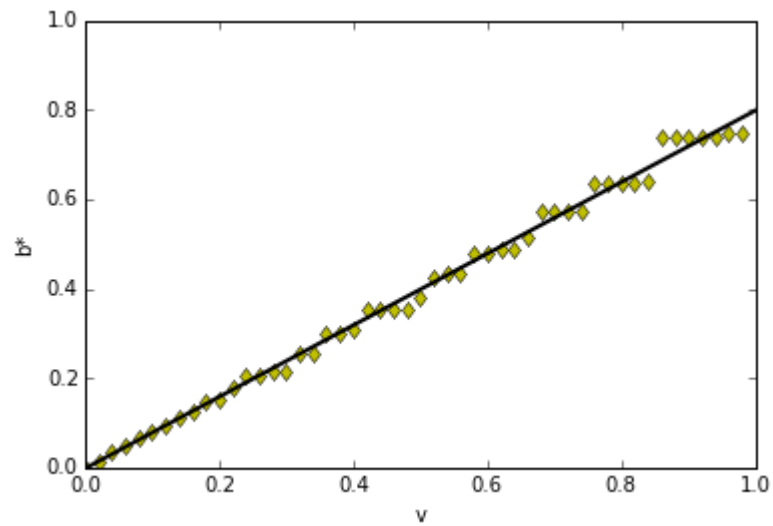


Figure 15: Leilão de Primeiro Preço (agentes avessos ao risco) com  $N = 2$  e  $r = 0.5$

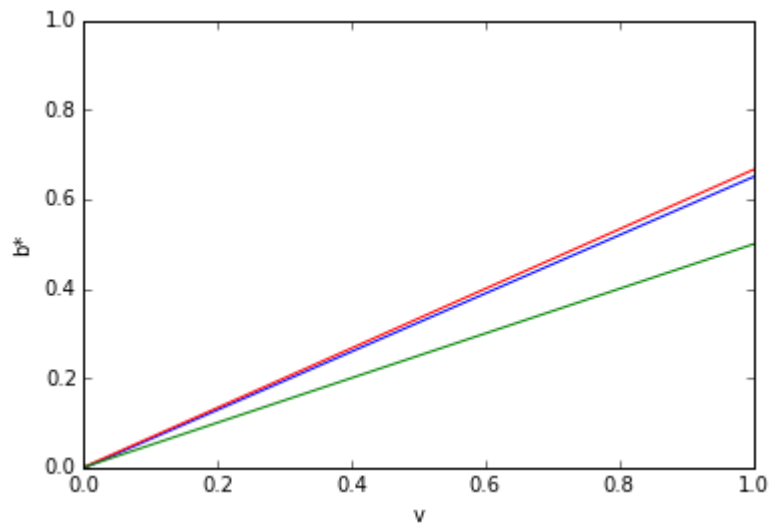


Figure 16: Leilão de Primeiro Preço (agentes avessos ao risco) com  $N = 2$  e  $r = 0.5$ . Vermelho: literatura; azul: simulação; verde: literatura, para agentes neutros ao risco

Desta forma, não faz sentido atribuir um coeficiente de aversão ao risco neste caso, já que os jogadores continuarão apresentando uma função de oferta ótima



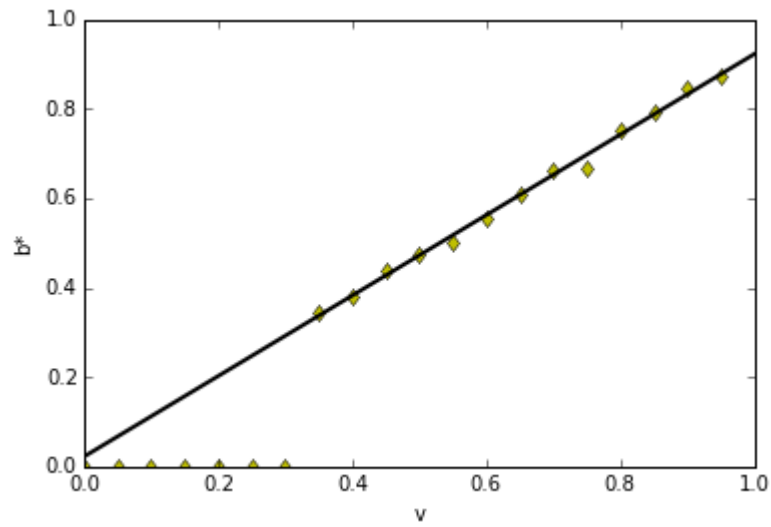


Figure 17: Leilão de Primeiro Preço (agentes avessos ao risco) com  $N = 8$  e  $r = 0.5$

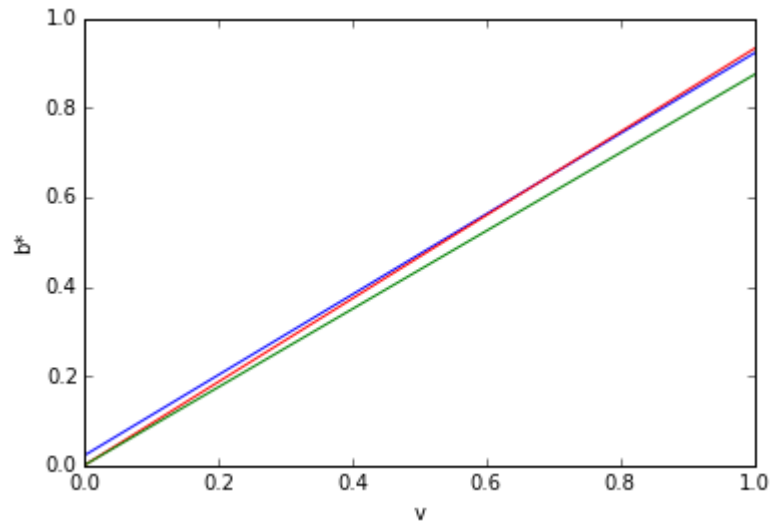


Figure 18: Leilão de Primeiro Preço (agentes avessos ao risco) com  $N = 8$  e  $r = 0.5$ . Vermelho: literatura; azul: simulação; verde: literatura, para agentes neutros ao risco

$b_i^* = v_i$ , independente de qual seja  $r$ .

A figura referente a este cenário ilustra o raciocínio apresentado, nos mostrando

que o resultado obtido é o mesmo do resultado do caso de neutralidade ao risco.

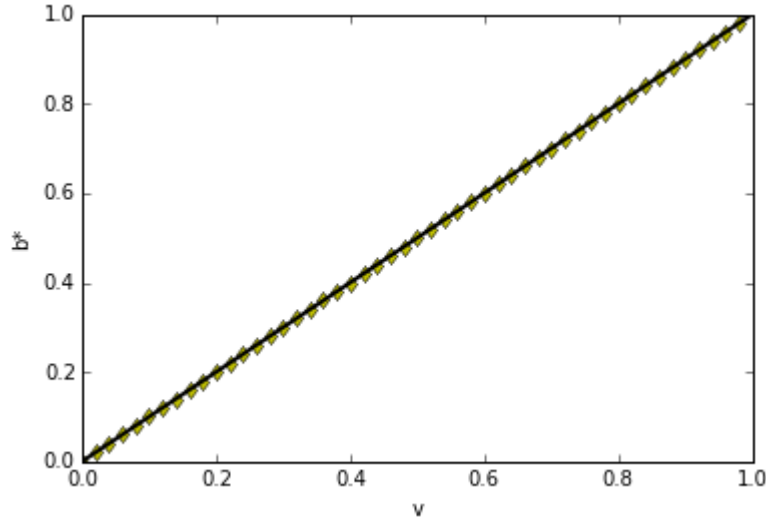


Figure 19: Leilão de Segundo Preço (agentes avessos ao risco) com  $N = 2$  e  $r = 0.5$ .

### 3.6.3 Leilão de Desconto na Tarifa

Segue-se do trabalho de [6] a fórmula do lucro esperado referente ao leilão de primeiro preço com valores não correlacionados:

$$\begin{aligned}\pi(s) &= u(x - b(s))Pr(s > Y) \\ &= u(x - b(s))Pr(Y \leq s) \\ &= u(x - b(s))F_Y(s),\end{aligned}$$

onde  $Pr(s > Y)$  é a probabilidade de um dado jogador vencer o leilão e  $u(x - b(s))$  é o lucro do mesmo em caso de vitória.

No caso do leilão de desconto na tarifa, temos que o lucro se dá através da equação  $\pi(s) = R(1 - b(s)) - c$ , onde  $c$  é o custo de entrega do comprador e  $b(s)$  é o lance dado pelo mesmo para um certo sinal  $s$ , que neste caso é o valor aleatório recebido pelo agente. Desta forma, podemos adaptar esta equação para o leilão de desconto na tarifa. Temos então que

$$\begin{aligned}\pi(s) &= u(R(1 - b(s)) - c)Pr(s < Y) \\ &= u(R(1 - b(s)) - c)(1 - F_Y(s))\end{aligned}$$

Calculamos a derivada da equação em relação a  $s$ .

$$\Pi'(s) = u'(R(1 - b(s)) - c)(-Rb'(s))(1 - F_Y(s)) - u(R(1 - b(s)) - c)f_Y(s)$$

Em um equilíbrio simétrico, a fim de se maximizar o lucro esperado, temos que  $s = c$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} u'(R(1 - b(c)) - c)(-Rb'(c))(1 - F_Y(c)) - u(R(1 - b(c)) - c)f_Y(c) &= 0 \\ \Leftrightarrow u'(R(1 - b(c)) - c)(-Rb'(c))(1 - F_Y(c)) &= u(R(1 - b(c)) - c)f_Y(c) \\ \Leftrightarrow b'(c) &= \frac{1}{R} \cdot \left[ \frac{u(R(1 - b(c)) - c)(-f_Y(c))}{u'(R(1 - b(c)) - c)(1 - F_Y(c))} \right]. \end{aligned}$$

Como estamos admitindo uma função de utilidade  $u(x) = x^r$ , temos que

$$\begin{aligned} b'(c) &= \frac{1}{R} \cdot \frac{(R(1 - b(c)) - c)^r}{r(R(1 - b(c)) - c)^{r-1}} \cdot \frac{(-f_Y(c))}{(1 - F_Y(c))} \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{R(1 - b(c)) - c}{r} \cdot \frac{(-f_Y(c))}{(1 - F_Y(c))}, \end{aligned}$$

onde  $1 - F_Y(c) = \left(1 - \frac{c}{R}\right)^{N-1}$  e  $-f_Y(c)$  é a derivada de  $1 - F_Y(c)$  em relação a  $c$ , que é  $\frac{1-N}{R} \left(1 - \frac{c}{R}\right)^{N-2}$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} b'(c) &= \frac{1}{R} \cdot \frac{R(1 - b(c)) - c}{r} \cdot \frac{1 - N}{R} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{R}} \\ &= \frac{(1 - N)(R(1 - b(c)) - c)}{R(R - c)r} \end{aligned}$$

Esta equação diferencial é resolvida utilizando fator integrante e sua solução final é:

$$b^*(c) = \frac{N - 1}{N + 1 - r} \left(1 - \frac{c}{R}\right),$$

que é exatamente a fórmula que deseja-se obter através da simulação.

As figuras referentes a este leilão são simulações para diferentes valores de  $R$ , diferentes quantidades de participantes  $N$  e diferentes coeficientes de aversão ao risco  $r$ . Os resultados mostram que a simulação, de maneira geral, consegue aproximar bem a fórmula da oferta ótima para diferentes coeficientes de aversão ao risco  $r$ .

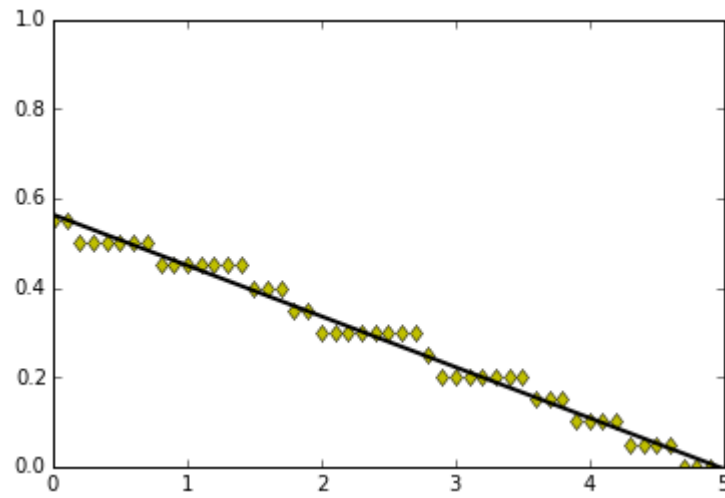


Figure 20: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes avessos ao risco) com  $N = 2$ ,  $R = 5$  e  $r = 0.75$

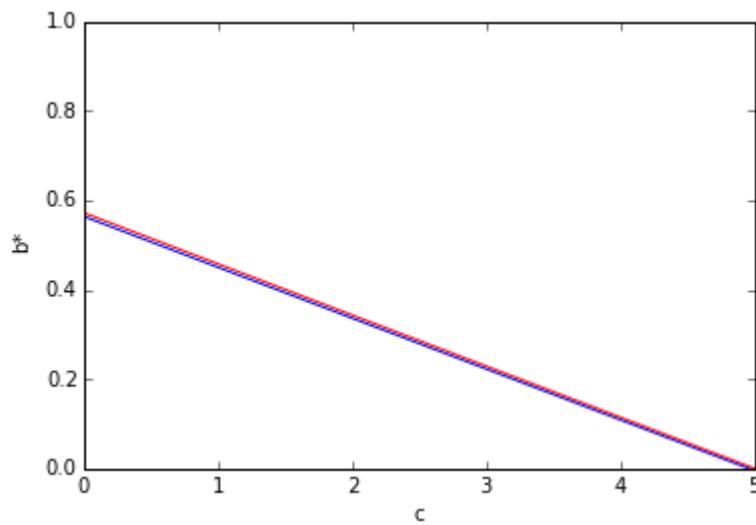


Figure 21: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes avessos ao risco) com  $N = 2$ ,  $R = 5$  e  $r = 0.5$ . Vermelho: literatura; azul: simulação

## 4 Preço de Reserva

Sob o ponto de vista do leiloeiro, além do tipo de leilão, do número de jogadores e do tipo dos mesmos, o jogo pode ter também um preço mínimo o qual os jogadores devem pagar caso queiram disputar pelo bem que está sendo

leiloado. Este preço mínimo é também conhecido como Preço de Reserva, sendo utilizado em casos em que o vendedor especifica um preço  $R$  acima/abaixo do qual não está disposto a negociar.

Queremos analisar aqui qual o preço de reserva que o vendedor deve definir a fim de maximizar o seu lucro. Este preço não deve ser tão alto, para que haja pelo menos uma oferta acima dele e o leiloeiro não deixe de vender o bem, e tão pouco pode ser tão baixo, já que o leiloeiro quer estimular a competição entre os participantes.

Em um leilão de segundo preço com jogadores neutros ao risco de valores privados i.i.d, o preço de reserva ótimo  $R^*$  não depende do número de jogadores. [5]. Mais precisamente, se as avaliações dos participantes forem obtidas de uma distribuição uniforme  $[0, 1]$ , para este tipo de leilão, o preço de reserva ótimo é  $R^* = \frac{1}{2}$  independente do número de jogadores  $N$  [5].

A maneira que nós encontramos para demonstrar este fato está descrita a seguir.

Primeiramente, vamos assumir que os jogadores estão jogando em suas estratégias de equilíbrio, que no caso do leilão de segundo preço, é de realizarem ofertas iguais às suas devidas avaliações do objeto em jogo. A partir disso, podemos pensar em todos os cenários possíveis para o estado do jogo, dado um  $R$  escolhido pelo leiloeiro.

O primeiro cenário é todos os  $N$  jogadores darem seus lances abaixo de  $R$ , o que ocorre com uma probabilidade de  $R^N$ , já que os lances estão distribuídos uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ , ou seja, cada agente tem probabilidade  $R$  de ofertar abaixo de  $R$  para este intervalo. O segundo cenário é ter um jogador dando um lance abaixo de  $R$  e os outros darem acima deste valor, com probabilidade  $N \cdot R(1 - R)^{N-1}$ . O fator  $N$  se deve ao fato de que o segundo cenário pode ocorrer de  $N$  maneiras possíveis, uma vez que temos  $N$  jogadores. Prosseguindo com esta linha de raciocínio, teremos, a cada cenário  $i$ ,  $\binom{N}{i}$  maneiras possíveis para cada cenário.

Um conceito importante para o entendimento dos cálculos futuros é a definição da  $k$ -ésima estatística de ordem, que é o valor esperado do  $k$ -ésimo maior valor dentre  $n$  variáveis aleatórias i.i.d. Para uma distribuição uniforme  $[0, v_{max}]$ , a esperança da  $k$ -ésima estatística de ordem é:

$$\frac{n+1-k}{n+1}v_{max}.$$

Como estamos estudando o leilão de segundo preço, no qual o pagamento que recebe o leiloeiro é o segundo maior lance dentre todos os jogadores, temos que  $k = 2$ .

Aplicaremos esta fórmula nos casos em que há pelo menos 2 jogadores que deram seus lances acima de  $R$ . Neste caso, podemos fazer uma transformação nesta fórmula para adaptar ao nosso problema. Como esses jogadores deram lances acima de  $R$ , a distribuição de lances vem da uniforme

$$[R, 1] = R + [0, 1 - R].$$

Assim, temos que:

$$E[Lucro[0, 1 - R] + R] = R + E[Lucro[0, 1 - R]] = R + \frac{n+1-k}{n+1}(1-R).$$

Desta maneira, para calcular o valor esperado  $E$ , multiplicamos a probabilidade de ocorrência de um cenário  $i$  pela receita esperada do leiloeiro neste cenário e somamos essas parcelas. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i \cdot \left[ R + \frac{i+1-2}{i+1}(1-R) \right] \\ &= R \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i + (1-R) \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i \cdot \frac{i+1-2}{i+1} \\ &= R \left[ \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i - R^N \right] + (1-R) \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i \left( 1 - \frac{2}{i+1} \right) \\ &= R[(R+1-R)^N - R^N] + (1-R) \left[ \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i - 2 \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i \cdot \frac{1}{i+1} \right] \\ &= R(1-R^N) + (1-R) \left[ (1-R^N) - 2 \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i \cdot \frac{1}{i+1} \right] \end{aligned}$$

Para calcular a última parcela, procedemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i \cdot \frac{1}{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^N R^{N-i} \cdot (1-R)^i \cdot \frac{N!}{(N-i)! \cdot i!} \cdot \frac{1}{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N R^{N-i} \cdot (1-R)^i \cdot \frac{N!}{(N-i)! \cdot (i+1)!} \\
&= \sum_{i=1}^N R^{N-i} \cdot (1-R)^i \cdot \frac{1}{N+1} \cdot \frac{(N+1)!}{(N-i)! \cdot (i+1)!} \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^N R^{N-i} \cdot (1-R)^i \cdot \frac{(N+1)!}{[(N+1)-(i+1)]! \cdot (i+1)!} \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^N \binom{N+1}{i+1} \cdot R^{N-i} \cdot (1-R)^i.
\end{aligned}$$

Fazendo uma substituição de variáveis  $j = i + 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N+1} \sum_{j=2}^N \binom{N+1}{j} \cdot R^{N+1-j} \cdot (1-R)^{j-1} \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{j=2}^N \binom{N+1}{j} \cdot R^{N+1-j} \cdot (1-R)^j \\
&= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{1-R} \cdot \sum_{j=2}^N \binom{N+1}{j} \cdot R^{N+1-j} \cdot (1-R)^j \\
&= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{1-R} \left[ \sum_{j=0}^N \binom{N+1}{j} \cdot R^{N+1-j} \cdot (1-R)^j - R^{N+1} - (N+1)R^N(1-R) \right] \\
&= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{1-R} [1 - R^{N+1} - (N+1)R^N(1-R)].
\end{aligned}$$

Agora, substituímos o resultado obtido na expressão principal:

$$\begin{aligned}
&R(1-R^N) + (1-R) \left\{ 1 - R^N - \frac{2}{N+1} \cdot \frac{1}{1-R} [1 - R^{N+1} - (N+1)R^N(1-R)] \right\} \\
&= R - R^{N+1} + (1-R) - (1-R)R^N - (1-R) \cdot \frac{2}{N+1} \cdot \frac{1}{1-R} [1 - R^{N+1} - (N+1)R^N(1-R)] \\
&= 1 - R^N - \frac{2}{N+1} [1 - R^{N+1} - (N+1)R^N(1-R)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - R^N - \frac{2}{N+1} + \frac{2R^{N+1}}{N+1} + \frac{2R^N(N+1 - NR - R)}{N+1} \\
&= \frac{N+1 - (N+1)R^N - 2 + 2R^{N+1} + 2NR^N + 2R^N - 2NR^{N+1} - 2R^{N+1}}{N+1} \\
&= \frac{N+1 - NR^N - R^N - 2 + 2NR^N + 2R^N - 2NR^{N+1}}{N+1} \\
&= \frac{N-1 + R^N(N+1) - 2NR^{N+1}}{N+1}.
\end{aligned}$$

Para encontrar o valor esperado ótimo, basta derivarmos  $E$  com respeito a  $R$  e igualarmos a 0:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial R} &= \frac{NR^{N-1}(N+1) - 2N(N+1)R^N}{N+1} = 0 \\
&\iff NR^{N-1} - 2NR^N = 0 \\
&\iff R^{N-1}(N - 2NR) = 0 \\
&\iff N - 2NR = 0 \\
&\iff N(1 - 2R) = 0
\end{aligned}$$

Como  $N$  é o número de jogadores,  $N > 0$ . Então:

$$\begin{aligned}
1 - 2R &= 0 \\
&\iff R = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

## 5 Simulação do Preço de Reserva

Até o momento, apenas foram relatados casos em que cada jogador recebe um valor aleatório a cada rodada, seja para simular sua valoração do objeto em questão, ou para a fatia do lucro a dar para o governo. Nestes casos, o objetivo final era encontrar um ponto de convergência para os lances ótimos dos jogadores de acordo com suas funções de Utilidade Esperada.

Nesta seção, veremos o leilão sob um outro ponto de vista: o ponto de vista do leiloeiro. Para o propósito desta simulação, assumiremos que o jogo já está



em equilíbrio, ou seja, que os jogadores participantes já estão dando seus lances ótimos. A partir disso, queremos encontrar o Preço de Reserva que o leiloeiro deve determinar para alcançar o maior lucro possível para o mesmo.

## 5.1 Elementos da Simulação

Dos elementos que estão sendo levados em consideração aqui, apenas dois são comuns às outras simulações. São eles: o fator de esquecimento  $\alpha$  e a precisão, que define a quantidade de amostra na distribuição uniforme  $[0, x]$ , sendo  $x$  o valor máximo do objeto leilado.

A cada rodada, temos  $N$  variáveis aleatórias geradas a partir de uma distribuição uniforme  $[0, v_{max}]$  para cada um dos  $N$  jogadores. Então verificamos, para cada valor de preço de reserva, quantos jogadores deram um lance acima de  $R$ . Caso nenhum lance esteja acima, o lucro para aquele valor de  $R$  é 0. Caso contrário, utilizamos a fórmula de Pagamento Esperado adaptada do Valor Esperado da  $k$ -ésima estatística de ordem para calcular o lucro do leiloeiro:

$$R + \frac{n+1-k}{n+1}(1-R)$$

Como  $k = 2$ , já que estamos analisando o leilão de segundo preço, temos a seguinte fórmula para o lucro:

$$lucro_i = \begin{cases} R + \frac{c-1}{c+1}(1-R) & \text{se há pelo menos um lance maior que } R \\ 0 & \text{c.c} \end{cases},$$

sendo  $c$  a quantidade de lances acima de  $R$ . Note que se  $c = 1$ , temos  $lucro_i = R$ , que é exatamente o "segundo maior lance" correspondente ao valor que receberá o leiloeiro.

O Payoff para este  $R$  específico é atualizado na lista de Payoffs da forma tradicional, através de fórmula de cálculo de média iterativa com fator de esquecimento utilizada no outro capítulo.

Assim, ao fim do programa temos uma lista de valores atualizada com seus devidos lucros esperados.

Na literatura, vemos que, independente do número de jogadores, temos um Preço de Reserva ótimo de metade de  $v_{max}$ . Na próxima seção podemos visualizar alguns resultados práticos e fazer algumas comparações.

## 5.2 Resultados da Simulação

Nesta seção, analisaremos o problema para diferentes números de jogadores  $N$  e para  $v_{max} = 1$ . Desta maneira, o objetivo final é chegar a preços ótimos iguais a  $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ .

Foi utilizado um número de rodadas igual a 10000, que é suficiente para a convergência de cada Payoff de cada valor da lista. Além disso, foi essencial aumentar a precisão do programa conforme  $N$  foi aumentado, para assim chegar em resultados precisos.

**Para  $N = 2$ :**

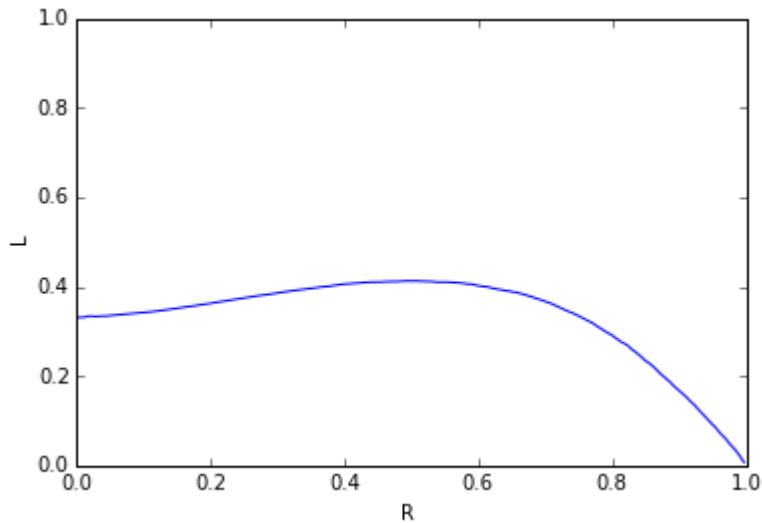


Figure 22: Preço de Reserva para  $N = 2$

A partir da figura, percebemos que o ponto máximo da função se encontra entre 0.4 e 0.6, alcançando o objetivo de se obter  $b^* = 0.5$ .

**Para  $N = 3$ :**

A curva que define a função de lucro já mudou de cara, ela está um pouco mais linear até certo ponto e depois decresce com o aumento de  $R$ . Ainda assim, percebemos, agora com maior dificuldade, que o ponto que maximiza o lucro se encontra no intervalo que desejamos, entre 0.4 e 0.6.

**Para  $N = 4$ :**

Agora com uma parte quase linear sob a mesma escala, já é bem mais complicado de perceber onde está o ponto ótimo. Neste caso, foi necessário aumentar a precisão do programa para nos dar o ponto onde a função é máxima. De

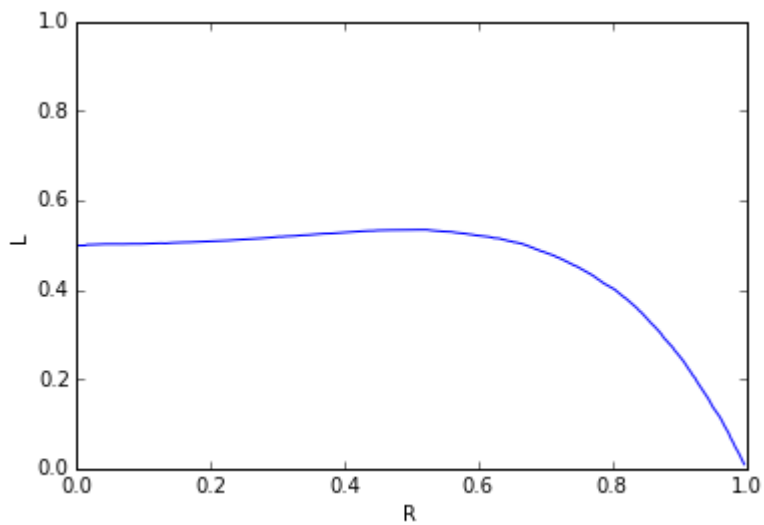


Figure 23: Preço de Reserva para  $N = 3$

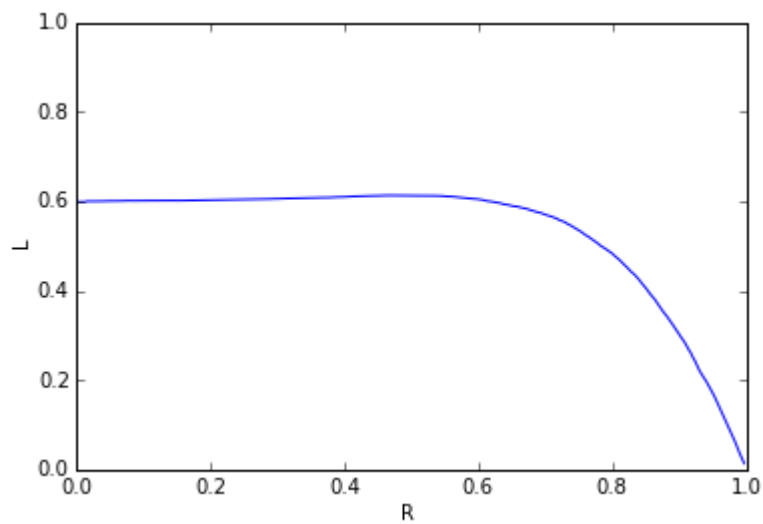


Figure 24: Preço de Reserva para  $N = 4$

qualquer maneira, ainda conseguimos observar, com bastante dificuldade, em que intervalo o ponto de máximo se encontra.

**Para  $N = 8$ :**

Quanto mais aumentarmos  $N$ , mais difícil fica distinguir qual o ponto de máx-

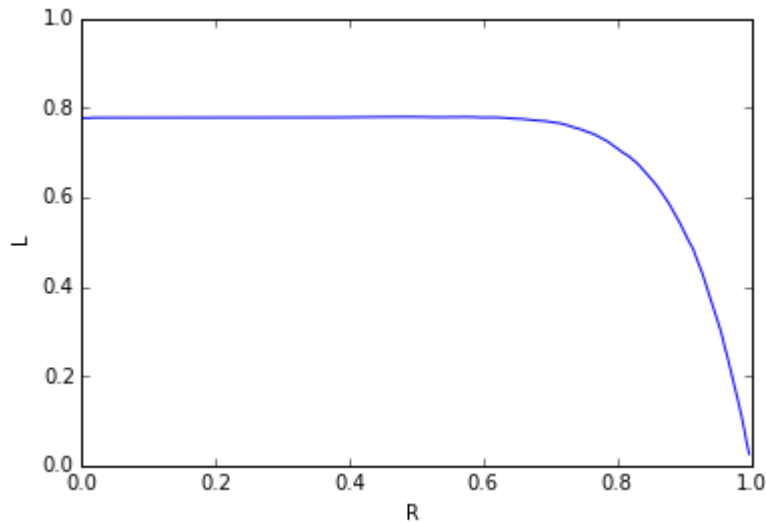


Figure 25: Preço de Reserva para  $N = 8$

imo. De fato, não faz muita diferença para o leilão ter um preço mínimo de 0 ou de  $\frac{1}{2}$  ou qualquer outro ponto neste intervalo.

Podemos nos estender um pouco mais neste raciocínio e perceber que à medida que  $N$  cresce, a probabilidade de que dois jogadores dêem seus lances acima de  $R$  começa a crescer também, fazendo com que  $R$  seja cada vez mais irrelevante.

No caso crítico, temos que quando  $N$  cresce ao infinito, a probabilidade de ter 2 jogadores acima de  $R$ , seja  $R$  qual for, vai cada vez se aproximando mais de 1. No limite, esta probabilidade é 1.

O preço de reserva ótimo vai sempre continuar sendo  $\frac{1}{2}$ , independente de  $N$ , como foi comprovado matematicamente no capítulo anterior, porém computacionalmente percebemos que é cada vez mais difícil calculá-lo com perfeição.

## 6 Conclusões

Leilões são mecanismos comerciais muito utilizados no Brasil e no mundo. A partir disso, se dá a importância do estudo de estratégias a serem tomadas pelos participantes a fim de maximizarem suas receitas. Utilizar a simulação para este fim é uma maneira muito eficaz para visualizarmos de forma clara e concisa quais são as estratégias ótimas a serem utilizadas pelos agentes e suas consequências para o leilão em si.

O propósito principal deste trabalho se deu com a tentativa da criação de um algoritmo que pudesse modelar e simular este tipo de comércio perante diferentes tipos de agentes, diferentes premiações, em geral, diferentes tipos de leilão. O algoritmo utilizado nas simulações foi baseado no Fictitious Play, tendo como objetivo principal simular a convergência da estratégia a ser tomada pelos agentes rodada após rodada, onde os mesmos vão realizando suas ofertas baseadas apenas no histórico de ações já tomadas e suas respectivas consequências.

Sabemos que os seres humanos não são seres neutros ao risco. Neste contexto, é essencial ser levado em consideração o fator de aversão ao risco para que a simulação seja coerente com o comportamento dos agentes. De qualquer forma, fenômenos oriundos de decisões irracionais que geram payoffs negativos, como por exemplo a Maldição do Vencedor, não são observados nas simulações, uma vez que estas sempre buscam o melhor retorno, a maneira mais racional de se escolher uma estratégia para os diferentes graus de aversão ao risco. Desta forma, a simulação captura o fato de que, no pior dos casos, é melhor se obter um payoff igual a 0.0 do que um payoff negativo.

Em termos de implementação, conforme aumentamos  $N$ , temos que aumentar também a precisão do programa. Caso contrário, a implementação se torna "discreta demais" para cenários que necessitam uma maior quantidade de valores, ou seja, uma maior precisão, se desejamos capturar o resultado encontrado na literatura.

## 7 Trabalhos futuros

Neste trabalho foram tratados apenas alguns tipos de leilões simétricos em que o leiloeiro põe à venda somente um bem específico. Uma extensão deste estudo pode ser a abordagem de novos leilões, tanto os de apenas um bem em questão quanto os de multiunidades, além da análise de casos em que os jogadores são assimétricos, ou seja, alguns jogadores são neutros ao risco, outros são avessos, podendo estar em níveis de aversão ao risco distintos. O algoritmo utilizado nesta dissertação pode servir para tentar modelar estes outros leilões, readaptando cada caso a um algoritmo ligeiramente diferente do relatado. Temos como exemplo o Leilão de Terceiro Preço, o Leilão All-Pay, o Leilão Score, além dos leilões de concessão de energia elétrica, que é um tema de muita repercussão atualmente.

Além das simulações, um outro estudo que almejava-se realizar era um desenho experimental com seres humanos para observar qual o comportamento dos mesmos perante cada tipo de leilão. Através das simulações, foi possível

analisar o comportamento de máquinas que buscam sempre maximizar seus lucros da forma mais racional possível. No caso de seres humanos, o cenário é outro, com isso, os resultados podem vir a mudar. Desta forma, a realização de experimentos poderia ilustrar como é o comportamento dos seres humanos para cada tipo de leilão, se em certos leilões eles agem de maneira semelhante, se em outros varia bastante, etc. O que deseja-se capturar através destes experimentos é um coeficiente de aversão ao risco em que a média dos seres humanos se encontra, através dos resultados dos mesmos. A partir disso, poderia ser feita uma comparação entre os resultados obtidos na implementação utilizando este coeficiente catalogado com os resultados obtidos nos experimentos.

## Referências

- [1] Max H. Bazerman and William F. Samuelson. *I Won the Auction but Don't Want the Prize*. Sage Publications, Inc. Source: The Journal of Conflict Resolution, Vol. 27, No. 4, pp. 618-634, Dec., 1983.
- [2] R.M. Cox, J.C.; Isaac. *In search of the winner's curse*. Economic Inquiry, v.22, n.4, p. 579-592, Oct. 1984.
- [3] David Fudenberg, Drew; Levine. *Learning in games*. European Economic Review, Volume 42, Issues 3–5, Pages 631–639, May 1998,.
- [4] John H. Kagel and Dan Levin. *The Winner's Curse and Public Information in Common Value Auctions*. The American Economic Review, Vol. 76, No. 5, 894-920., Dec., 1986.
- [5] Vijay Krishna. *Auction Theory*. Academic Press, 2009.
- [6] Flavio Menezes and Paulo. Klinger. *An Introduction to Auction Theory*. Oxford: Oxford U, Print., 2008.
- [7] Luísa Nobre. *Modelagem de Leilões Multidimensionais aplicada a concessão de serviços públicos*. Puc-Rio., 2014.
- [8] Yoav Shoham and Kevin Leyton-Brown. *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-theoretic, and Logical Foundations*. Cambridge: Cambridge UP, Print., 2009.
- [9] Martin Shubik. *The Theory of Money and Financial Institutions: Volume 1*. Cambridge , Mass., USA: MIT Press, pp. 213–219, March 2004.
- [10] Richard H. Thaler. *Anomalies: The Winner's Curse*. Journal of Economic Perspectives, 2(1): 191-202., 1988.
- [11] Danielle Vanzan. *O Fenômeno da Maldição do Vencedor em Leilões: Um estudo Experimental*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.
- [12] John Varoli. *Swedish Auction House to Sell 8 Million Euros of Russian Art*. Bloomberg.com News (Moscow: Bloomberg Finance L.P.), retrieved 2008-06-21.

# Apêndices

## A Códigos implementados

Aqui estão disponibilizados os códigos utilizados para cada um dos leilões estudados neste trabalho.

### A.1 Leilões de Primeiro Preço e de Segundo Preço

#### - Variáveis de entrada:

```
% precisao = precisão do programa
% N = número de participantes do leilão
% r = grau de aversão ao risco dos participantes
% tipo_leilao = tipo de leilão (primeiro ou segundo preço)
```

#### - Funções auxiliares:

```
def matriz_vazia(p, n): # cria uma lista com p matrizes vazias
    n x pn
    onde p é o número de jogadores e n é a precisão desejada
```

```
    lista = []
    for i in range(p):
        lista.append(np.matrix([(p*n)*[0.]]*(n)))
    return lista
```

```
def valores(prec, p): # Uniforme U[0,1]
```

```
    lista = []
    for i in range(p):
        a = random.random()
        aux = 1./prec
        while a > aux:
            aux += 1./prec
        lista.append( round(aux - 1./prec,5) )
```

```
    return lista
```

```
def num_maximos(lista): # retorna o número de máximos iguais de
    uma lista
```

```
    a = max(lista)
    cont = 0
    for i in lista:
```



```

        if i == a:
            cont += 1

    return cont

def cria_dicionario(prec,p):

    dic = {}

    dic[0] = 0.0
    dic[1] = 1. / (prec*p)
    for i in range(2, prec*p):
        dic[i] = dic[i-1] + dic[1]
        dic[i] = round(dic[i], 10)

    return dic

```

#### **- Algoritmo:**

```

def leilao(p, prec, tipo, r):

    dicv = cria_dicionario(prec,1) # Criando dicionário para
    valores
    dicc = cria_dicionario(prec,p) # Criando dicionário para
    lances

    # Criando matriz vazia
    U = matriz_vazia(p, prec)

    alfa = 0.9999 # fator de esquecimento

    # PRIMEIRA RODADA

    V = valores(prec, p)

    B = [i/2. for i in V] # Bid inicial de cada jogador (metade
    de sua avaliação
    do objeto em questão)

    for k in range(p): # Para cada jogador

        sublista = B[0:k] + B[k+1::] # retira o bid do jogador k
        da análise

        for lin in range(prec): # atualizar para todos os valores

            valor = dicv.values()[dicv.keys().index(lin)]

```

```

for col in range(prec*p): # para cada lance (coluna),
    dado o valor
do jogador k (linha)

    lance = dicc.values()[dicc.keys().index(col)]

    if lance > max(sublista): # se o lance em questão
        for maior
do que o lance dos outros jogadores

        if tipo == 'primeiro preco':
            lucro = valor - lance
        elif tipo == 'segundo preco':
            lucro = valor - max(sublista)

    elif lance == max(sublista):
        lucro = (valor - lance) / ( num_maximos(sublista
        ) + 1 )
    else:
        lucro = 0.0

    if lucro < 0.0:
        lucro = 0.0
    U[k][lin,col] = lucro**r

# SEGUNDA RODADA EM DIANTE

for n in range(2, 50000):

    # Primeiro Passo: determinar o vetor B, com o lance de
    cada jogador

    V = valores(prec, p)

    B = []
    for k in range(p): # Para cada agente

        lin = dicv.keys()[dicv.values().index(V[k])]
        maximo = U[k][lin,0]
        bid = 0
        for col in range(1, prec*p):
            if U[k][lin,col] >= maximo:
                maximo = U[k][lin,col]
                bid = col

        B.append(dicc.values()[dicc.keys().index(bid)])

```

```

# Segundo Passo: atualizar a matriz de Lucro Esperado

for k in range(p): # Para cada jogador

    sublista = B[0:k] + B[k+1:] # retira o bid do jogador
    k da análise

    for lin in range(prec): # atualizar para todos os
        valores

        valor = dicv.values()[dicv.keys().index(lin)]

        for col in range(prec*p): # para cada lance (coluna
            ), dado o valor
            do jogador k (linha)

            lance = dicc.values()[dicc.keys().index(col)]

            if lance > max(sublista): # se o lance em questã
                o for maior do
                que o lance dos outros jogadores

                if tipo == 'primeiro preco':
                    lucro = valor - lance
                elif tipo == 'segundo preco':
                    lucro = valor - max(sublista)

            elif lance == max(sublista):
                lucro = (valor - lance) / ( num_maximos(
                    sublista) + 1 )
                #lucro = (valor - lance) / num_maximos(B)
            else:
                lucro = 0.0

        if lucro < 0.0:
            U[k][lin,col] = U[k][lin,col] * alfa * (1-(
                alfa**n))/
            (1-(alfa**(n+1))) + lucro/2. * (1-alfa)/(1-(
                alfa**(n+1)))
        else:
            U[k][lin,col] = U[k][lin,col] * alfa * (1-(
                alfa**n))/
            (1-(alfa**(n+1))) + (lucro**r) * (1-alfa)
            / (1-(alfa**(n+1)))

return U

```

## A.2 Leilão de Desconto na Tarifa

### - Variáveis de entrada:

```
% precisao = precisão do programa
% N = número de participantes do leilão
% r = grau de aversão ao risco dos participantes
% R = renda máxima do participante vencedor
```

### - Funções auxiliares:

```
def matriz_vazia(p, n): # cria uma lista com p matrizes vazias
    n x pn
    onde p é o número de jogadores e n é a precisão desejada

    lista = []
    for i in range(p):
        lista.append(np.matrix([(p*n)*[0.]]*(n)))
    return lista

def valores(prec, p, R): # Uniforme U[0,R]

    lista = []
    for i in range(p):
        a = uniform(0, R)
        aux = float(R)/prec
        while a > aux:
            aux += float(R)/prec
        lista.append( round(aux ,10) )

    return lista

def num_maximos(lista): # retorna o número de máximos iguais de
    uma lista

    cont = 0
    for i in lista:
        if i == max(lista):
            cont += 1

    return cont

def cria_dicionario(prec, p, R):

    dic = {}

    dic[0] = float(R) / (prec*p)
```

```

for i in range(1, prec*p):
    dic[i] = dic[i-1] + dic[0]
    dic[i] = round(dic[i], 10)

return dic

```

### **- Algoritmo:**

```

def leilao(p, prec, R, r):

    # Criando o dicionário
    dicv = cria_dicionario(prec, 1, R)
    dicc = cria_dicionario(prec, p, R)

    U = matriz_vazia(p, prec) # Criando matriz vazia
    alfa = 0.9999 # fator de esquecimento

    # PRIMEIRA RODADA

    C = valores(prec, p, R)

    # Bid inicial de cada jogador (metade de sua avaliação do
    # objeto em questão)

    B = []
    for k in range(p):
        B.append(C[k]/2.)

    for k in range(p): # Para cada jogador

        sublista = B[0:k] + B[k+1::] # retira o bid do jogador k
        da análise

        for lin in range(prec): # atualizar para todos os valores

            custo = dicv.values()[dicv.keys().index(lin)]

            for col in range(prec*p): # para cada lance (coluna),
                dado o valor
                do jogador k (linha)

                lance = dicc.values()[dicc.keys().index(col)]

            if lance > max(sublista):
                lucro = R*(1. - lance) - custo

            elif lance == max(sublista):

```

```

        lucro = (R*(1. - lance) - custo) / ( num_maximos
            (sublista) + 1 )

    else:
        lucro = 0.0

    if lucro < 0.0:
        lucro = 0.0
    U[k][lin,col] = lucro**r

# SEGUNDA RODADA EM DIANTE

for n in range(2,20000):

    # Primeiro Passo: determinar o vetor B, com o lance de
    # cada jogador

    C = valores(prec, p, R)

    B = []
    for k in range(p): # Para cada agente

        lin = dicv.keys()[dicv.values().index(C[k])]
        maximo = U[k][lin,0]
        bid = 0
        for col in range(1, prec*p):
            if U[k][lin,col] > maximo:
                maximo = U[k][lin,col]
                bid = col

        B.append(dicc.values()[dicc.keys().index(bid)])

    # Segundo Passo: atualizar a matriz de Lucro Esperado

    for k in range(p): # Para cada jogador

        sublista = B[0:k] + B[k+1:] # retira o bid do jogador
        # k da análise

        for lin in range(prec): # atualizar para todos os
            # valores

            custo = dicv.values()[dicv.keys().index(lin)]

```

```

for col in range(prec*p): # para cada lance (coluna
    ), dado o valor
do jogador k (linha)

    lance = dicc.values()[dicc.keys().index(col)]

    if lance > max(sublista):
        lucro = R*(1. - lance) - custo

    elif lance == max(sublista):
        lucro = (R*(1. - lance) - custo) / (
            num_maximos(sublista)
            + 1 )

    else:
        lucro = 0.0

    if lucro < 0.0:
        U[k][lin,col] = U[k][lin,col] * alfa * (1-(
            alfa**n))/
            (1-(alfa**(n+1))) + lucro/2. * (1-alfa)/(1-(
            alfa**(n+1)))
    else:
        U[k][lin,col] = U[k][lin,col] * alfa * (1-(
            alfa**n))/
            (1-(alfa**(n+1))) + (lucro**r) * (1-alfa)
            / (1-(alfa**(n+1)))

return U

```

### A.3 Leilão de Valor Comum

#### - Variáveis de entrada:

```

% precisao = precisão do programa
% N = número de participantes do leilão
% vl = valor mínimo que o valor real assume
% vh = valor máximo que o valor real assume
% e = epsilon (desvio sobre o valor real)

```

#### - Funções auxiliares:

```

def matriz_vazia(p, n): # cria uma lista com p matrizes vazias
    n x pn onde p é
    o número de jogadores e n é a precisão desejada

```

```

lista = []
for i in range(p):
    lista.append(np.matrix([(n)*[0.]]*(n)))
return lista

def num_maximos(lista): # retorna o número de máximos iguais de
    uma lista

    a = max(lista)
    cont = 0
    for i in lista:
        if i == a:
            cont += 1

    return cont

def aprox(prec, a, vl, vh):

    if a == vl:
        return a
    aux = vl
    while a > aux:
        aux += (vh-vl) / float(prec)
    return round(aux - (vh-vl) / float(prec), 5)

def cria_dicionario(prec, vl, vh):

    dic = {}

    dic[0] = vl
    aux = (vh-vl) / float(prec)
    dic[1] = vl + aux
    for i in range(2, prec):
        dic[i] = round( dic[i-1] + aux , 10 )

    return dic

def intervalo_sinais(chao, teto, prec, vl, vh):

    aux = aprox(prec, chao, vl, vh)
    lista = []
    while aux < teto + (vh-vl) / float(prec):
        if aux >= vh:
            break
        lista.append(round(aux,5))
        aux += (vh-vl) / float(prec)

    return lista

```



### - Algoritmo:

```
def leilao(p, prec, vl, vh, e):

    Payoffs = matriz_vazia(p, prec)
    alfa = 0.9999
    dic = cria_dicionario(prec, vl, vh)

    # PRIMEIRA RODADA

    v = random.random()*(vh-vl) + vl
    chao = max(v-e, vl)
    teto = min(v+e, vh)

    S = [ random.random()*(teto - chao) + chao for k in range(p)
          ]
    B = S

    for k in range(p): # Para cada jogador

        sublista = B[0:k] + B[k+1::] # retira o bid do jogador k
                                     da análise

        lin = dic.keys()[dic.values().index(aprox(prec, S[k], vl,
                                                    vh))]

        for col in range(prec): # para cada lance (coluna), dado
                                o valor do
                                jogador k (linha)

            lance = dic.values()[dic.keys().index(col)] #dicc

            if lance > max(sublista): # se o lance em questão for
                maior do que o
                lance dos outros jogadores
                lucro = v - lance

            elif lance == max(sublista):
                lucro = (v - lance) / ( num_maximos(sublista) + 1 )

            else:
                lucro = 0.0

            Payoffs[k][lin,col] = lucro

    # SEGUNDA RODADA EM DIANTE

    for n in range(2, 50000):
```

```

v = random.random()*(vh-vl) + vl
chao = max(v-e, vl)
teto = min(v+e, vh)

S = [ random.random()*(teto - chao) + chao for k in range
      (p) ] # lista com
sinais (crenças) de cada jogador

# Analisando qual o bid ótimo para cada jogador

B = []
for k in range(p): # Para cada agente

    val = aprox(prec, S[k], vl, vh)
    lin = dic.keys()[dic.values().index(val)]

    maximo = Payoffs[k][lin,0]
    bid = 0

    for col in range(1, prec): #*p
        if Payoffs[k][lin,col] >= maximo:
            maximo = Payoffs[k][lin,col]
            bid = col

    B.append(dic.values()[dic.keys().index(bid)]) #dicc

for k in range(p): # Para cada jogador

    sublista = B[0:k] + B[k+1::] # retira o bid do
    jogador k da análise

    lin = dic.keys()[dic.values().index(val)]

    for col in range(prec): # para cada lance (coluna),
        dado o valor do
        jogador k (linha)

        lance = dic.values()[dic.keys().index(col)] #dicc

        if lance > max(sublista): # se o lance em questão
            for maior do que o
            lance dos outros jogadores
                lucro = (v - lance)

        elif lance == max(sublista):
            lucro = (v - lance) / ( num_maximos(sublista) +
                                   1 )

```

```

else:
    lucro = 0.0

    Payoffs[k][lin,col] = Payoffs[k][lin,col] * alfa *
        (1-(alfa**n)) /
        (1-(alfa**(n+1))) + lucro * (1-alfa) / (1-(alfa**(n
        +1)))

return Payoffs

```

## B Gráficos dos resultados

Aqui temos os gráficos de alguns resultados de cada leilão estudado, sendo o eixo  $x$  a variável aleatória recebida por um jogador do leilão e o eixo  $y$  o lance ótimo para cada valor aleatório.

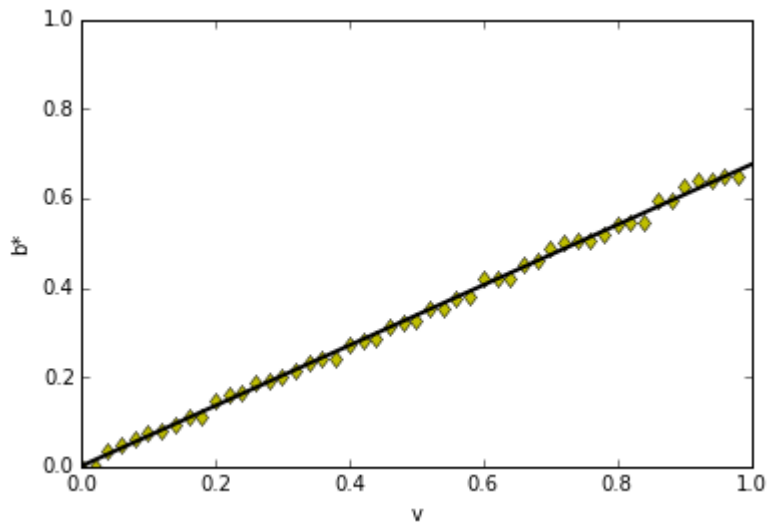


Figure 26: Leilão de Primeiro Preço (agentes neutros ao risco) com  $N = 3$

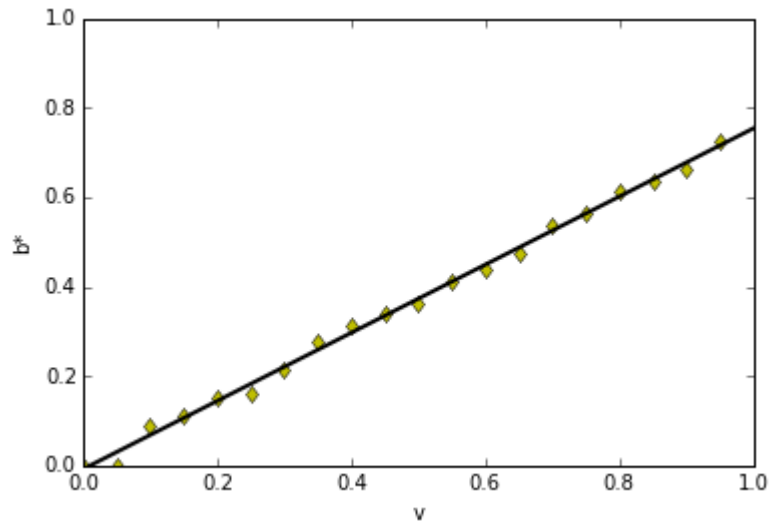


Figure 27: Leilão de Primeiro Preço (agentes neutros ao risco) com  $N = 4$

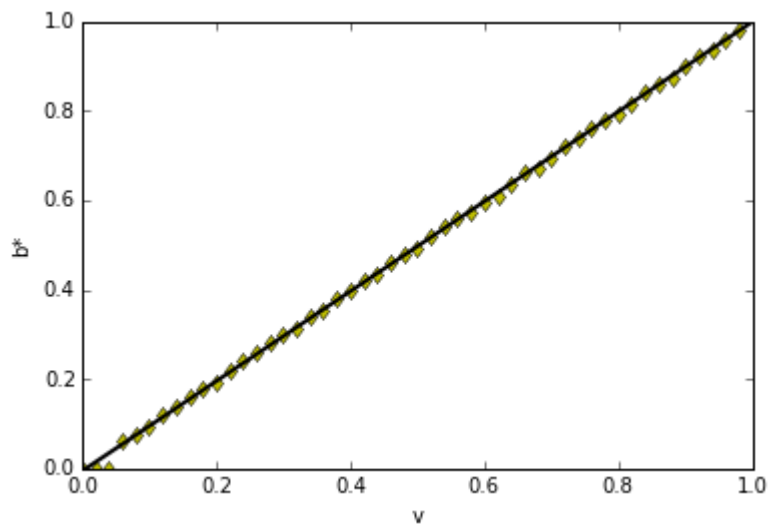


Figure 28: Leilão de Segundo Preço (agentes neutros ao risco) com  $N = 3$

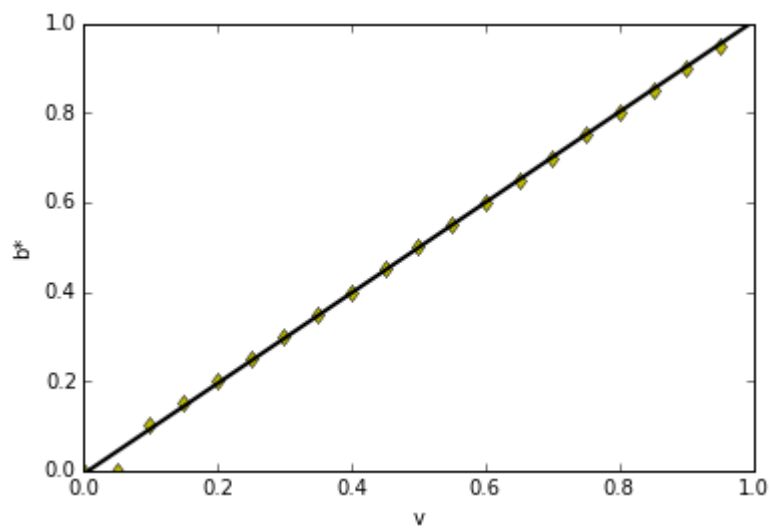


Figure 29: Leilão de Segundo Preço (agentes neutros ao risco) com  $N = 4$

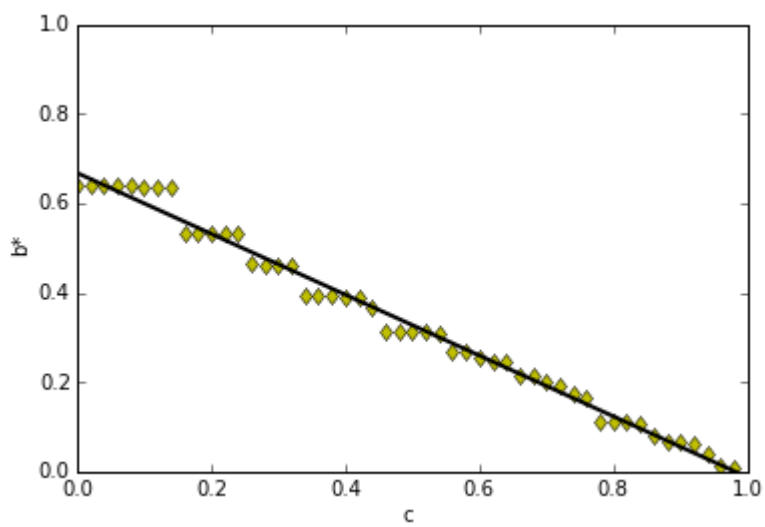


Figure 30: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes neutros ao risco) com  $N = 8$

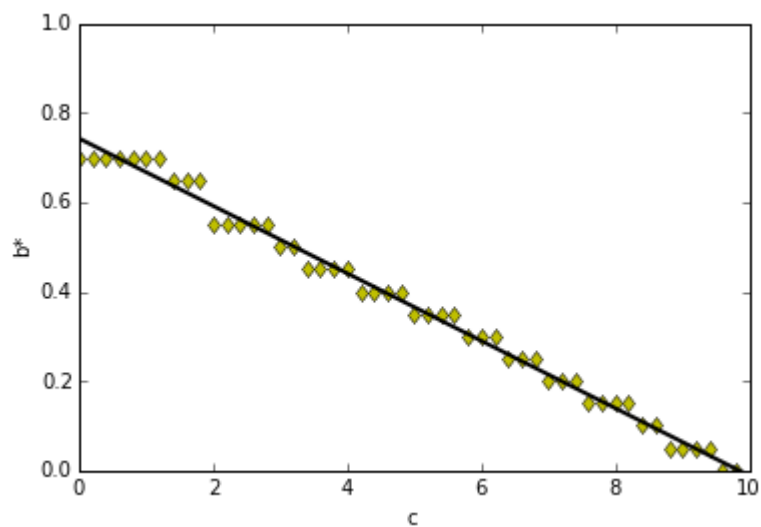


Figure 31: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes neutros ao risco) com  $N = 4$  e  $R = 10.0$

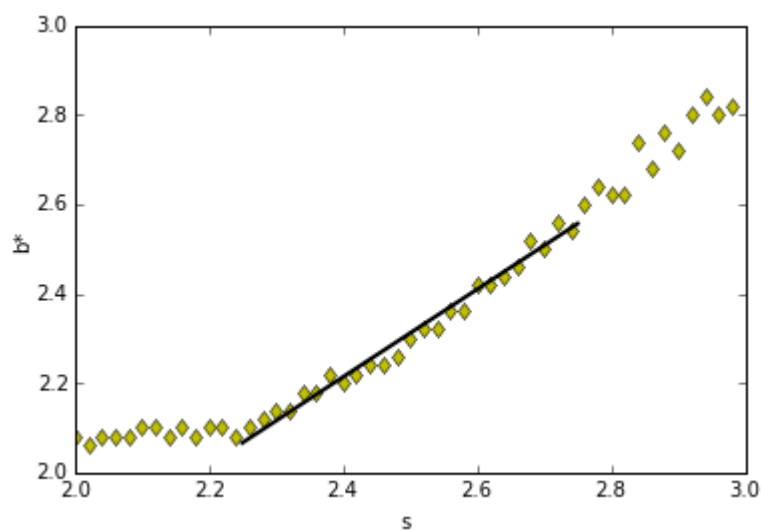


Figure 32: Leilão de Valor Comum (agentes neutros ao risco) com  $N = 4$  e  $\epsilon = 0.25$  no intervalo  $[2.0, 3.0]$

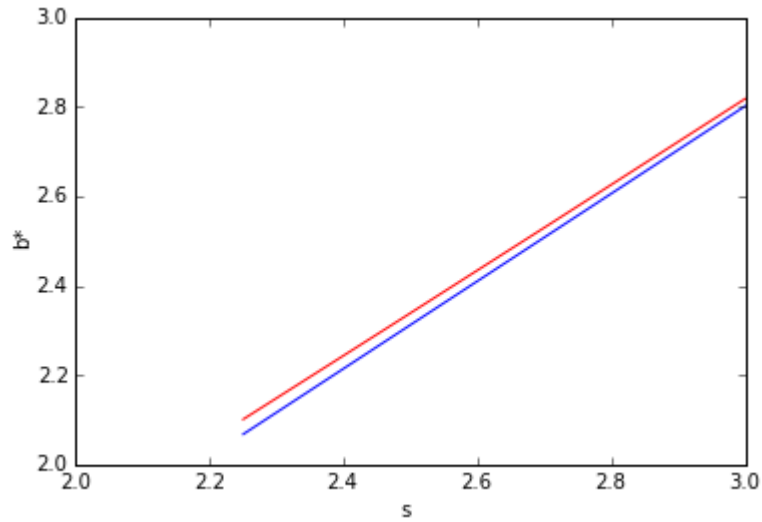


Figure 33: Leilão de Valor Comum (agentes neutros ao risco) com  $N = 4$  e  $\epsilon = 0.25$  no intervalo  $[2.0, 3.0]$ . Vermelho: literatura; azul: simulação.

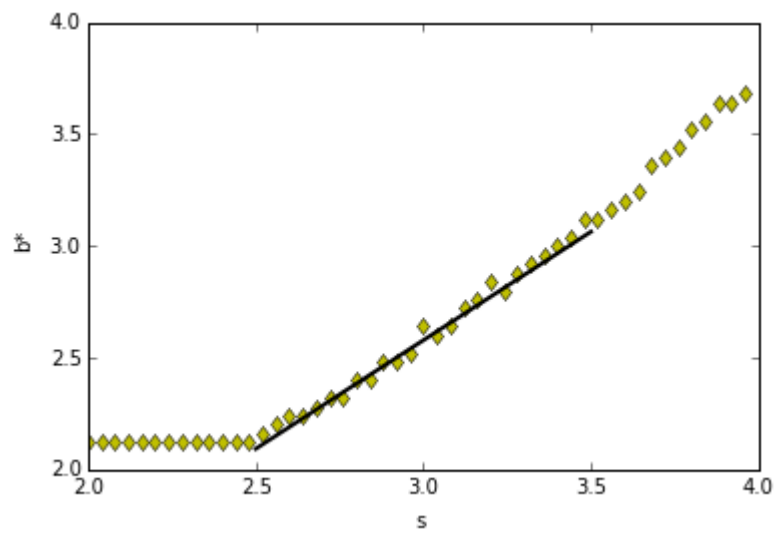


Figure 34: Leilão de Valor Comum (agentes neutros ao risco) com  $N = 6$  e  $\epsilon = 0.5$  no intervalo  $[2.0, 4.0]$

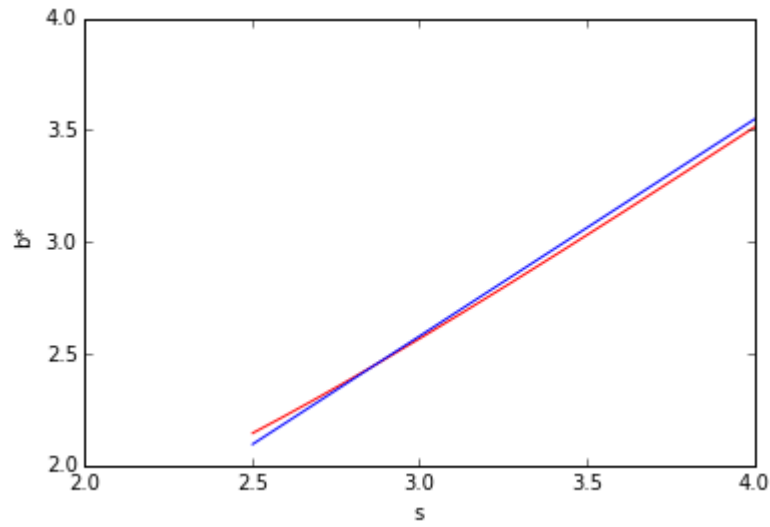


Figure 35: Leilão de Valor Comum (agentes neutros ao risco) com  $N = 6$  e  $\epsilon = 0.5$  no intervalo  $[2.0, 4.0]$ . Vermelho: literatura; azul: simulação.

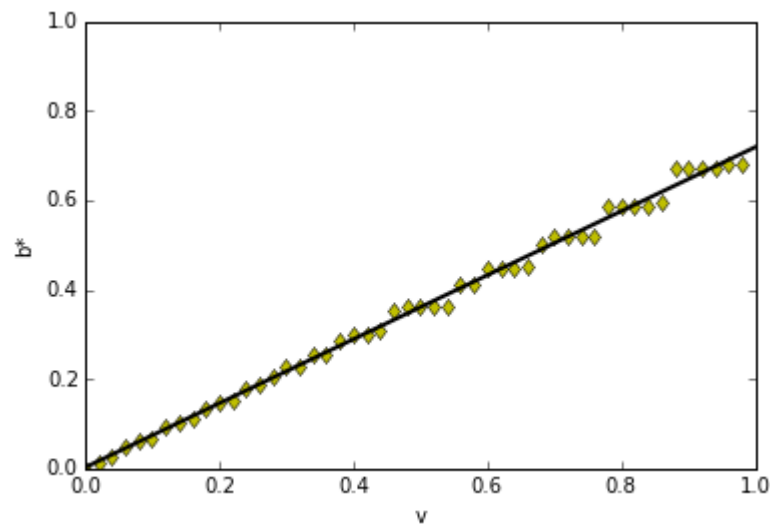


Figure 36: Leilão de Primeiro Preço (agentes avessos ao risco) com  $N = 3$  e  $r = 0.75$



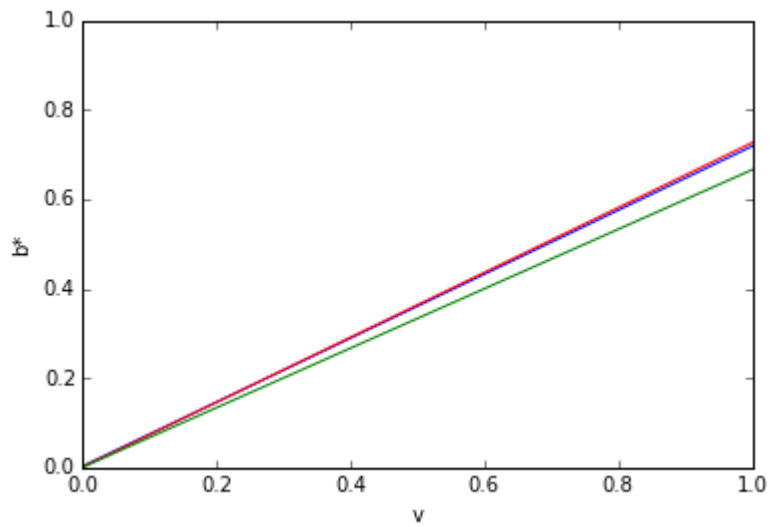


Figure 37: Leilão de Primeiro Preço (agentes avessos ao risco) com  $N = 3$  e  $r = 0.75$ . Vermelho: literatura; azul: simulação; verde: literatura, para agentes neutros ao risco

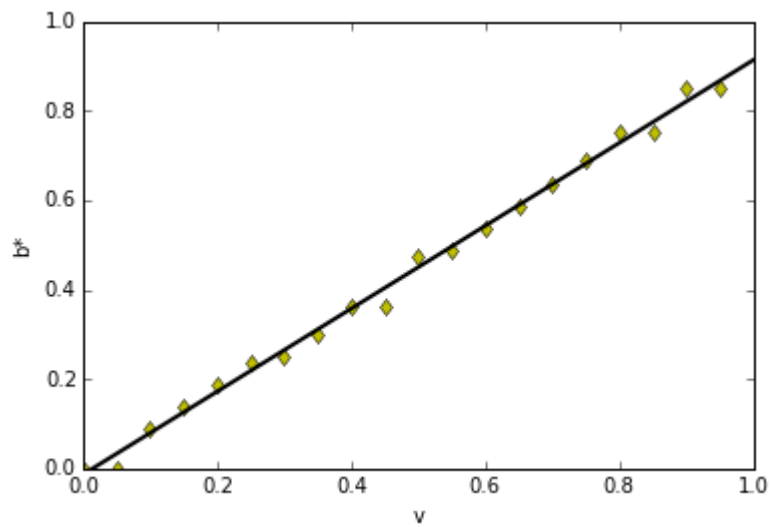


Figure 38: Leilão de Primeiro Preço (agentes avessos ao risco) com  $N = 4$  e  $r = 0.25$

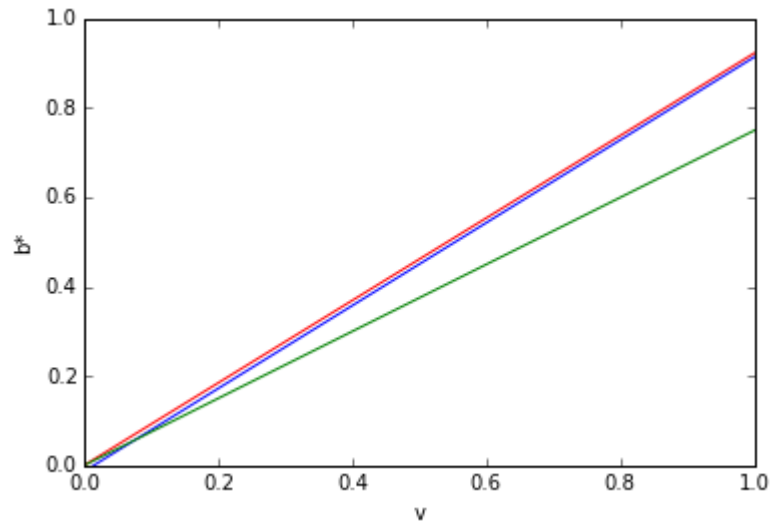


Figure 39: Leilão de Primeiro Preço (agentes avessos ao risco) com  $N = 4$  e  $r = 0.25$ . Vermelho: literatura; azul: simulação; verde: literatura, para agentes neutros ao risco

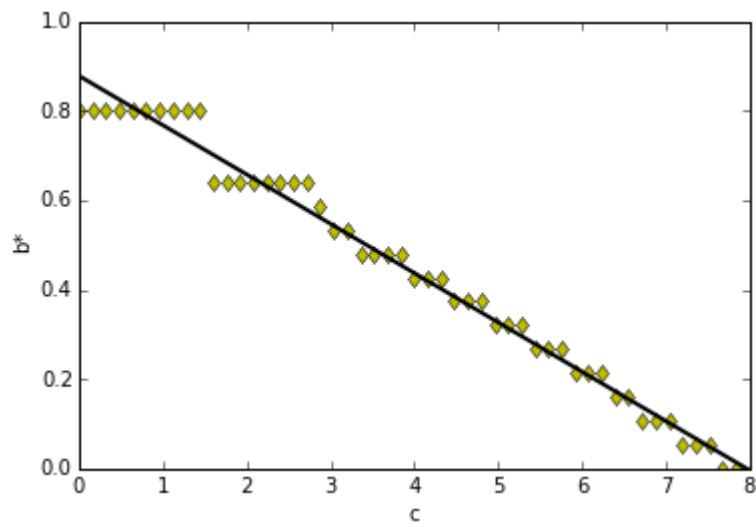


Figure 40: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes avessos ao risco) com  $N = 3$ ,  $R = 8$  e  $r = 0.2$

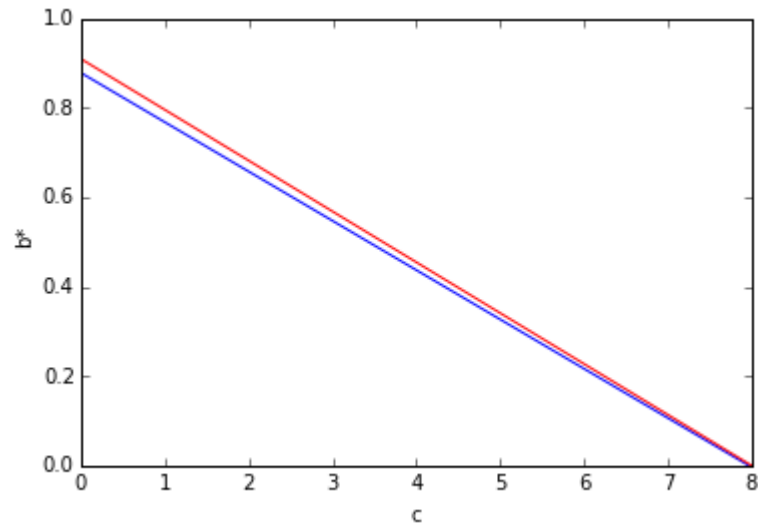


Figure 41: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes avessos ao risco) com  $N = 3$ ,  $R = 8$  e  $r = 0.2$ . Vermelho: literatura; azul: simulação

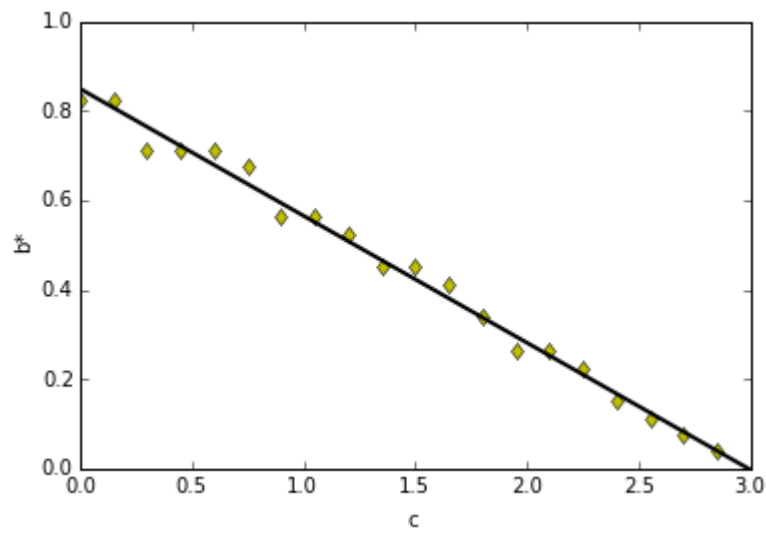


Figure 42: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes avessos ao risco) com  $N = 4$ ,  $R = 3$  e  $r = 0.5$

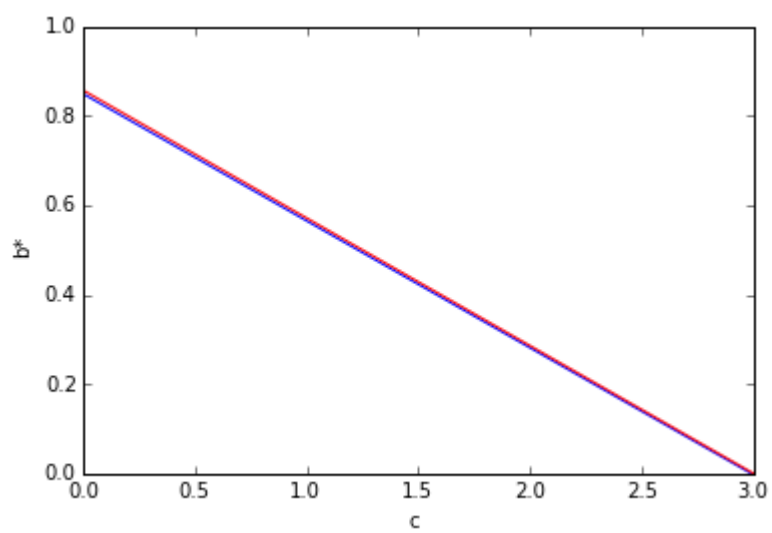


Figure 43: Leilão de Desconto na Tarifa (agentes avessos ao risco) com  $N = 4$ ,  $R = 3$  e  $r = 0.5$ . Vermelho: literatura; azul: simulação