

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA de PÓS-GRADUAÇÃO em ECONOMIA

Pablo Valente de Souza

Previdência, Câmbio e
Macroeconomia de Longo Prazo

Rio de Janeiro
2014

Pablo Valente de Souza

Previdência, Câmbio e Macroeconomia de Longo Prazo

Tese submetida à Escola de Pós-
Graduação em Economia como requisito
parcial para obtenção do grau de Doutor
em Economia

Orientador: Samuel de Abreu Pessoa

Rio de Janeiro
2014

Souza, Pablo Valente de

Previdência, câmbio e macroeconomia de longo prazo / Pablo Valente de Souza. - 2014.

130 f.

Tese (doutorado) - Fundação Getulio Vargas, Escola de Pós-Graduação em Economia.

Orientador: Samuel de Abreu Pessoa.

Inclui bibliografia.

1. Previdência social. 2. Câmbio. 3. Macroeconomia. I. Pessoa, Samuel de Abreu. II. Fundação Getulio Vargas. Escola de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDD – 332.456

PABLO VALENTE DE SOUZA

“PREVIDÊNCIA, CÂMBIO E MACROECONOMIA DE LONGO PRAZO”

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Economia da Escola de Pós-Graduação em Economia para obtenção do grau de Doutor em Economia.

Data da defesa: 29/09/2014

Aprovada em:

ASSINATURA DOS MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Samuel de Abreu Pessoa', is written over a horizontal line.

Samuel de Abreu Pessoa
Orientador (a)

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Pedro Cavalcanti Gomes Ferreira', is written over a horizontal line.

Pedro Cavalcanti Gomes Ferreira

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Renato Fragelli Cardoso', is written over a horizontal line.

Renato Fragelli Cardoso

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Ricardo de Oliveira Cavalcanti', is written over a horizontal line.

Ricardo de Oliveira Cavalcanti

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Marcelo Rodrigues dos Santos', is written over a horizontal line.

Marcelo Rodrigues dos Santos

Agradecimentos

Sou grato a meus colegas da FGV. Conviver com vocês foi um privilégio. Sou grato também aos professores, especialmente a meu orientador. Aos funcionários da EPGE, obrigado por todo o auxílio.

Resumo

Há um debate clássico entre economistas brasileiros sobre o papel da taxa de câmbio no processo de crescimento econômico. Alguns argumentam que a boa performance econômica de certos países está diretamente associada às suas políticas cambiais, chamando atenção para um eventual impacto destas sobre a composição setorial da economia. O ponto de vista ortodoxo, no entanto, argumenta que a taxa de câmbio real deve ser vista como uma variável endógena, enfatizando outros fatores para explicar diferenças de performance, tais como instituições e a importância que cada sociedade atribui à acumulação de capital humano. A ambição desta tese é oferecer um modelo de acumulação ótima de capital em equilíbrio geral no qual o comportamento do câmbio está associado a incentivos que estimulam a poupança agregada. Com isso, pretende-se mostrar que as diferenças observadas entre América Latina e Ásia, por exemplo, no que se refere tanto ao comportamento das taxas de câmbio como ao padrão de acumulação de ativos, podem ser melhor compreendidas à luz das diferenças entre instituições previdenciárias. O modelo é construído em duas etapas. No capítulo 1 apresentamos um modelo de crescimento neoclássico com dois setores, economia aberta e determinação endógena da taxa de câmbio. O capítulo 2 introduz gerações sobrepostas e sistema previdenciário, chegando a um modelo capaz de relacionar incentivos à formação de poupança ao comportamento de diversas variáveis macroeconômicas, em particular da taxa de câmbio. O capítulo 3 discute estratégias alternativas de calibração do modelo e avalia o impacto de diferentes níveis de gasto previdenciário sobre diversas variáveis macroeconômicas. Mostra-se que países com sistemas de previdência mais generosos apresentarão, no longo prazo, endividamento externo maior e consumo menor, além de taxas de câmbio mais apreciadas durante a dinâmica de transição. Finalmente, resolvendo o modelo em economia fechada, mostra-se que a taxa de juros de equilíbrio de longo prazo será tanto menor quanto mais avarento for o sistema de previdência.

Palavras-chave: Previdência, Câmbio, Macroeconomia Aberta

Abstract

There is a classic debate among brazilian economists about the effects of exchange rate dynamics on economic growth. Some argue that the high growth rates observed in some regions of the world are directly linked to the exchange rate policies adopted and their consequences on structural transformations. The neoclassical point of view, however, typically argues that the real exchange rate should be viewed as an endogenous variable, and that the differences in economic performance are consequence of structural factors, such as institutions and human capital. Our ambition, through the present work, is to offer a general equilibrium model in which exchange rate dynamics is influenced by incentives regarding savings formation. We hope to show that the differences observed between Asia and Latin America, for instance, regarding exchange rate dynamics and asset accumulation, can be better understood through the differences in social securities institutions. The model is built in two steps. Chapter 1 presents a two-sector open economy general equilibrium neoclassical growth model with endogenous exchange rate. Chapter 2 introduces overlapping generations and social security, producing a model that links savings formation incentives to the behavior of several macroeconomics variables, the exchange rate in particular. Chapter 3 discusses alternative calibration strategies and evaluates the impact of different social security expenditures levels on several macroeconomics variables. We show that economies with higher social security expenditures have, in the long run, higher foreign debt and lower consumption, and more appreciated exchange rates in the transition dynamics. We also show, through a closed economy version of the model, that lower social security expenditures produce lower equilibrium interest rates in the long run.

Keywords: Social Security, Exchange Rate, Open Economy Macroeconomics

Lista de Figuras

1	Unicidade da Estratégia de Calibração 2	85
2	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Produto / Trabalhador de SS	90
3	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Capital / Produto de SS	90
4	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Dívida Externa / Produto de SS	91
5	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Consumo / Produto de SS	91
6	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Investimentos / Produto de SS	92
7	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Transferência Líquida de Recursos ao Exterior / Produto de SS	92
8	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Fração da mão-de-obra alocada no setor de tradables de SS	93
9	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Participação do setor de tradables no produto de SS	93
10	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Produto / trabalhador de SS	118
11	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Capital / Produto de SS	118
12	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Preço Relativo dos Serviços de SS	119
13	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Taxa de Juros de SS	119
14	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Consumo / Produto de SS	120
15	Gasto Previdenciário / PIB de SS X Consumo / trabalhador de SS	120

Lista de Tabelas

1	Lista de parâmetros	73
2	Valores alternativos de β	78
3	Estratégia 1 - correlação entre ρ e α para um dado nível de riqueza	79
4	Estratégia 1 - Resultados finais e estática comparativa em r^* e α	81
5	Estratégia 2 - Resultados	86
6	Resultados para a dinâmica de transição	87
7	Relação entre riqueza de longo prazo e sistema previdenciário - Resultados	89

Sumário

1	Introdução	12
2	Capítulo 1: um modelo de crescimento neoclássico com 2 setores em uma pequena economia aberta	15
2.1	Descrição informal do modelo	15
2.2	Problema das Firms	16
2.3	Problema do Agente Representativo	21
2.3.1	Formulação do problema	21
2.3.2	Condições de otimalidade	22
2.3.3	Dinâmica do capital	24
2.3.4	Consumo	25
2.4	Determinação da Taxa de Câmbio	28
2.5	Restrição orçamentária intertemporal	29
2.6	Definição do Equilíbrio	31
2.7	Estado estacionário e estática comparativa	32
2.8	Dinâmica consolidada e método numérico	35
3	Capítulo 2: gerações sobrepostas e previdência	38
3.1	Condições Iniciais, Demografia, Ciclo de Vida e Sistema Previdenciário	39
3.2	Escolha individual	43
3.2.1	Condições de otimalidade	44
3.2.2	Função consumo individual	45
3.2.3	Restrição orçamentária intertemporal individual	45
3.3	Agregação	49
3.3.1	Agregação do capital	49
3.3.2	Agregação da dívida externa	50
3.3.3	Agregação do capital humano	51
3.3.4	Agregação do consumo	51
3.3.5	Agregação do custo de instalação do capital	52
3.3.6	Agregação da condição de factibilidade do mercado de bens domésticos	52
3.4	Dinâmica	53
3.4.1	Dinâmica do capital agregado	53
3.4.2	Dinâmica da dívida externa agregada	55
3.4.3	Dinâmica do capital humano agregado	58
3.4.4	Dinâmica do consumo agregado	60
3.5	Equação de equilíbrio no mercado de bens domésticos	63
3.6	Definição do Equilíbrio	64
3.7	Estado Estacionário	64
3.8	Estática Comparativa	67
3.9	Dinâmica consolidada e método numérico	70
4	Capítulo 3: Calibração	73
4.1	Estratégia de Calibração da Taxa de Decaimento da Renda do Indivíduo	74
4.2	Estratégia de Calibração do Estado Estacionário 1	75
4.3	Estratégia de Calibração do Estado Estacionário 2	82
4.4	Dinâmica de Transição	87

5	Anexos	89
5.1	Estática Comparativa do Estado Estacionário	89
5.2	Modelo do <i>Capítulo 1</i> em economia fechada	94
5.2.1	Condições de otimalidade	94
5.2.2	Dinâmica do capital	96
5.3	Estabilidade e dinâmica do modelo do <i>Capítulo 1</i>	98
5.4	Teorema de Grobman-Hartman e Estabilidade de Sela	105
5.5	Modelo do <i>Capítulo 2</i> em economia fechada	106
5.5.1	Com custo de instalação do capital	106
5.5.2	Condições de otimalidade	106
5.5.3	Sem custo de instalação do capital	108
5.5.4	Condições de otimalidade	109
5.5.5	Agregação e dinâmica	110
5.5.6	Condições de factibilidade	110
5.5.7	Dinâmica do sistema consolidado	111
5.5.8	Estado Estacionário	111
5.5.9	Estratégia de Calibração	117
5.6	Estabilidade e dinâmica do modelo do <i>Capítulo 2</i>	121

1 Introdução

Há um debate clássico entre economistas brasileiros sobre o papel da taxa de câmbio no processo de crescimento econômico. Alguns argumentam que a boa performance econômica de certos países está diretamente associada às suas políticas cambiais, chamando atenção para um eventual impacto destas sobre a composição setorial da economia. Argumenta-se que o crescimento observado na Ásia ao longo das últimas décadas apresenta as seguintes características: câmbio desvalorizado, crescimento rápido e participação elevada do setor industrial no produto.

O ponto de vista ortodoxo, no entanto, argumenta que a taxa de câmbio real, assim como o crescimento, deve ser vista como uma variável endógena, ambos respondendo a parâmetros estruturais da economia. Enfatiza-se outros fatores para explicar diferenças de performance, tais como instituições e a importância que cada sociedade atribui à acumulação de capital humano. A ambição desta tese é oferecer um modelo de acumulação ótima de capital em equilíbrio geral no qual o comportamento do câmbio está associado a incentivos que estimulam a poupança agregada.

Parte-se da observação empírica de que os países da América Latina, Brasil em particular, apresentam diferenças significativas em relação às economias de crescimento rápido do leste asiático no que se refere a como o sistema previdenciário é instituído. Os gastos com previdência nestes países, como fração do produto, são três ou quatro vezes menores do que os mesmos gastos para o Brasil. Daí a motivação para se construir um modelo que possa descrever a dinâmica de crescimento de economias abertas com mobilidade de capital e diferentes sistemas previdenciários com determinação endógena da taxa câmbio. Mostra-se que em economias nas quais a previdência é mais generosa, ao longo da trajetória de crescimento, a poupança será menor e o câmbio será mais valorizado. No longo prazo o sistema previdenciário determinará o passivo externo líquido da economia e, conseqüentemente, o consumo médio.

O trabalho oferece uma racionalização da associação observada entre crescimento e poupança doméstica. [Prasad, Rajan e Subramanian \(2006\)](#) documentaram que a poupança doméstica está associada ao crescimento e que esta relação é independente do investimento, sugerindo que choques positivos de produtividade que elevam a taxa de crescimento geram elevação mais do que proporcional na poupança doméstica, produzindo uma elevação no saldo de transações correntes simultânea à aceleração do crescimento. Trata-se de resultado pouco usual sob a ótica do modelo de crescimento neoclássico tradicional, no qual um choque permanente de produtividade eleva produto e renda permanente na mesma proporção, não alterando, conseqüentemente, o saldo de transações correntes como proporção do produto¹.

No modelo aqui desenvolvido, se o sistema previdenciário for muito avarento, é possível que uma elevação permanente da produtividade represente uma elevação transitória na renda das gerações que estão no mercado de trabalho. Então, sob a ótica individual, faria sentido elevar o consumo numa proporção inferior ao aumento da renda, elevando, portanto, seu nível de poupança. Este comportamento, no agregado, poderia produzir uma elevação no saldo de transações correntes. Conseqüentemente, o trabalho oferece uma explicação alternativa, e eventualmente complementar, à explicação de [Carrol, Overland e Weil \(2000\)](#). Neste trabalho os autores mostram que o fato estilizado de poupança ser positivamente correlacionada com crescimento ocorre em modelos intertemporais de acumulação de capital com formação de hábitos de consumo. Diferentemente, aqui este mesmo resultado ocorre em função da forma como o sistema previdenciário está institucionalizado.

[Aguirre e Calderón \(2005\)](#) documentaram que economias que apresentam câmbio desvalorizado, em relação a um nível de equilíbrio, apresentam maiores taxas de crescimento. Fazem um exercício econométrico em duas etapas. Na primeira, para um painel de economias entre 1965 e 2003, estimam o câmbio de equilíbrio em função de variáveis macroeconômicas, tais como o passivo externo líquido, a produtividade do setor de bens comercializáveis e o gasto público.

¹Ver, por exemplo, [Blanchard e Fischer \(1989\)](#), *Capítulo 2*.

No segundo passo, rodam uma regressão na qual a taxa de crescimento é variável explicada, utilizando, além dos regressores usuais, o desajuste cambial, isto é, a diferença entre o câmbio observado e o câmbio de equilíbrio previsto pelo modelo estimado no primeiro estágio. Concluem que um desajuste cambial de 10% na direção de desvalorização está associado a uma taxa de crescimento do PIB per capita até 0,5% maior. O modelo aqui construído sugere que há um problema de omissão de variável na estimativa de câmbio real em [Aguirre e Calderón \(2005\)](#). É necessário considerar como variável explicativa do câmbio real de equilíbrio, além das variáveis por eles consideradas, a taxa de poupança doméstica.

Para estudar o problema em tela escolhemos combinar um modelo de crescimento neoclássico com dois setores em economia aberta com a estrutura de gerações sobrepostas apresentada em [Blanchard \(1985\)](#). A tradição de modelos de dois setores vem de longa data, sendo [Uzawa \(1964\)](#), [Dasgupta \(1968\)](#) e [Ryder \(1969\)](#) exemplos de versões em economia fechada. Em economia aberta podemos citar [Brock \(1988\)](#), [Gavin \(1990\)](#) e [Pessoa \(1999\)](#). [Brock \(1988\)](#) emprega modelo semelhante ao apresentado no *Capítulo 1* para analisar a dinâmica de ajustamento do câmbio, do preço-sombra do capital e do saldo em transações correntes em decorrência de choques tributários e de gastos governamentais. Já [Pessoa \(1999\)](#) avalia a dinâmica de ajustamento da economia a uma elevação permanente e não-antecipada da produtividade da economia. [Gavin \(1990\)](#) utiliza um modelo com dois bens produzidos domesticamente, um que pode ser consumido e outro totalmente exportado, além de um terceiro que não é produzido domesticamente mas é consumido, para estudar a dinâmica após um choque de termos de troca. O modelo desenvolvido no *Capítulo 1* descende mais diretamente de [Pessoa \(1999\)](#).

Destaca-se que a literatura de modelos de dois setores possui uma ligação natural com a literatura de transformações estruturais. O modelo apresentado no *Capítulo 1* se assemelha, por exemplo, a [Acemoglu e Guerrieri \(2008\)](#), que desenvolvem um modelo de agente representativo e dois setores em economia fechada para estudar as alterações na composição setorial da economia em decorrência de diferenças na intensidade de utilização dos fatores de produção entre os setores. Os autores demonstram a consistência entre o processo de transformação estrutural, entendido como o processo de realocação setorial de fatores de produção, bem como as alterações na composição setorial da economia, e os chamados *factos de Kaldor*, que se referem à relativa constância da razão capital / produto, da participação do capital na renda e das taxas de juros e de crescimento econômico. [Ngai e Pissarides \(2007\)](#) produzem resultados semelhantes utilizando um modelo multisetorial com diferenças nas taxas de progresso tecnológico entre os setores. Sob a ótica da literatura de transformações estruturais, o trabalho aqui apresentado pode contribuir oferecendo mais uma possível causa para diferenças entre composições setoriais, as diferenças nos sistemas de previdência.

A utilização de uma estrutura com dois setores é necessária para que faça sentido falar em câmbio real de equilíbrio, que é definido como o preço relativo entre dois bens, um que pode ser transacionado com o exterior e outro cujo consumo deve, necessariamente, advir de produção doméstica. A utilização da estrutura de juventude perpétua apresentada em [Blanchard \(1985\)](#) é conveniente, dada sua tratabilidade analítica. A hipótese de que os indivíduos possuem probabilidade de morte constante desvincula da idade a expectativa de sobrevivência e a propensão marginal a consumir de cada indivíduo, facilitando imensamente o trabalho de agregação do modelo.

O sistema de previdência é introduzido no modelo da seguinte maneira. Também seguindo [Blanchard \(1985\)](#), supõe-se que a produtividade do trabalho do indivíduo decai à uma taxa constante, de modo que a fração da renda do trabalho agregada a que determinado indivíduo faz jus cai à medida que este se torna mais velho. Adicionalmente, permitimos que a renda de fato recebida pelo indivíduo decaia a uma taxa potencialmente diferente, em consequência da existência de um sistema previdenciário. Note-se que o sistema de previdência não é explicitamente modelado como um mecanismo onde indivíduos escolhem acumular ativos de modo a gerar um nível ótimo de suavização de consumo ao longo da vida. Ao contrário, ele é visto como

uma instituição exógena, que o indivíduo considera como dada ao fazer suas escolhas de consumo e investimento. Pretende-se, através desta estrutura formal, alcançar um modelo teórico capaz de analisar o problema em questão ao menor custo possível em termos de complexidade analítica.

O trabalho está organizado da seguinte forma. O *Capítulo 1* apresenta um modelo de crescimento neoclássico em economia aberta com heterogeneidade restrita ao lado da oferta. O modelo possui agente representativo, dois setores, livre mobilidade de fatores entre setores e mobilidade imperfeita de capital entre a economia doméstica e o resto do mundo, expressa na existência de custos de instalação do capital. O câmbio é determinado endogenamente através da condição de factibilidade do mercado de bens domésticos. Este modelo já apresenta as propriedades básicas do modelo final, desenvolvido no *Capítulo 2*, especialmente no que se refere à dinâmica de acumulação de capital.

O *Capítulo 2* introduz gerações sobrepostas e sistema previdenciário na estrutura formal apresentada no *Capítulo 1*. Especifica-se a estrutura demográfica e as condições iniciais da economia, bem como o problema do indivíduo, que é construído de modo semelhante ao do agente representativo. Obtém-se um sistema no qual a dinâmica do consumo está relacionada ao grau de generosidade do sistema previdenciário. O *Capítulo 3* discute duas estratégias alternativas de calibração do modelo e quantifica a sensibilidade do equilíbrio da economia a diferentes níveis de gastos previdenciários. Demonstra-se que, tudo mais constante, uma economia com gasto previdenciário maior apresentará, no longo prazo, dívida externa maior, estoque de capital também maior (embora em proporção menor) e consumo menor. Embora o câmbio de longo prazo independa do sistema previdenciário, ao longo da dinâmica de transição o câmbio será tanto mais apreciado e a trajetória do consumo tanto menos inclinada quanto mais generoso for o sistema previdenciário.

Finalmente, o *Anexo 5.5* apresenta uma versão em economia fechada do modelo, na qual, no longo prazo, a taxa de juros será tanto maior e o preço relativo do bem doméstico será tanto menor quanto maior o gasto previdenciário, sugerindo que alterações no estímulo à poupança agregada em escala global podem produzir impactos relevantes na estrutura de preços relativos nacionais.

2 Capítulo 1: um modelo de crescimento neoclássico com 2 setores em uma pequena economia aberta

2.1 Descrição informal do modelo

Trabalhamos com uma pequena economia aberta onde são ofertados 2 bens, um bem comercializável com o exterior (produzido pelo setor 2) e outro bem não-comercializável com o exterior, que denominaremos bem doméstico² (produzido pelo setor 1). O bem comercializável é o bem numérico da economia, e seu preço é normalizado para unidade (isto é, adota-se a normalização $p_2 = 1$). A taxa real de câmbio é definida como o preço relativo do bem doméstico em unidades do bem comercializável, p (isto é, $p = p_1/p_2 = p_1$). Logo, quando utilizarmos a terminologia *apreciação cambial* ou *valorização cambial* estaremos nos referindo a um aumento de p , ou a um encarecimento relativo dos serviços. A população cresce a uma taxa constante igual a n , a taxa de progresso tecnológico exógeno é constante e igual a g , sendo homogênea entre os setores, e o tempo evolui continuamente. O fator trabalho é ofertado inelasticamente. A tecnologia de produção de cada bem é descrita por uma função de produção do tipo *Cobb-Douglas*³. Existem custos de instalação do capital, que impedem que o produto marginal do capital da economia doméstica, líquido da taxa de depreciação, se iguale instantaneamente à taxa de juros internacional.

A estrutura estática da economia é representada pelo modelo padrão de dois setores e livre mobilidade de fatores utilizado tradicionalmente pela teoria de comércio internacional⁴. Em cada período as firmas escolhem quantidades de capital e trabalho de modo a maximizar seus lucros tomando como dados as dotações agregadas de fatores (K e L), além dos preços dos fatores (w e r) e dos bens finais (p). O preço relativo dos fatores ($\bar{w} = w/r$) é determinado pelo equilíbrio no mercado de fatores, guardando relação com o preço relativo do bem doméstico ($\bar{w} \equiv \bar{w}(p)$). Logo, a oferta de cada setor poderá ser expressa em função da razão capital / trabalho agregada, ($k = K/L$) e do preço relativo do bem doméstico, p ⁵.

A dinâmica desta economia é derivada do comportamento ótimo e factível do agente representativo, que vive infinitamente e escolhe consumo e investimento de modo a maximizar o somatório descontado das utilidades futuras. Como é usual em modelos com economia aberta, os descasamentos temporais entre absorção interna e produto nacional bruto se refletem em variações no estoque de ativos externos nas mãos dos residentes na economia doméstica.

Em cada período a taxa de câmbio é determinada pela condição de factibilidade no mercado de bens domésticos. Isto é, o preço relativo do bem doméstico deverá ser tal que a oferta de bens domésticos se iguale à demanda por bens domésticos. Conforme explicado anteriormente, a oferta de bens domésticos será função do preço relativo do bem doméstico e da razão capital / trabalho agregada. Já a demanda total pelo bem doméstico será igual à demanda por consumo deste bem somada ao custo de instalação do capital⁶. Conforme veremos, o consumo de bem doméstico será função de seu preço relativo e da renda permanente⁷. Já o custo de instalação do capital será função do estoque de capital por trabalhador e do investimento, que por sua vez dependerá do preço-sombra do investimento⁸. Então, o câmbio será função do estoque de capital

²Utilizaremos as denominações *bem doméstico* e *serviços* nos referindo ao mesmo conceito.

³Supomos que o setor produtor do bem comercializável é mais capital-intensivo, isto é, $\alpha_2 > \alpha_1$, onde α_i é a participação do capital na renda do setor $i \in \{1, 2\}$.

⁴Ver, por exemplo, [Kemp \(1969\)](#), capítulo 1.

⁵Isto é, teremos $y_i \equiv y_i(p, k)$, onde y_i é o produto *per capita* do setor $i \in \{1, 2\}$.

⁶Embora neste modelo o bem de investimento seja comercializável, supomos que o custo de instalação do capital seja expresso em bens domésticos, refletindo a idéia de que, para que o capital se torne "funcional", é necessária a aquisição de serviços domésticos, tais como construção civil e transporte. Ver [Brock \(1988\)](#).

⁷Isto é, teremos $c_i \equiv c_i(p, \lambda_0)$, onde λ_0 é um índice de renda permanente e c_i é o consumo *per capita* do bem $i \in \{1, 2\}$.

⁸Este preço desempenha papel semelhante ao preço relativo do capital criado por [Tobin \(1969\)](#), conhecido como *q de Tobin*.

por trabalhador, do preço-sombra do investimento e da renda permanente ($p \equiv p(k, q, \lambda_0)$).

A dinâmica do modelo é caracterizada por um sistema de equações diferenciais que descrevem a evolução do estoque de capital por trabalhador (k) e do preço-sombra do capital (q), além da condição de factibilidade do mercado de bens domésticos. A dinâmica da dívida externa é separada das dinâmicas de k e q , sendo impactada por mas não impactando as últimas. O sistema tem estabilidade de sela na vizinhança do estado estacionário, que é único. As variáveis de estado do sistema são o estoque de capital por trabalhador efetivo, k , e a dívida externa por trabalhador efetivo, b , enquanto as variáveis de controle são os consumos dos 2 bens (c_1 e c_2) e o investimento (i).

No longo prazo a produtividade marginal do capital no setor de bens comercializáveis é dada pela taxa de juros internacional acrescida da taxa de depreciação do capital. Portanto, a razão capital / trabalho no setor de bens comercializáveis está fixada. Então, dada a hipótese de livre mobilidade de fatores entre setores, obtém-se, a partir do problema das firmas, a razão capital / trabalho no setor de bens domésticos, k_2^{ss} e a taxa de câmbio, p^{ss} . Como o câmbio de longo prazo é dado em função da taxa de juros internacional, além de parâmetros de preferências e tecnologia, a variável de ajuste que garante o equilíbrio no mercado de bens domésticos é a razão capital / trabalho agregada de longo prazo, k^{ss} . Portanto, em caso de aumento da renda permanente, com consequente elevação do consumo de longo prazo dos dois bens, o ajuste se dá pela redução k^{ss} de modo a viabilizar uma elevação da oferta no setor trabalho-intensivo.

2.2 Problema das Firms

Em cada instante as firmas escolhem quantidades de capital e trabalho de modo a maximizar seus lucros tomando como dados os preços relativos dos bens finais e dos fatores de produção, além das dotações agregadas de capital e trabalho. Como estamos trabalhando com mercados competitivos, bem como preferências e tecnologias *bem comportadas*, podemos recorrer ao Segundo Teorema do Bem-estar para caracterizar o equilíbrio estático resolvendo o problema do planejador, que consiste em escolher alocações setoriais de capital e trabalho de modo a maximizar o lucro total das firmas. Portanto, o planejador resolve:

$$\max_{\{K_{1t}, K_{2t}, L_{1t}, L_{2t}\}} p_t F_1(K_{1t}, A_{1t} L_{1t}) + F_2(K_{2t}, A_{2t} L_{2t}) - r_t(K_{1t} + K_{2t}) - w_t(L_{1t} + L_{2t})$$

onde K_{it} é o estoque de capital alocado no i -ésimo setor, L_{it} é o estoque de trabalho alocado no i -ésimo setor, F_i é a função de produção da firma do i -ésimo setor, A_{it} é a Produtividade Total dos Fatores (PTF) do i -ésimo setor e p_t é o preço do bem doméstico em unidades do bem comercializável. Suponho funções de produção do tipo *Cobb-Douglas*:

$$Y_{it} = F_{it}(K_{it}, A_{it} L_{it}) = K_{it}^{\alpha_i} (A_{it} L_{it})^{1-\alpha_i}, \quad i \in \{1, 2\} \quad (1)$$

Note que a função objetivo do problema das firmas pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & p_t F_1(K_{1t}, A_{1t} L_{1t}) + F_2(K_{2t}, A_{2t} L_{2t}) - r_t(K_{1t} + K_{2t}) - w_t(L_{1t} + L_{2t}) \\ &= p_t K_{1t}^{\alpha_1} (A_{1t} L_{1t})^{1-\alpha_1} + K_{2t}^{\alpha_2} (A_{2t} L_{2t})^{1-\alpha_2} - r_t(K_{1t} + K_{2t}) - w_t(L_{1t} + L_{2t}) \\ &= p_t A_{1t} L_{1t} k_{1t}^{\alpha_1} + A_{2t} L_{2t} k_{2t}^{\alpha_2} - r_t(K_{1t} + K_{2t}) - w_t(L_{1t} + L_{2t}) \\ &= A_{1t} L_t \left[p_t \frac{L_{1t}}{L_t} k_{1t}^{\alpha_1} + \frac{A_{2t}}{A_{1t}} \frac{L_{2t}}{L_t} k_{2t}^{\alpha_2} - r_t \left(\frac{L_{1t}}{L_t} \frac{K_{1t}}{A_{1t} L_{1t}} + \frac{A_{2t}}{A_{1t}} \frac{L_{2t}}{L_t} \frac{K_{2t}}{A_{2t} L_{2t}} \right) - \frac{w_t}{A_{1t}} \left(\frac{L_{1t}}{L_t} + \frac{L_{2t}}{L_t} \right) \right] \\ &= A_{1t} L_t \left[p_t l_{1t} f_1(k_{1t}) + a l_{2t} f_2(k_{2t}) - r_t(l_{1t} k_{1t} + a l_{2t} k_{2t}) - w_t \frac{1}{A_{1t}} (l_{1t} + l_{2t}) \right] \end{aligned}$$

onde $a = \frac{A_{2t}}{A_{1t}}$ é a razão entre as produtividades totais dos fatores entre os 2 setores, L_t é a população, $k_{it} = \frac{K_{it}}{A_{it} L_{it}}$ é o estoque de capital por trabalhador efetivo alocado no i -ésimo setor,

$l_{it} = \frac{L_{it}}{L_t}$ é a proporção da população alocada no i -ésimo setor e $f_i = k_{it}^{\alpha_i}$ é o produto por trabalhador efetivo do i -ésimo setor⁹.

Vale notar que a existência de progresso tecnológico faz com que o salário real da economia cresça de forma não-estacionária¹⁰. Buscando simplificar a notação e evitar a utilização do termo $\frac{1}{A_{1t}}$ no problema normalizado, defino

$$\omega_t = w_t \frac{1}{A_{1t}} \quad (2)$$

permitindo, assim, que o equilíbrio da economia seja descrito por um sistema de equações diferenciais autônomo. Além disso, como a taxa de progresso tecnológico é a mesma nos dois setores, torna-se desnecessário indexar o termo de produtividade total dos fatores, de modo que adoto $A_{1t} = A_t$ e $A_{2t} = aA_t$. Logo, o problema do planejador pode ser reescrito como

$$\max_{\{k_{1t}, k_{2t}, l_{1t}, l_{2t}\}} A_t L_t \{p_t l_{1t} f_1(k_{1t}) + a l_{2t} f_2(k_{2t}) - r_t (l_{1t} k_{1t} + a l_{2t} k_{2t}) - \omega_t (l_{1t} + l_{2t})\}$$

As condições de factibilidade nos mercados de fatores são

$$K_t = K_{1t} + K_{2t} \quad \text{ou} \quad k_t = l_{1t} k_{1t} + a l_{2t} k_{2t} \quad (3)$$

$$L_t = L_{1t} + L_{2t} \quad \text{ou} \quad l_{1t} + l_{2t} = 1 \quad (4)$$

onde $k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$ é o estoque de capital por trabalhador efetivo agregado da economia. Podemos então expressar l_{it} em função de k_{it} , k_{jt} e k_t . Em forma matricial temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k_{1t} & a k_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1t} \\ l_{2t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} l_{1t} \\ l_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{a k_{2t} - k_{1t}} \begin{bmatrix} a k_{2t} & -1 \\ -k_{1t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \end{bmatrix} \\ \Rightarrow l_{1t} &= \frac{a k_{2t} - k_t}{a k_{2t} - k_{1t}} \quad e \quad l_{2t} = \frac{k_t - k_{1t}}{a k_{2t} - k_{1t}} \end{aligned} \quad (5)$$

As condições de primeira ordem do problema são:

$$\begin{aligned} [k_{1t}] : \quad & A_t L_t \{p_t l_{1t} f'_1(k_{1t}) - r_t l_{1t}\} = 0 \\ \Rightarrow r_t &= p_t f'_1(k_{1t}) = p_t \alpha_1 k_{1t}^{\alpha_1 - 1} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [k_{2t}] : \quad & A_t L_t \{a l_{2t} f'_2(k_{2t}) - r_t a l_{2t}\} = 0 \\ \Rightarrow r_t &= f'_2(k_{2t}) = \alpha_2 k_{2t}^{\alpha_2 - 1} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} [l_{1t}] : \quad & A_t L_t \{p_t f_1(k_{1t}) - r_t k_{1t} - \omega_t\} = 0 \\ \Rightarrow \omega_t &= p_t [f_1(k_{1t}) - f'_1(k_{1t}) k_{1t}] = (1 - \alpha_1) p_t k_{1t}^{\alpha_1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [l_{2t}] : \quad & A_t L_t \{a f_2(k_{2t}) - r_t a k_{2t} - \omega_t\} = 0 \\ \Rightarrow \omega_t &= a [f_2(k_{2t}) - f'_2(k_{2t}) k_{2t}] = (1 - \alpha_2) a k_{2t}^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (9)$$

Repare que, em equilíbrio, os produtos marginais dos fatores serão os mesmos nos dois setores, o que decorre da hipótese de livre mobilidade intersetorial. Defino a variável $\bar{\omega}$ como a razão entre as remunerações dos fatores

⁹A normalização das variáveis para *unidades eficientes* está sendo feita utilizando o termo de PTF do setor 1. No entanto, repare que, como o progresso tecnológico nos 2 setores é igual, esta escolha é arbitrária.

¹⁰Daí a necessidade de se multiplicar o salário real pelo termo $\frac{1}{A_{1t}}$ no problema normalizado *por trabalhador efetivo*.

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_t &:= \frac{\omega_t}{r_t} = \frac{f_1(k_{1t})}{f'_1(k_{1t})} - k_{1t} = a \left[\frac{f_2(k_{2t})}{f'_2(k_{2t})} - k_{2t} \right] \\
\Rightarrow \bar{\omega}_t &= \frac{k_{1t}^{\alpha_1}}{\alpha_1 k_{1t}^{\alpha_1-1}} - k_{1t} = a \left[\frac{k_{2t}^{\alpha_2}}{\alpha_2 k_{2t}^{\alpha_2-1}} - k_{2t} \right] \\
\Rightarrow \bar{\omega}_t &= k_{1t} \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1 \right) = a k_{2t} \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Defino

$$\eta_i \equiv \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}, \quad i \in \{1, 2\} \quad (10)$$

Então temos:

$$\Rightarrow k_{1t} = \eta_1 \bar{\omega}_t \quad e \quad k_{2t} = \frac{1}{a} \eta_2 \bar{\omega}_t \quad (11)$$

Isto é, a razão capital / trabalho em cada setor será tanto maior quanto maior for o preço do trabalho relativamente ao preço do capital. Este preço relativo, por sua vez, se relaciona com a taxa de câmbio, o que pode ser visto através de (8) e (9), donde temos:

$$\begin{aligned}
\frac{p_t f_1(k_{1t})}{a f_2(k_{2t})} &= \frac{\omega_t + p_t f'_1(k_{1t}) k_{1t}}{\omega_t + a f'_2(k_{2t}) k_{2t}} \\
\Rightarrow p_t &= \frac{\omega_t + r_t k_{1t}}{f_1(k_{1t})} \frac{a f_2(k_{2t})}{\omega_t + a r_t k_{2t}} \\
\Rightarrow p_t &= \frac{\bar{\omega}_t + k_{1t}}{f_1(k_{1t})} \frac{a f_2(k_{2t})}{\bar{\omega}_t + a k_{2t}} \\
\Rightarrow p_t &= \frac{\bar{\omega}_t + k_{1t}}{k_{1t}^{\alpha_1}} \frac{a k_{2t}^{\alpha_2}}{\bar{\omega}_t + a k_{2t}} \\
\Rightarrow p_t &= \frac{\bar{\omega}_t + \eta_1 \bar{\omega}_t}{(\eta_1 \bar{\omega}_t)^{\alpha_1}} \frac{a (\frac{1}{a} \eta_2 \bar{\omega}_t)^{\alpha_2}}{\bar{\omega}_t + \eta_2 \bar{\omega}_t} \\
\Rightarrow p_t &= a^{1-\alpha_2} \frac{1 + \eta_1}{1 + \eta_2} \frac{\eta_2^{\alpha_2}}{\eta_1^{\alpha_1}} \bar{\omega}_t^{\alpha_2-\alpha_1}
\end{aligned}$$

Defino

$$\Omega_i \equiv \frac{(1 + \eta_i)}{\eta_i^{\alpha_i}} \quad (12)$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
p_t &= a^{1-\alpha_2} \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \bar{\omega}_t^{\alpha_2-\alpha_1} \\
\Rightarrow \bar{\omega}_t^{\alpha_2-\alpha_1} &= a^{\alpha_2-1} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \\
\Rightarrow \bar{\omega}_t &= a^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}
\end{aligned}$$

Defino

$$a_1 \equiv a^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \quad (13)$$

Então temos

$$\bar{\omega}_t = a_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} \quad (14)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} > 0 \Leftrightarrow \alpha_2 > \alpha_1 \quad (15)$$

Ou seja, supondo que o setor 1 é trabalho-intensivo (isto é, $\alpha_2 > \alpha_1$ e $\eta_2 > \eta_1$), um aumento do preço relativo do bem doméstico induzirá um encarecimento relativo do fator trabalho, conforme previsto pelo *Teorema de Stolper-Samuelson*¹¹. A intuição é a seguinte: uma mudança no preço relativo dos bens finais induzirá uma mudança na demanda relativa dos bens finais, e, portanto, nas demandas relativas dos fatores de produção, dada a diferença na intensidade no uso dos fatores entre os setores. Como, num dado instante, a oferta agregada de fatores está fixa, esta mudança nas demandas relativas induz uma alteração na remuneração relativa dos fatores. Isto é, um aumento de p_t elevará a oferta relativa do bem doméstico, estimulando assim a demanda relativa por trabalho e, portanto, aumentando o preço do trabalho relativamente ao preço do capital.

Levando (14) em (11) obtemos:

$$k_{1t} = a_1 \eta_1 \left[\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right]^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} \quad (16)$$

$$k_{2t} = \frac{a_1}{a} \eta_2 \left[\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right]^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \frac{k_2^{ss}}{k_1^{ss}} = \frac{1}{a} \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (18)$$

Podemos expressar o produto por trabalhador efetivo em função da taxa de câmbio e da relação capital/produto. Note que:

$$\begin{aligned} Y_{it} &\equiv K_{it}^{\alpha_i} (A_{it} L_{it})^{1-\alpha_i} = A_{it} L_{it} k_{it}^{\alpha_i}, \quad i \in \{1, 2\} \\ \Rightarrow y_{1t} &\equiv \frac{Y_{1t}}{A_t L_t} = l_{1t} k_1^{\alpha_1} \quad e \quad y_{2t} \equiv \frac{Y_{2t}}{A_t L_t} = a l_{2t} k_2^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (19)$$

Então, utilizando (5), temos

$$y_{1t}(p_t, k_t) = \frac{a k_{2t} - k_t}{a k_{2t} - k_{1t}} k_1 [\bar{\omega}(p_t)]^{\alpha_1} \quad (20)$$

$$\Rightarrow y_{1t}(p_t, k_t) = \frac{\eta_2 \bar{\omega}_t - k_t}{\eta_2 \bar{\omega}_t - \eta_1 \bar{\omega}_t} [\eta_1 \bar{\omega}_t(p_t)]^{\alpha_1}$$

$$\Rightarrow y_{1t}(p_t, k_t) = \frac{\eta_2 \bar{\omega}_t - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \bar{\omega}_t(p_t)^{\alpha_1-1}$$

$$\Rightarrow y_{1t}(p_t, k_t) = a_1^{\alpha_1-1} \frac{a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \quad (21)$$

¹¹Stolper e Samuelson (1941).

Similarmente, temos a seguinte expressão para o setor de bens comercializáveis:

$$y_{2t}(p_t, k_t) = a \frac{k_t - k_{1t}}{ak_{2t} - k_{1t}} k_2 [\bar{\omega}(p_t)]^{\alpha_2} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_{2t}(p_t, k_t) &= a \frac{k_t - \eta_1 \bar{\omega}_t}{\eta_2 \bar{\omega}_t - \eta_1 \bar{\omega}_t} \left[\frac{1}{a} \eta_2 \bar{\omega}_t(p_t) \right]^{\alpha_2} \\ \Rightarrow y_{2t}(p_t, k_t) &= a^{1-\alpha_2} \frac{k_t - \eta_1 \bar{\omega}_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \bar{\omega}_t(p_t)^{\alpha_2-1} \\ \Rightarrow y_{2t}(p_t, k_t) &= a^{1-\alpha_2} a^{\frac{(\alpha_2-1)^2}{\alpha_2-\alpha_1}} \frac{k_t - a^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\ \Rightarrow y_{2t}(p_t, k_t) &= a_1^{\alpha_1-1} \frac{k_t - a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \end{aligned} \quad (23)$$

Repare que as equações (20) e (22) implicam que

$$\left. \frac{\partial y_1}{\partial k} \right|_p \geq 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \geq \alpha_2 \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial y_2}{\partial k} \right|_p \geq 0 \Leftrightarrow \alpha_2 \geq \alpha_1 \quad (25)$$

conforme previsto pelo *Teorema de Rybczynski-Samuelson*¹². Ou seja, se o setor de bens comercializáveis for o setor capital-intensivo, então, para um dado preço relativo do bem doméstico, um aumento da razão capital / trabalho na economia induz uma realocação de fatores que atua na direção de aumentar a participação deste setor na *quantidade* total produzida (o que não necessariamente implica um aumento da participação deste setor no *valor* da produção agregada).

Finalmente, repare que o produto agregado pode ser expresso como

$$\begin{aligned} Y_t &= p_t Y_{1t} + Y_{2t} \\ \Rightarrow y_t &\equiv \frac{Y_t}{A_t L_t} = p_t y_{1t} + y_{2t} \\ \Rightarrow y_t &= p_t l_{1t} k_{1t}^{\alpha_1} + a l_{2t} k_{2t}^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (26)$$

e os produtos setoriais podem ser expressos como

$$y_{1t}(p_t, k_t) = W_1(p_t) - Z_1(p_t) k_t \quad (27)$$

$$y_{2t}(p_t, k_t) = Z_2(p_t) k_t - W_2(p_t) \quad (28)$$

onde

¹²Rybczynski (1955).

$$Z_1(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \quad (29)$$

$$W_1(p) \equiv a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_1(p) \quad (30)$$

$$Z_2(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \quad (31)$$

$$W_2(p) \equiv a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_2(p) \quad (32)$$

2.3 Problema do Agente Representativo

2.3.1 Formulação do problema

O agente representativo, além de alugar capital às firmas e ofertar sua força de trabalho, é responsável pelas 2 decisões intertemporais nesta economia: poupança e investimento. Como estamos trabalhando com uma economia aberta, poupança e investimento não serão necessariamente iguais. A seguir apresentamos o problema de otimização dinâmica resolvido pelo agente representativo:

$$\begin{aligned} & \max \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u[C(c_{1t}, c_{2t})] dt \\ & s.t. \begin{cases} \dot{k}_t = i_t - \delta^{EF} k_t \\ \dot{b}_t = R^* b_t + p_t c_{1t} + a c_{2t} + i_t + p_t (i_t - \delta^{EF} k_t) T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - \omega_t - r_t k_t \\ u[C(c_{1t}, c_{2t})] = \frac{C(c_{1t}, c_{2t})^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma} \\ C(c_{1t}, c_{2t}) = \left[\gamma (A_t c_{1t})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) (a A_t c_{2t})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\ b_0, k_0 \text{ dados} \end{cases} \end{aligned}$$

onde $R^* = r^* - g - n$ ¹³, $i_t = \frac{I_t}{A_t L_t}$ é o investimento por trabalhador efetivo, $b_t = \frac{B_t}{A_t L_t}$ é a dívida externa por trabalhador efetivo, $c_{1t} = \frac{C_{1t}}{A_t L_t}$ é o consumo por trabalhador efetivo do bem doméstico, $c_{2t} = \frac{C_{2t}}{a A_t L_t}$ é o consumo por trabalhador efetivo do bem comercializável, I_t é o investimento agregado, B_t é a dívida externa total, C_{1t} é o consumo agregado do bem doméstico e C_{2t} é o consumo agregado do bem comercializável¹⁴.

Então, o problema do agente representativo é maximizar o somatório de suas utilidades futuras descontadas à taxa ρ . O crescimento populacional também é levado em conta, com o peso de cada geração sendo proporcional a seu tamanho. A função utilidade é uma CRRA, onde σ é a elasticidade de substituição intertemporal e $C(c_{1t}, c_{2t})$ é um índice que depende do consumo de cada um dos bens através de uma função que apresenta elasticidade de substituição constante entre os bens, igual a ε . A maximização é sujeita a 2 restrições: a lei de movimento do capital, que descreve a variação do estoque de capital como o excesso de investimento sobre

¹³A dívida externa é remunerada à taxa de juros internacional r^* . O termo R^* surge no procedimento de normalização do modelo, onde todas as variáveis são divididas por $A_t L_t$.

¹⁴Note que, mais uma vez, todas as variáveis agregadas estão sendo normalizadas através do termo de PTF do setor 1, $A_{1t} \equiv A_t$. Conforme já foi explicado, esta escolha é arbitrária, dada a hipótese de progresso tecnológico homogêneo entre os setores. Este procedimento é necessário para que o sistema dinâmico resultante seja composto por equações diferenciais autônomas.

a depreciação do capital¹⁵, e a restrição orçamentária intertemporal, que descreve a variação da dívida externa como o excesso de absorção interna sobre o produto nacional bruto.

A função $T(\cdot)$ representa o custo de instalação do capital em unidades do bem doméstico, que depende da taxa de variação do estoque de capital. Para se instalar i_t de unidades de capital, incorre-se num custo de instalação igual a $\dot{k}_t T\left(\frac{\dot{k}_t}{k_t}\right)$ unidades do bem doméstico¹⁶. Repare que, se definirmos $x_t \equiv \frac{\dot{k}_t}{k_t}$, então o custo de instalação pode ser expresso como

$$CI_t = k_t x_t T(x_t) \quad (33)$$

Supõe-se que

$$\frac{dCI_t}{dx} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \quad (34)$$

e

$$\frac{d^2 CI_t}{dx^2} > 0 \quad (35)$$

2.3.2 Condições de otimalidade

Montando a função auxiliar de Hamilton em valor presente:

$$\begin{aligned} H_t = & e^{-(\rho-n)t} \{u[C(c_{1t}, c_{2t})] \\ & - \lambda_t \left[R^* b_t + p_t c_{1t} + a c_{2t} + i_t + p_t (i_t - \delta^{EF} k_t) T\left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right) - \omega_t - r_t k_t \right] \\ & + \lambda_t q_t (i_t - \delta^{EF} k_t) \} \end{aligned} \quad (36)$$

Var. de estado: k_t, b_t .

Var. de controle: c_{1t}, c_{2t}, i_t .

Var. de coestado: $-\lambda_t, \lambda_t q_t$.

Repare que $-\lambda_t$ é o preço-sombra corrente da dívida externa, de modo que λ_t é o preço-sombra do bem comercializável. O preço-sombra do capital instalado é $\lambda_t q_t$, de modo que q_t é o preço relativo do capital em unidades do bem comercializável.

Aplicando o Princípio do Máximo obtemos as seguintes condições necessárias para a trajetória ótima:

¹⁵Isto é, $\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$. Normalizando para unidades de trabalhador efetivo, ficamos com $\frac{\dot{K}_t}{A_t L_t} = \frac{I_t}{A_t L_t} - \delta \frac{K_t}{A_t L_t}$ ou $\dot{k}_t = i_t - \delta^{EF} k_t$, onde $\delta^{EF} = \delta + g + n$.

¹⁶Ver Hayashi (1982) e Pessoa (1999).

$$\begin{aligned}
[c_{1t}] : \quad & H_{c_1} = 0 \\
& \Rightarrow u_{c_{1t}}[C(c_{1t}, c_{2t})] = \lambda_t p_t \\
& \Rightarrow C(c_{1t}, c_{2t})^{-1/\sigma} C(c_{1t}, c_{2t})^{1/\varepsilon} \gamma A_{1t} (A_{1t} c_{1t})^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda_t p_t
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
[c_{2t}] : \quad & H_{c_2} = 0 \\
& \Rightarrow u_{c_{2t}}[C(c_{1t}, c_{2t})] = a \lambda_t \\
& \Rightarrow C(c_{1t}, c_{2t})^{-1/\sigma} C(c_{1t}, c_{2t})^{1/\varepsilon} (1 - \gamma) a A_{1t} (a A_{1t} c_{2t})^{-\frac{1}{\varepsilon}} = a \lambda_t
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
[i_t] : \quad & H_i = 0 \\
& \Rightarrow e^{-(\rho-n)t} \left\{ -\lambda_t \left[1 + p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) + p_t \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \right] + \lambda_t q_t \right\} = 0 \\
& \Rightarrow 1 + p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) + p_t \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) = q_t
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
[b_t] : \quad & H_b = -\frac{d}{dt} \left[-e^{-(\rho-n)t} \lambda_t \right] \\
& \Rightarrow -e^{-(\rho-n)t} \dot{\lambda}_t R^* = -(\rho - n) e^{-(\rho-n)t} \lambda_t + e^{-(\rho-n)t} \dot{\lambda}_t \\
& \Rightarrow -(r^* - g - n) = -(\rho - n) + \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \\
& \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \rho + g - r^*
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
[k_t] : \quad & H_k = -\frac{d}{dt} \left[e^{-(\rho-n)t} \lambda_t q_t \right] \\
& \Rightarrow -e^{-(\rho-n)t} \lambda_t \left\{ -\delta^{EF} p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) + p_t (i_t - \delta^{EF} k_t) T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \right. \\
& \quad \left. \left[\frac{-\delta^{EF} k_t - (i_t - \delta^{EF} k_t)}{k_t^2} \right] - r_t + q_t \delta^{EF} \right\} = -[(\rho - n) e^{-(\rho-n)t} \lambda_t q_t + e^{-(\rho-n)t} (\dot{\lambda}_t q_t + \lambda_t \dot{q}_t)] \\
& \Rightarrow -\delta^{EF} p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) + p_t (i_t - \delta^{EF} k_t) T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \left[\frac{-\delta^{EF} k_t - (i_t - \delta^{EF} k_t)}{k_t^2} \right] \\
& \quad - r_t + q_t \delta^{EF} = -(\rho - n) q_t + \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} q_t + \dot{q}_t \\
& \Rightarrow -\delta^{EF} p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - \delta^{EF} p_t \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \\
& \quad - p_t \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right)^2 T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - r_t + q_t \delta^{EF} = -(\rho - n) q_t + (\rho + g - r^*) q_t + \dot{q}_t \\
& \Rightarrow -\delta^{EF} (q_t - 1) - p_t \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right)^2 T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - r_t + q_t \delta^{EF} = (g + n - r^*) q_t + \dot{q}_t \\
& \Rightarrow \dot{q}_t = R^* q_t + \delta^{EF} - \left[r_t + p_t \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right)^2 T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \right]
\end{aligned} \tag{41}$$

As equações (37) e (38) afirmam apenas que, ao longo da trajetória ótima, a utilidade marginal e o preço-sombra do consumo devem ser iguais. A equação (39) estabelece a relação entre a taxa de variação do estoque de capital e o preço-sombra do capital. A equação (40) determina a taxa de variação da utilidade marginal do consumo. A equação (41) estabelece a taxa de variação do preço-sombra do capital em função do seu nível, da produtividade marginal

do capital e da variação marginal do custo de instalação do capital. Repare que, dada a hipótese de que o custo de instalação se dá em bens domésticos, a dinâmica de q_t , e portanto de k_t , dependerá da taxa de câmbio.

Finalmente, temos ainda que impor a condição de transversalidade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho-n)t} q_t k_t = 0 \quad (42)$$

2.3.3 Dinâmica do capital

A partir da CPO para i_t podemos definir a função $\phi(p, q)$, com $\phi_q(p, q) > 0$ e $\phi(p, 1) = 0 \quad \forall p$ tal que $\dot{k}_t = i_t - \delta^{EF} k_t = k_t \phi(p_t, q_t)$ ¹⁷. Então podemos reescrever a equação (41) da seguinte maneira:

$$\dot{q}_t = R^* q_t + \delta^{EF} - [r_t + p_t \phi(p_t, q_t)^2 T'(\phi(p_t, q_t))] \quad (43)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{q}_t}{q_t} + \frac{r_t + p_t \phi(p_t, q_t)^2 T'(\phi(p_t, q_t)) - \delta^{EF}}{q_t} = R^* \quad (44)$$

A equação (44) possui uma interpretação clássica, segundo a qual o retorno total proporcionado pelo capital, igual à sua apreciação somada à taxa líquida de lucro, deve ser igual à taxa de juros internacional, por um argumento de não-arbitragem.

Temos então um sistema dinâmico caracterizado pela equação (43) e pela lei de movimento do capital. Vamos trabalhar com a seguinte forma funcional para o custo de instalação do capital¹⁸:

$$T\left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right) = \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi \quad (45)$$

onde b e ξ são parâmetros a serem calibrados. Então a equação (39) se torna:

$$\begin{aligned} q_t &= 1 + p_t \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi + \xi p_t \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^{\xi-1} \\ \Rightarrow q_t &= 1 + p_t \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi + \xi p_t \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi \\ \Rightarrow q_t - 1 &= p_t \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi (1 + \xi) \\ \Rightarrow \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi &= \frac{q_t - 1}{b p_t} \\ \Rightarrow \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} &= \left(\frac{q_t - 1}{b p_t}\right)^{1/\xi} = \phi(p_t, q_t) \end{aligned} \quad (46)$$

Então a equação (43) se torna:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{q}_t &= R^* q_t + \delta^{EF} - \left[r_t + p_t \left(\frac{q_t - 1}{b p_t}\right)^{2/\xi} b \frac{\xi}{1 + \xi} \left(\frac{q_t - 1}{b p_t}\right)^{\xi-1} \right] \\ \Rightarrow \dot{q}_t &= R^* q_t + \delta^{EF} - \left[r_t + b \frac{\xi}{1 + \xi} p_t \left(\frac{q_t - 1}{b p_t}\right)^{(\xi+1)/\xi} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

¹⁷Ver, por exemplo, Blanchard e Fischer (1989), capítulo 2.

¹⁸Seguindo Duczynski (2002). O parâmetro b nos permite calibrar o nível do custo de instalação, ao passo que o parâmetro ξ nos permite calibrar seu grau de convexidade.

Utilizando a equação (46) para reescrever a lei de movimento do capital, obtemos

$$\dot{k}_t = \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} k_t \quad (48)$$

Note-se que o investimento pode ser expresso conforme abaixo

$$\begin{aligned} i_t &= [\phi(p_t, q_t) + \delta^{EF}] k_t \\ \Rightarrow i_t &= \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} \right] k_t \end{aligned} \quad (49)$$

Finalmente, integrando (47) entre $[t, \infty)$ obtemos

$$q_t = \int_t^\infty e^{-R^*(t'-t)} \left[r_{t'} - \delta^{EF} + b \frac{\xi}{1+\xi} p_{t'} \left(\frac{q_{t'} - 1}{bp_{t'}} \right)^{(\xi+1)/\xi} \right] dt' \quad (50)$$

Isto é, o preço-sombra do capital deve equivaler ao valor presente líquido do fluxo de rendimentos futuros gerados por cada unidade adicional de capital, incluindo-se entre os rendimentos a redução do custo de instalação do capital.

Observando (48), e lembrando que $\xi > 1$, temos que \dot{k}_t só está definida para $q \geq 1$, caso contrário obteríamos uma raiz de um número negativo. Portanto, o modelo só trabalha com $\dot{k}_t \geq 0$. Conforme será visto na *seção 2.7*, teremos $q^{ss} = 1$. Logo, dada a concavidade das funções de produção, deve ficar claro de (47) que $\dot{q} \leq 0$ e $q_t \downarrow q^{ss}$ ao longo da dinâmica de transição, para valores razoáveis de parâmetros.

2.3.4 Consumo

Multiplicando equação (37) por c_1 , a equação (38) por c_2 , e somando as duas obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_t(p_t c_{1t} + a c_{2t}) &= C(c_{1t}, c_{2t})^{-1/\sigma} C(c_{1t}, c_{2t})^{\frac{1}{\varepsilon}} \left[\gamma (A_t c_{1t})^{1-\frac{1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) (a A_t c_{2t})^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right] \\ \Rightarrow \lambda_t(p_t c_{1t} + a c_{2t}) &= C(c_{1t}, c_{2t})^{-1/\sigma} C(c_{1t}, c_{2t})^{\frac{1}{\varepsilon}} C(c_{1t}, c_{2t})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \\ \Rightarrow \lambda_t(p_t c_{1t} + a c_{2t}) &= C(c_{1t}, c_{2t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \end{aligned} \quad (51)$$

Defino o dispêndio com consumo em unidades do bem comercializável:

$$D_t \equiv p_t c_{1t} + a c_{2t} \quad (52)$$

Então temos:

$$C(c_{1t}, c_{2t}) = (\lambda_t D_t)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (53)$$

Agora dividindo as equações (37) e (38) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{(1-\gamma)} \left[\frac{c_{1t}}{a c_{2t}} \right]^{-\frac{1}{\varepsilon}} &= p_t \\ \Rightarrow c_{1t} &= a c_{2t} \left[\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right]^{-\varepsilon} \end{aligned} \quad (54)$$

Utilizando a equação (54) podemos reescrever $C(c_{1t}, c_{2t})$ como

$$\begin{aligned}
C(c_{1t}, c_{2t}) &= \left[\gamma \left[aA_t c_{2t} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right)^{-\varepsilon} \right]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)(aA_t c_{2t})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow C(c_{1t}, c_{2t}) &= aA_t c_{2t} \left[\gamma \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right)^{-\varepsilon} \right]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow C(c_{1t}, c_{2t}) &= aA_t c_{2t} [\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}
\end{aligned} \tag{55}$$

Combinando as equações (51) e (55) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_t D_t &= (aA_t c_{2t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} [\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + 1-\gamma]^{\frac{\varepsilon(\sigma-1)}{\sigma(\varepsilon-1)}} \\
\Rightarrow c_{2t} &= \frac{(\lambda_t D_t)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{aA_t [\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + 1-\gamma]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} \\
\Rightarrow c_{1t} &= \frac{(\lambda_t D_t)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{A_t [\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + 1-\gamma]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} \left[\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right]^{-\varepsilon}
\end{aligned} \tag{56}$$

Alternativamente, podemos combinar as equações (51), (54) e (55):

$$\begin{aligned}
\lambda_t \left[p_t a c_{2t} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right)^{-\varepsilon} + a c_{2t} \right] &= (aA_t c_{2t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} [\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + 1-\gamma]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
\Rightarrow \lambda_t a c_{2t} \left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + 1 \right] &= (aA_t c_{2t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} [\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + 1-\gamma]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
\Rightarrow c_{2t}^{\frac{1}{\sigma}} &= a^{-\frac{1}{\sigma}} \frac{1}{\lambda_t} A_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \frac{[\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + 1-\gamma]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + 1 \right]} \\
\Rightarrow c_{2t}^{\frac{1}{\sigma}} &= a^{-\frac{1}{\sigma}} \frac{1}{\lambda_t} A_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \frac{[(1-\gamma) \left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + 1 \right]]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + 1 \right]} \\
\Rightarrow c_{2t} &= \frac{1}{a} \lambda_t^{-\sigma} A_t^{\sigma-1} (1-\gamma)^{\frac{\varepsilon(\sigma-1)}{\varepsilon-1}} \frac{\left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + 1 \right]^{\frac{\varepsilon(\sigma-1)}{\varepsilon-1}}}{\left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + 1 \right]^\sigma} \\
\Rightarrow c_{2t} &= \frac{1}{a} \lambda_t^{-\sigma} A_t^{\sigma-1} (1-\gamma)^{\frac{\varepsilon(\sigma-1)}{\varepsilon-1}} \left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + 1 \right]^{\frac{\varepsilon(\sigma-1)-\sigma(\varepsilon-1)}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow c_{2t} &= \frac{1}{a} \lambda_t^{-\sigma} A_t^{\sigma-1} (1-\gamma)^{\frac{\varepsilon(\sigma-1)}{\varepsilon-1}} \left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + 1 \right]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow c_{2t} &= \frac{1}{a} \lambda_t^{-\sigma} A_t^{\sigma-1} (1-\gamma)^{\frac{\varepsilon(\sigma-1)}{\varepsilon-1}} \left[\frac{\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon}{(1-\gamma)^\varepsilon} \right]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow c_{2t} &= \frac{1}{a} \lambda_t^{-\sigma} A_t^{\sigma-1} (1-\gamma)^{\frac{\varepsilon(\sigma-1)}{\varepsilon-1}} (1-\gamma)^{-\varepsilon \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow c_{2t} &= \frac{1}{a} \lambda_t^{-\sigma} A_t^{\sigma-1} (1-\gamma)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}}
\end{aligned} \tag{57}$$

Note que em (57) c_{2t} depende do tempo, uma vez que $A_t = A_0 e^{gt}$, o que não é desejável, uma vez que se espera que as expressões para as variáveis normalizadas sejam autônomas. Vamos utilizar as equações (38) e (55) para encontrar uma expressão para a taxa de variação relativa de λ_t :

$$\begin{aligned}
a\lambda_t &= (1-\gamma)(aA_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} C(c_{1t}, c_{2t})^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} c_{2t}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\
\Rightarrow a\lambda_t &= (1-\gamma)(aA_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} (aA_t)^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} c_{2t}^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} \left[\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} c_{2t}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\
\Rightarrow a\lambda_t &= (1-\gamma)(aA_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} c_{2t}^{-\frac{1}{\sigma}} \left[\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma) \right]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)}} \\
\Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{\dot{A}_t}{A_t} - \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} + \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)} \frac{d}{dt} \ln \left[\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma) \right] \\
\Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{\sigma-1}{\sigma} g - \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} + \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t
\end{aligned} \tag{58}$$

onde

$$h(p_t) = \gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma) \tag{59}$$

Combinando (58) com (40) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{\sigma-1}{\sigma} g - \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} + \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t = g + \rho - r^* \\
\Rightarrow -\frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} + \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t &= \frac{1}{\sigma} g + \rho - r^*
\end{aligned} \tag{60}$$

Note que, se (60) vale todo instante t , vale, em particular, no estado estacionário. Avaliando (60) no estado estacionário obtemos

$$0 = \frac{1}{\sigma} g + \rho - r^* \tag{61}$$

$$\Rightarrow r^* = \rho + \frac{1}{\sigma} g \tag{62}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} = \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t \quad \forall t \tag{63}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{\sigma-1}{\sigma} g \quad \forall t \tag{64}$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \lambda_0 e^{\frac{\sigma-1}{\sigma} gt} \tag{65}$$

No *Anexo 5.1* mostramos que a expressão (61) é uma condição necessária para que o resto do mundo, visto como uma economia fechada, tenha um estado estacionário bem definido.

Utilizando (64) e $A_t = A_0 e^{gt}$ podemos reescrever a equação (57) como:

$$\begin{aligned}
c_{2t} &= \frac{1}{a} [\lambda_0 e^{\frac{\sigma-1}{\sigma} gt}]^{-\sigma} [A_0 e^{gt}]^{\sigma-1} (1-\gamma)^\varepsilon \left[\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma) \right]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow c_{2t} &= \frac{1}{a} \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1-\gamma)^\varepsilon \left[\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma) \right]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}}
\end{aligned} \tag{66}$$

Repare que (66) independe do tempo. Então, utilizando a equação (54), temos:

$$\begin{aligned}
c_{1t} &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1-\gamma)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \left[\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right]^{-\varepsilon} \\
\Rightarrow c_{1t} &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}
\end{aligned} \tag{67}$$

Definindo

$$j_1(p_t) \equiv [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \tag{68}$$

$$j_2(p_t) \equiv [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1} \tag{69}$$

temos

$$c_{1t} = \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \tag{70}$$

$$ac_{2t} = \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \tag{71}$$

$$D_t \equiv p_t c_{1t} + ac_{2t}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow D_t &= p_t \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) + \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \\
\Rightarrow D_t &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} j_1(p_t) \left[p_t \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon + (1-\gamma)^\varepsilon \right] \\
\Rightarrow D_t &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1} \\
\Rightarrow D_t &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} j_2(p_t)
\end{aligned} \tag{72}$$

Note que, pelas equações (71) e (70), o consumo de cada um dos bens pode ser expresso como função apenas da taxa de câmbio e de λ_0 . Valores mais altos de λ_0 estão associados a uma maior utilidade marginal do consumo e, portanto, a níveis de consumo menores. Portanto, λ_0 pode ser visto como um índice de renda permanente. Note também que tanto c_1 quanto c_2 possuem valores de estado estacionário bem definidos desde que o preço relativo do bem doméstico de estado estacionário, p^{ss} , seja finito. Para um dado p^{ss} , tanto c_1^{ss} quanto c_2^{ss} são fixos, implicando que, no longo prazo, o consumo *per capita* de cada bem cresce à taxa de progresso tecnológico g .

2.4 Determinação da Taxa de Câmbio

A taxa de câmbio será determinada pela condição de factibilidade no mercado de bens domésticos, segundo a qual o consumo de bens domésticos somado aos custos de instalação do capital deve ser igual à produção de bens domésticos. Isto é:

$$c_{1t}(p_t, \lambda) + k_t \phi(q_t, p_t) T[\phi(q_t, p_t)] = y_1(p_t, k_t) \tag{73}$$

Utilizando as equações (27), (45) e (70) obtemos

$$\lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) + \frac{b}{1+\xi} k_t \left[\frac{q_t - 1}{bp_t} \right]^\frac{\xi+1}{\xi} = W_1(p_t) - Z_1(p_t) k_t \tag{74}$$

$$\Rightarrow p_t = p_t(q_t, k_t/A_0, \lambda_0) \tag{75}$$

onde

$$Z_1(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \quad (29)$$

$$W_1(p) \equiv a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_1(p) \quad (30)$$

$$j_1(p_t) \equiv [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (68)$$

No *Anexo 5.3* mostramos que

$$(243) : \quad \frac{\partial p}{\partial k} > 0$$

$$(244) : \quad \frac{\partial p}{\partial q} > 0$$

Interpretamos (243) e (244) da seguinte maneira. Um aumento na razão capital / trabalho aumenta o custo de instalação do capital e reduz a oferta do bem doméstico, tudo mais constante. Logo, para que o mercado de bens domésticos permaneça em equilíbrio, é necessário que o preço também aumente de modo a gerar redução do consumo. Já um aumento do preço-sombra do capital está associado a uma taxa de investimento maior, aumentando o custo de instalação do capital e gerando um câmbio mais apreciado de modo a viabilizar uma elevação de y_1 .

Portanto, dado que ao longo da dinâmica de transição temos $\dot{k} > 0$ e $\dot{q} < 0$, o sinal de \dot{p} é ambíguo em princípio. Entretanto, no procedimento de calibração (*Capítulo 3*) verificamos que $\dot{p} > 0$ para valores razoáveis de parâmetros. Isto é, ao longo da dinâmica de transição a taxa real de câmbio se aprecia e os serviços se tornam relativamente mais caros. Intuitivamente, é de se esperar que, se os bens são complementares (isto é, se $\varepsilon < 1$), então, ao longo do processo de acumulação capital, com a economia se tornando gradativamente mais rica, o consumo de ambos os bens se eleve de forma equilibrada. Como o bem de serviços não pode ser importado, sua produção precisaria aumentar, o que, em equilíbrio, depende de aumento de seu preço relativo.

2.5 Restrição orçamentária intertemporal

No modelo de crescimento neoclássico em economia aberta as decisões de poupança e investimento são independentes. A possibilidade de tomar recursos emprestados do resto do mundo viabiliza uma plena suavização do consumo, e as variações da dívida externa refletem o des-casamento temporal entre oferta e demanda na economia, além do próprio serviço da dívida. Reescrevendo a restrição orçamentária intertemporal temos:

$$\dot{b}_t = R^* b_t + p_t c_{1t} + a c_{2t} + i_t + p_t (i_t - \delta^{EF} k_t) T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - \omega_t - r_t k_t \quad (76)$$

Dado condições de otimalidade do problema das firmas temos

$$\begin{aligned}
(6), (7) : \quad r_t &= p_t f'_1(k_{1t}) = f'_2(k_{2t}) \\
(8), (9) : \quad \omega_t &= p_t[f_1(k_{1t}) - f'_1(k_{1t})k_{1t}] = a[f_2(k_{2t}) - f'_2(k_{2t})k_{2t}] \\
\Rightarrow \omega_t + r_t k_t &= a[f_2(k_{2t}) - f'_2(k_{2t})k_{2t}] + f'_2(k_{2t})k_t \\
\Rightarrow \omega_t + r_t k_t &= a[f_2(k_{2t}) - f'_2(k_{2t})k_{2t}](l_{1t} + l_{2t}) + f'_2(k_{2t})(l_{1t}k_{1t} + al_{2t}k_{2t}) \\
\Rightarrow \omega_t + r_t k_t &= af_2(k_{2t})l_{1t} + af_2(k_{2t})l_{2t} - af'_2(k_{2t})k_{2t}l_{1t} - af'_2(k_{2t})k_{2t}l_{2t} + f'_2(k_{2t})l_{1t}k_{1t} + af'_2(k_{2t})l_{2t}k_{2t} \\
\Rightarrow \omega_t + r_t k_t &= af_2(k_{2t})l_{1t} + af_2(k_{2t})l_{2t} - af'_2(k_{2t})k_{2t}l_{1t} + f'_2(k_{2t})l_{1t}k_{1t} \\
\Rightarrow \omega_t + r_t k_t &= af_2(k_{2t})l_{2t} + al_{1t}[f_1(k_{1t}) - f'_1(k_{1t})k_{1t}] + p_t f'_1(k_{1t})l_{1t}k_{1t} \\
\Rightarrow \omega_t + r_t k_t &= af_2(k_{2t})l_{2t} + p_t l_{1t}[f_1(k_{1t}) - f'_1(k_{1t})k_{1t}] + p_t f'_1(k_{1t})l_{1t}k_{1t} \\
\Rightarrow \omega_t + r_t k_t &= af_2(k_{2t})l_{2t} + p_t l_{1t}f_1(k_{1t}) \\
\Rightarrow \omega_t + r_t k_t &= p_t y_1(p_t, k_t) + y_2(p_t, k_t)
\end{aligned} \tag{77}$$

onde estamos utilizando (26). Levando a equação (77) na restrição orçamentária intertemporal obtemos

$$\dot{b}_t = R^* b_t + p_t c_{1t} + ac_{2t} + i_t + p_t(i_t - \delta^{EF} k_t)T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - p_t y_1(p_t, k_t) - y_2(p_t, k_t) \tag{78}$$

$$\Rightarrow \dot{b}_t = R^* b_t + ac_{2t} + i_t - y_2(p_t, k_t) \tag{79}$$

onde estamos utilizando a condição de factibilidade no mercado de bens domésticos. A equação (79) ilustra a decomposição clássica do *déficit* em conta corrente, que é igual à renda líquida enviada ao exterior somada ao hiato de recursos, que por sua vez é igual ao excesso de absorção sobre produto no setor de bens comercializáveis.

Defino a variável *transferência líquida de recursos ao exterior*:

$$tle_t \equiv y_2(p_t, k_t) - ac_{2t} - i_t \tag{80}$$

Então a equação (79) pode ser reescrita como

$$\dot{b}_t = R^* b_t - tle_t \tag{81}$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos

$$b_0 = \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} [y_2(p_t, k_t) - ac_{2t} - i_t] dt \tag{82}$$

onde estamos supondo ausência de *jogo de Ponzi*. Isto é, a dívida externa inicial deve ser igual ao valor presente líquido das transferências líquidas ao exterior futuras. A taxa de desconto deve ser modificada de modo a levar em conta o fato de estarmos trabalhando com variáveis normalizadas *por trabalhador efetivo*.

Note-se que, utilizando

$$(28) : \quad y_{2t}(p_t, k_t) = Z_2(p_t)k_t - W_2(p_t)$$

$$(49) : \quad i_t = \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} \right] k_t$$

$$(71) : \quad ac_{2t} = \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t)$$

podemos reescrever (79) da seguinte forma

$$\Rightarrow \dot{b}_t = R^* b_t + \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) + \left[\left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} - Z_2(p_t) \right] k_t + W_2(p_t) \quad (83)$$

Podemos também combinar as equações (28), (49), (71) e (82) para relacionar λ_0 com a renda permanente do agente representativo, conforme abaixo.

$$\begin{aligned} b_0 &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} [y_2(p_t, k_t) - a c_{2t} - i_t] dt \\ \Rightarrow b_0 &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} [y_2(p_t, k_t) - \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) - i_t] dt \\ \Rightarrow b_0 &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} y_2(p_t, k_t) dt - \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1 - \gamma)^\varepsilon \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} j_1(p_t) dt - \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} i_t dt \\ \Rightarrow \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1 - \gamma)^\varepsilon \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} j_1(p_t) dt &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} [y_2(p_t, k_t) - i_t] dt - b_0 \\ \Rightarrow \lambda_0^{-\sigma} &= \left[A_0^{\sigma-1} (1 - \gamma)^\varepsilon \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} j_1(p_t) dt \right]^{-1} \left\{ \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} [y_2(p_t, k_t) - i_t] dt - b_0 \right\} \\ \Rightarrow \lambda_0^{-\sigma} &= \psi_0^{-1} \left\{ \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} \left[\left(Z_2(p_t) - \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} \right) k_t - W_2(p_t) \right] dt - b_0 \right\} \end{aligned}$$

onde

$$\psi_0 \equiv \left[A_0^{\sigma-1} (1 - \gamma)^\varepsilon \int_{t=0}^{\infty} e^{-R^* t} j_1(p_t) dt \right] \quad (84)$$

Logo, temos

$$\lambda_0 \equiv \lambda_0(b_0, A_0) \quad (85)$$

$$(86)$$

e

$$\frac{\lambda_0}{b_0} > 0 \quad (87)$$

2.6 Definição do Equilíbrio

Um equilíbrio competitivo nesta economia é definido como trajetórias consumo, capital, dívida externa, alocações setoriais de fatores de produção, $\{c_{1t}, c_{2t}, k_t, b_t, k_{1t}, k_{2t}, l_{1t}, l_{2t}\}_{t \in [0, \infty)}$, e preços, $\{r_t, w_t, p_t\}_{t \in [0, \infty)}$, tais que o agente representativo maximiza sua utilidade dadas suas condições iniciais, k_0 e b_0 , e tomando como dada a trajetória de preços, $\{r_t, w_t, p_t\}_{t \in [0, \infty)}$; as firmas maximizem seus lucros tomando como dada a trajetória de preços, $\{r_t, w_t, p_t\}_{t \in [0, \infty)}$; e as condições de factibilidade sejam válidas, incluindo a igualdade entre oferta e demanda de bens não-comercializáveis em cada período e a restrição orçamentária intertemporal (isto é, o valor presente das transferências líquidas ao exterior seja igual ao valor inicial da dívida externa).

2.7 Estado estacionário e estática comparativa

Iniciamos a caracterização do estado estacionário através das condições de equilíbrio para o problema das firmas. Podemos calcular k_2^{ss} utilizando o fato de que, em estado estacionário, o produto marginal do capital no setor de bens comercializáveis líquido da depreciação deve ser igual à taxa de juros internacional:

$$\begin{aligned} f'_2(k_2^{ss}) - \delta &= r^* \Rightarrow \alpha_2(k_2^{ss})^{\alpha_2-1} - \delta = r^* \\ \Rightarrow k_2^{ss} &= \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \end{aligned} \quad (88)$$

Podemos então calcular o salário de estado estacionário através da equação (9):

$$\begin{aligned} \omega^{ss} &= a(1 - \alpha_2)(k_2^{ss})^{\alpha_2} \\ \Rightarrow \omega^{ss} &= a(1 - \alpha_2) \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} \end{aligned} \quad (89)$$

Então, com w^{ss} conhecido, podemos expressar p^{ss} em função de k_1^{ss} utilizando a equação (8):

$$\begin{aligned} w^{ss} &= (1 - \alpha_1)p^{ss}(k_1^{ss})^{\alpha_1} \\ \Rightarrow p^{ss} &= a \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} (k_1^{ss})^{-\alpha_1} \end{aligned} \quad (90)$$

Levando (90) em (6) obtemos:

$$\begin{aligned} p^{ss} f'_1(k_1^{ss}) - \delta &= r^* \\ \Rightarrow p^{ss} \alpha_1 (k_1^{ss})^{\alpha_1-1} - \delta &= r^* \\ \Rightarrow a \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} (k_1^{ss})^{-\alpha_1} \alpha_1 (k_1^{ss})^{\alpha_1-1} &= r^* + \delta \\ \Rightarrow \frac{1}{a} \frac{1}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left[\frac{\alpha_2}{r^* + \delta} \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} k_1^{ss} &= \frac{1}{r^* + \delta} \\ \Rightarrow k_1^{ss} &= a \alpha_1 \alpha_2^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left[\frac{1}{r^* + \delta} \right]^{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} \\ \Rightarrow k_1^{ss} &= a \alpha_1 \alpha_2^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left[\frac{1}{r^* + \delta} \right]^{\frac{\alpha_2-1-\alpha_2}{\alpha_2-1}} \\ \Rightarrow k_1^{ss} &= a \alpha_1 \alpha_2^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} [r^* + \delta]^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \\ \Rightarrow k_1^{ss} &= a \alpha_1 \alpha_2^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}} \frac{\alpha_2}{\alpha_2} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} [r^* + \delta]^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \\ \Rightarrow k_1^{ss} &= a \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2^{\frac{1}{1-\alpha_2}}} [r^* + \delta]^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \\ \Rightarrow k_1^{ss} &= a \frac{\eta_1}{\eta_2} \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \end{aligned} \quad (91)$$

$$\Rightarrow k_1^{ss} = a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \quad (92)$$

Levando (91) em (90) obtemos:

$$\begin{aligned}
 p^{ss} &= a \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left(\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1}} \left[a \frac{\eta_1}{\eta_2} \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}} \right]^{-\alpha_1} \\
 \Rightarrow p^{ss} &= a^{1 - \alpha_1} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - 1}} \\
 \Rightarrow p^{ss} &= a^{1 - \alpha_1} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} (k_2^{ss})^{\alpha_2 - \alpha_1}
 \end{aligned} \tag{93}$$

Agora vamos encontrar o valor de estado estacionário para o preço-sombra do investimento. Da equação que descreve a dinâmica do preço do capital (equação (47)) temos:

$$0 = R^* q^{ss} + \delta^{EF} - \left[r^{ss} + b \frac{\xi}{1 + \xi} p^{ss} \left(\frac{q^{ss} - 1}{bp^{ss}} \right)^{(\xi+1)/\xi} \right]$$

Lembrando que $r^{ss} = f'_2(k_2^{ss}) = r^* + \delta$ fica evidente que $q = 1$ constitui um ponto de repouso para o preço-sombra do capital. Observando a lei de movimento do capital, concluímos que $q = 1$ é compatível com $\dot{k} = 0$. Portanto, $q^{ss} = 1$.

Finalmente, o capital agregado por trabalhador efetivo de estado estacionário, k^{ss} , será calculado de modo que a condição de factibilidade no mercado de bens domésticos seja respeitada. Isto é, k^{ss} deve ser tal que a oferta de bens domésticos se iguale ao consumo de bens domésticos acrescido do custo de instalação do investimento, conforme previsto pela equação (74).

$$\begin{aligned}
 (73) : \quad c_1^{ss}(p^{ss}, \lambda_0) + k^{ss} \phi(q^{ss}, p^{ss}) T[\phi(q^{ss}, p^{ss})] &= y_1(p^{ss}, k^{ss}) \\
 \Rightarrow \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss}) + \frac{b}{1 + \xi} k^{ss} \left[\frac{q^{ss} - 1}{bp^{ss}} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} &= W_1(p^{ss}) - Z_1(p^{ss}) k^{ss} \\
 \Rightarrow k^{ss} \left[\frac{b}{1 + \xi} \left(\frac{q^{ss} - 1}{bp^{ss}} \right)^{\frac{\xi+1}{\xi}} + Z_1(p^{ss}) \right] &= W_1(p^{ss}) - \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss}) \\
 \Rightarrow k^{ss} &= \frac{W_1(p^{ss}) - \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss})}{Z_1(p^{ss})} \\
 \Rightarrow k^{ss} &= \frac{a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \frac{a_1^{\alpha_1 - 1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}} - \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon (p^{ss})^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma - \varepsilon}{\varepsilon - 1}}}{\frac{a_1^{\alpha_1 - 1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p^{ss} \right)^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}}} \\
 \Rightarrow k^{ss} &= \frac{a k_2^{ss} \frac{a_1^{\alpha_1 - 1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\bar{\omega}}{a_1} \right)^{\alpha_1 - 1} - c_1^{ss}}{\frac{a_1^{\alpha_1 - 1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\bar{\omega}}{a_1} \right)^{\alpha_1 - 1}} \\
 \Rightarrow k^{ss} &= \frac{a k_2^{ss} \frac{(\eta_1 \bar{\omega})^{\alpha_1}}{\eta_2 \bar{\omega} - \eta_1 \bar{\omega}} - c_1^{ss}}{\frac{(\eta_1 \bar{\omega})^{\alpha_1}}{\eta_2 \bar{\omega} - \eta_1 \bar{\omega}}} \\
 \Rightarrow k^{ss} &= a k_2^{ss} - c_1^{ss} \frac{a k_2^{ss} - k_1^{ss}}{(k_1^{ss})^{\alpha_1}}
 \end{aligned} \tag{94}$$

onde estamos utilizando as equações (11) e (14). Note que k^{ss} é condicionado pelo índice de renda permanente, λ_0 . Um choque positivo de renda permanente (isto é, uma redução de λ_0 , com consequente aumento de c_1^{ss}) eleva o consumo de longo prazo dos 2 bens e, por consequência, reduz k^{ss} . Isto ocorre porque a elevação do consumo de longo prazo do bem doméstico tem que ser acompanhada por uma elevação equivalente de sua oferta de longo prazo, o que só pode ocorrer através de um processo de desacumulação de capital, uma vez que o setor produtor de bens domésticos é trabalho-intensivo, o que pode ser visto pela (24).

$$(24) : \quad \left. \frac{\partial y_1}{\partial k} \right|_p \geq 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \geq \alpha_2$$

Repare que, pela equação (85) temos $\frac{\partial \lambda_0}{\partial b_0} > 0$, de modo que

$$\frac{\partial k^{ss}}{\partial b_0} > 0 \quad (95)$$

Ou seja, quanto mais endividada uma economia inicia a dinâmica de transição, menor será sua trajetória de consumo e maior será sua razão capital / trabalho de longo prazo, de modo a viabilizar uma transferência líquida de recursos para o exterior maior, sob a forma de exportações líquidas de bens comercializáveis.

Em caso de um choque positivo de produtividade relativa do setor de bens comercializáveis¹⁹ (elevação de a) teríamos efeito similar. Observando as equações (88), (91) e (93), temos

$$(88) : \quad k_2^{ss} = \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}} \Rightarrow \frac{\partial k_2^{ss}}{\partial a} = 0 \quad (96)$$

$$(92) : \quad k_1^{ss} = a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \Rightarrow \frac{\partial k_1^{ss}}{\partial a} > 0 \quad (97)$$

$$(93) : \quad p^{ss} = a^{1-\alpha_1} \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - 1}} \Rightarrow \frac{\partial p^{ss}}{\partial a} > 0 \quad (98)$$

Isto é, em caso de elevação da produtividade relativa do setor de bens comercializáveis, o câmbio de equilíbrio de longo prazo se aprecia e a razão capital / produto de longo prazo no setor de serviços se eleva. Já a razão capital / produto no setor de bens comercializáveis se mantém a mesma, dado que ela está determinada pela condição de não-arbitragem de taxas de juros entre a economia doméstica e o resto do mundo.

No caso da razão / capital produto agregada de longo prazo temos

$$\begin{aligned} (94) : \quad k^{ss} &= ak_2^{ss} - ak_2^{ss} \frac{c_1^{ss}}{(k_1^{ss})^{\alpha_1}} + c_1^{ss} (k_1^{ss})^{1-\alpha_1} \\ \Rightarrow \frac{\partial k^{ss}}{\partial a} &= k_2^{ss} - k_2^{ss} \frac{c_1^{ss}}{(k_1^{ss})^{\alpha_1}} - ak_2^{ss} \frac{\frac{\partial c_1^{ss}}{\partial a} (k_1^{ss})^{\alpha_1} - c_1^{ss} \alpha_1 (k_1^{ss})^{\alpha_1-1} \frac{\partial k_1^{ss}}{\partial a}}{(k_1^{ss})^{2\alpha_1}} \\ &\quad + \frac{\partial c_1^{ss}}{\partial a} (k_1^{ss})^{1-\alpha_1} + c_1^{ss} (1-\alpha_1) (k_1^{ss})^{-\alpha_1} \frac{\partial k_1^{ss}}{\partial a} \\ \Rightarrow \frac{\partial k^{ss}}{\partial a} &= k_2^{ss} (1 - l_1^{ss}) - ak_2^{ss} \frac{\left[c_2^{ss} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right)^{-\varepsilon} + \frac{\partial c_1^{ss}}{\partial p} \frac{\partial p^{ss}}{\partial a} \right] (k_1^{ss})^{\alpha_1} - c_1^{ss} \alpha_1 (k_1^{ss})^{\alpha_1-1} \frac{\partial k_1^{ss}}{\partial a}}{(k_1^{ss})^{2\alpha_1}} \\ &\quad + \left[c_2^{ss} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right)^{-\varepsilon} + \frac{\partial c_1^{ss}}{\partial p} \frac{\partial p^{ss}}{\partial a} \right] (k_1^{ss})^{1-\alpha_1} + c_1^{ss} (1-\alpha_1) (k_1^{ss})^{-\alpha_1} \frac{\partial k_1^{ss}}{\partial a} \end{aligned} \quad (99)$$

¹⁹Repare que um choque positivo de termos de troca pode ser visto como um caso particular de choque positivo de produtividade relativa do setor de bens *tradables*.

onde estamos utilizando o fato de que $c_1^{ss} = y_1^{ss}$, $y_1^{ss} = l_1^{ss}(k_1^{ss})^{\alpha_1}$ e a equação (54). Logo, em condições normais, teríamos a primeira e a última parcelas de (99) positivas. Vamos agora avaliar $\frac{\partial c_1}{\partial p}$:

$$\begin{aligned}
(67) : \quad c_1 &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} [\gamma^{\varepsilon} p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial p} &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \varepsilon \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon-1} \left(-\frac{1}{p^2} \right) [\gamma^{\varepsilon} p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
&\quad + \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} [\gamma^{\varepsilon} p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} [(1-\varepsilon)\gamma^{\varepsilon} p^{-\varepsilon}] \\
\Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial p} &= -\varepsilon \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{-1} \left(\frac{1}{p^2} \right) \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} [\gamma^{\varepsilon} p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
&\quad + \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{(1-\varepsilon)\gamma^{\varepsilon} p^{-\varepsilon}}{\gamma^{\varepsilon} p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}} \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} [\gamma^{\varepsilon} p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial p} &= -\left(\frac{\varepsilon}{\gamma} \right) \left(\frac{1}{p} \right) c_1 + \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{(1-\varepsilon)\gamma^{\varepsilon} p^{-\varepsilon}}{\gamma^{\varepsilon} p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}} c_1 \\
\Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial p} &= -\left[\left(\frac{\varepsilon}{\gamma} \right) \frac{1}{p} + (\sigma-\varepsilon) \frac{\gamma^{\varepsilon} p^{-\varepsilon}}{\gamma^{\varepsilon} p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}} \right] c_1 \tag{100}
\end{aligned}$$

Isto é, o sinal de $\frac{\partial c_1^{ss}}{\partial p}$ também é ambíguo a princípio, a depender dos valores de σ e ε .

No *Anexo 5.3* mostramos que $\frac{\partial p}{\partial k} > 0$, e na calibração obtemos, durante a dinâmica de transição, $\dot{p} > 0$, $\dot{c}_1 > 0$ e $\dot{c}_2 > 0$. Note-se que, pela equação (54), temos

$$(54) : \quad \frac{c_{1t}}{c_{2t}} = a \left[\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right]^{-\varepsilon}$$

Então, temos um *trade off* clássico entre efeito renda e efeito substituição. Este último se manifesta no fato de que, para um dado nível de a , um aumento de p deve diminuir a razão c_{1t}/c_{2t} . No entanto, uma elevação de a produz efeito contrário, elevando a renda permanente e estimulando o consumo de ambos os bens. O procedimento de calibração sugere que, para valores razoáveis de parâmetros, temos

$$\frac{\partial k^{ss}}{\partial a} < 0, \quad \frac{\partial c_1^{ss}}{\partial a} > 0, \quad \frac{\partial c_2^{ss}}{\partial a} > 0 \tag{101}$$

2.8 Dinâmica consolidada e método numérico

A dinâmica do modelo pode ser caracterizada a partir das condições iniciais k_0 , q_0 , b_0 , λ_0 , L_0 e A_0 , pela condição de transversalidade (equação (42)) e pelo sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{k}_t = \left(\frac{q_t-1}{bp_t} \right)^{1/\xi} k_t \quad (48) \\ \dot{q}_t = R^* q_t + \delta^{EF} - \left[r_t + b \frac{\xi}{1+\xi} p_t \left(\frac{q_t-1}{bp_t} \right)^{(\xi+1)/\xi} \right] \quad (47) \\ \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \rho + g - r^* \quad (40) \\ \dot{b}_t = R^* b_t + \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p_t) + \left[\left(\frac{q_t-1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} - Z_2(p_t) \right] k_t + W_2(p_t) \quad (83) \\ \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) + \frac{b}{1+\xi} k_t \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} = W_1(p_t) - Z_1(p_t) k_t \quad (74) \end{array} \right.$$

onde

$$(68) : \quad j_1(p) \equiv [\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

$$(29) : \quad Z_1(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}}$$

$$(30) : \quad W_1(p) \equiv a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_1(p)$$

$$(31) : \quad Z_2(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}}$$

$$(32) : \quad W_2(p) \equiv a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_2(p)$$

O modelo possui duas variáveis de estado, k e b . Para $k_0 < k^{ss}$, tem-se $\dot{q} < 0$ e $q_0 > 1$ para valores razoáveis de parâmetros. Mostra-se na *seção 5.2* que o modelo possui estabilidade de sela, de modo que, dado um k_0 , a trajetória convergente está associada a um único q_0 . Mostra-se também que $\frac{\partial p}{\partial k} > 0$ e $\frac{\partial p}{\partial q} > 0$. Como temos $\dot{k} \geq 0$ e $\dot{q} \leq 0$, o sinal de $\dot{p} > 0$ seria ambíguo a princípio, porém na calibração obtemos $\dot{p} > 0$ ao longo da dinâmica de transição.

A equação (48) fornece a taxa de variação relativa do capital em função do preço-sombra do capital e do preço relativo do bem doméstico: $\dot{k}_t \equiv \dot{k}_t(k_t, p_t, q_t)$. A dependência da taxa de variação do capital em relação ao câmbio é uma consequência direta da hipótese de que o dispêndio com o custo de instalação do capital se dá em bens domésticos.

Já a equação (47) fornece a taxa de variação do preço-sombra do investimento: $\dot{q}_t \equiv \dot{q}_t(p_t(k_t, q_t), q_t, r_t(p_t(k_t, q_t)))$. A equação (74) fornece o preço relativo do bem doméstico através da condição de equilíbrio do mercado de bens domésticos: $p_t \equiv p_t(k_t, q_t)$.

Repare que, pela equação (85), o valor inicial da utilidade marginal do consumo está fixado em função do passivo externo líquido inicial, $\lambda_0 \equiv \lambda_0(b_0, A_0)$, e sua dinâmica é dada em função dos parâmetros do modelo, $\dot{\lambda}_t \equiv (\rho, g, r^*, \lambda_t)$, sendo completamente independente do resto do sistema. Além disso, a taxa de juros internacional está dada pela equação

$$(228) : \quad r^* = \rho + \frac{1}{\sigma} g$$

de modo que $\dot{\lambda}_t < 0$ desde que $\sigma < 1$ e $g > 0$. Se $g = 0$ teríamos $\dot{\lambda}_t = 0$.

Finalmente, a dinâmica da dívida externa é função das demais variáveis do modelo: $\dot{b}_t \equiv \dot{b}_t(k_t, q_t, b_t, p_t, \lambda_0)$. Repare que tanto \dot{k}_t quanto \dot{q}_t independem de b_t , isto é, a dinâmica da dívida externa não afeta, embora seja afetada, pelas dinâmicas das demais variáveis do modelo. Note também que não há restrição para o valor terminal da dívida externa, isto é, não há expressão fechada para b^{ss} , ao contrário do que ocorre quando se introduz gerações sobrepostas, conforme será visto no próximo capítulo. Com agente representativo, b^{ss} será resultado de b_0 , que determina λ_0 , e da dinâmica de transição.

A solução numérica do modelo foi obtida através de um método que segue uma lógica de *forward shooting*, conforme descrito a seguir. Inicialmente, determina-se condições iniciais para o capital e para a dívida externa: k_0 e b_0 . Como o valor de λ_0 compatível com a solvência externa da economia é desconhecido, chuta-se λ_0 . Dados k_0, b_0, λ_0 , chuta-se q_0 e roda-se o sistema para frente utilizando-se o *método de Euler*²⁰ até k_t alcançar k^{ss} . Caso seja observado um excesso de acumulação de capital (isto é, caso k tenha chegado em k^{ss} antes de q chegar em q^{ss}), recalibra-se o chute de q_0 para baixo. Caso contrário, recalibra-se o chute de q_0 para cima. Se k e q alcançarem seus valores terminais simultaneamente (dentro de uma margem de tolerância pré-determinada), interpreta-se que encontrou-se a direção da sela. Checa-se, então, se a restrição orçamentária intertemporal foi satisfeita. Em caso de excesso / falta de consumo, recalibra-se λ_0 para cima / baixo e repete-se o procedimento.

²⁰Ver, por exemplo, Judd (1998).

3 Capítulo 2: gerações sobrepostas e previdência

Neste capítulo introduzimos gerações sobrepostas e sistema previdenciário no modelo desenvolvido no *Capítulo 1*. Seguindo [Blanchard \(1985\)](#), trabalhamos com o modelo de juventude perpétua, onde os indivíduos possuem probabilidade de morte constante, v . Esta hipótese desvincula da idade a expectativa de sobrevida e a propensão marginal a consumir de cada indivíduo, facilitando imensamente o trabalho de agregação do modelo. Cada geração é composta por um contínuo de agentes, de modo que o tamanho de cada geração decai de forma não-estocástica à taxa equivalente à probabilidade de morte, embora exista incerteza em relação ao tempo de vida do ponto de vista individual. O problema do indivíduo é análogo ao do agente representativo utilizado no capítulo anterior, as principais diferenças sendo a taxa efetiva a que o indivíduo desconta o futuro, agora igual a $\rho + v$, e o tratamento dado às redistribuições de ativos entre indivíduos em decorrência da possibilidade de morte.

A incerteza quanto ao tempo de vida poderia motivar os indivíduos a realizarem poupança precaucionária, de modo que heranças não-intencionais poderiam ocorrer, mesmo que as preferências não considerem altruísmo em relação à prole. Para evitar este problema supomos a existência de mercados de seguros competitivos e com livre entrada. Como trabalhamos com um contínuo de agentes, seguros podem ser oferecidos sem risco. Cada indivíduo pode pagar / receber um determinado valor para / da seguradora contingente à sua morte. Em equilíbrio, os indivíduos escolherão contratar seguro recebendo uma anuidade em troca de ceder seus créditos com o resto do mundo às seguradoras em caso de morte. Logo, se o indivíduo é credor em relação ao resto do mundo, ele recebe rendimentos sobre esses ativos equivalentes à taxa de juros internacional acrescida da probabilidade de morte, $r^* + v$. Caso o indivíduo seja devedor em relação ao resto do mundo, supomos que a taxa a que a dívida externa será remunerada será a mesma. Interpretamos que o indivíduo localizado no resto do mundo tem acesso à mesma remuneração que o indivíduo localizado na economia doméstica, de modo que ele só aceitará comprar títulos da economia doméstica se a remuneração recebida for não-inferior a seu custo de oportunidade.

No caso do capital físico aplicamos um tratamento diferente. Supomos que o capital físico de propriedade dos indivíduos mortos é redistribuído igualmente entre as gerações vivas, de modo que a taxa de decaimento do estoque de capital individual, na ausência de investimento, se torna igual à taxa de depreciação líquida da probabilidade de morte, $\delta - v$. Essas hipóteses são suficientes para que as redistribuições de ativos na economia, em decorrência da possibilidade de morte, sejam neutras do ponto de vista agregado²¹.

Introduzimos sistema de previdência no modelo da seguinte maneira. Também seguindo [Blanchard \(1985\)](#), supomos que a produtividade do trabalho do indivíduo decai à uma taxa constante e igual a β . Isto é, a fração da renda do trabalho agregada gerada por determinado indivíduo cai à medida que este se torna mais velho. A novidade, entretanto, é que permitimos que a renda de fato recebida pelo indivíduo decaia a uma taxa potencialmente diferente, α , em consequência da existência de sistema previdenciário. Se o sistema previdenciário atua na direção de suavizar a renda individual, então temos $\alpha < \beta$. Logo, é de se esperar que exista uma relação direta entre o gasto previdenciário e $\beta - \alpha$. Note-se que o sistema de previdência não é explicitamente modelado como um mecanismo onde indivíduos escolhem acumular ativos de modo a gerar um nível ótimo de suavização de consumo ao longo da vida. Ao contrário, ele é visto como uma instituição exógena, que o indivíduo considera como dada ao fazer suas escolhas de consumo e investimento. A ideia é gerar um modelo teórico capaz de analisar o problema em tela ao menor custo possível em termos de complexidade analítica.

Conforme demonstrado em [Blanchard \(1985\)](#), a possibilidade de morte e o decaimento da renda individual ao longo da vida produzem efeitos opostos sobre o equilíbrio de longo prazo da economia. Enquanto a primeira atua no sentido de elevar a taxa de desconto do indivíduo,

²¹ Isto é, no modelo agregado, as leis de movimento do capital e da dívida serão idênticas às do modelo de agente representativo.

reduzindo o nível de riqueza e aumento da taxa de juros de longo prazo, o segundo atua na direção de elevar o estímulo à poupança, aumentando a riqueza e reduzindo a taxa de juros de longo prazo. Portanto, a introdução do sistema previdenciário nos moldes aqui apresentados permite mensurar a relação entre o gasto previdenciário e o equilíbrio de longo prazo da economia.

O lado da oferta do modelo é idêntico ao apresentado no *Capítulo 1*: dois setores com tecnologia de produção *Cobb-Douglas*, um produzindo o bem doméstico e outro produzindo o bem comercializável. As preferências de cada indivíduo são idênticas às do agente representativo. A próxima seção detalha a estrutura demográfica e o sistema previdenciário da economia. Em seguida, resolvemos o problema do indivíduo, agregamos o modelo, calculamos a dinâmica agregada e o estado estacionário.

3.1 Condições Iniciais, Demografia, Ciclo de Vida e Sistema Previdenciário

As condições iniciais da economia são definidas em um instante inicial $t_0 > -\infty$, no qual a população é igual a N_{t_0} , o capital físico agregado inicial é K_{t_0} e a dívida externa agregada inicial é B_{t_0} .

Como o objetivo do trabalho não é estudar a dinâmica da distribuição de riqueza, não especificamos a distribuição inicial de capital e dívida externa. Isto é, dados nossos objetivos, é suficiente dizer que existem vetores de capital e dívida externa por geração, $\{k(s, t_0)\}_{s \in N_{t_0}}$ e $\{b(s, t_0)\}_{s \in N_{t_0}}$, tal que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) k(s, t_0) ds &= K_{t_0} \\ \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) b(s, t_0) ds &= B_{t_0} \end{aligned} \quad (102)$$

onde $N(s, t)$ é a quantidade de indivíduos que nasceram no instante s e se encontram vivos no instante t , ao passo que $k(s, t)$ e $b(s, t)$ são, respectivamente, o capital físico e a dívida externa observados no instante t associados à geração nascida no instante s .

Em cada instante $s \geq t_0$ nascem $\tilde{N}_{t_0} e^{n(s-t_0)}$ indivíduos, onde n é a taxa de crescimento do número de nascimentos e \tilde{N}_{t_0} é o número de nascimentos do instante inicial. Os indivíduos enfrentam uma probabilidade de morte igual a v . Então, a quantidade de indivíduos que nasceram no instante $s \geq t_0$ e se encontram vivos no instante $t > s$ é dada por

$$\begin{aligned} N(s, t) &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(s-t_0)-v(t-s)} \\ \Rightarrow N(s, t) &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(s-t_0)-v(t-s)+nt-nt} \\ \Rightarrow N(s, t) &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} e^{-(n+v)(t-s)} \\ \Rightarrow N(s, t) &= \tilde{N}_t e^{-(n+v)(t-s)} \end{aligned} \quad (103)$$

onde $\tilde{N}_t = \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)}$ é o número de nascimentos no instante $t > t_0$.

As gerações nascidas a partir de t_0 iniciam suas trajetórias sem capital e dívida externa, isto é:

$$\begin{aligned} k(s, s) &= 0, \quad s \geq t_0 \\ b(s, s) &= 0, \quad s \geq t_0 \end{aligned}$$

A quantidade de indivíduos com idade não superior a s no instante $t \geq s$ é dada por

$$\begin{aligned}
F(s, t) &= \int_s^t N(s', t) ds' \\
\Rightarrow F(s, t) &= \int_s^t \tilde{N}_t e^{-(n+v)(t-s')} ds' \\
\Rightarrow F(s, t) &= e^{-(n+v)t} \tilde{N}_t \int_s^t e^{(n+v)s'} ds' \\
\Rightarrow F(s, t) &= e^{-(n+v)t} \tilde{N}_t \left[\frac{e^{(n+v)s'}}{n+v} \right]_{s'=s}^{s'=t} \\
\Rightarrow F(s, t) &= e^{-(n+v)t} \frac{\tilde{N}_t}{n+v} [e^{(n+v)t} - e^{(n+v)s}] \\
\Rightarrow F(s, t) &= N_{t_0} e^{n(t-t_0)} [1 - e^{-(n+v)(t-s)}]
\end{aligned} \tag{104}$$

onde estamos adotando a normalização

$$\tilde{N}_{t_0} = (n+v)N_{t_0} \tag{105}$$

No instante inicial, em particular, temos

$$F(s, t_0) = N_{t_0} [1 - e^{-(n+v)(t_0-s)}] \tag{106}$$

Note-se que $\frac{\partial}{\partial s} F(s, t_0) = -(n+v)N_{t_0} [e^{-(n+v)(t_0-s)}]$, onde o valor absoluto de $\frac{\partial}{\partial s} F(s, t_0)$ corresponde à medida da população com idade entre s e $s + ds$ no instante inicial.

A população no instante t é dada por

$$\begin{aligned}
N_t &= \int_{-\infty}^t N(s, t) ds \\
\Rightarrow N_t &= \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t) ds + \int_{t_0}^t N(s, t) ds \\
\Rightarrow N_t &= N_{t_0} e^{-v(t-t_0)} + \int_{t_0}^t N(s, t) ds \\
\Rightarrow N_t &= N_{t_0} e^{-v(t-t_0)} + \tilde{N}_t \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} ds \\
\Rightarrow N_t &= N_{t_0} e^{-v(t-t_0)} + (n+v)N_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\frac{e^{-(n+v)(t-s)}}{n+v} \right]_{s=t_0}^{s=t} \\
\Rightarrow N_t &= N_{t_0} e^{-v(t-t_0)} + N_{t_0} e^{n(t-t_0)} [1 - e^{-(n+v)(t-t_0)}] \\
\Rightarrow N_t &= N_{t_0} [e^{-v(t-t_0)} + e^{n(t-t_0)} [1 - e^{-(n+v)(t-t_0)}]] \\
\Rightarrow N_t &= N_{t_0} [e^{-v(t-t_0)} + e^{n(t-t_0)} - e^{-v(t-t_0)}] \\
\Rightarrow N_t &= N_{t_0} e^{n(t-t_0)}
\end{aligned} \tag{107}$$

Isto é, a taxa de crescimento da população agregada é igual à taxa de crescimento do número de nascimentos, implicando numa taxa de natalidade constante e igual a $n+v$. Ou seja, dado que em cada instante a população agregada cresce à taxa n e morre à taxa v , a razão entre o número de nascimentos e a população agregada tem de ser igual a $n+v$.

Supõe-se uma queda da capacidade laboral de cada indivíduo à taxa β , de modo que o salário do indivíduo pertencente à geração s no instante $t > s$ é dado por

$$\begin{aligned} w(s, t) &= X_t^1 e^{-\beta(t-s)} A_t w_t \\ \Rightarrow w(s, t) &= A_{t_0} X_t^1 e^{g(t-t_0)-\beta(t-s)} w_t \end{aligned} \quad (108)$$

onde $A_t = A_{t_0} e^{g(t-t_0)}$ é a produtividade total dos fatores, g é a taxa de progresso tecnológico, $A_t w_t$ é o salário médio e w_t é o salário em unidades eficientes no instante t .

O termo X_t^1 é definido de modo a gerar consistência entre os salários individuais e o salário médio da economia. Isto é, dado que $A_t w_t$ é o salário médio no instante t , temos

$$\begin{aligned} A_t w_t &= \frac{1}{N_t} \int_{-\infty}^t N(s, t) w(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t w_t &= \frac{1}{N_t} \left[\int_{-\infty}^{t_0} N(s, t) w(s, t) ds + \int_{t_0}^t N(s, t) w(s, t) ds \right] \\ \Rightarrow A_t w_t &= \frac{1}{N_t} \left[\int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} e^{-v(t-t_0)} w(s, t) ds + \int_{t_0}^t \tilde{N}_t e^{-(n+v)(t-s)} w(s, t) ds \right] \\ \Rightarrow A_t w_t &= \frac{1}{N_t} \left[\tilde{N}_{t_0} e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} w(s, t) ds + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} w(s, t) ds \right] \\ \Rightarrow A_t w_t &= \frac{\tilde{N}_{t_0}}{N_t} X_t^1 A_t w_t \left[e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} e^{-\beta(t-s)} ds + e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} e^{-\beta(t-s)} ds \right] \\ \Rightarrow 1 &= (n+v) \frac{\tilde{N}_{t_0}}{N_t} X_t^1 \left[e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t_0-t+t-s)} e^{-\beta(t-s)} ds + e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(n+v+\beta)(t-s)} ds \right] \\ \Rightarrow 1 &= (n+v) \frac{\tilde{N}_{t_0}}{N_{t_0} e^{n(t-t_0)}} X_t^1 e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v+\beta)(t-s)} ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v+\beta)(t-s)} ds \right] \\ \Rightarrow 1 &= (n+v) X_t^1 \int_{-\infty}^t e^{-(n+v+\beta)(t-s)} ds \\ \Rightarrow 1 &= (n+v) X_t^1 \left[\frac{e^{-(n+v+\beta)(t-s)}}{n+v+\beta} \right]_{s=t_0}^{s=t} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{n+v}{n+v+\beta} X_t^1 \\ \Rightarrow X_t^1 &= \frac{n+v+\beta}{n+v} \end{aligned} \quad (109)$$

Então temos

$$\begin{aligned} w(s, t) &= \frac{n+v+\beta}{n+v} e^{-\beta(t-s)} A_t w_t \\ \Rightarrow w(s, t) &= A_{t_0} \frac{n+v+\beta}{n+v} e^{g(t-t_0)-\beta(t-s)} w_t \end{aligned} \quad (110)$$

A existência de um sistema previdenciário faz com que em cada instante a renda líquida percebida pelo indivíduo seja igual a seu salário descontado (acrescido) de uma contribuição (benefício) previdenciária(o), sendo dada por

$$\begin{aligned} \omega(s, t) &= X_t^2 e^{-\alpha(t-s)} A_t w_t \\ \omega(s, t) &= A_{t_0} X_t^2 e^{g(t-t_0)-\alpha(t-s)} w_t \end{aligned} \quad (111)$$

Como o papel do sistema previdenciário é suavizar a queda de renda ao longo da vida, impõe-se $\alpha < \beta$. O benefício previdenciário recebido pelo indivíduo pertencente à geração s no instante t é dado por

$$\begin{aligned} bp(s, t) &= w(s, t) - \omega(s, t) \\ \Rightarrow bp(s, t) &= X_t^1 e^{-\beta(t-s)} A_t w_t - X_t^2 e^{-\alpha(t-s)} A_t w_t \\ \Rightarrow bp(s, t) &= \left[X_t^2 e^{-\alpha(t-s)} - X_t^1 e^{-\beta(t-s)} \right] A_t w_t \end{aligned} \quad (112)$$

O termo X_t^2 é definido de modo a gerar consistência atuarial para o sistema previdenciário. Para isso, impõe-se que, em cada instante t , a soma de benefícios e contribuições das diversas gerações seja nula:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^t N(s, t) bp(s, t) ds \\ \Rightarrow 0 &= \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t) bp(s, t) ds + \int_{t_0}^t N(s, t) bp(s, t) ds \\ \Rightarrow 0 &= \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} e^{-v(t-t_0)} bp(s, t) ds + \int_{t_0}^t \tilde{N}_t e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds \\ \Rightarrow 0 &= \tilde{N}_{t_0} e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t_0-t+t-s)} bp(s, t) ds + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds \\ \Rightarrow 0 &= \tilde{N}_{t_0} e^{-v(t-t_0)} e^{-(n+v)(t_0-t)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds \\ \Rightarrow 0 &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds \right] \\ \Rightarrow 0 &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} A_t w_t \left[\int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} [X_t^2 e^{-\alpha(t-s)} - X_t^1 e^{-\beta(t-s)}] ds \right] \\ \Rightarrow X_t^2 \int_{-\infty}^t e^{-(n+v+\alpha)(t-s)} ds &= X_t^1 \int_{-\infty}^t e^{-(n+v+\beta)(t-s)} ds \\ \Rightarrow X_t^2 \left[\frac{e^{-(n+v+\alpha)(t-s)}}{n+v+\alpha} \right]_{s=-\infty}^{s=t} &= X_t^1 \left[\frac{e^{-(n+v+\beta)(t-s)}}{n+v+\beta} \right]_{s=-\infty}^{s=t} \\ \Rightarrow \frac{X_t^2}{n+v+\alpha} &= \frac{X_t^1}{n+v+\beta} \\ \Rightarrow X_t^2 &= X_t^1 \frac{n+v+\alpha}{n+v+\beta} \\ \Rightarrow X_t^2 &= \frac{n+v+\alpha}{n+v} \end{aligned} \quad (113)$$

Então temos

$$\begin{aligned} \omega(s, t) &= \frac{n+v+\alpha}{n+v} e^{-\alpha(t-s)} A_t w_t \\ \omega(s, t) &= A_{t_0} \frac{n+v+\alpha}{n+v} e^{g(t-t_0)-\alpha(t-s)} w_t \end{aligned} \quad (114)$$

O benefício previdenciário recebido pelo indivíduo pertencente à geração s no instante t é dado por

$$\begin{aligned}
bp(s, t) &= w(s, t) - \omega(s, t) \\
\Rightarrow bp(s, t) &= \left[X_t^2 e^{-\alpha(t-s)} - X_t^1 e^{-\beta(t-s)} \right] A_t w_t \\
\Rightarrow bp(s, t) &= \left[\frac{n+v+\alpha}{n+v} e^{-\alpha(t-s)} - \frac{n+v+\beta}{n+v} e^{-\beta(t-s)} \right] A_t w_t
\end{aligned} \tag{115}$$

Note-se que, como $\alpha < \beta$, temos $X^2 < X^1$, de modo que, inicialmente, temos $w(s, t) < \omega(s, t)$. Isto é, a condição de factibilidade do sistema previdenciário faz com que a suavização do consumo ao longo da vida ocorra às custas de rendimentos menores no período pré-aposentadoria. Até determinada idade a geração s apresentará $bp(s, t) < 0$, recebendo rendimento inferior à sua produtividade. Interpreta-se que, neste período, esta geração está no período contributivo. Quando $bp(s, t) > 0$, a geração s recebe rendimentos maiores que sua produtividade. Interpreta-se que, neste período, esta geração está aposentada. Consequentemente, a idade de aposentadoria id^{ap} é tal que $bp(s, s + id^{ap}) = 0$.

3.2 Escolha individual

O indivíduo pertencente à geração s escolhe consumo e investimento de modo a resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&\max \int_{t=s}^{\infty} e^{-(\rho+v)(t-s)} u[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] dt \\
s.t. &\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial k(s, t)}{\partial t} = i(s, t) - (\delta - v)k(s, t) \\ &\frac{\partial b(s, t)}{\partial t} = (r^* + v)b(s, t) + p_t c_1(s, t) + c_2(s, t) + i(s, t) + p_t [i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] x_t \\ &\quad \quad \quad - \omega(s, t) - r_t k(s, t) \\ &u[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] = \frac{C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma} \\ &C(c_1(s, t), c_2(s, t)) = \left[\gamma (c_1(s, t))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) (c_2(s, t))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\ &b(s, s) \quad e \quad k(s, s) \quad \text{dados} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

onde p_t é o preço do bem doméstico em unidades do bem comercializável, x_t é o custo de instalação do capital por unidade de investimento líquido, $k(s, t)$ é o capital em t do indivíduo nascido em s , $b(s, t)$ é a dívida externa em t do indivíduo nascido em s , $i(s, t)$ é o investimento em t do indivíduo nascido em s , $c_1(s, t)$ é o consumo do bem doméstico em t do indivíduo nascido em s , $c_2(s, t)$ é o consumo do bem comercializável em t do indivíduo nascido em s .

Então, o problema do indivíduo pertencente à geração s é maximizar o somatório das utilidades futuras descontadas à taxa ρ . A probabilidade de morte é levada em conta, com a utilidade de cada instante t sendo multiplicada por e^{-vt} , a probabilidade do indivíduo nascido em s estar vivo em t , gerando o fator de desconto ajustado $e^{-(\rho+v)t}$. A função utilidade é uma CRRA, onde σ é a elasticidade de substituição intertemporal e $C(c_1(s, t), c_2(s, t))$ é um índice que depende do consumo de cada um dos bens através de uma função que apresenta elasticidade de substituição constante entre os bens, igual a ε . A maximização é sujeita às seguintes restrições: (i) a lei de movimento do capital, que descreve a variação do estoque de capital como o excesso de investimento sobre a depreciação do capital líquida da probabilidade de morte, (ii) a restrição orçamentária intertemporal, que descreve a variação da dívida externa como o excesso de absorção sobre a renda individual, (iii) os valores iniciais para dívida externa e estoque de capital.

3.2.1 Condições de otimalidade

Montando a função auxiliar de Hamilton em valor presente:

$$H(s, t) = e^{-(\rho+v)(t-s)} \{u[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] + \lambda(s, t)q(s, t)[i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] - \lambda(s, t)[(r^* + v)b(s, t) + p_t c_1(s, t) + c_2(s, t) + i(s, t) + p_t[i_t - (\delta - v)k(s, t)]x_t - \omega(s, t) - r_t k(s, t)]\} \quad (116)$$

Var. de estado: $k(s, t), b(s, t)$.

Var. de controle: $c_1(s, t), c_2(s, t), i(s, t)$.

Var. de coestado: $-\lambda(s, t), \lambda(s, t)q(s, t)$.

Aplicando o Princípio do Máximo obtemos as seguintes condições necessárias para a trajetória ótima:

$$\begin{aligned} [c_1]: \quad H_{c_1} &= 0 \\ &\Rightarrow u_{c_1(s,t)}[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] = \lambda(s, t)p_t \\ &\Rightarrow C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{-1/\sigma} C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{1/\varepsilon} \gamma(c_1(s, t))^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda(s, t)p_t \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} [c_2]: \quad H_{c_2} &= 0 \\ &\Rightarrow u_{c_2(s,t)}[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] = \lambda(s, t) \\ &\Rightarrow C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{-1/\sigma} C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{1/\varepsilon} (1 - \gamma)(c_2(s, t))^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda(s, t) \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} [i]: \quad H_i &= 0 \\ &\Rightarrow -\lambda(s, t)[1 + p_t x_t] + \lambda(s, t)q(s, t) = 0 \\ &\Rightarrow 1 + p_t x_t = q(s, t) \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} [b]: \quad H_b &= -\frac{d}{dt} \left[-e^{-(\rho+v)(t-s)} \lambda(s, t) \right] \\ &\Rightarrow -e^{-(\rho+v)(t-s)} \lambda(s, t)(r^* + v) = -(\rho + v)e^{-(\rho+v)(t-s)} \lambda(s, t) + e^{-(\rho+v)(t-s)} \frac{\partial \lambda(s, t)}{\partial t} \\ &\Rightarrow -(r^* + v) = -(\rho + v) + \frac{\partial \lambda(s, t)}{\partial t} \frac{1}{\lambda(s, t)} \\ &\Rightarrow \frac{\partial \lambda(s, t)}{\partial t} = \lambda(s, t)(\rho - r^*) \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} [k]: \quad H_k &= -\frac{d}{dt} \left[e^{-(\rho+v)(t-s)} \lambda(s, t)q(s, t) \right] \\ &\Rightarrow -e^{-(\rho+v)(t-s)} \lambda(s, t) \{ -(\delta - v)p_t x_t - r_t + q(s, t)(\delta - v) \} \\ &= - \left[-(\rho + v)e^{-(\rho+v)(t-s)} \lambda(s, t)q(s, t) + e^{-(\rho+v)(t-s)} \left(\frac{\partial \lambda(s, t)}{\partial t} q(s, t) + \lambda(s, t) \frac{\partial q(s, t)}{\partial t} \right) \right] \\ &\Rightarrow -(\delta - v)p_t x_t - r_t + q(s, t)(\delta - v) = -(\rho + v)q(s, t) + \frac{\partial \lambda(s, t)}{\partial t} \frac{1}{\lambda(s, t)} q(s, t) + \frac{\partial q(s, t)}{\partial t} \\ &\Rightarrow -(\delta - v)p_t x_t - r_t + q(s, t)(\delta - v) = -(\rho + v)q(s, t) + (\rho - r^*)q(s, t) + \frac{\partial q(s, t)}{\partial t} \\ &\Rightarrow -(\delta - v)[q(s, t) - 1] - r_t + q(s, t)(\delta - v) = -(r^* + v)q(s, t) + \frac{\partial q(s, t)}{\partial t} \\ &\Rightarrow \frac{\partial q(s, t)}{\partial t} = (r^* + v)q(s, t) - [r_t + v - \delta] \end{aligned} \quad (121)$$

As equações (117) e (118) afirmam apenas que, ao longo da trajetória ótima, a utilidade marginal e o preço-sombra do consumo devem ser iguais. A equação (119) estabelece a relação entre o custo de instalação do capital e o preço-sombra do capital. A equação (120) determina

a taxa de variação da utilidade marginal do consumo. A equação (121) é a equação de Euler do modelo, estabelecendo a relação entre o preço-sombra do capital e a produtividade marginal do capital.

Finalmente, temos ainda que impor as seguintes condições de transversalidade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho+v)(t-s)} q(s, t) k(s, t) = 0 \quad (122)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(r^*+v)(t-s)} b(s, t) = 0 \quad (123)$$

3.2.2 Função consumo individual

A derivação das expressões para o consumo individual dos dois bens é análoga ao procedimento realizado na *seção 2.3.4*, de modo que julgamos desnecessário reproduzir todo o algebrismo novamente. Nos limitamos a dizer que, partindo de (117) e (118), chegamos a

$$c_1(s, t) = \lambda(s, t)^{-\sigma} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \quad (124)$$

$$c_2(s, t) = \lambda(s, t)^{-\sigma} (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \quad (125)$$

$$D(s, t) \equiv p_t c_1(s, t) + c_2(s, t) = \lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t) \quad (126)$$

onde $D(s, t)$ é o dispêndio com consumo da geração s no instante t e

$$(68) : \quad j_1(p_t) \equiv [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}$$

$$(69) : \quad j_2(p_t) \equiv [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}$$

3.2.3 Restrição orçamentária intertemporal individual

$$\frac{\partial b(s, t)}{\partial t} = (r^* + v)b(s, t) + D(s, t) + I(s, t) - \omega(s, t) - r_t k(s, t)$$

onde $I(s, t) = i(s, t) + p_t[i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)]x_t$ é o dispêndio com investimento da geração s no instante t bruto do custo de instalação do capital.

Utilizando a equação (119) temos também que

$$\begin{aligned} q(s, t)[i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] &= [1 + p_t x_t][i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] \\ &= i(s, t) - (\delta - v)k(s, t) + p_t x_t[i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] \\ &= I(s, t) - (\delta - v)k(s, t) \\ \Rightarrow I(s, t) &= q(s, t)[i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] + (\delta - v)k(s, t) \end{aligned}$$

Então a restrição orçamentária individual pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b(s, t)}{\partial t} &= (r^* + v)b(s, t) + \lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t) - \omega(s, t) - r_t k(s, t) \\
&\quad + q(s, t)[i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] + (\delta - v)k(s, t) \\
\Rightarrow \frac{\partial b(s, t')}{\partial t'} &= (r^* + v)b(s, t') + \lambda(s, t')^{-\sigma} j_2(p_{t'}) - \omega(s, t') - r_{t'} k(s, t') \\
&\quad + q(s, t')[i(s, t') - (\delta - v)k(s, t')] + (\delta - v)k(s, t') \\
\Rightarrow e^{-(r^*+v)(t'-t)} \left[\frac{\partial b(s, t')}{\partial t'} - (r^* + v)b(s, t') \right] &= \\
e^{-(r^*+v)(t'-t)} \left[\lambda(s, t')^{-\sigma} j_2(p_{t'}) - \omega(s, t') - r_{t'} k(s, t') + q(s, t')[i(s, t') - (\delta - v)k(s, t')] + (\delta - v)k(s, t') \right] \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t'} [e^{-(r^*+v)(t'-t)} b(s, t')] &= e^{-(r^*+v)(t'-t)} \left[\lambda(s, t)^{-\sigma} e^{-\sigma(\rho-r^*)(t'-t)} j_2(p_{t'}) - \omega(s, t') \right. \\
&\quad \left. - r_{t'} k(s, t') + q(s, t')[i(s, t') - (\delta - v)k(s, t')] + (\delta - v)k(s, t') \right]
\end{aligned}$$

onde estou utilizando o fator de integração $e^{-(r^*+v)(t'-t)}$ e o fato de que $\lambda(s, t') = \lambda(s, t)e^{(\rho-r^*)(t'-t)} \Rightarrow \lambda(s, t')^{-\sigma} = \lambda(s, t)^{-\sigma} e^{-\sigma(\rho-r^*)(t'-t)}$. Integrando entre $[t, T]$, utilizando a equação (121) e a lei de movimento de capital obtemos

$$\begin{aligned}
e^{-(r^*+v)(T-t)} b(s, T) - b(s, t) &= \lambda(s, t)^{-\sigma} \int_t^T e^{-[r^*+v+\sigma(\rho-r^*)(t'-t)]} j_2(p_{t'}) dt' - \int_t^T e^{-(r^*+v)(t'-t)} \omega(s, t') dt' \\
&\quad - \int_t^T e^{-(r^*+v)(t'-t)} \left[-\frac{\partial q(s, t')}{\partial t'} + (r^* + v)q(s, t') + \delta - v \right] k(s, t') dt' \\
&\quad + \int_t^T e^{-(r^*+v)(t'-t)} q(s, t') \frac{\partial k(s, t')}{\partial t'} dt' + (\delta - v) \int_t^T e^{-(r^*+v)(t'-t)} k(s, t') dt' \\
\Rightarrow e^{-(r^*+v)(T-t)} b(s, T) - b(s, t) &= \lambda(s, t)^{-\sigma} \int_t^T e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} j_2(p_{t'}) dt' - \int_t^T e^{-(r^*+v)(t'-t)} \omega(s, t') dt' \\
&\quad + \int_t^T e^{-(r^*+v)(t'-t)} q(s, t') \frac{\partial k(s, t')}{\partial t'} dt' + \int_t^T e^{-(r^*+v)(t'-t)} \left[\frac{\partial q(s, t')}{\partial t'} - (r^* + v)q(s, t') \right] k(s, t') dt'
\end{aligned} \tag{127}$$

onde estou utilizando o fato de que

$$\begin{aligned}
r^* + v + \sigma(\rho - r^*) &= r^* + v + \sigma(\rho - r^*) + (\rho - r^*) - (\rho - r^*) \\
\Rightarrow r^* + v + \sigma(\rho - r^*) &= r^* + v + (\sigma - 1)(\rho - r^*) + (\rho - r^*) \\
\Rightarrow r^* + v + \sigma(\rho - r^*) &= \rho + v + (\sigma - 1)(\rho - r^*) \\
\Rightarrow r^* + v + \sigma(\rho - r^*) &= \rho + v + (1 - \sigma)(r^* - \rho)
\end{aligned} \tag{128}$$

Repare que as últimas 2 parcelas de (127) podem ser expressas como

$$\begin{aligned}
&\int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} \left[q(s, t') \frac{\partial k(s, t')}{\partial t'} + \frac{\partial q(s, t')}{\partial t'} k(s, t') - (r^* + v)q(s, t')k(s, t') \right] dt' \\
&= \int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} \left[\frac{\partial}{\partial t'} [q(s, t')k(s, t')] - (r^* + v)q(s, t')k(s, t') \right] dt' \\
&= \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t'} \left[e^{-(r^*+v)(t'-t)} k(s, t')q(s, t') \right] dt' \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(r^*+v)(T-t)} q(s, T)k(s, T) - q(s, t)k(s, t) = -q(s, t)k(s, t)
\end{aligned} \tag{129}$$

onde estamos utilizando a condição de transversalidade (122) e supondo $r^* \geq \rho$ ²². Então,

²²Caso $r^* < \rho$ precisaríamos trocar ρ por r^* em (122).

levando (129) em (127), tomando $T \rightarrow \infty$, utilizando a condição de ausência de jogo de *Ponzi* e definindo

$$j_{3t} \equiv \int_t^\infty e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} j_2(p_{t'}) dt' \quad (130)$$

$$h(s, t) \equiv \int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} \omega(s, t') dt' \quad (131)$$

$$a(s, t) \equiv q(s, t)k(s, t) - b(s, t) \quad (132)$$

obtemos

$$\begin{aligned} -b(s, t) &= \lambda(s, t)^{-\sigma} \int_t^\infty e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} j_2(p_{t'}) dt' - h(s, t) - q(s, t)k(s, t) \\ \Rightarrow \lambda(s, t)^{-\sigma} &= j_{3t}^{-1} [h(s, t) + a(s, t)] \end{aligned} \quad (133)$$

Repare que, quando $\sigma \rightarrow 1$, temos $j_2(p) \rightarrow 1$ e $j_{3t}^{-1} \rightarrow \rho + v + (1 - \sigma)(r^* - \rho)$.

Derivando (133) em relação ao tempo devemos obter a equação (120). Vejamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\lambda(s, t)^{-\sigma}] &= \frac{d}{dt} \{j_{3t}^{-1} [h(s, t) + a(s, t)]\} \\ \Rightarrow -\sigma \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}^2} [h(s, t) + a(s, t)] + j_{3t}^{-1} [\dot{h}(s, t) + \dot{q}(s, t)k(s, t) + q(s, t)\dot{k}(s, t) - \dot{b}(s, t)] \\ \Rightarrow -\sigma \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda(s, t)^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} [\dot{h}(s, t) + \dot{q}(s, t)k(s, t) + q(s, t)\dot{k}(s, t) - \dot{b}(s, t)] \end{aligned}$$

Precisamos encontrar as derivadas de j_{3t} e $h(s, t)$ em relação ao tempo. Utilizaremos a *Regra de Leibniz*, segundo a qual, se $f(x, \theta)$, $a(\theta)$ e $b(\theta)$ são funções diferenciáveis em relação θ , então

$$\frac{d}{d\theta} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x, \theta) dx = f(b(\theta), \theta) \frac{d}{d\theta} b(\theta) - f(a(\theta), \theta) \frac{d}{d\theta} a(\theta) + \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{d}{d\theta} f(x, \theta) dx \quad (134)$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} j_{3t} &= \frac{d}{dt} \int_t^\infty e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} [\gamma^\varepsilon p_{t'}^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}} dt' \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} j_{3t} &= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](T-t)} [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}} \frac{d}{dt} T \\ &\quad - e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t-t)} [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}} \frac{d}{dt} t \\ &\quad + \int_t^\infty \frac{d}{dt} \left[e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} [\gamma^\varepsilon p_{t'}^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}} \right] dt' \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} j_{3t} &= [\rho + v + (1 - \sigma)(r^* - \rho)] \int_t^\infty e^{-(\rho+v)(t'-t)} [\gamma^\varepsilon p_{t'}^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}} dt' - [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} j_{3t} &= [\rho + v + (1 - \sigma)(r^* - \rho)] j_{3t} - j_2(p_t) \\ \Rightarrow \frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} &= \rho + v + (1 - \sigma)(r^* - \rho) - \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}} \end{aligned} \quad (135)$$

No caso de $h(s, t)$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(s, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} \omega(s, t') dt' \\
\Rightarrow \frac{\partial h(s, t)}{\partial t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(r^*+v)(T-t)} \omega(s, T) \frac{\partial}{\partial t}(T) - e^{-(r^*+v)(t-t)} \omega(s, t) \frac{\partial}{\partial t}(t) + \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{-(r^*+v)(t'-t)} \omega(s, t') \right] dt' \\
\Rightarrow \frac{\partial h(s, t)}{\partial t} &= (r^* + v) \int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} \omega(s, t') dt' - \omega(s, t) \\
\Rightarrow \frac{\partial h(s, t)}{\partial t} &= (r^* + v)h(s, t) - \omega(s, t)
\end{aligned} \tag{136}$$

Utilizando as equações (121), (135), (136), além das leis de movimento do capital e da dívida, obtemos

$$\begin{aligned}
-\sigma \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda(s, t)^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} \{ (r^* + v)h(s, t) - \omega(s, t) \\
&+ [(r^* + v)q(s, t) - (r_t + v - \delta)]k(s, t) + q_t[i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] \\
&- [(r^* + v)b(s, t) + \lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t) - \omega(s, t) - (r_t + v - \delta)k(s, t) + q_t[i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)]] \} \\
\Rightarrow -\sigma \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda(s, t)^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} \{ (r^* + v)h(s, t) + (r^* + v)q(s, t)k(s, t) \\
&- [(r^* + v)b(s, t) + \lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t)] \} \\
\Rightarrow -\sigma \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda(s, t)^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} \{ (r^* + v)[j_{3t} \lambda(s, t)^{-\sigma} - a(s, t)] \\
&+ (r^* + v)[q_t k(s, t) - b(s, t)] - \lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t) \} \\
\Rightarrow -\sigma \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda(s, t)^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} \{ (r^* + v)[j_{3t} \lambda(s, t)^{-\sigma} - a(s, t)] \\
&+ (r^* + v)a(s, t) - \lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t) \} \\
\Rightarrow -\sigma \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda(s, t)^{-\sigma} + (r^* + v)\lambda(s, t)^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} \{ -\lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t) \} \\
\Rightarrow -\sigma \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda(s, t)^{-\sigma} + \lambda(s, t)^{-\sigma} \left[r^* + v - \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}} \right] \\
\Rightarrow -\sigma \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= \lambda(s, t)^{-\sigma} \left\{ -\left[\rho + v + (1 - \sigma)(r^* - \rho) - \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}} \right] + r^* + v - \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}} \right\} \\
\Rightarrow -\sigma \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= \{ r^* + v - [\rho + v + (1 - \sigma)(r^* - \rho)] \} \\
\Rightarrow -\sigma \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= \{ r^* - \rho - (1 - \sigma)(r^* - \rho) \} \\
\Rightarrow -\sigma \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= \sigma(r^* - \rho) \\
\Rightarrow \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} &= \rho - r^*
\end{aligned} \tag{137}$$

Note-se que (137) coincide com (120).

3.3 Agregação

3.3.1 Agregação do capital

O capital físico agregado no instante t , K_t , é igual à soma dos capitais de todas as gerações vivas em t :

$$\begin{aligned} K_t &= \int_{-\infty}^t N(s, t)k(s, t)ds \\ \Rightarrow K_t &= \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t)k(s, t)ds + \int_{t_0}^t N(s, t)k(s, t)ds \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t)k(s, t)ds + \int_{t_0}^t N(s, t)k(s, t)ds \end{aligned}$$

onde $k_t = K_t/A_t N_t$ é o capital normalizado por trabalhador eficiente. O 1º termo do lado direito da expressão acima corresponde ao capital agregado, em t , associado às gerações vivas em t_0 . Já o 2º termo corresponde ao capital agregado, em t , das gerações nascidas após t_0 . Temos então

$$\begin{aligned} A_t N_t k_t &= \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t)k(s, t)ds + \int_{t_0}^t N(s, t)k(s, t)ds \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} e^{-v(t-t_0)} k(s, t)ds + \int_{t_0}^t \tilde{N}_t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t_0-t+s)} k(s, t)ds + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{-v(t-t_0)} e^{-(n+v)(t_0-t)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \right] \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \end{aligned} \quad (138)$$

Alternativamente, temos

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_t N_t k_t &= e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} k(s, t)ds + \tilde{N}_t \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} \left[k(s, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} dt \right] ds + \tilde{N}_t \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= e^{-v(t-t_0)} \left[K_{t_0} + \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} dt \right] ds \right] + \tilde{N}_t \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= e^{-v(t-t_0)} K_{t_0} + e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} dt \right] ds + \tilde{N}_t \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \\ \Rightarrow A_t N_t k_t &= e^{-v(t-t_0)} K_{t_0} + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t)ds \right] \end{aligned} \quad (139)$$

Ou seja, o capital agregado no instante t corresponde à parcela remanescente do capital inicial acrescido do capital acumulado entre t_0 e t . Este, por sua vez, corresponde ao capital acumulado pela população viva em t_0 acrescido do capital acumulado pelas gerações nascidas a partir de t_0 .

3.3.2 Agregação da dívida externa

A dívida externa agregada no instante t , B_t , é igual à soma das dívidas externas de todas as gerações vivas em t :

$$\begin{aligned} B_t &= \int_{-\infty}^t N(s, t) b(s, t) ds \\ \Rightarrow B_t &= \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t) b(s, t) ds + \int_{t_0}^t N(s, t) b(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t b_t &= \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t) b(s, t) ds + \int_{t_0}^t N(s, t) b(s, t) ds \end{aligned}$$

onde $b_t = B_t/A_t N_t$ é a dívida externa agregada normalizada por trabalhador eficiente. O 1º termo do lado direito da expressão acima corresponde à dívida externa externa agregada, em t , associada às gerações vivas em t_0 . Já o 2º termo corresponde à dívida externa externa agregada, em t , das gerações nascidas após t_0 . Temos então

$$\begin{aligned} A_t N_t b_t &= \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} e^{-v(t-t_0)} b(s, t) ds + \int_{t_0}^t \tilde{N}_t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t b_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t_0-t+s)} b(s, t) ds + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t b_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{-v(t-t_0)} e^{-(n+v)(t_0-t)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t b_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \right] \\ \Rightarrow A_t N_t b_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \end{aligned} \quad (140)$$

Alternativamente, temos

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_t N_t b_t &= e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} b(s, t) ds + \tilde{N}_t \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t b_t &= e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} \left[b(s, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial b(s, t)}{\partial t} dt \right] ds + \tilde{N}_t \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t b_t &= e^{-v(t-t_0)} \left[B_{t_0} + \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s, t)}{\partial t} dt \right] ds \right] + \tilde{N}_t \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t b_t &= e^{-v(t-t_0)} B_{t_0} + e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s, t)}{\partial t} dt \right] ds + \tilde{N}_t \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t b_t &= e^{-v(t-t_0)} B_{t_0} + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s, t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \right] \end{aligned} \quad (141)$$

Ou seja, a dívida externa agregada no instante t corresponde à parcela remanescente da dívida externa inicial acrescida da dívida acumulada entre t_0 e t . Esta, por sua vez, corresponde à dívida externa acumulada pela população viva em t_0 acrescida da dívida acumulada pelas gerações nascidas a partir de t_0 .

3.3.3 Agregação do capital humano

No caso do capital humano repetimos procedimento análogo e obtemos

$$A_t N_t h_t = \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} h(s, t) ds \quad (142)$$

e

$$A_t N_t h_t = e^{-v(t-t_0)} H_{t_0} + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial h(s, t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} h(s, t) ds \right] \quad (143)$$

3.3.4 Agregação do consumo

Vamos agora calcular a variável de coestado agregada. Temos

$$\begin{aligned} \Lambda_t^{-\sigma} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \\ \Rightarrow A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \\ \Rightarrow A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) j_{3t}^{-1} [h(s, t) + a(s, t)] ds \\ \Rightarrow A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} &= j_{3t}^{-1} \int_{-\infty}^t N(s, t) [h(s, t) + a(s, t)] ds \\ \Rightarrow A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} &= j_{3t}^{-1} \left[\int_{-\infty}^t N(s, t) h(s, t) ds + \int_{-\infty}^t N(s, t) a(s, t) ds \right] \\ \Rightarrow A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} &= j_{3t}^{-1} (A_t N_t h_t) + j_{3t}^{-1} (A_t N_t a_t) \\ \Rightarrow \lambda_t^{-\sigma} &= j_{3t}^{-1} (h_t + a_t) \end{aligned} \quad (144)$$

Sejam C_{1t} e C_{2t} os consumos agregados do bem doméstico e do bem comercializável, e c_{1t} e c_{2t} os respectivos consumos por trabalhador efetivo, com $A_t N_t c_{1t} = C_{1t}$ e $a A_t N_t c_{2t} = C_{2t}$, onde $a \equiv \frac{A_{2t}}{A_t}$ é a produtividade relativa do setor 2. Então temos

$$\begin{aligned} C_{1t} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) c_1(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t c_{1t} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) c_1(s, t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t c_{1t} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) ds \\ \Rightarrow A_t N_t c_{1t} &= \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \left[\int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \right] \\ \Rightarrow A_t N_t c_{1t} &= \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} \\ \Rightarrow c_{1t} &= \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} \end{aligned} \quad (145)$$

$$\begin{aligned}
C_{2t} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) c_2(s, t) ds \\
\Rightarrow a A_t N_t c_{2t} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) c_2(s, t) ds \\
\Rightarrow a A_t N_t c_{2t} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) ds \\
\Rightarrow a A_t N_t c_{2t} &= (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \left[\int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \right] \\
\Rightarrow a A_t N_t c_{2t} &= (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} \\
\Rightarrow a c_{2t} &= (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma}
\end{aligned} \tag{146}$$

3.3.5 Agregação do custo de instalação do capital

Agora calculamos o custo de instalação agregado, lembrando que o custo de instalação individual, em unidades do bem doméstico, é dado por $ci(s, t) = [i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)]x_t$. Definimos a função custo de instalação unitário como

$$x_t \equiv b \left[\frac{\dot{k}_t}{k_t} \right]^\xi \tag{147}$$

onde $\dot{k}_t = i_t - \delta^{EF} k_t$, conforme será demonstrado mais adiante. Então temos

$$\begin{aligned}
CI_t &= \int_{-\infty}^t N(s, t) ci(s, t) ds \\
\Rightarrow A_t N_t ci_t &= \int_{-\infty}^t N(s, t) ci(s, t) ds \\
\Rightarrow A_t N_t ci_t &= \int_{-\infty}^t N(s, t) [i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] x_t ds \\
\Rightarrow A_t N_t ci_t &= x_t \int_{-\infty}^t [N(s, t) i(s, t) - (\delta - v)N(s, t)k(s, t)] ds \\
\Rightarrow A_t N_t ci_t &= x_t [A_t N_t i_t - (\delta - v)A_t N_t k_t] \\
\Rightarrow ci_t &= [i_t - (\delta - v)k_t] x_t
\end{aligned} \tag{148}$$

3.3.6 Agregação da condição de factibilidade do mercado de bens domésticos

Agora obtemos a condição de factibilidade no mercado de bens domésticos com base nas variáveis agregadas.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^t N(s, t) c_1(s, t) ds + \int_{-\infty}^t N(s, t) ci(s, t) ds = Y_{1t} \\
& \Rightarrow C_{1t} + CI_t = Y_{1t} \\
& \Rightarrow A_t N_t c_{1t} + A_t N_t ci_t = A_t N_t y_{1t} \\
& \Rightarrow c_{1t} + [i_t - (\delta - v)k_t] x_t = y_{1t} \\
& \Rightarrow c_1(p_t, \lambda_t) + [i_t - (\delta - v)k_t] x_t = y_1(p_t, k_t) \\
& \Rightarrow c_1(p_t, \lambda_t) + [i_t - (\delta - v)k_t] b \left(\frac{\dot{k}_t}{k_t} \right)^\xi = y_1(p_t, k_t) \\
& \Rightarrow c_1(p_t, \lambda_t) + [i_t - (\delta - v)k_t] b \left[\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right]^\xi = y_1(p_t, k_t) \tag{149}
\end{aligned}$$

3.4 Dinâmica

Nesta seção obtemos as equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema agregado a partir das expressões para as variáveis agregadas obtidas na seção anterior. Faremos uso intensivo da *Regra de Leibniz*²³. Vale notar que estamos interessados apenas na dinâmica para $t \geq t_0$, de modo que não precisaremos nos preocupar com a distribuição inicial de ativos, dado que $b(t, t) = k(t, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$.

3.4.1 Dinâmica do capital agregado

A dinâmica do capital físico pode ser obtida tanto através da equação (138) quanto da equação (139). Partindo da equação (138) temos

$$\begin{aligned}
K_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t) ds \tag{138} \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= n \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t) ds \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[k(t, t) - (n+v) \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t) ds + \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial}{\partial t} k(s, t) ds \right] \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= \tilde{N}_t k(t, t) - v \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t) ds + \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial}{\partial t} k(s, t) ds \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= -v K_t + \int_{-\infty}^t N(s, t) \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} ds \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= -v K_t + \int_{-\infty}^t N(s, t) [i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] ds \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} (A_t N_t k_t) &= -v K_t + I_t - (\delta - v) K_t \\
\Rightarrow \dot{k}_t + (g + n) k_t &= i_t - \delta k_t \\
\Rightarrow \dot{k}_t &= i_t - (\delta + g + n) k_t \\
\Rightarrow \dot{k}_t &= i_t - \delta^{EF} k_t \tag{150}
\end{aligned}$$

Partindo da equação (139) temos

²³Se $f(x, \theta)$, $a(\theta)$ e $b(\theta)$ são funções diferenciáveis em relação θ , então $\frac{d}{d\theta} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x, \theta) dx = f(b(\theta), \theta) \frac{d}{d\theta} b(\theta) - f(a(\theta), \theta) \frac{d}{d\theta} a(\theta) + \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{d}{d\theta} f(x, \theta) dx$.

$$\begin{aligned}
K_t &= e^{-v(t-t_0)} K_{t_0} + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s,t) ds \right] \quad (139) \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= -v e^{-v(t-t_0)} K_{t_0} + n \tilde{N}_t \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s,t) ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s,t) ds \right] \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= -v e^{-v(t-t_0)} K_{t_0} + n \tilde{N}_t \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s,t) ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[-(n+v) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} dt \right] ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[-(n+v) \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s,t) ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} ds \right] \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= -v e^{-v(t-t_0)} K_{t_0} + \tilde{N}_t \left[-v \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[-v \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s,t) ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} ds \right] \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= -v e^{-v(t-t_0)} K_{t_0} - v \tilde{N}_t \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s,t) ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} ds \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= -v K_t + \int_{-\infty}^t N(s,t) \frac{\partial k(s,t)}{\partial t} ds \\
\Rightarrow \dot{K}_t &= -v K_t + \int_{-\infty}^t N(s,t) [i(s,t) - (\delta - v)k(s,t)] ds \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} (A_t N_t k_t) &= -v K_t + I_t - (\delta - v) K_t \\
\Rightarrow \dot{k}_t + (g + n) k_t &= i_t - \delta k_t \\
\Rightarrow \dot{k}_t &= i_t - (\delta + g + n) k_t \\
\Rightarrow \dot{k}_t &= i_t - \delta^{EF} k_t \quad (151)
\end{aligned}$$

Note-se a elevação da taxa de depreciação efetiva do capital, de δ^{EF} para a $\delta^{EF} + v$, relativamente ao modelo de agente representativo e horizonte infinito. A possibilidade de morte dos indivíduos gera uma pressão adicional no sentido de reduzir o estoque de capital, elevando a taxa de depreciação efetiva do capital e, portanto, o investimento agregado de longo prazo.

Combinando (119) e (147) temos

$$\begin{aligned}
q_t &= 1 + p_t b \left[\frac{\dot{k}_t}{k_t} \right]^\xi \\
\Rightarrow \dot{k}_t &= k_t \left[\frac{q_t - 1}{b p_t} \right]^{1/\xi} \quad (152)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow i_t = \left[\left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} \right] k_t \quad (153)$$

Finalmente, dado que eficiência marginal do capital é a mesma para todas as gerações, a dinâmica do preço-sombra do capital é dada por

$$\dot{q}_t = (r^* + v)q_t - (r_t + v - \delta) \quad (154)$$

que corresponde à equação (121) exceto pela troca de $q(s, t)$ por q_t . Integrando (154) entre $[t, \infty)$ obtemos

$$q_t = \int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} [r_{t'} + v - \delta] dt' \quad (155)$$

Isto é, o preço-sombra do capital deve equivaler ao valor presente líquido do fluxo de rendimentos futuros gerados por cada unidade adicional de capital líquidos de depreciação. A probabilidade de morte potencializa tanto a taxa de desconto como os rendimentos.

Observando (152), e lembrando que $\xi > 1$, temos que \dot{k}_t só está definida para $q \geq 1$, caso contrário obteríamos uma raiz de um número negativo. Portanto, o modelo só trabalha com $\dot{k}_t \geq 0$. Assim como no *Capítulo 1*, teremos $q^{ss} = 1$. Logo, dada a concavidade das funções de produção, deve ficar claro de (154) que $\dot{q} \leq 0$ e $q_t \downarrow q^{ss}$ ao longo da dinâmica de transição, para valores razoáveis de parâmetros.

3.4.2 Dinâmica da dívida externa agregada

Similarmente, a dinâmica da dívida externa pode ser obtida tanto através da equação (140) quanto da equação (141). Partindo da equação (140) temos

$$\begin{aligned}
B_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \quad (140) \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= n \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[b(t, t) - (n+v) \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds + \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial}{\partial t} b(s, t) ds \right] \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= \tilde{N}_t b(t, t) - v \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s, t) ds + \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial}{\partial t} b(s, t) ds \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= -v B_t + \int_{-\infty}^t N(s, t) \frac{\partial b(s, t)}{\partial t} ds \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= -v B_t + \int_{-\infty}^t N(s, t) [(r^* + v)b(s, t) + p_t c_1(s, t) + c_2(s, t) + i(s, t)] ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^t N(s, t) [p_t [i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)]x_t - \omega(s, t) - r_t k(s, t)] ds \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}(A_t N_t b_t) &= -v B_t + (r^* + v) B_t + p_t C_{1t} + C_{2t} + I_t + p_t [I_t - (\delta - v)K_t]x_t - A_t N_t \omega_t - r_t K_t \\
\Rightarrow \dot{b}_t + (g + n)b_t &= r^* b_t + p_t c_{1t} + a c_{2t} + i_t + p_t [i_t - (\delta - v)k_t]x_t - \omega_t - r_t k_t \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= (r^* - g - n)b_t + p_t c_{1t} + a c_{2t} + i_t + p_t [i_t - (\delta - v)k_t]x_t - \omega_t - r_t k_t \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + a c_{2t} + i_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + i_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + \dot{k}_t + \delta^{EF} k_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + \dot{k}_t + \delta^{EF} k_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + k_t \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} k_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} \right] - y_2(p_t, k_t) \quad (156)
\end{aligned}$$

onde $R^* \equiv r^* - n - g$ é a taxa de juros internacional normalizada. Estamos utilizando a condição de *market clearing* no mercado de bens domésticos ($c_{1t} + (i_t - (\delta - v)k_t)x_t = y_1(p_t, k_t)$), a identidade entre renda e produto ($y_t \equiv p_t y_{1t} + y_{2t} = \omega_t + r_t k_t$) e o fato de os indivíduos começarem a vida sem dívida externa a partir de t_0 ($b(t, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$).

Partindo da equação (141) temos

$$\begin{aligned}
B_t &= e^{-v(t-t_0)} B_{t_0} + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s,t) ds \right] \quad (141) \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= -v e^{-v(t-t_0)} B_{t_0} + n \tilde{N}_t \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s,t) ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s,t) ds \right] \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= -v e^{-v(t-t_0)} B_{t_0} + n \tilde{N}_t \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s,t) ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[-(n+v) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} dt \right] ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[-(n+v) \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s,t) ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} ds \right] \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= -v e^{-v(t-t_0)} B_{t_0} + \tilde{N}_t \left[-v \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[-v \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s,t) ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} ds \right] \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= -v e^{-v(t-t_0)} B_{t_0} - v \tilde{N}_t \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} dt \right] ds + \int_{t_0}^t e^{-(n+v)(t-s)} b(s,t) ds \right] \\
&\quad + \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} ds \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= -v B_t + \int_{-\infty}^t N(s,t) \frac{\partial b(s,t)}{\partial t} ds \\
\Rightarrow \dot{B}_t &= -v B_t + \int_{-\infty}^t N(s,t) [(r^* + v)b(s,t) + p_t c_1(s,t) + c_2(s,t) + i(s,t)] ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^t N(s,t) [p_t [i(s,t) - (\delta - v)k(s,t)]x_t - \omega(s,t) - r_t k(s,t)] ds \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}(A_t N_t b_t) &= -v B_t + (r^* + v)B_t + p_t C_{1t} + C_{2t} + I_t + p_t [I_t - (\delta - v)K_t]x_t - A_t N_t \omega_t - r_t K_t \\
\Rightarrow \dot{b}_t + (g + n)b_t &= r^* b_t + p_t c_{1t} + a c_{2t} + i_t + p_t [i_t - (\delta - v)k_t]x_t - \omega_t - r_t k_t \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= (r^* - g - n)b_t + p_t c_{1t} + a c_{2t} + i_t + p_t [i_t - (\delta - v)k_t]x_t - \omega_t - r_t k_t \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + a c_{2t} + i_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + i_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + \dot{k}_t + \delta^{EF} k_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + \dot{k}_t + \delta^{EF} k_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + k_t \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} k_t - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} \right] - y_2(p_t, k_t) \quad (157)
\end{aligned}$$

Utilizando a equação

$$y_{2t}(p_t, k_t) = Z_2(p_t)k_t - W_2(p_t) \quad (28)$$

a equação (157) se torna

$$\dot{b}_t = R^*b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} - Z_2(p_t) \right] + W_2(p_t) \quad (158)$$

Finalmente, expressando o investimento bruto como

$$\begin{aligned} ib_t &\equiv i_t + p_t[i_t - (\delta - v)k_t]x_t \\ \Rightarrow ib_t &= (1 + p_tx_t)[i_t - (\delta - v)k_t] + (\delta - v)k_t \\ \Rightarrow ib_t &= q_t[i_t - (\delta - v)k_t] + (\delta - v)k_t \end{aligned} \quad (159)$$

chegamos a uma terceira equação para a dinâmica da dívida externa agregada:

$$\begin{aligned} \dot{b}_t &= R^*b_t + p_tc_{1t} + ac_{2t} + ib_t - \omega_t - r_tk_t \\ \dot{b}_t &= R^*b_t + j_2(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + q_t[i_t - (\delta - v)k_t] - \omega_t - (r_t + v - \delta)k_t \end{aligned} \quad (160)$$

Definimos a transferência líquida de recursos para o exterior como

$$tle_t \equiv y_2(p_t, k_t) - ac_{2t} - i_t \quad (161)$$

3.4.3 Dinâmica do capital humano agregado

Assim como no caso da dívida externa e do capital físico, a dinâmica do capital humano agregado pode ser obtida de diferentes formas. A seguir apresentamos duas abordagens possíveis.

$$\begin{aligned}
H_t &= \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} h(s, t) ds \quad (142) \\
\Rightarrow H_t &= \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} \omega(s, t') dt' \right] ds \\
\Rightarrow H_t &= \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} \frac{n+v+\alpha}{n+v} e^{-\alpha(t'-s)} A_{t'} w_{t'} dt' \right] ds \\
\Rightarrow H_t &= \frac{n+v+\alpha}{n+v} \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \left[\int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} e^{-\alpha(t'-t+s)} A_{t'} w_{t'} dt' \right] ds \\
\Rightarrow H_t &= \frac{n+v+\alpha}{n+v} \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v+\alpha)(t-s)} \left[\int_t^\infty e^{-(r^*+v+\alpha)(t'-t)} A_{t'} w_{t'} dt' \right] ds \\
\Rightarrow H_t &= \frac{n+v+\alpha}{n+v} \tilde{N}_t \int_t^\infty e^{-(r^*+v+\alpha)(t'-t)} A_{t'} w_{t'} \left[\int_{-\infty}^t e^{-(n+v+\alpha)(t-s)} ds \right] dt' \\
\Rightarrow H_t &= \frac{n+v+\alpha}{n+v} \tilde{N}_t \int_t^\infty e^{-(r^*+v+\alpha)(t'-t)} A_{t'} w_{t'} \left[\frac{e^{-(n+v+\alpha)(t-s)}}{n+v+\alpha} \right]_{s=-\infty}^{s=t} dt' \\
\Rightarrow A_t N_t h_t &= \frac{n+v+\alpha}{n+v} A_t \tilde{N}_t \int_t^\infty e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t)} w_{t'} \left[\frac{1}{n+v+\alpha} \right] dt' \\
\Rightarrow h_t &= \int_t^\infty e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t)} w_{t'} dt' \quad (162) \\
\Rightarrow \dot{h}_t &= \frac{\partial}{\partial t} \int_t^\infty e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t)} w_{t'} dt' \\
\Rightarrow \dot{h}_t &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(r^*+v+\alpha-g)(T-t)} w_T \frac{\partial}{\partial t}(T) - e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t-t)} w_t \frac{\partial}{\partial t}(t) + \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t)} w_{t'} \right] dt' \\
\Rightarrow \dot{h}_t &= (r^* + v + \alpha - g) \int_t^\infty e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t)} w_{t'} dt' - w_t \\
\Rightarrow \dot{h}_t &= (r^* + v + \alpha - g) h_t - w_t \quad (163)
\end{aligned}$$

Alternativamente, podemos derivar em relação ao tempo a expressão que descreve o capital humano agregado, obtendo

$$\begin{aligned}
H_t &= \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} h(s, t) ds \quad (142) \\
\Rightarrow \dot{H}_t &= n \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} h(s, t) ds \\
&\quad + \tilde{N}_t \left[h(t, t) - (n+v) \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} h(s, t) ds + \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial}{\partial t} h(s, t) ds \right] \\
\Rightarrow \dot{H}_t &= \tilde{N}_t h(t, t) - v \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} h(s, t) ds + \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial}{\partial t} h(s, t) ds \\
\Rightarrow \dot{H}_t &= \tilde{N}_t h(t, t) - v H_t + \int_{-\infty}^t N(s, t) \frac{\partial h(s, t)}{\partial t} ds \\
\Rightarrow \dot{H}_t &= \tilde{N}_t h(t, t) - v H_t + \int_{-\infty}^t N(s, t) [(r^* + v) h(s, t) - \omega(s, t)] ds \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} (A_t N_t h_t) &= \tilde{N}_t h(t, t) - v H_t + (r^* + v) H_t - A_t N_t w_t \\
\Rightarrow \dot{h}_t + (g + n) h_t &= r^* h_t - w_t + (n + v) \frac{1}{A_t} h(t, t) \\
\Rightarrow \dot{h}_t &= (r^* - g - n) h_t - w_t + (n + v) \frac{1}{A_t} \int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} \omega(t, t') dt' \\
\Rightarrow \dot{h}_t &= R^* h_t - w_t + (n + v) \frac{1}{A_t} \int_t^\infty e^{-(r^*+v)(t'-t)} \left[\frac{n + v + \alpha}{n + v} e^{-\alpha(t'-t)} A_{t'} w_{t'} \right] dt' \\
\Rightarrow \dot{h}_t &= R^* h_t - w_t + (n + v + \alpha) \int_t^\infty e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t)} w_{t'} dt' \\
\Rightarrow \dot{h}_t &= [(r^* - g - n) + (n + v + \alpha)] h_t - w_t \\
\Rightarrow \dot{h}_t &= (r^* + v + \alpha - g) h_t - w_t \quad (164)
\end{aligned}$$

Observe-se que estamos utilizando a equação (131) e a condição de factibilidade do sistema previdenciário $\int_{-\infty}^t N(s, t) b p(s, t) ds = 0$ para obter

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^t N(s, t) \omega(s, t) ds = \int_{-\infty}^t N(s, t) X_t^2 e^{-\alpha(t-s)} A_t w_t ds \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^t N(s, t) \omega(s, t) ds &= \int_{-\infty}^t N(s, t) X_t^1 e^{-\beta(t-s)} A_t w_t ds \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^t N(s, t) \omega(s, t) ds &= \int_{-\infty}^t N(s, t) w(s, t) ds \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^t N(s, t) \omega(s, t) ds &= A_t N_t w_t \quad (165)
\end{aligned}$$

3.4.4 Dinâmica do consumo agregado

Derivando (144) em relação ao tempo obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [\lambda_t^{-\sigma}] &= \frac{d}{dt} \{j_{3t}^{-1} [h_t + a_t]\} \\
\Rightarrow -\sigma \lambda_t^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}^2} [h_t + a_t] + j_{3t}^{-1} [\dot{h}_t + \dot{q}_t k_t + q_t \dot{k}_t - \dot{b}_t] \\
\Rightarrow -\sigma \lambda_t^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda_t^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} [\dot{h}_t + \dot{q}_t k_t + q_t \dot{k}_t - \dot{b}_t]
\end{aligned}$$

Utilizando as equações (151), (154), (164) e (160) obtemos

$$\begin{aligned}
& -\sigma \lambda_t^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda_t^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} \{ (r^* + v + \alpha - g) h_t - w_t \\
& + [(r^* + v) q_t - (r_t + v - \delta)] k_t + q_t [i_t - \delta^{EF} k_t] \\
& - [R^* b_t + \lambda_t^{-\sigma} j_2(p_t) - \omega_t - (r_t + v - \delta) k_t + q_t [i_t - (\delta - v) k_t]] \} \\
& \Rightarrow -\sigma \lambda_t^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda_t^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} \{ (r^* + v + \alpha - g) h_t + (r^* + v) q_t k_t - (g + n + v) q_t k_t - [R^* b_t + \lambda_t^{-\sigma} j_2(p_t)] \} \\
& \Rightarrow -\sigma \lambda_t^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda_t^{-\sigma} + j_{3t}^{-1} \{ (r^* + v + \alpha - g) [j_{3t} \lambda_t^{-\sigma} - a_t] + (r^* - g - n) q_t k_t - R^* b_t - \lambda_t^{-\sigma} j_2(p_t) \} \\
& \Rightarrow -\sigma \lambda_t^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda_t^{-\sigma} + (r^* + v + \alpha - g) \lambda_t^{-\sigma} - j_{3t}^{-1} (r^* + v + \alpha - g) a_t + j_{3t}^{-1} R^* a_t - \lambda_t^{-\sigma} \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}} \\
& \Rightarrow -\sigma \lambda_t^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} \lambda_t^{-\sigma} + \left(r^* + v + \alpha - g - \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}} \right) \lambda_t^{-\sigma} - j_{3t}^{-1} (\alpha + v + n) a_t \\
& \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} - \left(r^* + v + \alpha - g - \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}} \right) + j_{3t}^{-1} (\alpha + v + n) a_t \lambda_t^\sigma \right] \tag{166}
\end{aligned}$$

onde

$$(69) : \quad j_2(p_t) \equiv [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}}$$

$$(130) : \quad j_{3t} \equiv \int_t^\infty e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} j_2(p_{t'}) dt'$$

$$(135) : \quad \frac{\dot{j}_{3t}}{j_{3t}} = \rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho) - \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}}$$

Levando (135) em (166) obtemos a *equação de Euler*:

$$\begin{aligned}
& \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \left[\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho) - \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}} \right] - \left(r^* + v + \alpha - g - \frac{j_2(p_t)}{j_{3t}} \right) + j_{3t}^{-1} (\alpha + v + n) a_t \lambda_t^\sigma \right\} \\
& \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\sigma} [\rho + g + (1-\sigma)(r^* - \rho) - (r^* + \alpha) + j_{3t}^{-1} (\alpha + v + n) (q_t k_t - b_t) \lambda_t^\sigma] \tag{167}
\end{aligned}$$

A expressão (167) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\sigma} [-\sigma(r^* - \rho) + (g - \alpha) + j_{3t}^{-1} (\alpha + v + n) (q_t k_t - b_t) \lambda_t^\sigma] \\
& \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \rho - r^* + \frac{g}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} [-\alpha + j_{3t}^{-1} (\alpha + v + n) (q_t k_t - b_t) \lambda_t^\sigma] \tag{168}
\end{aligned}$$

Repare que, não fosse pela última parcela do lado direito de (168), teríamos chegado à *equação de Euler* do modelo de crescimento neoclássico com agente representativo e um setor em economia fechada:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \rho - r^* + \frac{g}{\sigma} \tag{169}$$

Além disso, caso a taxa de juros internacional fosse a mesma observada no modelo de agente representativo,

$$(228) : \quad r^* = \rho + \frac{g}{\sigma}$$

a *Equação de Euler* se tornaria

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\sigma} [-\alpha + j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)(q_t k_t - b_t)\lambda_t^\sigma] \quad (170)$$

Também podemos obter uma expressão para a dinâmica de λ partindo diretamente da expressão para agregação do consumo, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \Lambda_t^{-\sigma} &= \int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\Lambda_t^{-\sigma}) &= n \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \\ &\quad + \tilde{N}_t \left[\lambda(t, t)^{-\sigma} - (n+v) \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \lambda(s, t)^{-\sigma} ds + \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \right] \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\Lambda_t^{-\sigma}) &= \tilde{N}_t \lambda(t, t)^{-\sigma} - v \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \lambda(s, t)^{-\sigma} ds + \tilde{N}_t \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\Lambda_t^{-\sigma}) &= \tilde{N}_t \lambda(t, t)^{-\sigma} - v \Lambda_t^{-\sigma} - \sigma \int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}(s, t)}{\lambda(s, t)} ds \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\Lambda_t^{-\sigma}) &= \tilde{N}_t \lambda(t, t)^{-\sigma} - v \Lambda_t^{-\sigma} - \sigma(\rho - r^*) \int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\Lambda_t^{-\sigma}) &= \tilde{N}_t \lambda(t, t)^{-\sigma} - v \Lambda_t^{-\sigma} - \sigma(\rho - r^*) \Lambda_t^{-\sigma} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (A_t N_t \lambda_t^{-\sigma}) &= \tilde{N}_t \lambda(t, t)^{-\sigma} - v A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} - \sigma(\rho - r^*) A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} \\ \Rightarrow (\dot{A}_t N_t + A_t \dot{N}_t) \lambda_t^{-\sigma} - \sigma A_t N_t \lambda_t^{-\sigma-1} \dot{\lambda}_t &= \tilde{N}_t \lambda(t, t)^{-\sigma} - v A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} - \sigma(\rho - r^*) A_t N_t \lambda_t^{-\sigma} \\ \Rightarrow (g + n) \lambda_t^{-\sigma} - \sigma \lambda_t^{-\sigma} \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{\tilde{N}_t}{A_t N_t} \lambda(t, t)^{-\sigma} - v \lambda_t^{-\sigma} - \sigma(\rho - r^*) \lambda_t^{-\sigma} \\ \Rightarrow g + n - \sigma \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{n+v}{A_t} \left(\frac{\lambda(t, t)}{\lambda_t} \right)^{-\sigma} - v - \sigma(\rho - r^*) \\ \Rightarrow -\sigma \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{n+v}{A_t} \left(\frac{\lambda(t, t)}{\lambda_t} \right)^{-\sigma} - (g + n + v) - \sigma(\rho - r^*) \\ \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= -\frac{n+v}{\sigma} \left(\frac{A_t^\sigma \lambda(t, t)}{\lambda_t} \right)^{-\sigma} + \frac{g+n+v}{\sigma} + \rho - r^* \\ \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \rho - r^* + \frac{g}{\sigma} + \frac{n+v}{\sigma} \left[1 - \left(\frac{A_t^\sigma \lambda(t, t)}{\lambda_t} \right)^{-\sigma} \right] \end{aligned} \quad (171)$$

Impondo a condição (228) obtemos

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{n+v}{\sigma} \left[1 - \left(\frac{A_t^\sigma \lambda(t, t)}{\lambda_t} \right)^{-\sigma} \right] \quad (172)$$

Igualando (170) a (172) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma} [-\alpha + j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)(q_t k_t - b_t)\lambda_t^\sigma] = \frac{n + v}{\sigma} \left[1 - \left(\frac{A_t^\sigma \lambda(t, t)}{\lambda_t} \right)^{-\sigma} \right] \\
& \Rightarrow -\alpha + j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)(q_t k_t - b_t)\lambda_t^\sigma + (n + v) \left(\frac{A_t^\sigma \lambda(t, t)}{\lambda_t} \right)^{-\sigma} = n + v \\
& \Rightarrow j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)(q_t k_t - b_t)\lambda_t^\sigma + \frac{n + v}{A_t} \lambda(t, t)^{-\sigma} \lambda_t^\sigma = n + v + \alpha \\
& \Rightarrow j_{3t}^{-1}(q_t k_t - b_t) + \frac{1}{A_t} \frac{n + v}{n + v + \alpha} \lambda(t, t)^{-\sigma} = \lambda_t^{-\sigma} \\
& \Rightarrow \left(\frac{\lambda(t, t)}{\lambda_t} \right)^{-\sigma} = \frac{n + v + \alpha}{n + v} A_t \left[1 - \frac{q_t k_t - b_t}{j_{3t}} \lambda_t^\sigma \right] \\
& \Rightarrow \lambda(t, t)^{-\sigma} = \frac{n + v + \alpha}{n + v} A_t \left[1 - \frac{q_t k_t - b_t}{j_{3t}} \lambda_t^\sigma \right] \lambda_t^{-\sigma} \\
& \Rightarrow \lambda(t, t)^{-\sigma} = \frac{n + v + \alpha}{n + v} A_t \left[\lambda_t^{-\sigma} - \frac{q_t k_t - b_t}{j_{3t}} \right] \\
& \Rightarrow \lambda(t, t)^{-\sigma} = \frac{n + v + \alpha}{n + v} A_t \left[j_{3t}^{-1}(h_t + a_t) - \frac{q_t k_t - b_t}{j_{3t}} \right] \\
& \Rightarrow \lambda(t, t)^{-\sigma} = \frac{n + v + \alpha}{n + v} A_t \frac{h_t}{j_{3t}} \\
& \Rightarrow \lambda(t, t)^{-\sigma} = A_t \frac{n + v + \alpha}{n + v} j_{3t}^{-1} \int_t^\infty e^{-(r^* + v + \alpha - g)(t' - t)} w_{t'} dt' \\
& \Rightarrow \lambda(t, t)^{-\sigma} = j_{3t}^{-1} \int_t^\infty e^{-(r^* + v + \alpha - g)(t' - t)} e^{(\alpha - g)(t' - t)} \omega(t, t') dt' \\
& \Rightarrow \lambda(t, t)^{-\sigma} = j_{3t}^{-1} \int_t^\infty e^{-(r^* + v)(t' - t)} \omega(t, t') dt' \tag{173}
\end{aligned}$$

3.5 Equação de equilíbrio no mercado de bens domésticos

O preço relativo do bem doméstico deve ser tal que sua demanda, dada pelo consumo do bem doméstico acrescida do custo de instalação do capital, seja igual à sua oferta:

$$\begin{aligned}
& c_{1t}(p_t, \lambda_t) + (i_t - (\delta - v)k_t)x_t = y_1(p_t, k_t) \\
& \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + (i_t - (\delta - v)k_t)x_t = a_1^{\alpha_1 - 1} \frac{a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \\
& \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + (i_t - (\delta - v)k_t)x_t = W_1(p_t) - Z_1(p_t)k_t \tag{174}
\end{aligned}$$

Podemos expressar o custo de instalação do capital da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& ci_t = [i_t - (\delta - v)k_t] x_t \\
& \Rightarrow ci_t = \left[\dot{k}_t + \delta^{EF} k_t - (\delta - v)k_t \right] b\phi(p_t, q_t)^\xi \\
& \Rightarrow ci_t = [(\phi(p_t, q_t) + g + n + v)k_t] b \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} \right]^\xi \\
& \Rightarrow ci_t = k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right)
\end{aligned}$$

Repare que o custo de instalação é decrescente no parâmetro b , isto é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial ci_t}{\partial b} &= k_t \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) \left[\frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \left(-\frac{q_t - 1}{b^2 p_t} \right) \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial ci_t}{\partial b} &= -\frac{k_t}{b\xi} \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial ci_t}{\partial b} &= -\frac{k_t}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{\xi+1}{\xi}} < 0\end{aligned}$$

Logo, a equação de equilíbrio do mercado de bens domésticos se torna

$$\left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) = W_1(p_t) - Z_1(p_t)k_t \quad (175)$$

$$\Rightarrow p_t = p_t(k_t, q_t, \lambda_t) \quad (176)$$

3.6 Definição do Equilíbrio

Um equilíbrio competitivo nesta economia é definido como trajetórias consumo de cada geração, $\{c_1(s, t), c_2(s, t)\}_{t \in [0, \infty)}$, de capital, dívida externa, alocações setoriais de fatores de produção, $\{k_t, b_t, k_{1t}, k_{2t}, l_{1t}, l_{2t}\}_{t \in [0, \infty)}$, e preços, $\{r_t, w_t, p_t\}_{t \in [0, \infty)}$, tais que o cada geração maximiza sua utilidade dadas suas condições iniciais, $k(s, s)$ e $b(s, s)$, e tomando como dada a trajetória de preços, $\{r_t, w_t, p_t\}_{t \in [0, \infty)}$; as firmas maximizem seus lucros tomando como dada a trajetória de preços, $\{r_t, w_t, p_t\}_{t \in [0, \infty)}$; e as condições de factibilidade sejam válidas, incluindo a igualdade entre oferta e demanda agregadas de bens não-comercializáveis em cada período e a restrição orçamentária intertemporal de cada geração.

3.7 Estado Estacionário

Avaliando as condições de primeira ordem do problema das firmas no estado estacionário encontramos k_1^{ss} , k_2^{ss} , p^{ss} e w^{ss} de forma análoga ao procedimento adotado no *Capítulo 1*:

$$(91) : \quad k_1^{ss} = a \frac{\eta_1}{\eta_2} \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}}$$

$$(88) : \quad k_2^{ss} = \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}}$$

$$(89) : \quad w^{ss} = a(1 - \alpha_2) \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1}}$$

$$(93) : \quad p^{ss} = a^{1-\alpha_1} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - 1}}$$

Agora vamos encontrar o valor de estado estacionário para o preço-sombra do investimento. Da equação que descreve a dinâmica do preço do capital (equação (154)) temos:

$$0 = (r^* + v)q^{ss} - (r^{ss} + v - \delta)$$

Lembrando que $r^{ss} = f'_2(k_2^{ss}) = r^* + \delta$ fica evidente que $q = 1$ constitui um ponto de repouso para o preço-sombra do capital. Observando a lei de movimento do capital, concluímos que $q = 1$ é compatível com $\dot{k} = 0$.

Repare que, avaliando (130) em estado estacionário, temos

$$\begin{aligned}
j_3^{ss} &= \int_t^\infty e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} j_2(p^{ss}) dt' \\
\Rightarrow j_3^{ss} &= j_2(p^{ss}) \int_t^\infty e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} dt' \\
\Rightarrow j_3^{ss} &= j_2(p^{ss}) \left[-\frac{e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)}}{\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)} \right]_{t'=0}^{t'=\infty} \\
\Rightarrow j_3^{ss} &= \frac{j_2(p^{ss})}{\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)}
\end{aligned} \tag{177}$$

Então, avaliando (167) em estado estacionário, temos

$$\begin{aligned}
0 &= (\rho+g) + (1-\sigma)(r^*-\rho) - (r^*+\alpha) + (j_3^{ss})^{-1}(\alpha+v+n)(k^{ss}-b^{ss})(\lambda^{ss})^\sigma \\
\Rightarrow 0 &= (\rho+g) + (1-\sigma)(r^*-\rho) - (r^*+\alpha) + (j_2^{ss})^{-1}[(\rho+v) + (1-\sigma)(r^*-\rho)](\alpha+v+n)(k^{ss}-b^{ss})(\lambda^{ss})^\sigma \\
\Rightarrow (k^{ss}-b^{ss})(\lambda^{ss})^\sigma &= j_2(p^{ss}) \frac{(r^*+\alpha) - (1-\sigma)(r^*-\rho) - (\rho+g)}{[(\rho+v) + (1-\sigma)(r^*-\rho)](\alpha+v+n)} \\
\Rightarrow b^{ss} &= k^{ss} - j_2(p^{ss}) \frac{(r^*+\alpha) - (1-\sigma)(r^*-\rho) - (\rho+g)}{[(\rho+v) + (1-\sigma)(r^*-\rho)](\alpha+v+n)} (\lambda^{ss})^{-\sigma}
\end{aligned} \tag{178}$$

Defino o parâmetro

$$\Upsilon \equiv \frac{[(\rho+v) + (1-\sigma)(r^*-\rho)](\alpha+v+n)}{(r^*+\alpha) - (1-\sigma)(r^*-\rho) - (\rho+g)} \tag{179}$$

Lembrando que o dispêndio com consumo é dado por

$$D(p) \equiv pc_1 + c_2 = j_2(p)\lambda^{-\sigma} \tag{180}$$

fica evidente que Υ corresponde à razão entre o consumo e a riqueza no longo prazo. Isto é:

$$\begin{aligned}
\Upsilon &= \frac{j_2(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma}}{k^{ss}-b^{ss}} \\
\Rightarrow \Upsilon &= \frac{p^{ss}c_1^{ss} + c_2^{ss}}{k^{ss}-b^{ss}} \\
\Rightarrow \Upsilon &= \frac{D(p^{ss})}{k^{ss}-b^{ss}} \\
\Rightarrow b^{ss} &= k^{ss} - \frac{D(p^{ss})}{\Upsilon}
\end{aligned} \tag{181}$$

Avaliando (158) em estado estacionário temos

$$\begin{aligned}
0 &= R^*b^{ss} + (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} + k^{ss} \left[\left(\frac{q^{ss}-1}{bp^{ss}} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} - Z_2(p^{ss}) \right] + W_2(p^{ss}) \\
\Rightarrow b^{ss} &= \frac{1}{R^*} [(Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF})k^{ss} - W_2(p^{ss}) - (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma}]
\end{aligned} \tag{182}$$

Igualando (178) e (182) obtemos

$$\begin{aligned}
k^{ss} - \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} &= \frac{1}{R^*} [(Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF})k^{ss} - W_2(p^{ss}) - (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma}] \\
\Rightarrow \left[\frac{1}{R^*} (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss}) \right] (\lambda^{ss})^{-\sigma} &= \frac{1}{R^*} [Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF} - R^*] k^{ss} - \frac{W_2(p^{ss})}{R^*} \\
\Rightarrow \left[\frac{1}{R^*} (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss}) \right] (\lambda^{ss})^{-\sigma} &= [Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)] k^{ss} - \frac{W_2(p^{ss})}{R^*} \\
\Rightarrow (\lambda^{ss})^{-\sigma} &= \frac{\frac{1}{R^*} [Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)] k^{ss} - \frac{W_2(p^{ss})}{R^*}}{\frac{1}{R^*} (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})} \\
\Rightarrow (\lambda^{ss})^{-\sigma} &= \frac{[Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)] k^{ss} - W_2(p^{ss})}{(1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - R^* \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})} \\
\Rightarrow \lambda^{ss} &= \left[\frac{(1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - R^* j_2(p^{ss}) \frac{(r^* + \alpha) - (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (\rho + g)}{(\rho + v + (1 - \sigma)(r^* - \rho))(\alpha + v + n)}}{[Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)] k^{ss} - W_2(p^{ss})} \right]^{1/\sigma}
\end{aligned} \tag{183}$$

Portanto, a utilidade marginal do consumo de estado estacionário está plenamente determinada pelo capital por trabalhador efetivo e pelo câmbio de estado estacionário: $\lambda^{ss} \equiv \lambda^{ss}(k^{ss}, p^{ss})$. Além disso, basta observarmos (178) para perceber que o mesmo vale para a dívida externa de estado estacionário: $b^{ss} \equiv b^{ss}(k^{ss}, p^{ss})$

O capital agregado por trabalhador efetivo de estado estacionário, k^{ss} , será calculado de modo que a condição de factibilidade no mercado de bens domésticos seja respeitada:

$$\begin{aligned}
c_1(p^{ss}, \lambda^{ss}) &= y_1(p^{ss}, k^{ss}) \\
\Rightarrow \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} &= W_1(p^{ss}) - Z_1(p^{ss})k^{ss} \\
\Rightarrow Z_1(p^{ss})k^{ss} &= W_1(p^{ss}) - \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} \\
\Rightarrow Z_1(p^{ss})k^{ss} &= W_1(p^{ss}) - \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss}) \left[\frac{[Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)] k^{ss} - W_2(p^{ss})}{(1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - R^* \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})} \right] \\
\Rightarrow Z_1(p^{ss})k^{ss} &= W_1(p^{ss}) + \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss})}{(1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - R^* \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})} [(r^* + \delta - Z_2(p^{ss}))k^{ss} + W_2(p^{ss})]
\end{aligned}$$

Defino

$$\Omega_3 \equiv \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss})}{(1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - R^* \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})} \tag{184}$$

Então temos

$$\begin{aligned}
Z_1(p^{ss})k^{ss} &= W_1(p^{ss}) + \Omega_3 [(r^* + \delta - Z_2(p^{ss}))k^{ss} + W_2(p^{ss})] \\
\Rightarrow \{Z_1(p^{ss}) + \Omega_3 [Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)]\} k^{ss} &= W_1(p^{ss}) + \Omega_3 W_2(p^{ss}) \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{W_1(p^{ss}) + \Omega_3 W_2(p^{ss})}{Z_1(p^{ss}) + \Omega_3 [Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)]}
\end{aligned} \tag{185}$$

onde

$$(184) : \Omega_3 \equiv \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}}\right)^\varepsilon j_1(p^{ss})}{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - R^* \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})}$$

$$(179) : \Upsilon \equiv \frac{[(\rho+v) + (1-\sigma)(r^*-\rho)](\alpha+v+n)}{(r^*+\alpha) - (1-\sigma)(r^*-\rho) - (\rho+g)}$$

$$(93) : p^{ss} = a^{1-\alpha_1} \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{r^*+\delta}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-1}}$$

$$(68) - (69) : j_1(p) \equiv [\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \quad j_2(p) \equiv [\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}}$$

$$(29) - (32) : Z_i(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_i^{\alpha_i} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p\right)^{\frac{\alpha_i-1}{\alpha_2-\alpha_1}}, \quad W_i(p) \equiv a_1 \eta_{-i} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p\right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_i(p), \quad i \in \{1, 2\}$$

$$(10), (12), (13) : a_1 = a^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}}, \quad \eta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}, \quad \Omega_i = \frac{(1+\eta_i)}{\eta_i^{\alpha_i}}, \quad i \in \{1, 2\}$$

Portanto, dado que $p^{ss} \equiv p^{ss}(a, \alpha_1, \alpha_2, r^*, \delta)$, temos $k^{ss} \equiv k^{ss}(a, \alpha_1, \alpha_2, r^*, \delta, \rho, \gamma, \varepsilon, \sigma, \alpha, v, g, n)$, $\lambda^{ss} \equiv \lambda^{ss}(a, \alpha_1, \alpha_2, r^*, \delta, \rho, \gamma, \varepsilon, \sigma, \alpha, v, g, n)$ e $b^{ss} \equiv b^{ss}(a, \alpha_1, \alpha_2, r^*, \delta, \rho, \gamma, \varepsilon, \sigma, \alpha, v, g, n)$.

3.8 Estática Comparativa

Obtemos, empiricamente, as seguintes relações:

$$\frac{\partial k^{ss}}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial b^{ss}}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial a^{ss}}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial \lambda^{ss}}{\partial \alpha} < 0$$

Quanto mais generoso for o sistema previdenciário, menor será o estímulo à acumulação de ativos e, conseqüentemente, maior será a dívida externa de longo prazo. Uma dívida maior implicará numa transferência líquida de recursos ao exterior também maior, sob a forma de exportações líquidas do bem capital-intensivo, o que implicará numa relação capital / trabalho maior. A riqueza líquida de longo prazo, $k^{ss} - b^{ss}$, entretanto, será menor, refletindo a menor acumulação de ativos ao longo da dinâmica de transição (isto é, o excesso de dívida *domina* o excesso de capital). Como a economia possui menos riqueza, é natural que seu consumo de longo prazo também seja menor.

O *Anexo 5.1* apresenta a sensibilidade ao gasto previdenciário de longo prazo do estado estacionário do modelo obtida através da *calibração base* apresentada no próximo capítulo.

A obtenção dos sinais das derivadas algebricamente parece ser um exercício fadado à frustração, como pode ser visto abaixo.

$$(185) : k^{ss} = \frac{W_1(p^{ss}) + \Omega_3 W_2(p^{ss})}{Z_1(p^{ss}) + \Omega_3 [Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)]}$$

onde

$$(184) : \Omega_3 \equiv \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}}\right)^\varepsilon j_1(p^{ss})}{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - R^* \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})}$$

$$(179) : \Upsilon \equiv \frac{[(\rho+v) + (1-\sigma)(r^*-\rho)](\alpha+v+n)}{(r^*+\alpha) - (1-\sigma)(r^*-\rho) - (\rho+g)}$$

Derivando Υ em relação a α temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \Upsilon &= \frac{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^* - \rho)] \{ (r^* + \alpha) - (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (\rho + g) - (\alpha + v + n) \}}{[(r^* + \alpha) - (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (\rho + g)]^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \Upsilon &= \frac{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^* - \rho)] \{ \sigma(r^* - \rho) - (g + v + n) \}}{[(r^* + \alpha) - (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (\rho + g)]^2}\end{aligned}$$

Então, supondo $\sigma \leq 1$, temos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Upsilon \geq 0 \Leftrightarrow r^* \geq \rho + \frac{g + n + v}{\sigma} \quad (186)$$

Na *calibração base* temos $\rho = 0.0229$, $\sigma = 0.50$, $g = 0.015$, $n = 0.01$ e $v = 0.0125$, de modo que

$$\rho + \frac{g + n + v}{\sigma} = 0.0979 > 0.06 = r^* \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \Upsilon < 0 \quad (187)$$

Então temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega_3 &= - \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}}\right)^\varepsilon j_1(p^{ss})}{[(1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - R^* \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})]^2} R^* j_2(p^{ss}) \frac{1}{\Upsilon^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Upsilon \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega_3 &> 0\end{aligned} \quad (188)$$

$$\begin{aligned}k^{ss} &= \frac{W_1(p^{ss}) + \Omega_3 W_2(p^{ss})}{Z_1(p^{ss}) + \Omega_3 [Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)]} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} k^{ss} &= \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega_3 W_2(p^{ss}) \{Z_1(p^{ss}) + \Omega_3 [Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)]\} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega_3 [Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)] \{W_1(p^{ss}) + \Omega_3 W_2(p^{ss})\}}{\{Z_1(p^{ss}) + \Omega_3 [Z_2(p^{ss}) - (r^* + \delta)]\}^2} \\ sinal \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} k^{ss} \right) &=?\end{aligned} \quad (189)$$

Podemos mostrar que, se duas pequenas economias abertas, com os mesmos parâmetros de preferências e tecnologias, iniciam a dinâmica de transição com a mesma riqueza inicial ($a_{t_0} \equiv q_{t_0} k_{t_0} - b_{t_0}$) mas com sistemas previdenciários diferentes, a economia com previdência mais generosa (α menor) apresentará consumo inicial ($\lambda_{t_0}^{-\sigma}$) maior.

$$\begin{aligned}
\Lambda_{t_0}^{-\sigma} &= A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} = \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) \lambda(s, t_0)^{-\sigma} ds \\
\Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) j_{3t_0}^{-1} [h(s, t_0) + a(s, t_0)] ds \\
\Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) a(s, t_0) ds + j_{3t_0}^{-1} \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) h(s, t_0) ds \\
\Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} A_{t_0} N_{t_0} a_{t_0} + j_{3t_0}^{-1} \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-(r^*+v)(t'-t_0)} \omega(s, t') dt' \right] ds \\
\Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} A_{t_0} N_{t_0} a_{t_0} + j_{3t_0}^{-1} \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-(r^*+v)(t'-t_0)} X^2 e^{-\alpha(t'-s)} A_{t'} w_{t'} dt' \right] ds \\
\Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} A_{t_0} N_{t_0} a_{t_0} \\
&\quad + j_{3t_0}^{-1} \frac{n+v+\alpha}{n+v} A_{t_0} (n+v) N_{t_0} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-(r^*+v)(t'-t_0)} e^{g(t'-t_0)-\alpha(t'-s)} w_{t'} dt' \right] ds \\
\Rightarrow \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \left\{ a_{t_0} + (n+v+\alpha) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v+\alpha)(t_0-s)} \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t_0)} w_{t'} dt' \right] ds \right\} \\
\Rightarrow \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \left\{ a_{t_0} + \frac{n+v+\alpha}{n+v+\alpha} \int_{t_0}^{\infty} e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t_0)} w_{t'} dt' \right\} \\
\Rightarrow \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \left\{ a_{t_0} + \int_{t_0}^{\infty} e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t_0)} w_{t'} dt' \right\} \tag{190} \\
\Rightarrow \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \{ a_{t_0} + h_{t_0} \} \tag{191}
\end{aligned}$$

Então temos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \lambda_{t_0}^{-\sigma} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \lambda_{t_0} > 0, \quad \frac{\partial}{\partial b_{t_0}} \lambda_{t_0} > 0, \quad \frac{\partial}{\partial k_{t_0}} \lambda_{t_0} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_{t_0}} \lambda_{t_0} < 0$$

Isto é, sob a ótica da população viva em t_0 , um α maior significa um capital humano menor e, portanto, uma renda permanente menor. Portanto, sistemas de previdências mais avarentos produzirão um nível menor de consumo na fase inicial da dinâmica de transição.

Repare, para que as riquezas iniciais (a_{t_0}) sejam iguais não basta que os níveis de capital e dívida externa iniciais (k_{t_0} e b_{t_0}) sejam os mesmos. É preciso que o preço-sombra do capital q_{t_0} também seja o mesmo. Duas economias com os mesmos níveis de capital e dívida externa, porém com sistemas previdenciários diferentes, poderão apresentar diferentes níveis para o preço-sombra do capital inicial. Como, de (319), (320) e (321), temos

$$\frac{\partial p_{t_0}}{\partial k_{t_0}} > 0, \quad \frac{\partial p_{t_0}}{\partial q_{t_0}} > 0, \quad \frac{\partial p_{t_0}}{\partial \lambda_{t_0}} < 0,$$

não podemos afirmar que o câmbio inicial da economia com previdência mais generosa será mais apreciado, embora este seja o resultado encontrado na calibração. Isto é, ainda que o consumo inicial seja maior na economia com previdência mais generosa, é possível, em tese, que a diferença em q_0 produza efeito contrário cuja magnitude só pode ser descoberta empiricamente. Entretanto, caso não houvesse custo de instalação do capital ou se este custo não ocorresse em bens domésticos, poderíamos, sim, afirmar que o câmbio inicial da economia com previdência mais generosa seria mais apreciado.

Avaliando (191) em estado estacionário, e utilizando (177) e (181), obtemos a razão entre salário (w^{ss}) e riqueza (a^{ss}) de longo prazo, conforme abaixo.

$$\begin{aligned}
(\lambda_{t_0}^{ss})^{-\sigma} &= (j_3^{ss})^{-1} \{a^{ss} + h^{ss}\} \\
\Rightarrow (\lambda_{t_0}^{ss})^{-\sigma} &= (j_3^{ss})^{-1} \left\{ a^{ss} + \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{\infty} e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t_0)} w^{ss} dt' \right\} \\
\Rightarrow (\lambda_{t_0}^{ss})^{-\sigma} &= \frac{\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho)}{j_2(p^{ss})} \left\{ a^{ss} + w^{ss} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{\infty} e^{-(r^*+v+\alpha-g)(t'-t_0)} dt' \right\} \\
\Rightarrow j_2(p^{ss})(\lambda_{t_0}^{ss})^{-\sigma} &= [\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho)] \left\{ a^{ss} + \frac{w^{ss}}{r^* + v + \alpha - g} \right\} \\
\Rightarrow \Upsilon a^{ss} &= [\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho)] \left\{ a^{ss} + \frac{w^{ss}}{r^* + v + \alpha - g} \right\} \\
\Rightarrow \{\Upsilon - [\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho)]\} a^{ss} &= \frac{\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho)}{r^* + v + \alpha - g} w^{ss} \\
\Rightarrow \frac{w^{ss}}{a^{ss}} &= \frac{\Upsilon - [\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho)]}{\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho)} (r^* + v + \alpha - g) \\
\Rightarrow \frac{w^{ss}}{k^{ss} - b^{ss}} &= \frac{\Upsilon - [\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho)]}{\rho + v + (1-\sigma)(r^* - \rho)} (r^* + v + \alpha - g) \quad (192)
\end{aligned}$$

Finalmente, note-se que o resultado de que o câmbio de longo prazo independe do sistema de previdência está baseado na premissa de estarmos tratando de uma pequena economia aberta, que toma a taxa de juros internacional como dada. Neste contexto, o câmbio de longo prazo é determinado no problema das firmas em conjunto com a condição de não-arbitragem de taxas de juros. Entretanto, no *Anexo 5.5* mostramos que, em economia fechada, o preço relativo do bem trabalho-intensivo de longo prazo depende de α , sugerindo que uma mudança em escala global nos estímulos à formação de poupança poderia afetar o câmbio de equilíbrio.

3.9 Dinâmica consolidada e método numérico

A dinâmica do modelo pode ser caracterizada a partir das condições iniciais k_0 , q_0 , λ_0 e b_0 , das condições de transversalidade (122) e (123), em conjunto com o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{k}_t &= k_t \left[\frac{q_t - 1}{bp_t} \right]^{1/\xi} \quad (152) \\
\dot{q}_t &= (r^* + v)q_t - (r_t + v - \delta) \quad (154) \\
\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{1}{\sigma} [(\rho + g) + (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (r^* + \alpha) + j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)(q_t k_t - b_t)\lambda_t^\sigma] \quad (167) \\
\dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} - Z_2(p_t) \right] + W_2(p_t) \quad (158) \\
\left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) &= W_1(p_t) - Z_1(p_t)k_t \quad (175)
\end{aligned} \right.$$

onde

$$\begin{aligned}
(130) : \quad j_{3t} &\equiv \int_t^\infty e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} j_2(p_{t'}) dt' \\
(68) - (69) : \quad j_1(p) &\equiv [\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \quad j_2(p) \equiv [\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}} \\
(29) - (32) : \quad Z_i(p) &\equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_i^{\alpha_i} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_i-1}{\alpha_2-\alpha_1}}, \quad W_i(p) \equiv a_1 \eta_{-i} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_i(p), \quad i \in \{1, 2\} \\
(10), (12), (13) : \quad a_1 &= a^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}}, \quad \eta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}, \quad \Omega_i = \frac{(1+\eta_i)}{\eta_i^{\alpha_i}}, \quad i \in \{1, 2\}
\end{aligned}$$

A principal diferença deste sistema dinâmico em relação ao do modelo com agente representativo, resumido na *seção 2.8*, se refere à dinâmica do consumo. É útil colocar as duas *equações de Euler* lado a lado, conforme abaixo.

$$\begin{aligned}
(40) : \quad \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \rho + g - r^* \\
(167) : \quad \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{1}{\sigma} [(\rho + g) + (1-\sigma)(r^* - \rho) - (r^* + \alpha) + j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)(q_t k_t - b_t) \lambda_t^\sigma]
\end{aligned}$$

Ao contrário do que acontece no modelo com agente representativo, o modelo de juventude perpétua não apresenta independência entre a dinâmica do consumo e das demais variáveis. De fato, a dinâmica de λ_t passa a depender da riqueza a economia, $a_t \equiv q_t k_t - b_t$. Além disso, a variável relacionada ao sistema previdenciário, α , entra na equação potencializando os efeitos da taxa de juros internacional. Isto é, quanto mais avarento for o sistema previdenciário, ou, equivalentemente, quanto maior for α , mais declinante será a trajetória da utilidade marginal do consumo. Logo, um gasto previdenciário menor estará associado a um perfil de consumo mais inclinado, com níveis de poupança maiores nos primeiros estágios da dinâmica de transição.

Outra característica a se notar é que, neste modelo, os valores de estado estacionário tanto para a dívida externa quanto para a utilidade marginal do consumo estão fixados, também ao contrário do que ocorre no modelo de agente representativo. Existem expressões bem definidas para b^{ss} e λ^{ss} . O maior grau de interdependência entre as variáveis neste sistema dinâmico eleva consideravelmente sua complexidade.

Mostra-se na *seção 5.6* que $\frac{\partial p}{\partial k} > 0$, $\frac{\partial p}{\partial q} > 0$ e $\frac{\partial p}{\partial \lambda} < 0$. Um aumento do capital tende a elevar o custo de instalação do capital e reduzir a oferta de serviços, de modo que o câmbio precisa se apreciar para que o equilíbrio se verifique. No caso do preço-sombra do capital o argumento é semelhante, com o câmbio precisando se apreciar para elevar a oferta e compensar o aumento do custo de instalação. Finalmente, uma elevação do consumo deve ser compensada por uma depreciação do câmbio. O primeiro e terceiro efeitos dominam o segundo, de tal forma que, ao longo da dinâmica de transição temos $\dot{k} > 0$, $\dot{q} < 0$ e $\dot{p} > 0$. A dinâmica do consumo depende da evolução do estoque de riqueza, de tal sorte que não é possível afirmar que o sinal será sempre o mesmo, mas o comportamento típico é $\dot{\lambda} < 0$. Finalmente, a dinâmica da dívida será fortemente afetada por seu valor inicial. Na calibração escolhemos uma dívida inicial em torno de 50% do produto, de modo que o comportamento típico é $\dot{b} > 0$ na fase inicial da dinâmica de transição.

Para avaliar a sensibilidade da dinâmica ao sistema de previdência, considere duas economias, uma do tipo *Brasil* (α baixo) e outra do tipo *China* (α alto), com as mesmas condições iniciais em termos de capital e dívida externa. Sabemos que, no longo prazo, o *Brasil* apresentará b^{ss} e k^{ss} maiores, além de $a^{ss} \equiv k^{ss} - b^{ss}$ e $D(p^{ss}) \equiv p^{ss} c_1^{ss} + c_2^{ss}$ menores. Tipicamente, a *China* iniciará a dinâmica de transição com câmbio mais depreciado e consumo menor. À medida que sua riqueza se eleva seu consumo cresce mais rapidamente e eventualmente ultrapassa o do *Brasil*. O câmbio de longo prazo será igual, mas durante a dinâmica a *China* apresentará câmbio mais depreciado.

Foram implementadas três estratégias para obter a solução numérica do modelo, sendo que as duas primeiras produzem soluções equivalentes. O primeiro método se baseia num sistema de “chutes educados” para as condições iniciais de λ_t , j_{3t} e q_t dentro de uma lógica de *forward shooting*, semelhante ao método utilizado no *Capítulo 1*. Inicialmente, determina-se condições iniciais para o capital e para a dívida externa: k_0 e b_0 . Chuta-se λ_0 e j_{30} . Dados k_0, b_0, λ_0 e j_{30} , chuta-se q_0 e roda-se o sistema para frente utilizando-se o *método de Euler*²⁴ até k_t alcançar k^{ss} . Caso seja observado um excesso de acumulação de capital (isto é, caso k tenha chegado em k^{ss} antes de q chegar em q^{ss}), recalibra-se o chute de q_0 para baixo. Caso contrário, recalibra-se o chute de q_0 para cima. Se k e q alcançarem seus valores terminais simultaneamente (dentro de uma margem de tolerância pré-determinada), interpreta-se que encontrou-se a direção da sela no plano kXq .

Compara-se, então, o valor terminal de λ_t com λ^{ss} . Caso $\lambda_t > \lambda^{ss}$, interpreta-se que a trajetória do consumo foi subótima e recalibra-se o chute de λ_0 para baixo. Caso $\lambda_t < \lambda^{ss}$, interpreta-se que a trajetória do consumo violou a restrição orçamentária intertemporal e recalibra-se o chute de λ_0 para cima. Repete-se o procedimento até que k, q e λ alcancem k^{ss}, q^{ss} e λ^{ss} simultaneamente. Quando isso ocorre, compara-se, então, o valor terminal de j_{3t} com j_3^{ss} . À medida que o valor terminal de j_{3t} fica acima / abaixo de j_3^{ss} , j_{30} é recalibrado para cima ou para baixo e repete-se todo o procedimento. Com isso, espera-se obter uma trajetória na qual k, q, λ e j_3 alcançam $k^{ss}, q^{ss}, \lambda^{ss}$ e j_3^{ss} simultaneamente.

O segundo método se baseia em força bruta computacional. Essencialmente, cria-se um *grid* de valores para cada variável cuja condição inicial precisa ser descoberta. Para cada combinação de condições iniciais, roda-se o sistema para frente até k_t alcançar k^{ss} e verifica-se a distância euclidiana da condição terminal do sistema em relação ao estado estacionário. Seleciona-se a condição inicial que mais se aproximou da convergência do sistema e, em torno dela, cria-se um novo *grid*, agora mais refinado, com amplitude e incrementos menores. Repete-se o procedimento até se alcançar o nível de precisão desejado. Os resultados gerados através deste método são equivalentes aos do primeiro, porém a um custo maior em termos de tempo computacional.

Repare que, para este sistema dinâmico se encontre em ponto de repouso, é necessário que também a dívida externa agregada alcance seu valor de estado estacionário. Isto é, é preciso que o vetor $(k_t, b_t, q_t, \lambda_t, j_{3t})$ convirja para $(k^{ss}, b^{ss}, q^{ss}, \lambda^{ss}, j_3^{ss})$. A convergência de k_t para k^{ss} ocorre por construção, já que durante a dinâmica de transição temos $\dot{k} > 0$ e o método numérico é interrompido quando k_t alcança k^{ss} . A convergência de q_t ocorre quando o algoritmo consegue encontrar a direção da sela. As convergências λ_t e j_{3t} ocorrem à medida que os chutes iniciais se aproximam dos valores corretos. Note que não restam instrumentos para *perseguirmos* a convergência de b_t , que precisa acontecer em função da dinâmica das demais variáveis. Por isso, testamos também um terceiro método, que equivale ao primeiro exceto por uma diferença: o critério de recalibração do chute para λ_0 é a distância euclidiana entre o valor terminal de b_t e b^{ss} , ao invés da distância euclidiana entre o valor terminal de λ_t e λ^{ss} .

²⁴Ver, por exemplo, Judd (1998).

4 Capítulo 3: Calibração

O modelo é plenamente caracterizado pelas condições iniciais k_0 , b_0 , q_0 , λ_0 , L_0 e A_0 , além dos seguintes parâmetros:

Parâmetro	Descrição
α_1	Participação do capital na renda do setor 1
α_2	Participação do capital na renda do setor 2
g	Taxa de progresso tecnológico
n	Taxa de crescimento populacional
δ	Taxa de depreciação do capital
ε	Coefficiente de elasticidade de substituição intratemporal
σ	Coefficiente de elasticidade de substituição intertemporal
r^*	Taxa de juros internacional
ρ	Taxa de preferência temporal
a	Índice de produtividade relativa entre os setores
γ	Fator de ponderação do consumo do bem não-comercializável na função utilidade
α	Taxa de decaimento da renda do indivíduo
β	Taxa de decaimento da produtividade do indivíduo
v	Probabilidade de morte
b	Parâmetro de nível da função custo de instalação do capital
ξ	Parâmetro de convexidade da função custo de instalação do capital

Tabela 1: Lista de parâmetros

Nas estratégias de calibração alternativas apresentadas a seguir suponho $\alpha_1 = 0.28$, $\alpha_2 = 0.48$, $g = 0.015$, $n = 0.01$, $\delta = 0.035$, $\varepsilon = 0.76$, $\sigma = 0.5$ e $v = 0.0125$.

Os valores para α_1 , α_2 e ε foram escolhidos com base em [Acemoglu e Guerrieri \(2008\)](#). Neste artigo, α_1 e α_2 representam a participação do capital na renda dos setores trabalho-intensivo e capital-intensivo na economia americana, respectivamente, estimadas com base na *North American Industrial Classification System (NAICS)*.

Também aproveitamos a estimativa de [Acemoglu e Guerrieri \(2008\)](#) para o coeficiente de elasticidade de substituição intra-temporal, ε . Repare que, tomando o *logaritmo neperiano* da equação (54), obtemos:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}} \right) &= \ln a - \varepsilon \ln \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) - \varepsilon \ln p_t \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}} \right) &= \ln \left[a \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon \right] - \varepsilon \ln p_t \end{aligned}$$

Logo, se estimarmos um modelo econométrico do tipo $\ln \left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}} \right) = \beta_1 + \beta_2 \ln p_t + u_t$, poderemos utilizar $-\beta_2$ como estimador de ε . Além disso, a partir da estimativa do intercepto desta equação, β_1 , obteremos uma relação entre o parâmetro de ponderação do consumo do bem não-comercializável na função utilidade γ , e o termo de produtividade relativa entre os setores, a :

$$\beta_1 = \ln \left[a \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon \right] \Rightarrow a = e^{\beta_1} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^\varepsilon \quad (193)$$

Seguindo este procedimento para dados da economia americana, [Acemoglu e Guerrieri \(2008\)](#) obtiveram $\varepsilon = 0.76$.

4.1 Estratégia de Calibração da Taxa de Decaimento da Renda do Indivíduo

Para calibrar a taxa de decaimento da renda disponível, α , utilizamos as variáveis observáveis *gasto com previdência como proporção do PIB*, ν , e *idade média de aposentadoria*, id^{ap} . Supomos que o indivíduo com idade igual ou superior a id^{ap} está aposentado, recebendo rendimento superior à sua produtividade. Então, de forma agregada, o montante de benefícios previdenciários recebido pelos indivíduos aposentados deve corresponder a gasto previdenciário observado, conforme abaixo.

$$\int_{-\infty}^{t-id^{ap}} N(s, t) bp(s, t) ds = \nu_t Y_t \quad (194)$$

Tratando separadamente a população inicial da população nascida a partir de t_0 temos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t) bp(s, t) ds + \int_{t_0}^{t-id^{ap}} N(s, t) bp(s, t) ds = \nu_t Y_t \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{t_0} \tilde{N}_{t_0} e^{-(n+v)(t_0-s)} e^{-v(t-t_0)} bp(s, t) ds + \int_{t_0}^{t-id^{ap}} \tilde{N}_t e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds = \nu_t Y_t \\ \Rightarrow & \tilde{N}_{t_0} e^{-v(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t_0-t+s)} bp(s, t) ds + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds = \nu_t Y_t \\ \Rightarrow & \tilde{N}_{t_0} e^{-v(t-t_0)} e^{-(n+v)(t_0-t)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds + \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{t_0}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds = \nu_t Y_t \\ \Rightarrow & \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \left[\int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds + \int_{t_0}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v)(t-s)} bp(s, t) ds \right] = \nu_t Y_t \\ \Rightarrow & \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} A_t w_t \left[\int_{-\infty}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v)(t-s)} [X_t^2 e^{-\alpha(t-s)} - X_t^1 e^{-\beta(t-s)}] ds \right] = \nu_t Y_t \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v)(t-s)} [X_t^2 e^{-\alpha(t-s)} - X_t^1 e^{-\beta(t-s)}] ds = \nu \frac{1}{w_t} \frac{Y_t}{A_t \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)}} \\ \Rightarrow & X_t^2 \int_{-\infty}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v+\alpha)(t-s)} ds - X_t^1 \int_{-\infty}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v+\beta)(t-s)} ds = \nu_t \frac{1}{w_t} \frac{Y_t}{A_t \tilde{N}_t} \\ \Rightarrow & \frac{n+v+\alpha}{n+v} \int_{-\infty}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v+\alpha)(t-s)} ds - \frac{n+v+\beta}{n+v} \int_{-\infty}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v+\beta)(t-s)} ds = \nu_t \frac{1}{w_t} \frac{1}{n+v} \frac{Y_t}{A_t \tilde{N}_t} \\ \Rightarrow & (n+v+\alpha) \int_{-\infty}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v+\alpha)(t-s)} ds - (n+v+\beta) \int_{-\infty}^{t-id^{ap}} e^{-(n+v+\beta)(t-s)} ds = \nu_t \frac{1}{w_t} y_t \end{aligned}$$

onde estou utilizando as equações

$$N(s, t) = \tilde{N}_t e^{-(n+v)(t-s)} \quad (103)$$

$$\tilde{N}_t = (n+v) N_t \quad (105)$$

$$X_t^1 = \frac{n+v+\beta}{n+v} \quad (109)$$

$$X_t^2 = \frac{n+v+\alpha}{n+v} \quad (113)$$

$$bp(s, t) = \left[\frac{n+v+\alpha}{n+v} e^{-\alpha(t-s)} - \frac{n+v+\beta}{n+v} e^{-\beta(t-s)} \right] A_t w_t \quad (115)$$

Avaliando em estado estacionário obtemos

$$\begin{aligned}
& \left[e^{-(n+v+\alpha)(t-s)} - e^{-(n+v+\beta)(t-s)} \right]_{-\infty}^{t-id^{ap}} = \nu^{ss} \frac{y^{ss}}{w^{ss}} \\
& \Rightarrow e^{-(n+v+\alpha)id^{ap}} - e^{-(n+v+\beta)id^{ap}} = \nu^{ss} \frac{y^{ss}}{w^{ss}} \\
& \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{id^{ap}} \ln \left[\nu^{ss} \frac{y^{ss}}{w^{ss}} + e^{-(n+v+\beta)id^{ap}} \right] - (n+v)
\end{aligned} \tag{195}$$

Isto é, temos $\alpha \equiv \alpha(\nu^{ss}, id^{ap}, \beta, v, n, w^{ss}, y^{ss})$. Pelas condições de primeira ordem do problema das firmas temos $w^{ss} \equiv w^{ss}(a, \alpha_2, k_2(p^{ss}, a)) \Rightarrow w^{ss} \equiv w^{ss}(a, p^{ss}, \alpha_2)$, de modo que $\alpha \equiv \alpha(\nu^{ss}, id^{ap}, \beta, v, n, y^{ss}, a, p^{ss}, \alpha_2)$.

4.2 Estratégia de Calibração do Estado Estacionário 1

Nessa estratégia utilizamos quatro variáveis auxiliares observáveis: a *participação do consumo de bens comercializáveis no consumo agregado*, ζ , o *gasto previdenciário como proporção do PIB*, ν , o *tempo médio de permanência do indivíduo no mercado de trabalho*, id^{ap} , e a *relação dívida externa / PIB de longo prazo*, b^{ss}/y^{ss} . Adota-se $\zeta = 0.10$, $\nu = 0.05$, $id^{ap} = 30$ e $b^{ss}/y^{ss} = 0.50$.

Supomos conhecidos $\alpha_1 = 0.28$, $\alpha_2 = 0.48$, $g = 0.015$, $n = 0.010$, $\delta = 0.035$, $\varepsilon = 0.76$, $\sigma = 0.50$ e $r^* = 0.06$ ²⁵. Através das equações (88), (91), (93) e (89), conhecemos a razão capital / trabalho no setor 2, $k_2^{ss} \equiv k_2^{ss}(r^*, \delta, \alpha_2)$, e podemos expressar a razão capital / trabalho no setor 1, a taxa de câmbio e o salário em função do índice de produtividade relativa a , $k_1^{ss} \equiv k_1^{ss}(\alpha_1, \alpha_2, r^*, \delta, a) = k_1^{ss}(a)$, $p^{ss} \equiv p^{ss}(\alpha_1, \alpha_2, \delta, r^*, a) = p^{ss}(a)$, e $w^{ss} \equiv \omega^{ss}(a, \alpha_2, r^*, \delta) = \omega^{ss}(a)$ conforme abaixo.

$$(88): \quad k_2^{ss} = \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \Rightarrow k_2^{ss} = 22.5382$$

$$(91): \quad k_1^{ss} = a \frac{\eta_1}{\eta_2} \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \Rightarrow k_1^{ss} \equiv k_1^{ss}(a)$$

$$(93): \quad p^{ss} = a^{1-\alpha_1} \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-1}} \Rightarrow p^{ss} \equiv p^{ss}(a)$$

$$(89): \quad w^{ss} = a(1-\alpha_2) \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} \Rightarrow w^{ss} \equiv \omega^{ss}(a)$$

Normalizamos para a unidade o produto por trabalhador de estado estacionário, o que também nos permite expressar as frações de mão-de-obra alocadas em cada setor em função do índice de produtividade relativa a :

²⁵ A escolha do valor para a taxa de juros internacional teve como objetivo produzir uma razão capital / produto de longo prazo entre 3 e 4. Caso tivéssemos adotado $r^* = 0.04$, por exemplo, obteríamos uma razão capital / produto entre 4 e 5.

$$y^{ss} \equiv 1$$

$$\Rightarrow p^{ss} l_1^{ss} (k_1^{ss})^{\alpha_1} + a l_2^{ss} (k_2^{ss})^{\alpha_2} = 1 \quad (196)$$

$$\Rightarrow p^{ss} l_1^{ss} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} + a(1 - l_1^{ss}) (k_2^{ss})^{\alpha_2} = 1$$

$$\Rightarrow \left[p^{ss} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2} \right] l_1^{ss} = 1 - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \left[a^{1-\alpha_1} \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} (k_2^{ss})^{\alpha_2-\alpha_1} \right] \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2} \right\} l_1^{ss} = 1 - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}$$

$$\Rightarrow \left[a \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} (k_2^{ss})^{\alpha_2} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2} \right] l_1^{ss} = 1 - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} - 1 \right) a(k_2^{ss})^{\alpha_2} l_1^{ss} = 1 - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1-\alpha_1} \right) a(k_2^{ss})^{\alpha_2} l_1^{ss} = 1 - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1-\alpha_1} \right) a(k_2^{ss})^{\alpha_2} l_1^{ss} = a(k_2^{ss})^{\alpha_2} - 1$$

$$\Rightarrow l_1^{ss} = \frac{a(k_2^{ss})^{\alpha_2} - 1}{\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1-\alpha_1} \right) a(k_2^{ss})^{\alpha_2}} \quad (197)$$

$$\Rightarrow l_1^{ss} \equiv l_1^{ss}(a) \quad (198)$$

onde estou utilizando (26) e (92).

Utilizando a variável observável *participação do consumo de bens comercializáveis no consumo agregado* em estado estacionário, ζ^{ss} , obtemos uma relação entre γ e a , conforme abaixo.

$$\zeta_t = \frac{C_{2t}}{C_t} \Rightarrow \zeta_t = \frac{\frac{A_{2t}}{A_t} \frac{C_{2t}}{A_{2t} L_t}}{\frac{C_t}{A_t L_t}} \Rightarrow \zeta_t = \frac{ac_{2t}}{p_t c_{1t} + ac_{2t}} \Rightarrow \zeta^{ss} = \frac{ac_2^{ss}}{p^{ss} c_1^{ss} + ac_2^{ss}}$$

$$\Rightarrow \zeta^{ss} = \frac{(1-\gamma)^\varepsilon}{(p^{ss})^{1-\varepsilon} \gamma^\varepsilon + (1-\gamma)^\varepsilon} \Rightarrow \zeta^{ss} = \frac{1}{(p^{ss})^{1-\varepsilon} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon + 1}$$

$$\Rightarrow (p^{ss})^{1-\varepsilon} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^\varepsilon = \frac{1-\zeta^{ss}}{\zeta^{ss}} \Rightarrow \frac{\gamma}{1-\gamma} = (p^{ss})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \left(\frac{1-\zeta^{ss}}{\zeta^{ss}} \right)^{1/\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{(p^{ss}(a))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \left(\frac{1-\zeta^{ss}}{\zeta^{ss}} \right)^{1/\varepsilon}}{1 + (p^{ss}(a))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \left(\frac{1-\zeta^{ss}}{\zeta^{ss}} \right)^{1/\varepsilon}} \quad (199)$$

$$\Rightarrow \gamma \equiv \gamma(a, \zeta^{ss})$$

Dado que $\zeta^{ss} = 0.10$, ficamos com $\gamma \equiv \gamma(a)$.

Da condição de equilíbrio no mercado de fatores, equação (3), em conjunto com a equação (197), temos

$$\begin{aligned}
(3) : \quad k^{ss} &= l_1^{ss}(a)k_1^{ss}(a) + al_2^{ss}(a)k_2^{ss} \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{1 - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}}{p^{ss} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}} a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} + a \left(1 - \frac{1 - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}}{p^{ss} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}} \right) k_2^{ss} \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{1 - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}}{p^{ss} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}} a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} + a \left(\frac{p^{ss} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - 1}{p^{ss} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}} \right) k_2^{ss} \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} - a^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} (k_2^{ss})^{\alpha_2+1} + a^{\alpha_1+1} p^{ss} \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^{\alpha_1} (k_2^{ss})^{\alpha_1+1} - a k_2^{ss}}{p^{ss} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}} \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{a^{\alpha_1+1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^{\alpha_1} (k_2^{ss})^{\alpha_1+1} \left(p^{ss} - a^{1-\alpha_1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^{1-\alpha_1} (k_2^{ss})^{\alpha_2-\alpha_1} \right) + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} - 1 \right) a k_2^{ss}}{p^{ss} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}} \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{a^{\alpha_1+1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^{\alpha_1} (k_2^{ss})^{\alpha_1+1} \left(\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^{1-\alpha_1} \right) a^{1-\alpha_1} (k_2^{ss})^{\alpha_2-\alpha_1} + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} - 1 \right) a k_2^{ss}}{a^{1-\alpha_1} \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} (k_2^{ss})^{\alpha_2-\alpha_1} \left(a \frac{\eta_1}{\eta_2} k_2^{ss} \right)^{\alpha_1} - a(k_2^{ss})^{\alpha_2}} \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{a^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^{1-\alpha_1} \right) (k_2^{ss})^{\alpha_2+1} + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} - 1 \right) a k_2^{ss}}{\left(\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} - 1 \right) a (k_2^{ss})^{\alpha_2}} \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2} \right) k_2^{ss} - a \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) (k_2^{ss})^{\alpha_2+1}}{\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1-\alpha_1} \right) (k_2^{ss})^{\alpha_2}} \tag{200} \\
\Rightarrow k^{ss} &\equiv k^{ss}(a) \tag{201}
\end{aligned}$$

Levando (199) e (200) em (185) obtemos uma equação que define implicitamente a em função de $\zeta, \alpha_1, \alpha_2, g, n, \delta, \varepsilon, \sigma, r^*, \rho$ e α :

$$k^{ss}(a) = \frac{W_1(p^{ss}(a)) + \Omega_3(a, \alpha, \rho)W_2(p^{ss}(a))}{Z_1(p^{ss}(a)) + \Omega_3(a, \alpha, \rho)[Z_2(p^{ss}(a)) - (r^* + \delta)]} \tag{202}$$

onde

$$(184) : \quad \Omega_3 \equiv \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss})}{(1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) - R^* \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss})}$$

$$(179) : \quad \Upsilon \equiv \frac{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^* - \rho)](\alpha + v + n)}{(r^* + \alpha) - (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (\rho + g)}$$

$$(93) : \quad p^{ss} = a^{1-\alpha_1} \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - 1}}$$

$$(68) - (69) : \quad j_1(p) \equiv [\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma - \varepsilon}{\varepsilon - 1}}, \quad j_2(p) \equiv [\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma - 1}{\varepsilon - 1}}$$

$$(29) - (32) : \quad Z_i(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_i - 1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_i^{\alpha_i} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_i - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}}, \quad W_i(p) \equiv a_1 \eta_{-i} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} Z_i(p), \quad i \in \{1, 2\}$$

$$(10), (12), (13) : \quad a_1 = a^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}}, \quad \eta_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}, \quad \Omega_i = \frac{(1 + \eta_i)}{\eta_i^{\alpha_i}}, \quad i \in \{1, 2\}$$

Observando as equações acima e lembrando que já conhecemos $\zeta, \alpha_1, \alpha_2, g, n, \delta, \varepsilon, \sigma, r^*$, fica claro que (202) fornece uma relação entre a, ρ e α :

$$f_1(a, \rho, \alpha) = 0 \quad (203)$$

Da equação (195) temos $\alpha \equiv \alpha(\nu^{ss}, id^{ap}, \beta, v, n, y^{ss}, a, \alpha_2)$, conforme abaixo.

$$\alpha = -\frac{1}{id^{ap}} \ln \left[\nu^{ss} \frac{y^{ss}}{w^{ss}(a)} + e^{-(n+v+\beta)id^{ap}} \right] - (n+v) \quad (195)$$

Como já conhecemos ν^{ss}, id^{ap}, v, n e y^{ss} , (195) define uma relação entre α, a e β :

$$f_2(a, \alpha, \beta) = 0 \quad (204)$$

Deve-se notar que o gasto previdenciário não guarda relação direta com o nível de α , mas sim com a diferença entre α e β . Quanto maior o termo $\beta - \alpha$, mais generoso será o sistema previdenciário e maior será o gasto associado ao mesmo. No entanto, o nível de α é crítico para a calibração, conforme será visto a seguir. Como o nível de α está associado ao nível de β , a escolha de β também será crítica. Trabalharemos com quatro valores para β , consistentes com uma razão entre produtividade no momento da aposentadoria e produtividade ao nascer de 10%, 30%, 50% e 80%, conforme tabela abaixo.

Produtividade Aposentadoria	β
10% Produtividade inicial	0.0768
30% Produtividade inicial	0.0401
50% Produtividade inicial	0.0231
80% Produtividade inicial	0.0074

Tabela 2: Valores alternativos de β

Mesmo fixando β , ficamos com duas equações, (203) e (204), e três incógnitas, a, α e ρ . Nossa terceira relação vem das equações (178), (179) e (183) combinadas.

$$\begin{aligned}
 (178) : \quad & b^{ss} = k^{ss}(a) - j_2(p^{ss}(a))(\lambda^{ss})^{-\sigma} \Upsilon \\
 (179) : \quad & \Upsilon \equiv \frac{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^* - \rho)](\alpha + v + n)}{(r^* + \alpha) - (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (\rho + g)} \Rightarrow \Upsilon \equiv \Upsilon(\rho, \alpha) \\
 (183) : \quad & \lambda^{ss} = \left[\frac{(1 - \gamma(a))^\varepsilon j_1(p^{ss}(a)) - R^* j_2(p^{ss}(a)) \frac{1}{\Upsilon(\rho, \alpha)}}{[Z_2(p^{ss}(a)) - (r^* + \delta)] k^{ss}(a) - W_2(p^{ss}(a))} \right]^{1/\sigma} \Rightarrow \lambda_{ss} \equiv \lambda_{ss}(a, \rho, \alpha) \\
 & \Rightarrow f_3(a, \rho, \alpha) = 0
 \end{aligned} \quad (205)$$

Note-se que b^{ss} é conhecida. Portanto, o próximo passo é resolver, numericamente, o sistema não-linear de três equações, (203), (204) e (205), em três incógnitas, a, ρ e α . A tabela a seguir apresenta os resultados para cada valor de β .

Parâmetro	$\beta = 0.0768$	$\beta = 0.0401$	$\beta = 0.0231$	$\beta = 0.0074$	Tipo
ρ	0.0774	0.0554	0.0401	0.0229	Endógeno
α	0.0463	0.0267	0.0144	0.0017	Endógeno
a	0.2837	0.2837	0.2837	0.2837	Endógeno
k^{ss}	3.6004	3.6004	3.6004	3.6004	Endógeno
b^{ss}	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	Exógeno
y^{ss}	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	Exógeno
r^*	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	Exógeno
p^{ss}	0.6924	0.6924	0.6924	0.6924	Endógeno
λ^{ss}	1.5692	1.5692	1.5692	1.5692	Endógeno
Υ	0.2472	0.2472	0.2472	0.2472	Endógeno
γ	0.9529	0.9529	0.9529	0.9529	Endógeno
k_1^{ss}	2.6934	2.6934	2.6934	2.6934	Endógeno
k_2^{ss}	22.5382	22.5382	22.5382	22.5382	Endógeno
l_1^{ss}	0.7549	0.7549	0.7549	0.7549	Endógeno
l_2^{ss}	0.2451	0.2451	0.2451	0.2451	Endógeno
i^{ss}	0.2160	0.2160	0.2160	0.2160	Endógeno
w^{ss}	0.6580	0.6580	0.6580	0.6580	Endógeno
ν^{ss}	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	Exógeno
ζ^{ss}	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	Exógeno

Tabela 3: Estratégia 1 - correlação entre ρ e α para um dado nível de riqueza

Repare que a mudança no valor de β altera a calibração de apenas dois parâmetros do modelo, ρ e α . A relação entre α e β é facilmente compreendida pela equação (195). Para um dado nível de gasto previdenciário, a taxa de declínio dos rendimentos estará diretamente ligada à taxa de declínio da produtividade.

Para entender a relação inversa entre ρ e α na calibração é útil compararmos as Equações de Euler individual e agregada, reproduzidas abaixo.

$$(120) : \quad \frac{\partial \lambda(s, t)}{\partial t} = \lambda(s, t)(\rho - r^*)$$

$$(167) : \quad \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\sigma} \{ [\rho + g + (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (r^* + \alpha)] + [j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)(q_t k_t - b_t) \lambda_t^\sigma] \}$$

Note-se que, em ambas equações, ρ e r^* aparecem com sinal trocado, como era de se esperar. Quanto maior for a taxa de juros internacional, para uma dada taxa de impaciência, menor será a taxa de variação de λ , indicando um perfil de consumo mais positivamente inclinado, ou menos suave ao longo do tempo. Trata-se de resultado perfeitamente natural, uma vez que, quanto maior for o custo de oportunidade do consumo percebido pelo indivíduo, maior será sua propensão a poupar.

Na equação de Euler agregada, percebemos, na calibração, que o primeiro termo entre colchetes possui magnitude bastante superior ao segundo, sendo, portanto, a parcela relevante na determinação da taxa de variação de λ . Neste primeiro termo, observe que a taxa de declínio da renda individual, α , se soma à taxa de juros internacional, potencializando suas consequências. Com efeito, é de se esperar que um sistema previdenciário menos generoso, refletido num α maior, incentivará um aumento da poupança individual, atuando na mesma direção de uma elevação da taxa de juros internacional.

A esta altura é útil refazermos os passos desta estratégia de calibração. Fixamos a *participação do consumo de bens comercializáveis no consumo agregado*, ζ , como auxílio para calibrarmos o *fator de ponderação do consumo do bem não-comercializável na função utilidade*, γ .

O *gasto previdenciário como proporção do PIB*, ν , e o *tempo médio de permanência do indivíduo no mercado de trabalho*, id^{ap} , servem como auxílio para calibração de α . Fixamos também a *relação dívida externa / PIB de longo prazo*, b^{ss}/y^{ss} , e normalizamos para a unidade o produto por trabalhador de estado estacionário, de modo que a dívida externa de longo prazo também está dada. Finalmente, como a taxa de juros internacional foi tratada como variável observável, bem como a participação do capital na renda de cada setor, a razão capital / trabalho em ambos os setores está determinada.

Assim sendo, tudo se passa como se a riqueza de longo prazo da economia estivesse dada. Como ela depende positivamente de r^* e α , e negativamente de ρ , e como r^* está dada, a redução de α precisa ser acompanhada de uma redução em ρ de modo a manter constante o estoque de riqueza da economia.

A questão que se coloca, então, é qual critério deve ser utilizado para escolher entre as possíveis alternativas para ρ , α e β . Do modelo de agente representativo, sabemos que a taxa de juros internacional deve obedecer a seguinte relação:

$$(228) : \quad r^* = \rho + \frac{1}{\sigma}g$$

De acordo com (228), para $r^* = 0.06$, $g = 0.015$ e $\sigma = 0.5$, deveríamos ter $\rho = 0.03$. Além disso, esperamos que o modelo desenvolvido em Blanchard (1985) apresente, em estado estacionário, produto marginal do capital maior do que no modelo de agente representativo. De fato, Blanchard e Fischer (1989), capítulo 3, sugere que a taxa de juros no modelo de juventude perpétua deveria se situar entre r e $r + \nu$, onde r é a taxa de juros observada no modelo de agente representativo²⁶. Podemos utilizar este intervalo para definir uma espécie de *região de aceitação* para ρ , conforme abaixo.

$$\begin{aligned} \rho + \frac{1}{\sigma}g &\leq r^* \leq \rho + \frac{1}{\sigma}g + \nu \\ \Rightarrow \frac{1}{\sigma}g &\leq r^* - \rho \leq \frac{1}{\sigma}g + \nu \\ \Rightarrow -r^* + \frac{1}{\sigma}g &\leq -\rho \leq -r^* + \frac{1}{\sigma}g + \nu \\ \Rightarrow r^* - \frac{1}{\sigma}g &\geq \rho \geq r^* - \frac{1}{\sigma}g - \nu \\ \Rightarrow 0.030 &\geq \rho \geq 0.0175 \end{aligned} \tag{206}$$

Repare que a última calibração da tabela, na qual a produtividade ao se aposentar equivale a 80% da produtividade inicial e $\beta = 0.0074$, fornece $\rho = 0.0229$, próximo ao ponto médio do intervalo de aceitação. Portanto, elegemos esta a calibração mais razoável dentre as apresentadas, e a denominamos *calibração base* de agora em diante. A tabela a seguir compara esta calibração com calibrações alternativas impondo variação de meio ponto percentual na taxa de juros internacional e na taxa de declínio da renda individual.

Observe que uma elevação tanto de r^* quanto de α produz um aumento na riqueza de longo prazo da economia, medida pela diferença $k^{ss} - b^{ss}$. Vale notar que esse aumento de riqueza é acompanhado de uma redução da razão capital / trabalho, de modo a viabilizar a elevação da oferta do bem cuja tecnologia é trabalho-intensiva.

²⁶De fato, este resultado é demonstrado para o caso particular em que $\alpha = 0$.

Parâmetro	Calibração base	$r^* = 0.065$	$\alpha = 0.0067$	Tipo
ρ	0.0229	0.0229	0.0229	Endógeno
r^*	0.0600	0.0650	0.0600	Exógeno
β	0.0074	0.0074	0.0074	Endógeno
α	0.0017	0.0017	0.0067	Endógeno
a	0.2837	0.3065	0.2924	Endógeno
k^{ss}	3.6004	3.2196	3.3874	Endógeno
b^{ss}	0.5000	-1.7788	-2.3456	Exógeno
y^{ss}	1.0000	1.0000	1.0000	Exógeno
p^{ss}	0.6924	0.7178	0.7077	Endógeno
λ^{ss}	1.5692	1.2377	1.2186	Endógeno
Υ	0.2472	0.1756	0.1533	Endógeno
γ	0.9529	0.9524	0.9526	Endógeno
k_1^{ss}	2.6934	2.6368	2.7762	Endógeno
k_2^{ss}	22.5382	20.4211	22.5382	Endógeno
l_1^{ss}	0.7549	0.8391	0.8397	Endógeno
l_2^{ss}	0.2451	0.1609	0.1603	Endógeno
i^{ss}	0.2160	0.1932	0.2032	Endógeno
w^{ss}	0.6580	0.6780	0.6782	Endógeno
ν^{ss}	0.0500	0.0515	0.0059	Exógeno
ζ^{ss}	0.1000	0.1000	0.1000	Exógeno

Tabela 4: **Estratégia 1 - Resultados finais e estática comparativa em r^* e α**

4.3 Estratégia de Calibração do Estado Estacionário 2

Nesta seção apresentamos nossa segunda estratégia de calibração, que endogeniza a taxa de juros internacional e a taxa de impaciência, fixando de partida a razão capital / produto e a razão dívida externa / produto, além de normalizar o produto por trabalhador para a unidade, conforme abaixo.

$$\begin{aligned} y^{ss} &= 1 \\ k^{ss} &= 3.5 \\ b^{ss} &= 0.5 \end{aligned}$$

Assim como na seção anterior, utilizamos a *participação do consumo de bens comercializáveis no consumo agregado*, ζ , o *gasto previdenciário como proporção do PIB*, ν , e o *tempo médio de permanência do indivíduo no mercado de trabalho*, id^{ap} , adotando $\zeta^{ss} = 0.10$, $\nu^{ss} = 0.05$ e $id^{ap} = 30$. Para a *taxa de decaimento da produtividade* adotamos o mesmo valor escolhido na seção anterior: $\beta = 0.0074$.

Supomos conhecidos $\alpha_1 = 0.28$, $\alpha_2 = 0.48$, $g = 0.015$, $n = 0.010$, $\delta = 0.035$, $\varepsilon = 0.76$ e $\sigma = 0.50$. Portanto, através das equações (88), (91), (93), (197) e (199), podemos expressar a razão capital / trabalho em cada setor, a taxa de câmbio, o salário, a fração da mão-de-obra alocada em cada setor e o fator de ponderação do bem doméstico na função utilidade em função do índice de produtividade relativa, a , da taxa de juros internacional, r^* , conforme abaixo.

$$\begin{aligned} (88) : \quad k_2^{ss} &= \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}} \Rightarrow k_2^{ss} \equiv k_2^{ss}(r^*) \\ (91) : \quad k_1^{ss} &= a \frac{\eta_1}{\eta_2} \left[\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}} \Rightarrow k_1^{ss} \equiv k_1^{ss}(a, r^*) \\ (93) : \quad p^{ss} &= a^{1-\alpha_1} \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{r^* + \delta}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - 1}} \Rightarrow p^{ss} \equiv p^{ss}(a, r^*) \\ (89) : \quad w^{ss} &= a(1-\alpha_2)(k_2^{ss})^{\alpha_2} \Rightarrow w^{ss} \equiv w^{ss}(a, r^*) \\ (197) : \quad l_1^{ss} &= \frac{a(k_2^{ss})^{\alpha_2} - 1}{\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) a(k_2^{ss})^{\alpha_2}} \Rightarrow l_1^{ss} \equiv l_1^{ss}(a, r^*) \\ (199) : \quad \gamma &= \frac{(p^{ss}(a, r^*))^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} \left(\frac{1 - \zeta^{ss}}{\zeta^{ss}} \right)^{1/\varepsilon}}{1 + (p^{ss}(a, r^*))^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} \left(\frac{1 - \zeta^{ss}}{\zeta^{ss}} \right)^{1/\varepsilon}} \Rightarrow \gamma \equiv \gamma(a, r^*) \end{aligned}$$

Como a razão capital / trabalhador está dada, podemos calcular o índice de produtividade relativa através a equação (200), obtida a partir da condição de factibilidade do mercado de fatores.

$$\begin{aligned}
(200) : \quad k^{ss} &= \frac{\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2}\right) k_2^{ss}(r^*) - a \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) (k_2^{ss}(r^*))^{\alpha_2 + 1}}{\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}\right) (k_2^{ss}(r^*))^{\alpha_2}} \\
&\Rightarrow a \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) (k_2^{ss}(r^*))^{\alpha_2 + 1} = \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2}\right) k_2^{ss}(r^*) - k^{ss} \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}\right) (k_2^{ss}(r^*))^{\alpha_2} \\
&\Rightarrow a = \frac{\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2}\right) k_2^{ss}(r^*) - k^{ss} \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}\right) (k_2^{ss}(r^*))^{\alpha_2}}{\frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) (k_2^{ss}(r^*))^{\alpha_2 + 1}} \\
&\Rightarrow a \equiv a(r^*)
\end{aligned} \tag{207}$$

Para calcular taxa de decaimento da produtividade do indivíduo, α , utilizamos novamente a equação (195), conforme abaixo.

$$\begin{aligned}
(195) : \quad \alpha &= -\frac{1}{id^{ap}} \ln \left[\nu^{ss} \frac{y^{ss}}{w^{ss}(r^*)} + e^{-(n+v+\beta)id^{ap}} \right] - (n + v) \\
&\Rightarrow \alpha = \alpha(r^*)
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular o parâmetro que mede a razão entre dispêndio com consumo e a riqueza de longo prazo, Υ .

$$\begin{aligned}
(179) : \quad \Upsilon &\equiv \frac{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^* - \rho)](\alpha(r^*) + v + n)}{(r^* + \alpha(r^*)) - (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (\rho + g)} = \frac{D(p^{ss}(r^*))}{k^{ss} - b^{ss}} \\
&\Rightarrow \Upsilon \equiv \Upsilon(r^*)
\end{aligned} \tag{208}$$

$$\Rightarrow \rho \equiv \rho(r^*) \tag{209}$$

onde estamos utilizando o fato de que k^{ss} e b^{ss} são conhecidos. Da equação (185) temos

$$\begin{aligned}
(185) : \quad k^{ss} &= \frac{W_1(p^{ss}(r^*)) + \Omega_3 W_2(p^{ss}(r^*))}{Z_1(p^{ss}(r^*)) + \Omega_3 [Z_2(p^{ss}(r^*)) - (r^* + \delta)]} \\
&\Rightarrow \Omega_3 [(r^* + \delta - Z_2(p^{ss}(r^*)))k^{ss} + W_2(p^{ss}(r^*))] = Z_1(p^{ss}(r^*))k^{ss} - W_1(p^{ss}(r^*)) \\
&\Rightarrow \Omega_3 = \frac{Z_1(p^{ss}(r^*))k^{ss} - W_1(p^{ss}(r^*))}{[r^* + \delta - Z_2(p^{ss}(r^*))]k^{ss} + W_2(p^{ss}(r^*))} \\
&\Rightarrow \Omega_3 = \Omega_3(r^*)
\end{aligned} \tag{210}$$

Podemos então utilizar (184) para encontrar uma equação que define implicitamente r^* :

$$\begin{aligned}
(184): \quad \Omega_3(r^*) &= \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}(r^*)}\right)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*))}{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*)) - R^* \frac{1}{\Upsilon(r^*)} j_2(p^{ss}(r^*))} \\
\Rightarrow (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*)) - R^* \frac{1}{\Upsilon(r^*)} j_2(p^{ss}(r^*)) &= \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}(r^*)}\right)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*))}{\Omega_3(r^*)} \\
\Rightarrow R^* \frac{1}{\Upsilon} j_2(p^{ss}(r^*)) &= (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*)) - \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}(r^*)}\right)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*))}{\Omega_3(r^*)} \\
\Rightarrow \frac{1}{\Upsilon(r^*)} &= \frac{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*)) \Omega_3(r^*) - \left(\frac{\gamma}{p^{ss}(r^*)}\right)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*))}{\Omega_3(r^*) R^* j_2(p^{ss}(r^*))} \\
\Rightarrow \Upsilon(r^*) &= \frac{\Omega_3(r^*) R^* j_2(p^{ss}(r^*))}{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*)) \Omega_3(r^*) - \left(\frac{\gamma}{p^{ss}(r^*)}\right)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*))}
\end{aligned}$$

Finalmente, da equação (183) temos

$$(183): \quad (\lambda^{ss})^{-\sigma} = \frac{[Z_2(p^{ss}(r^*)) - (r^* + \delta)] k^{ss} - W_2(p^{ss}(r^*))}{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*)) - R^* \frac{1}{\Upsilon(r^*)} j_2(p^{ss}(r^*))}$$

Pode-se mostrar que esta estratégia produz uma calibração única no espaço relevante de parâmetros. Definindo a função $\Psi(r^*)$

$$\Psi(r^*) = \frac{\left(\frac{\gamma}{p^{ss}(r^*)}\right)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*))}{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}(r^*)) - R^* \frac{1}{\Upsilon(r^*)} j_2(p^{ss}(r^*))} - \frac{Z_1(p^{ss}(r^*)) k^{ss} - W_1(p^{ss}(r^*))}{[r^* + \delta - Z_2(p^{ss}(r^*))] k^{ss} + W_2(p^{ss}(r^*))}$$

podemos concluir que a calibração será única se $\Psi(r^*)$ tiver apenas uma raiz no conjunto de valores razoáveis para r^* . De fato, é o que o gráfico abaixo mostra para $r^* \in [0.02, 0.10]$.

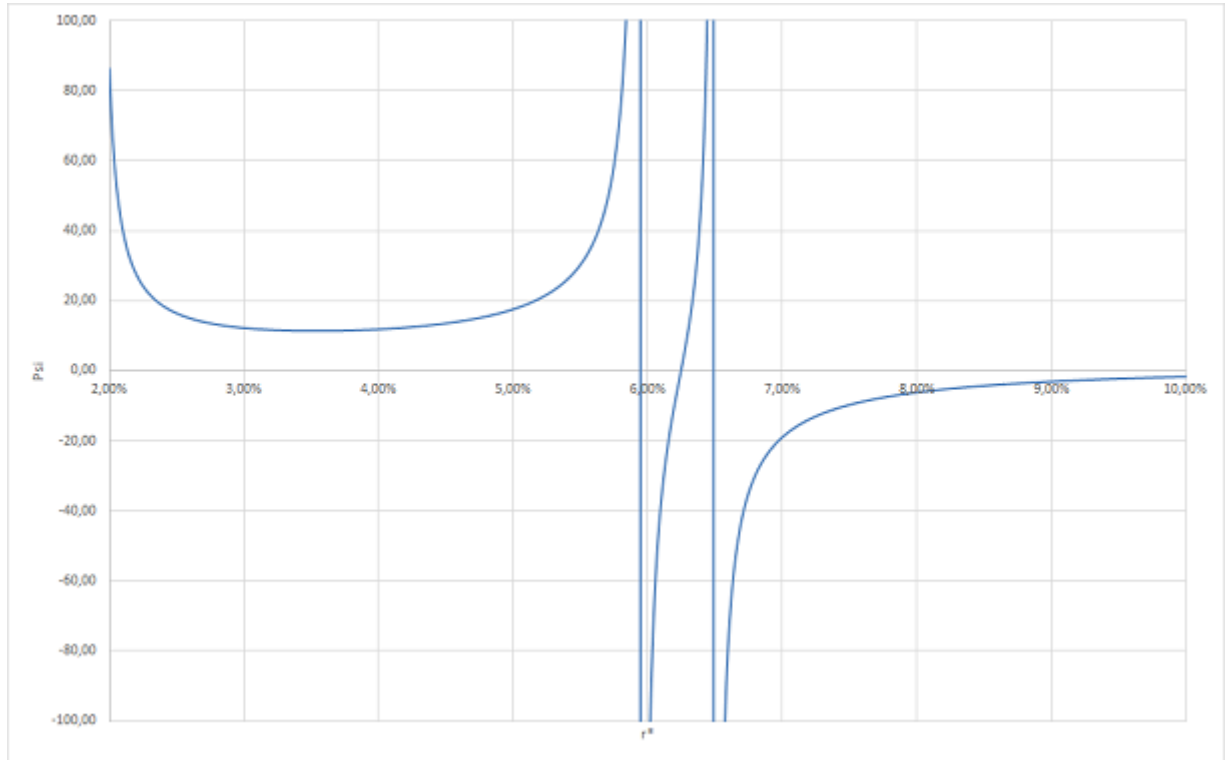


Figura 1: Unicidade da Estratégia de Calibração 2

Note-se que o gráfico possui duas assíntotas, uma em $r_{min}^* \simeq 5.95\%$ e outra em $r_{max}^* \simeq 6.95\%$, sendo que a única raiz, $r_0^* \simeq 6.25\%$, se localiza entre ambas.

A tabela a seguir apresenta os resultados dessa estratégia para $k^{ss} = 3.5$, $y^{ss} = 1$ e três níveis de passivo externo, $b^{ss} = 0$, $b^{ss} = 0.5$ e $b^{ss} = 1$.

Parâmetro	Descrição	$b^{ss} = 0.00$	$b^{ss} = 0.50$	$b^{ss} = 1.00$	Tipo
k^{ss}	Capital	3.5000	3.5000	3.5000	Exógeno
y^{ss}	Produto	1.0000	1.0000	1.0000	Exógeno
b^{ss}	Dívida externa	0.0000	0.5000	1.0000	Exógeno
r^*	Taxa de juros internacional	0.0615	0.0625	0.0635	Endógeno
ρ	Taxa de preferência temporal	0.0233	0.0253	0.0276	Endógeno
α	Decaimento da renda	0.0018	0.0017	0.0017	Endógeno
β	Decaimento da produtividade	0.0074	0.0074	0.0074	Exógeno
ν^{ss}	Gasto previdenciário / produto	0.0500	0.0500	0.0500	Exógeno
ζ^{ss}	$c_2^{ss} / D(p^{ss})$	0.1000	0.1000	0.1000	Exógeno
λ^{ss}	Utilidade marginal do consumo	1.4900	1.5619	1.6435	Endógeno
p^{ss}	Taxa de câmbio	0.6987	0.6981	0.6974	Endógeno
$D(p^{ss}, \lambda^{ss})$	Dispêndio com consumo	0.7900	0.7713	0.7515	Endógeno
a	A_2/A_1	0.2897	0.2909	0.2921	Endógeno
c_1^{ss}	Consumo serviços	1.0175	0.9943	0.9698	Endógeno
c_2^{ss}	Consumo tradable	0.2727	0.2652	0.2573	Endógeno
k_1^{ss}	Capital serviços	2.6682	2.6284	2.5872	Endógeno
k_2^{ss}	Capital tradable	21.8631	21.4493	21.0258	Endógeno
l_1^{ss}	Proporção mão-de-obra serviços	0.7731	0.7586	0.7432	Endógeno
l_2^{ss}	Proporção mão-de-obra tradable	0.2269	0.2414	0.2568	Endógeno
i^{ss}	Investimento	0.2100	0.2100	0.2100	Endógeno
Υ	Consumo / riqueza	0.2257	0.2571	0.3006	Endógeno
γ	Peso serviços função utilidade	0.9528	9528	0.9528	Endógeno
α_1	Particip do K na renda serviços	0.2800	0.2800	0.2800	Exógeno
α_2	Particip do K a renda tradable	0.4800	0.4800	0.4800	Exógeno
α_k	Particip do K na renda agregada	0.3378	0.3412	0.3447	Endógeno
g	Progresso tecnológico	0.0150	0.0150	0.0150	Exógeno
n	Crescimento populacional	0.0100	0.0100	0.0100	Exógeno
δ	Depreciação do K	0.0350	0.0350	0.0350	Exógeno
ε	Coef elast subst intratemporal	0.7600	0.7600	0.7600	Exógeno
v	Prob de morte	0.0125	0.0125	0.0125	Exógeno
w^{ss}	Salário	0.6626	0.6588	0.6553	Endógeno
y_1^{ss}	Produto serviços	1.0175	0.9943	0.9698	Endógeno
y_2^{ss}	Produto tradable	0.2890	0.3059	0.3236	Endógeno
tle^{ss}	Transf líq rec exterior	0.0000	0.0187	0.0385	Endógeno

Tabela 5: **Estratégia 2 - Resultados**

4.4 Dinâmica de Transição

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos numericamente para as dinâmicas de transição de duas economias: uma do *tipo Brasil* e outra do *tipo China*. As duas economias são calibradas seguindo a mesma estratégia adotada na *calibração base* apresentada na Seção 4.2, exceto pelo coeficiente de elasticidade de substituição intertemporal, para o qual agora adotamos $\sigma = 1$. Esta alteração produz um valor diferente para a taxa de preferência temporal, $\rho = 0.0414$, além de tornar constante o termo j_{3t} ,

$$(130) : \quad j_{3t} \equiv \int_t^\infty e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^*-\rho)](t'-t)} j_2(p_{t'}) dt'$$

$$(69) : \quad j_2(p_t) \equiv [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}}$$

de modo que $\sigma = 1 \Rightarrow j_{3t}^{-1} = \rho + v$. Isso reduz em uma dimensão a região de busca das condições iniciais, bastando encontrar q_0 e λ_0 , ao invés de q_0 , λ_0 e j_{30} , diminuindo substancialmente o custo computacional do método numérico. As duas economias são idênticas no que se refere aos demais parâmetros de preferências e tecnologias e riqueza inicial ($k_0 = 0.50$ e $b_0 = 0.10$ em ambas), diferindo, entretanto, nos respectivos sistemas previdenciários. O parâmetro α é calibrado considerando diferentes níveis de gastos previdenciários de longo prazo: $\nu^{ss} = 0.025$ para a economia *tipo China* e $\nu^{ss} = 0.075$ para a *tipo Brasil*. Portanto, a economia do *tipo China* apresentará, no longo prazo, produto, capital e endividamento externo menores, bem como consumo e ativos líquidos maiores. Já na fase inicial da dinâmica de transição a economia *tipo Brasil* apresentará consumo maior e câmbio mais apreciado. A tabela abaixo resume os resultados.

Parâmetro	Brasil	China
ν^{ss}	0.0750	0.0250
α	-0.0008	0.0045
y^{ss}	1.0170	0.9832
k^{ss}	3.7795	3.4235
b^{ss}	2.0836	-1.0635
p^{ss}	0.6924	0.6924
λ^{ss}	1.3941	1.2270
q^{ss}	1.0000	1.0000
k_0	0.5000	0.5000
b_0	0.1000	0.1000
p_0	0.4945	0.4934
λ_0	2.1527	2.7375
q_0	1.8244	1.8263
k_f	3.7795	3.4235
b_f	2.0761	-0.8971
p_f	0.6715	0.6483
λ_f	1.9744	2.6102
q_f	1.0000	1.0000

Tabela 6: **Resultados para a dinâmica de transição**

Note-se que a economia não apresenta convergência perfeita. Enquanto que, no plano kXq , a convergência ocorre sem problemas, no plano $bX\lambda$ ocorre um *trade-off* entre as convergências de b_t e de λ_t . Este padrão foi encontrado em todos os métodos utilizados. Os resultados acima foram obtidos através do terceiro método apresentado na Seção 3.9, que busca λ_0 de modo a

aproximar b_f de b^{ss} . Quando utilizamos o primeiro método, que busca λ_0 de modo a aproximar λ_f de λ^{ss} , obtemos convergência em λ às custas de um afastamento entre b_f de b^{ss} , o que sugere que o modelo não possui um mecanismo interno que garanta convergência para o estado estacionário. A única situação na qual conseguimos gerar convergência perfeita do sistema foi quando nos permitimos variar b_0 . No entanto, trata-se de situação pouco interessante do ponto de vista analítico, uma vez que não nos permite isolar o efeito do sistema previdenciário sobre o equilíbrio da economia.

A não convergência de um sistema dinâmico é algo comum, porém pouco usual em modelos macroeconômicos tradicionais. Conforme observado no *Capítulo 1*, modelos de agente representativo com economia aberta possuem dinâmica relativamente simples, não havendo restrição sobre o valor terminal da dívida externa. A convergência depende da identificação da direção da sela, dada pelo autovetor associado ao autovalor convergente, conforme explicado no *Anexo 5.3*.

No caso do modelo do *Capítulo 2* nos deparamos com situação pouco usual caracterizada por condições terminais bem definidas para k , q , p , b e λ . Tratando k e b como variáveis de estado, podemos escolher q_0 e λ_0 . A escolha de q_0 é feita de modo a gerar convergência no plano kXq , ou, equivalentemente, para fazer com que k_t alcance k^{ss} ao mesmo tempo que q_t alcance q^{ss} . Logo, ficamos apenas com um instrumento, λ_0 , para gerar convergência no plano $bX\lambda$. Quando fazemos λ_0 “olhar” para λ^{ss} , b_t não converge. Quando fazemos λ_0 “olhar” para b^{ss} , λ_t não converge. A convergência ocorre quando nos permitimos variar b_0 porque, assim conseguimos igualar as quantidades de instrumentos e objetivos.

5 Anexos

5.1 Estática Comparativa do Estado Estacionário

Nesta seção apresentamos o efeito de diferentes níveis de gastos previdenciários sobre o estado estacionário da economia tomando a *calibração base* apresentada na *seção 4.2* como cenário de referência.

Parâmetro	$\nu^{ss} = 0.000$	$\nu^{ss} = 0.025$	$\nu^{ss} = 0.050$	$\nu^{ss} = 0.075$	$\nu^{ss} = 0.100$
k^{ss}	3.2462	3.4227	3.6004	3.7798	3.9615
y^{ss}	0.9664	0.9831	1.0000	1.0170	1.0343
b^{ss}	-2.6311	-1.0706	0.5000	2.0861	3.6925
r^*	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600
ρ	0.0229	0.0229	0.0229	0.0229	0.0229
α	0.0074	0.0045	0.0017	-0.0008	-0.0031
β	0.0074	0.0074	0.0074	0.0074	0.0074
ν^{ss}	0.0000	0.0250	0.0500	0.0750	0.1000
ζ^{ss}	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
λ^{ss}	1.2359	1.3872	1.5692	1.7921	2.0699
p^{ss}	0.6924	0.6924	0.6924	0.6924	0.6924
$D(p^{ss}, \lambda^{ss})$	0.8637	0.8152	0.7665	0.7172	0.6674
a	0.2837	0.2837	0.2837	0.2837	0.2837
c_1^{ss}	1.1225	1.0596	0.9962	0.9322	0.8674
c_2^{ss}	0.3045	0.2874	0.2702	0.2529	0.2353
k_1^{ss}	2.6934	2.6934	2.6934	2.6934	2.6934
k_2^{ss}	22.5382	22.5382	22.5382	22.5382	22.5382
l_1^{ss}	0.8506	0.8029	0.7549	0.7064	0.6573
l_2^{ss}	0.1494	0.1971	0.2451	0.2936	0.3427
i^{ss}	0.1948	0.2052	0.2160	0.2274	0.2393
Υ	0.1470	0.1814	0.2472	0.4235	2.4818
γ	0.9529	0.9529	0.9529	0.9529	0.9529
α_1	0.2800	0.2800	0.2800	0.2800	0.2800
α_2	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800
α_k	0.3191	0.3307	0.3420	0.3531	0.3639
g	0.0150	0.0150	0.0150	0.0150	0.0150
n	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
δ	0.0350	0.0350	0.0350	0.0350	0.0350
ε	0.7600	0.7600	0.7600	0.7600	0.7600
v	0.0125	0.0125	0.0125	0.0125	0.0125
w^{ss}	0.6580	0.6580	0.6580	0.6580	0.6580
y_1^{ss}	1.1225	1.0506	0.9962	0.9322	0.8674
y_2^{ss}	0.1891	0.2494	0.3102	0.3715	0.4337
tle^{ss}	-0.0953	-0.0381	0.0175	0.0718	0.1250

Tabela 7: Relação entre riqueza de longo prazo e sistema previdenciário - Resultados

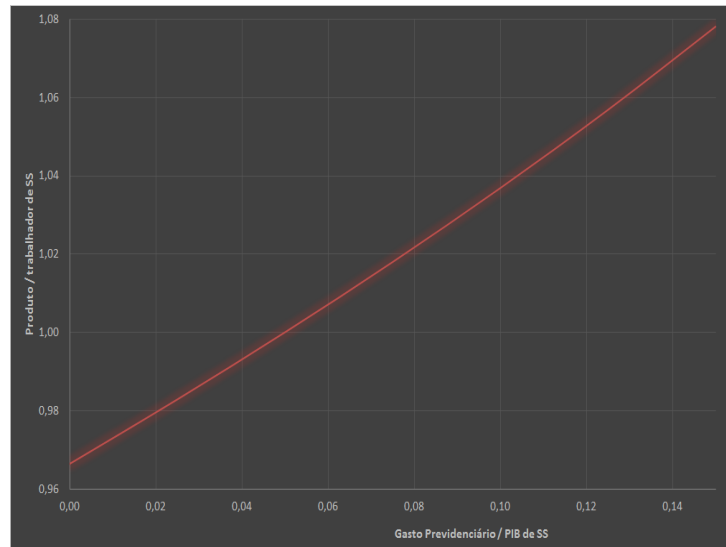


Figura 2: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Produto / Trabalhador de SS

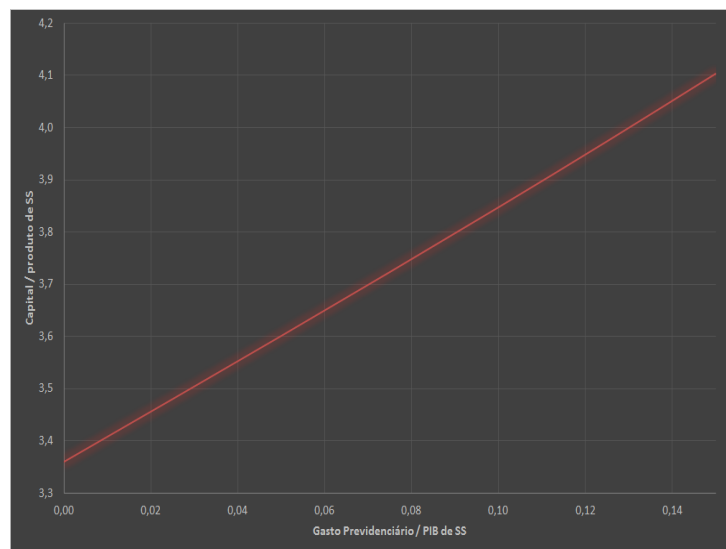


Figura 3: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Capital / Produto de SS

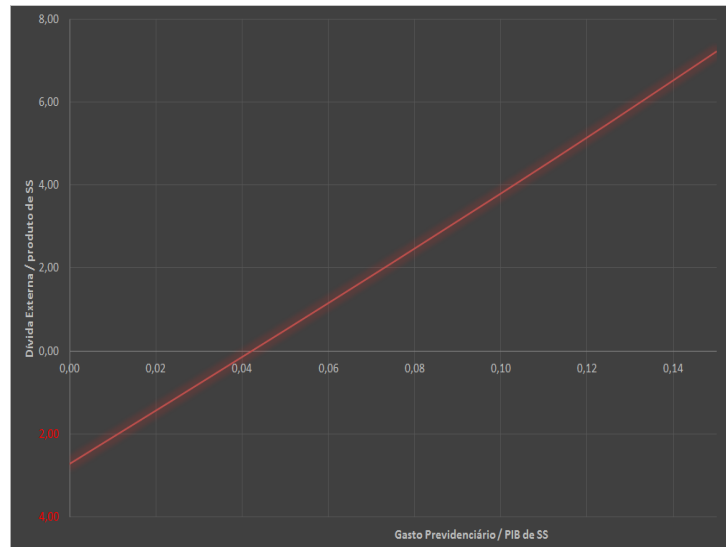


Figura 4: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Dívida Externa / Produto de SS

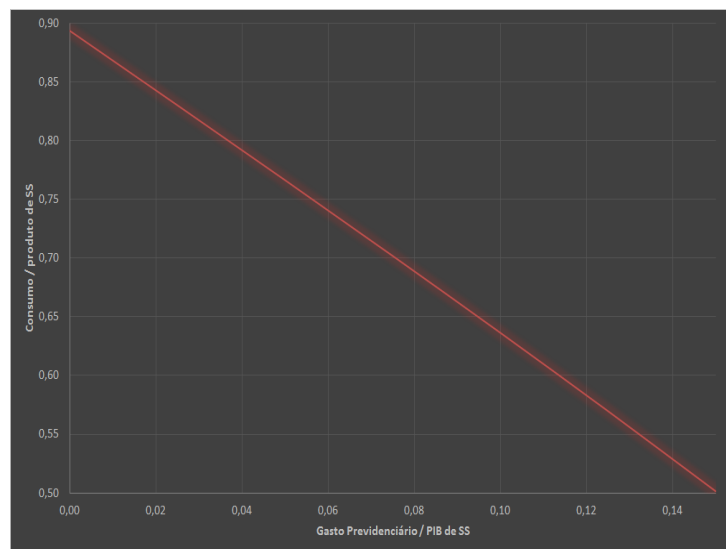


Figura 5: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Consumo / Produto de SS

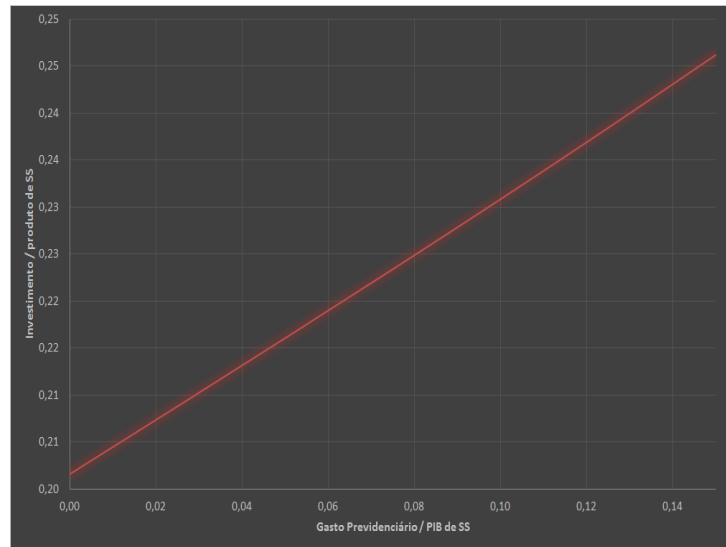


Figura 6: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Investimentos / Produto de SS

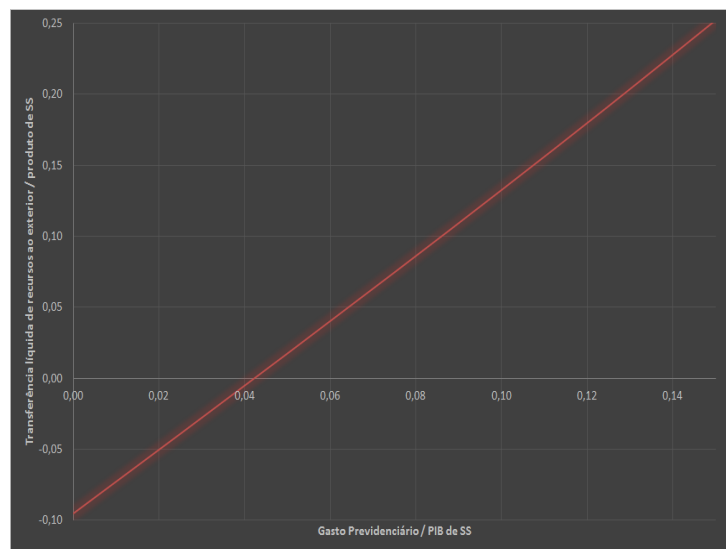


Figura 7: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Transferência Líquida de Recursos ao Exterior / Produto de SS

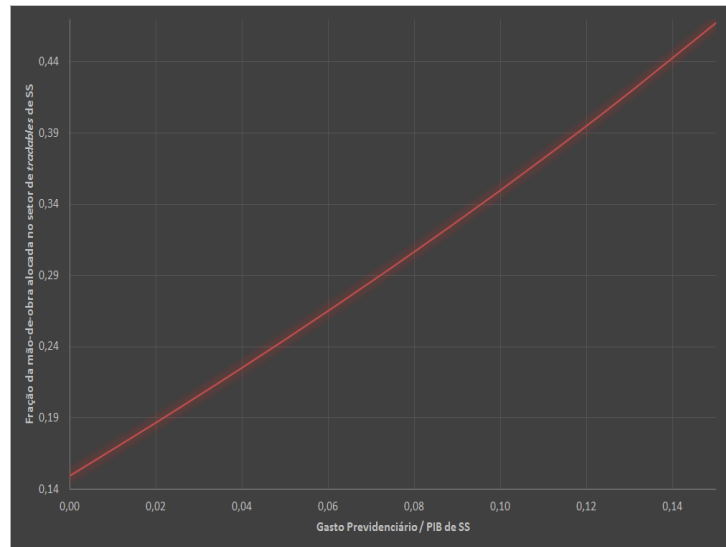


Figura 8: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Fração da mão-de-obra alocada no setor de tradables de SS

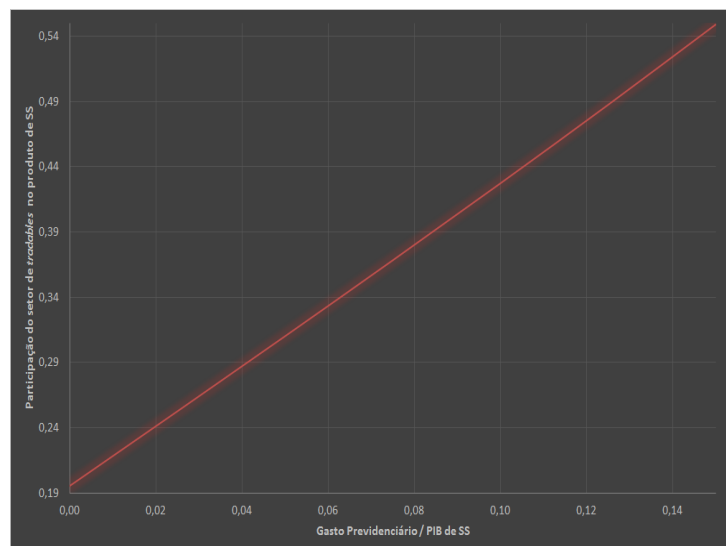


Figura 9: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Participação do setor de tradables no produto de SS

5.2 Modelo do *Capítulo 1* em economia fechada

Suponho que o resto do mundo está em estado estacionário e que os parâmetros de preferência e tecnologia são os mesmos na economia doméstica e no resto do mundo. O problema das firmas é idêntico ao do modelo com economia aberta. Vamos, portanto, nos concentrar no problema do agente representativo. Tratando o resto do mundo como uma economia fechada (lembre-se que estamos estudando uma pequena economia aberta), o problema das famílias é:

$$\max \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u[C(c_{1t}, c_{2t})] dt \text{ s.t. } \begin{cases} \dot{k}_t = i_t - \delta^{EF} k_t \\ p_t c_{1t} + a c_{2t} + i_t + p_t (i_t - \delta^{EF} k_t) T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - \omega_t - r_t k_t = 0 \\ u[C(c_{1t}, c_{2t})] = \frac{C(c_{1t}, c_{2t})^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma} \\ C(c_{1t}, c_{2t}) = \left[\gamma (A_t c_{1t})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) (a A_t c_{2t})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \end{cases}$$

5.2.1 Condições de otimalidade

Montando a função auxiliar de Hamilton em valor presente:

$$\begin{aligned} H_t = e^{-(\rho-n)t} \{ & u[C(c_{1t}, c_{2t})] \\ & - \lambda_t \left[p_t c_{1t} + a c_{2t} + i_t + p_t (i_t - \delta^{EF} k_t) T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - \omega_t - r_t k_t \right] \\ & + \lambda_t q_t (i_t - \delta^{EF} k_t) \} \end{aligned} \quad (211)$$

Var. de estado: k_t .

Var. de controle: c_{1t}, c_{2t}, i_t .

Var. de coestado: $-\lambda_t, \lambda_t q_t$.

Aplicando o Princípio do Máximo obtemos as seguintes condições necessárias para a trajetória ótima:

$$\begin{aligned}
[c_{1t}] : \quad & H_{c_1} = 0 \\
& \Rightarrow u_{c_{1t}}[C(c_{1t}, c_{2t})] = \lambda_t p_t \\
& \Rightarrow C(c_{1t}, c_{2t})^{-1/\sigma} C(c_{1t}, c_{2t})^{1/\varepsilon} \gamma A_t (A_t c_{1t})^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda_t p_t
\end{aligned} \tag{212}$$

$$\begin{aligned}
[c_{2t}] : \quad & H_{c_2} = 0 \\
& \Rightarrow u_{c_{2t}}[C(c_{1t}, c_{2t})] = a \lambda_t \\
& \Rightarrow C(c_{1t}, c_{2t})^{-1/\sigma} C(c_{1t}, c_{2t})^{1/\varepsilon} (1 - \gamma) a A_t (a A_t c_{2t})^{-\frac{1}{\varepsilon}} = a \lambda_t
\end{aligned} \tag{213}$$

$$\begin{aligned}
[i_t] : \quad & H_i = 0 \\
& \Rightarrow e^{-(\rho-n)t} \left\{ -\lambda_t \left[1 + p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) + p_t \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \right] + \lambda_t q_t \right\} = 0 \\
& \Rightarrow 1 + p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) + p_t \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) = q_t
\end{aligned} \tag{214}$$

$$\begin{aligned}
[k_t] : \quad & H_k = -\frac{d}{dt} \left[e^{-(\rho-n)t} \lambda_t q_t \right] \\
& \Rightarrow -e^{-(\rho-n)t} \lambda_t \left\{ -\delta^{EF} p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) + p_t (i_t - \delta^{EF} k_t) T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \right. \\
& \quad \left. \left[\frac{-\delta^{EF} k_t - (i_t - \delta^{EF} k_t)}{k_t^2} \right] - r_t + q_t \delta^{EF} \right\} = -[(\rho - n) e^{-(\rho-n)t} \lambda_t q_t + e^{-(\rho-n)t} (\dot{\lambda}_t q_t + \lambda_t \dot{q}_t)] \\
& \Rightarrow -\delta^{EF} p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) + p_t (i_t - \delta^{EF} k_t) T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \left[\frac{-\delta^{EF} k_t - (i_t - \delta^{EF} k_t)}{k_t^2} \right] \\
& \quad - r_t + q_t \delta^{EF} = -(\rho - n) q_t + \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} q_t + \dot{q}_t \\
& \Rightarrow -\delta^{EF} p_t T \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - \delta^{EF} p_t \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \\
& \quad - p_t \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right)^2 T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - r_t + q_t \delta^{EF} = -(\rho - n) q_t + \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} q_t + \dot{q}_t \\
& \Rightarrow -\delta^{EF} (q_t - 1) - p_t \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right)^2 T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) - r_t + q_t \delta^{EF} = \left(\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} - \rho + n \right) q_t + \dot{q}_t \\
& \Rightarrow \dot{q}_t = \left(\rho - n - \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \right) q_t + \delta^{EF} - \left[r_t + p_t \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right)^2 T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \right]
\end{aligned} \tag{215}$$

As equações (212) e (213) afirmam apenas que, ao longo da trajetória ótima, a utilidade marginal e o preço-sombra do consumo devem ser iguais. A equação (214) estabelece a relação entre a taxa de variação do estoque de capital e o preço-sombra do capital. A equação (215) é a equação de Euler do modelo.

Tomando a razão entre as equações (212) e (213) obtemos:

$$\frac{\gamma}{(1 - \gamma)} \left[\frac{c_{1t}}{a c_{2t}} \right]^{-\frac{1}{\varepsilon}} = p_t \Rightarrow c_{1t} = a c_{2t} \left[\frac{1 - \gamma}{\gamma} p_t \right]^{-\varepsilon} \tag{216}$$

Utilizando a equação (216) podemos reescrever $C(c_{1t}, c_{2t})$ como

$$C(c_{1t}, c_{2t}) = \left[\gamma \left[a A_t c_{2t} \left(\frac{1 - \gamma}{\gamma} p_t \right)^{-\varepsilon} \right]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1 - \gamma) (a A_t c_{2t})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C(c_{1t}, c_{2t}) &= aA_t c_{2t} \left[\gamma \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} p_t \right)^{-\varepsilon} \right]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow C(c_{1t}, c_{2t}) &= aA_t c_{2t} [\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}
\end{aligned} \tag{217}$$

Vamos utilizar as equações (213) e (217) para encontrar uma expressão para a taxa de variação relativa de λ_t :

$$\begin{aligned}
a\lambda_t &= (1-\gamma)(aA_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} C(c_{1t}, c_{2t})^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} c_{2t}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\
\Rightarrow a\lambda_t &= (1-\gamma)(aA_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} (aA_t)^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} c_{2t}^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} \left[[\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \right]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} c_{2t}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\
\Rightarrow a\lambda_t &= (1-\gamma)(aA_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} c_{2t}^{-\frac{1}{\sigma}} [\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)}} \\
\Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{\dot{A}_t}{A_t} - \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} + \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)} \frac{d}{dt} \ln [\gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)] \\
\Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{\sigma-1}{\sigma} g - \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} + \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t
\end{aligned} \tag{218}$$

onde

$$h(p_t) = \gamma^\varepsilon (1-\gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma) \tag{219}$$

Então a equação de Euler se torna

$$\dot{q}_t = \left[\rho - n - \frac{\sigma-1}{\sigma} g + \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} - \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t \right] q_t + \delta^{EF} - \left[r_t + p_t \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right)^2 T' \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \right) \right] \tag{220}$$

Temos ainda que impor a condição de transversalidade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho-n)t} q_t k_t = 0 \tag{221}$$

5.2.2 Dinâmica do capital

A partir da CPO para i_t podemos definir a função $\phi(p, q)$, com $\phi_q(p, q) > 0$ e $\phi(p, 1) = 0 \quad \forall p$ tal que $\dot{k}_t = i_t - \delta^{EF} k_t = k_t \phi(p_t, q_t)$ ²⁷. Então podemos reescrever a equação (220) da seguinte maneira:

$$\dot{q}_t = \left[\rho - n - \frac{\sigma-1}{\sigma} g + \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} - \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t \right] q_t + \delta^{EF} - [r_t + p_t \phi(p_t, q_t)^2 T'(\phi(p_t, q_t))] \tag{222}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{q}_t}{q_t} + \frac{r_t + p_t \phi(p_t, q_t)^2 T'(\phi(p_t, q_t)) - \delta^{EF}}{q_t} = \rho - n - \frac{\sigma-1}{\sigma} g + \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} - \frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t \tag{223}$$

²⁷Ver, por exemplo, Blanchard e Fischer (1989), capítulo 2.

Temos então um sistema dinâmico caracterizado pela equação (222) e pela lei de movimento do capital. Vamos trabalhar com a seguinte forma funcional para o custo de instalação do capital²⁸:

$$T\left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right) = \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi \quad (224)$$

onde b e ξ são parâmetros a serem calibrados. Então a equação (214) se torna:

$$\begin{aligned} q_t &= 1 + p_t \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi + \xi p_t \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^{\xi-1} \\ \Rightarrow q_t &= 1 + p_t \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi + \xi p_t \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi \\ \Rightarrow q_t - 1 &= p_t \left(\frac{b}{1 + \xi}\right) \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi (1 + \xi) \\ \Rightarrow \left(\frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t}\right)^\xi &= \frac{q_t - 1}{b p_t} \\ \Rightarrow \frac{i_t - \delta^{EF} k_t}{k_t} &= \left(\frac{q_t - 1}{b p_t}\right)^{1/\xi} = \phi(p_t, q_t) \end{aligned} \quad (225)$$

Então a equação (222) se torna:

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= \left[\rho - n - \frac{\sigma - 1}{\sigma} g + \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} - \frac{\sigma - \varepsilon}{\sigma(\varepsilon - 1)} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t \right] q_t + \delta^{EF} - \left[r_t + p_t \left(\frac{q_t - 1}{b p_t}\right)^{2/\xi} b \frac{\xi}{1 + \xi} \left(\frac{q_t - 1}{b p_t}\right)^{\xi-1} \right] \\ \Rightarrow \dot{q}_t &= \left[\rho - n - \frac{\sigma - 1}{\sigma} g + \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{c}_{2t}}{c_{2t}} - \frac{\sigma - \varepsilon}{\sigma(\varepsilon - 1)} \frac{h'(p_t)}{h(p_t)} \dot{p}_t \right] q_t + \delta^{EF} - \left[r_t + b \frac{\xi}{1 + \xi} p_t \left(\frac{q_t - 1}{b p_t}\right)^{(\xi+1)/\xi} \right] \end{aligned} \quad (226)$$

Avaliando (226) no estado estacionário obtemos

$$\begin{aligned} r^{ss} &= \rho - n - \frac{\sigma - 1}{\sigma} g + \delta^{EF} \\ r^{ss} &= \rho - n - \frac{\sigma - 1}{\sigma} g + (\delta + g + n) \\ r^{ss} &= \rho + \delta + \frac{1}{\sigma} g \end{aligned} \quad (227)$$

Definindo a taxa de juros internacional como $r^* = r^{ss} - \delta$ temos que

$$r^* = \rho + \frac{1}{\sigma} g \quad (228)$$

²⁸Seguindo [Duczynski \(2002\)](#). O parâmetro b nos permite calibrar o nível do custo de instalação, ao passo que o parâmetro ξ nos permite calibrar seu grau de convexidade.

5.3 Estabilidade e dinâmica do modelo do *Capítulo 1*

No modelo com agente representativo e economia aberta temos o seguinte sistema dinâmico em k_t , q_t e p_t :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{k}_t = \phi(q_t, p_t)k_t = \left(\frac{q_t-1}{bp_t}\right)^{1/\xi} k_t \quad (48) \\ \dot{q}_t = R^*q_t + \delta^{EF} - \left[r_t + b\frac{\xi}{1+\xi}p_t \left(\frac{q_t-1}{bp_t}\right)^{(\xi+1)/\xi}\right] \quad (47) \\ \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t}\right)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} + \frac{b}{1+\xi} k_t \left[\frac{q_t-1}{bp_t}\right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} = \\ a_1^{\alpha_1-1} \frac{a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t\right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t\right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \end{array} \right. \quad (74)$$

Para estudar a estabilidade do sistema em torno do estado estacionário nos baseamos no *Teorema de Grobman-Hartman*. Segundo este teorema, para um dado sistema de equações diferenciais autônomas não-lineares, existe uma vizinhança em torno do estado estacionário na qual o comportamento do sistema não-linear é equivalente ao do sistema linearizado em primeira ordem, desde que o estado estacionário seja hiperbólico²⁹. Além disso, caso o sistema linearizado possua autovalores com partes reais negativas, então existirá um conjunto de condições iniciais para as quais o sistema convergirá para o estado estacionário³⁰.

Tomando uma expansão de Taylor de primeira ordem em torno de um par arbitrário (k^*, q^*) obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{k}_t \Big|_{(k^*, q^*)} = \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} \Big|_{(k^*, q^*)} (k_t - k^*) + \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} \Big|_{(k^*, q^*)} (q_t - q^*) \\ \dot{q}_t \Big|_{(k^*, q^*)} = \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} \Big|_{(k^*, q^*)} (k_t - k^*) + \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} \Big|_{(k^*, q^*)} (q_t - q^*) \end{array} \right.$$

Calculando $\frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} &= \phi(q_t, p_t) + k_t \phi_p(q_t, p_t) \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} &= \left(\frac{q_t-1}{bp_t}\right)^{1/\xi} - \frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t-1}{bp_t}\right)^{1/\xi} \frac{k_t}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} &= \left(\frac{q_t-1}{bp_t}\right)^{1/\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi} \frac{k_t}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t}\right) \end{aligned} \quad (229)$$

Avaliando o sistema linearizado em $k^* = k^{ss} - \tilde{\varepsilon}$ e $q^* = q^{ss} + \tilde{\delta}$, para $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} > 0$ arbitrariamente pequenos, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} \Big|_{(k^*, q^*)} &= \left(\frac{\tilde{\delta}}{bp^*}\right)^{1/\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi} \frac{k^*}{p^*} \frac{\partial p}{\partial k} \Big|_{(k^*, q^*)}\right) \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} \Big|_{(k^*, q^*)} &\xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} 0 = \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} \Big|_{ss} \end{aligned} \quad (230)$$

²⁹Ver [Acemoglu \(2009\)](#), página 926. Diz-se que o estado estacionário de um sistema de equações diferenciais autônomas lineares é hiperbólico se a matriz correspondente não possui autovalores nulos.

³⁰Ver [Acemoglu \(2009\)](#), página 272.

onde estamos utilizando o fato de que $\left. \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \right|_{(k^*, q^*)}$ possui valor absoluto finito, conforme será mostrado mais adiante.

Derivada de \dot{k}_t em relação a q_t :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} &= k_t \left[\phi_q(q_t, p_t) + \phi_p(q_t, p_t) \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right] \\
 \Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} &= k_t \left[\frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{1}{bp_t} - \frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} \frac{1}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right] \\
 \Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} &= k_t \frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{1}{bp_t} \left[1 - b \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right] \\
 \Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} &= k_t \frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{1}{bp_t} \left(1 - b \frac{q_t - 1}{q_t} \frac{q_t}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right) \quad (231)
 \end{aligned}$$

Avaliando o sistema linearizado em $k^* = k^{ss} - \tilde{\varepsilon}$ e $q^* = q^{ss} + \tilde{\delta}$, para $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} > 0$ arbitrariamente pequenos, temos

$$\left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} \right|_{(k^*, q^*)} = k^* \frac{1}{\xi} \left(\frac{\tilde{\delta}}{bp^*} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{1}{bp^*} \left(1 - b \frac{\tilde{\delta}}{q^*} \frac{q^*}{p^*} \frac{\partial p}{\partial q} \right|_{(k^*, q^*)} \right) \quad (232)$$

Note que, dada a convexidade da função custo de instalação, temos $\xi > 1$, implicando que a derivada de \dot{k}_t em relação a q_t , $\frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t}$, não é definida em $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} = 0$, ou, equivalentemente, em $(k_t, q_t) = (k^{ss}, q^{ss})$ ³¹:

$$\left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} \right|_{(k^*, q^*)} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} \infty \quad (233)$$

Derivada de \dot{q}_t em relação a k_t :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} &= \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\
 \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} &= - \left[f_2''(k_{2t}) \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} + b \frac{\xi}{\xi + 1} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{\xi+1}{\xi}} - b \frac{\xi}{\xi + 1} p_t \frac{\xi + 1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t^2} \right) \right] \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\
 \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} &= - \left[\alpha_2(\alpha_2 - 1) k_{2t}^{\alpha_2 - 2} \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} + b \frac{\xi}{\xi + 1} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{\xi+1}{\xi}} \left(1 - \frac{\xi + 1}{\xi} \right) \right] \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\
 \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} &= \left[\frac{\alpha_2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{k_{2t}^{\alpha_2 - 1}}{p_t} + b \frac{1}{\xi + 1} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{\xi+1}{\xi}} \right] \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\
 \Rightarrow \left. \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} \right|_{(k^*, q^*)} &= \left[\frac{\alpha_2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{(k_2^*)^{\alpha_2 - 1}}{p^*} + b \frac{1}{\xi + 1} \left(\frac{\tilde{\delta}}{bp^*} \right)^{\frac{\xi+1}{\xi}} \right] \left. \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \right|_{(k^*, q^*)} \quad (234)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} \right|_{(k^*, q^*)} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} \frac{\alpha_2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{(k_2^*)^{\alpha_2 - 1}}{p^*} \left. \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \right|_{(k^*, q^*)} \quad (235)$$

³¹Estamos utilizando o fato de que $\left. \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right|_{(k^*, q^*)} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} 0$, conforme será mostrado mais adiante.

onde estamos utilizando o fato de que $\left. \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \right|_{(k^*, q^*)} < \infty$, conforme será mostrado mais adiante, e que, pela equação (17), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} &= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{a_1}{a} \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} (p_t)^{\frac{1 - \alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \\
 &= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{a_1}{a} \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \frac{1}{p_t} \\
 &= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{a} \eta_2 \frac{\bar{\omega}_t}{p_t} \\
 &= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{k_{2t}}{p_t}
 \end{aligned} \tag{236}$$

Derivada de \dot{q}_t em relação a q_t :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} &= R^* - b \frac{\xi}{\xi + 1} p_t \frac{\xi + 1}{\xi} \frac{1}{b p_t} \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} - f_2''(k_{2t}) \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \\
 &\quad - b \frac{\xi}{\xi + 1} \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{\frac{\xi + 1}{\xi}} + b \frac{\xi}{\xi + 1} \frac{\xi + 1}{\xi} p_t \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(\frac{q_t - 1}{b p_t^2} \right) \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \\
 \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} &= R^* + \alpha_2 (1 - \alpha_2) k_{2t}^{\alpha_2 - 2} \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} - \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} - b \frac{\xi}{\xi + 1} \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{\frac{\xi + 1}{\xi}} \left(1 - \frac{\xi + 1}{\xi} \right) \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \\
 \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} &= R^* - \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} + \left[\alpha_2 (1 - \alpha_2) k_{2t}^{\alpha_2 - 2} \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} + b \frac{1}{\xi + 1} \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right)^{\frac{\xi + 1}{\xi}} \right] \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \\
 \Rightarrow \left. \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} \right|_{(k^*, q^*)} &= R^* - \left(\frac{\tilde{\delta}}{b p^*} \right)^{\frac{1}{\xi}} + \left[\frac{\alpha_2 (1 - \alpha_2) (k_2^*)^{\alpha_2 - 1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p^*} + b \frac{1}{\xi + 1} \left(\frac{\tilde{\delta}}{b p^*} \right)^{\frac{\xi + 1}{\xi}} \right] \left. \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right|_{(k^*, q^*)} \tag{237}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} \right|_{(k^*, q^*)} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} R^* \tag{238}$$

onde estamos utilizando o fato de que $\left. \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right|_{(k^*, q^*)} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} 0$, conforme será mostrado mais adiante.

Agora calculamos $\frac{\partial p_t}{\partial k_t}$ e $\frac{\partial p_t}{\partial q_t}$ utilizando a equação de factibilidade para o mercado de bens domésticos (equação (74)). Definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned}
 G(p_t, q_t, k_t) &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma - 1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon} [\gamma^{\varepsilon} p_t^{1 - \varepsilon} + (1 - \gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma - \varepsilon}{\varepsilon - 1}} + \frac{b}{1 + \xi} k_t \left[\frac{q_t - 1}{b p_t} \right]^{\frac{\xi + 1}{\xi}} \\
 &\quad - a_1^{\alpha_1 - 1} \frac{a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}}
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita sabemos que

$$\frac{\partial p}{\partial k} = - \frac{\partial G / \partial k}{\partial G / \partial p} \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial q} = - \frac{\partial G / \partial q}{\partial G / \partial p} \tag{239}$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial k_t} &= \frac{b}{1+\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} + a_1^{\alpha_1-1} \frac{\eta_1^{\alpha_1}}{\eta_2-\eta_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial k_t} &= \frac{b}{1+\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} + a_1^{-1} \frac{(\eta_1 \bar{\omega})^{\alpha_1}}{\eta_2-\eta_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{-\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial k_t} &= \frac{b}{1+\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} + \frac{1}{\eta_2-\eta_1} \frac{(k_{1t})^{\alpha_1}}{\bar{\omega}_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial k_t} &= \frac{b}{1+\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} + \frac{1}{k_{2t}-k_{1t}} (k_{1t})^{\alpha_1} \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial k_t} \Big|_{(k^*, q^*)} &\xrightarrow{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta} \downarrow 0} \frac{(k_1^{ss})^{\alpha_1}}{k_2^{ss}-k_1^{ss}}
\end{aligned} \tag{240}$$

Note que, se $\alpha_2 > \alpha_1$, então $\frac{\partial G}{\partial k} \Big|_{(k^*, q^*)} > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial p} &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \varepsilon \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon-1} \left(-\frac{\gamma}{p_t^2} \right) [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
&\quad + \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} [\gamma^\varepsilon (1-\varepsilon) p_t^{-\varepsilon}] \\
&\quad - \frac{bk_t}{\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{1}{\xi}} \left(\frac{q_t-1}{bp_t^2} \right) \\
&\quad - \frac{\eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}}{\eta_2-\eta_1} \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1} (p_t)^{\frac{1-\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\
&\quad - \frac{\eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} - k_t}{\eta_2-\eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1} p_t^{\frac{2\alpha_1-\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\
&= -\lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \frac{1}{p_t} \left[\varepsilon - \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{(1-\varepsilon)\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon}}{\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon} \right] \\
&\quad - \frac{bk_t}{\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} \frac{1}{p_t} - \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{\eta_2 \bar{\omega}_t}{\eta_2-\eta_1} \frac{(\eta_1 \bar{\omega}_t)^{\alpha_1}}{\bar{\omega}_t} - \frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{k_{2t}-k_t}{\eta_2-\eta_1} \frac{(\eta_1 \bar{\omega}_t)^{\alpha_1}}{\bar{\omega}_t} \\
&= -\lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon (p_t)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \frac{1}{p_t} \left[\varepsilon + (\sigma-\varepsilon) \frac{\gamma^\varepsilon (p_t)^{1-\varepsilon}}{\gamma^\varepsilon (p_t)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon} \right] \\
&\quad - \frac{bk_t}{\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} \frac{1}{p_t} - \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{k_{2t}}{k_{2t}-k_{1t}} k_{1t}^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{k_{2t}-k_t}{k_{2t}-k_{1t}} k_{1t}^{\alpha_1} \\
&= -\lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon (p_t)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \frac{1}{p_t} \left[\varepsilon + (\sigma-\varepsilon) \frac{\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon}}{\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon} \right] \\
&\quad - \frac{bk_t}{\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} \frac{1}{p_t} - \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{(k_{1t})^{\alpha_1}}{k_{2t}-k_{1t}} [k_{2t} - (1-\alpha_1)(k_{2t}-k_t)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial p} \Big|_{(k^*, q^*)} &= -\lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p^{*s}} \right)^\varepsilon \left[\gamma^\varepsilon (p^*)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon \right]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \frac{1}{p^*} \left[\varepsilon + (\sigma - \varepsilon) \frac{\gamma^\varepsilon (p^*)^{1-\varepsilon}}{\gamma^\varepsilon (p^*)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p^*} \frac{(k_1^*)^{\alpha_1}}{k_2^* - k_1^*} [k_2^* - (1 - \alpha_1)(k_2^* - k^*)] \end{aligned} \quad (241)$$

Avaliando cada termo de (317) percebemos que, para valores razoáveis do vetor de parâmetros, teremos $\frac{\partial G}{\partial p} \Big|_{(k^*, q^*)} < 0$. Então, se $\alpha_2 > \alpha_1$, teremos $\frac{\partial p}{\partial k} \Big|_{ss} > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial q} &= \frac{b}{1+\xi} k_t \frac{\xi+1}{\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{1}{\xi}} \left(\frac{1}{bp_t} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial q} \Big|_{(k^*, q^*)} &= \frac{b}{1+\xi} k^* \frac{\xi+1}{\xi} \left[\frac{\tilde{\delta}}{bp^*} \right]^{\frac{1}{\xi}} \left(\frac{1}{bp^*} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial q} \Big|_{(k^*, q^*)} &\xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} 0 \end{aligned} \quad (242)$$

Note-se também que, em geral, para $k < k^{ss}$ e $q > q^{ss}$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial p} &< 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial k} &> 0 \end{aligned} \quad (243)$$

Interpretamos (243) assim: um aumento na razão capital / trabalho aumenta o custo de instalação do capital e reduz a oferta do bem doméstico, tudo mais constante. Logo, para que o mercado de bens domésticos permaneça em equilíbrio, é necessário que o preço também aumente de modo a gerar redução do consumo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial q} &> 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial q} &> 0 \end{aligned} \quad (244)$$

Interpretamos (244) da seguinte forma: um aumento do preço-sombra do capital está associado a uma taxa de investimento maior, aumentando o custo de instalação do capital e gerando um câmbio mais apreciado de modo a viabilizar uma elevação de y_1 .

Defino A, B, C e D como

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} \Big|_{(k^*, q^*)} \\ B &\equiv \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} \Big|_{(k^*, q^*)} \\ C &\equiv \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} \Big|_{(k^*, q^*)} \\ D &\equiv \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} \Big|_{(k^*, q^*)} \end{aligned}$$

Então a dinâmica do sistema linearizado em torno do par (k^*, q^*) é caracterizada pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} k_t - k^* \\ q_t - q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ q_t - q^* \end{bmatrix} \quad (245)$$

Os autovalores associados a esta matriz são dados pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} (A - \mu)(D - \mu) - BC &= 0 \\ \Rightarrow \mu_1 &= 0.5 \left(A + D - \sqrt{(A + D)^2 + 4BC} \right) \\ \Rightarrow \mu_2 &= 0.5 \left(A + D + \sqrt{(A + D)^2 + 4BC} \right) \end{aligned}$$

Repare que, avaliando o sistema linearizado em $k^* = k^{ss} - \tilde{\varepsilon}$ e $q^* = q^{ss} + \tilde{\delta}$, para $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} > 0$ arbitrariamente pequenos, teremos $\mu_1 < 0$. De fato, como $A \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} 0$, $B \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} \infty$, e C e D são positivos finitos, teremos

$$\mu_1 \Big|_{(k^*, q^*)} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} -\infty \quad e \quad \mu_2 \Big|_{(k^*, q^*)} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} \infty$$

A trajetória da sela é dada pelo autovetor associado a μ_1 , $V_1 = [(v_1)_1, (v_1)_2]$. Este autovetor deve satisfazer

$$\begin{bmatrix} A - \mu_1 & B \\ C & D - \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v_1)_1 \\ (v_1)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (246)$$

$$\begin{aligned} (A - \mu_1)(v_1)_1 + B(v_1)_2 &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{\alpha} &= \frac{(v_1)_2}{(v_1)_1} = -\frac{A - \mu_1}{B} \end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}$ é o coeficiente angular associado a V_1 . Como $B > 0$ e $A - \mu_1 > 0$, teremos $\tilde{\alpha} < 0$, implicando que a inclinação da sela será negativa. Note que

$$\tilde{\alpha} \Big|_{(k^*, q^*)} = -\frac{A - 0.5 \left(A + D - \sqrt{(A + D)^2 + 4BC} \right)}{B} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} 0 \quad (247)$$

Ou seja, nas proximidades do estado estacionário, V_1 é aproximadamente horizontal.

Temos então a seguinte situação. O sistema linearizado em primeira ordem não está definido quando avaliado no estado estacionário, uma vez que $B := \frac{\partial k_t}{\partial q_t} \Big|_{(k^*, q^*)} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} \infty$. Entretanto, podemos avaliar o sistema linearizado em um ponto arbitrariamente próximo do estado estacionário $((k^*, q^*)$ com $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} > 0$ arbitrariamente pequenos). Neste ponto o sistema é definido, possuindo um autovalor maior do que zero (tendendo a ∞) e outro autovalor menor do que zero (tendendo a $-\infty$), e o autovetor associado ao autovalor negativo (convergente) possui inclinação negativa (embora tendendo a zero). Note que, neste ponto, as taxas de variação de k e q não serão exatamente iguais a zero, mas serão arbitrariamente próximas de zero.

A trajetória de sela será caracterizada por

$$\begin{bmatrix} k_t - k^* \\ q_t - q^* \end{bmatrix} = C_0 e^{\mu_1 t} V_1 \quad (248)$$

onde C_0 é uma constante determinada pelas condições iniciais. Note que teremos

$$\frac{k_t - k^*}{q_t - q^*} = \frac{(v_1)_1}{(v_1)_2} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \quad (249)$$

Logo, se $k_t - k^* = \epsilon < 0$, então

$$q_t = q^* + \tilde{\alpha}\epsilon > q^* \quad (250)$$

Isto é, nas proximidades do estado estacionário podemos encontrar a direção da sela através do coeficiente angular do autovetor associado ao autovalor convergente. Repare que, como $\tilde{\alpha} \Big|_{(k^*, q^*)} \xrightarrow{\tilde{\epsilon}, \tilde{\delta} \downarrow 0} 0$, teremos

$$k_t - k^* = \epsilon \gg \tilde{\alpha}\epsilon = q_t - q^* \quad (251)$$

de modo que, na trajetória de sela, $\dot{k}_t \Big|_{(k^*, q^*)} < 0 \Rightarrow \dot{q}_t \Big|_{(k^*, q^*)} > 0$.

5.4 Teorema de Grobman-Hartman e Estabilidade de Sela

Definição: Homeomorfismo

Uma função $h : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo entre X e Y se ela é uma bijeção contínua com inversa contínua. A existência de um homeomorfismo entre 2 espaços X e Y significa que X e Y possuem estruturas análogas. Quando h (ou h^{-1}) é aplicada ao espaço inteiro, ela não altera a “estrutura de vizinhanças”.

Definição: Estado estacionário hiperbólico

O estado estacionário de um sistema de equações diferenciais é dito *hiperbólico* se os autovalores do Jacobiano avaliado no estado estacionário possuem partes reais não-nulas.

Definição: Fluxo de um sistema dinâmico

Considere o sistema dinâmico não-linear $\dot{x} = f(x)$ com condição inicial x_0 . Então o fluxo associado ao sistema, $\tilde{\phi}(t, x_0)$, fornece a solução espacial para o sistema dinâmico dada a condição inicial, desde que a solução para este sistema exista e seja única.

Teorema 1: Existência e Unicidade (Teorema Fundamental das Equações Diferenciais)

Considere o seguinte problema de valor inicial: $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é C^1 . Então, existe uma única solução para este problema. Mais precisamente, existe $a > 0$ e uma única solução $x : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ desta equação diferencial satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$.

Teorema 2: Grobman-Hartman

Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Considere o sistema dinâmico não-linear $\dot{x} = f(x)$ com fluxo $\tilde{\phi}_t$ e o sistema dinâmico linear $\dot{x} = Ax$, onde a matriz A é o Jacobiano $Df(x^*)$ de f e x^* é um estado estacionário hiperbólico.

Suponha que f seja C^1 em $E \in \mathbb{R}^n$ com $x^* \in \mathbb{R}^n$. Então, existem $I_0 \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, tal que U , V e I_0 contenham x^* , e um homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ tal que, $\forall x_0 \in U$ e $\forall t \in I_0$, $H \circ \tilde{\phi}_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$.

Portanto, existe uma vizinhança em torno do estado estacionário na qual o fluxo do sistema não-linear é homeomorfo ao fluxo do sistema linearizado.

Teorema 3: Estabilidade de Sela

Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Considere o sistema dinâmico não-linear autônomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (252)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e suponha que f seja C^1 . Seja x^* o estado estacionário do sistema: $f(x^*) = 0$. Defina $A = Df(x^*)$, onde a matriz A é o Jacobiano $Df(x^*)$ de f avaliado em x^* . Suponha que $m \leq n$ autovalores de A possuam partes reais estritamente negativas e os restantes possuam partes reais estritamente positivas. Então existe uma vizinhança aberta de x^* , $B(x^*) \subset \mathbb{R}^n$, e um subespaço m -dimensional $M \subset B(x^*)$ tal que, partindo de qualquer $x(0) \in M$, o sistema dinâmico (252) possui uma única solução x_t com $x_t \rightarrow x^*$.

5.5 Modelo do *Capítulo 2* em economia fechada

5.5.1 Com custo de instalação do capital

Suponho que o resto do mundo está em estado estacionário e que os parâmetros de preferência e tecnologia são os mesmos na economia doméstica e no resto do mundo. O problema das firmas é idêntico ao do modelo com economia aberta. Tratando o resto do mundo como uma economia fechada, o problema do indivíduo nascido no instante s é:

$$\max \int_{t=s}^{\infty} e^{-(\rho+v)(t-s)} u[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] dt$$

$$s.t. \begin{cases} \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} = i(s, t) - (\delta - v)k(s, t) \\ p_t c_1(s, t) + c_2(s, t) + i(s, t) + p_t [i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] x_t - \omega(s, t) - r_t k(s, t) = 0 \\ u[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] = \frac{C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma} \\ C(c_1(s, t), c_2(s, t)) = \left[\gamma (c_1(s, t))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) (c_2(s, t))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\ k(s, s) = 0 \end{cases}$$

5.5.2 Condições de otimalidade

Montando a função auxiliar de Hamilton em valor presente:

$$\begin{aligned} H_t = e^{-(\rho+v)t} \{ & u[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] \\ & - \lambda(s, t) [p_t c_1(s, t) + c_2(s, t) + i(s, t) + p_t [i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] x_t - \omega(s, t) - r_t k(s, t)] \\ & + \lambda(s, t) q(s, t) [i(s, t) - (\delta - v)k(s, t)] \} \end{aligned} \quad (253)$$

Var. de estado: $k(s, t)$.

Var. de controle: $c_1(s, t), c_2(s, t), i(s, t)$.

Var. de coestado: $-\lambda(s, t), \lambda(s, t)q(s, t)$.

Aplicando o Princípio do Máximo obtemos as seguintes condições necessárias para a trajetória ótima:

$$\begin{aligned}
[c_1]: \quad H_{c_1} &= 0 \\
&\Rightarrow u_{c_1}[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] = \lambda(s, t)p_t \\
&\Rightarrow C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{-1/\sigma} C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{1/\varepsilon} \gamma A_t(A_t c_1(s, t))^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda(s, t)p_t
\end{aligned} \tag{254}$$

$$\begin{aligned}
[c_2]: \quad H_{c_2} &= 0 \\
&\Rightarrow u_{c_2(s, t)}[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] = a\lambda(s, t) \\
&\Rightarrow C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{-1/\sigma} C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{1/\varepsilon} (1 - \gamma) A_t(a A_t c_2(s, t))^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda(s, t)
\end{aligned} \tag{255}$$

$$\begin{aligned}
[i]: \quad H_i &= 0 \\
&\Rightarrow e^{-(\rho+v)t} \{-\lambda(s, t)[1 + p_t x_t] + \lambda(s, t)q(s, t)\} = 0 \\
&\Rightarrow 1 + p_t x_t = q(s, t)
\end{aligned} \tag{256}$$

$$\begin{aligned}
[k]: \quad H_k &= -\frac{d}{dt} \left[e^{-(\rho+v)t} \lambda(s, t) q(s, t) \right] \\
&\Rightarrow -e^{-(\rho+v)t} \lambda(s, t) \{-(\delta - v)p_t x_t - r_t + q(s, t)(\delta - v)\} \\
&= - \left[-(\rho + v)e^{-(\rho+v)t} \lambda(s, t) q(s, t) + e^{-(\rho+v)t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) q(s, t) + \lambda(s, t) \frac{\partial}{\partial t} q(s, t) \right) \right] \\
&\Rightarrow -(\delta - v)p_t x_t - r_t + q(s, t)(\delta - v) = -(\rho + v)q(s, t) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) \frac{1}{\lambda(s, t)} q(s, t) + \frac{\partial}{\partial t} q(s, t) \right) \\
&\Rightarrow (\delta - v)[1 - q(s, t)] - r_t + q(s, t)(\delta - v) = -(\rho + v)q(s, t) + \frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) \frac{1}{\lambda(s, t)} q(s, t) + \frac{\partial}{\partial t} q(s, t) \\
&\Rightarrow -(\delta - v)[q(s, t) - 1] - r_t + (\delta - v)q(s, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) \frac{1}{\lambda(s, t)} - (\rho + v) \right) q(s, t) + \frac{\partial}{\partial t} q(s, t) \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} q(s, t) = \left[\rho + v - \frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) \frac{1}{\lambda(s, t)} \right] q(s, t) - [r_t + v - \delta]
\end{aligned} \tag{257}$$

Tomando a razão entre as equações (254) e (255) obtemos:

$$\frac{\gamma}{(1 - \gamma)} \left[\frac{c_1(s, t)}{c_2(s, t)} \right]^{-\frac{1}{\varepsilon}} = p_t \Rightarrow c_1(s, t) = c_2(s, t) \left[\frac{1 - \gamma}{\gamma} p_t \right]^{-\varepsilon} \tag{258}$$

Utilizando a equação (258) podemos reescrever $C(c_1(s, t), c_2(s, t))$ como

$$\begin{aligned}
C(c_1(s, t), c_2(s, t)) &= \left[\gamma \left[a A_t c_2(s, t) \left(\frac{1 - \gamma}{\gamma} p_t \right)^{-\varepsilon} \right]^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} + (1 - \gamma) (A_t c_2(s, t))^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}} \\
&\Rightarrow C(c_1(s, t), c_2(s, t)) = A_t c_2(s, t) \left[\gamma \left[\left(\frac{1 - \gamma}{\gamma} p_t \right)^{-\varepsilon} \right]^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} + (1 - \gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}} \\
&\Rightarrow C(c_1(s, t), c_2(s, t)) = A_t c_2(s, t) [\gamma^\varepsilon (1 - \gamma)^{1 - \varepsilon} p_t^{1 - \varepsilon} + (1 - \gamma)]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}}
\end{aligned} \tag{259}$$

Vamos utilizar as equações (255) e (259) para encontrar uma expressão para a taxa de variação relativa de $\lambda(s, t)$:

$$\begin{aligned}
a\lambda(s, t) &= (1 - \gamma)(A_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} c_2(s, t)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\
\Rightarrow \lambda(s, t) &= \\
(1 - \gamma)(A_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} (aA_t)^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} c_2(s, t)^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma\varepsilon}} \left[\gamma^\varepsilon (1 - \gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} c_2(s, t)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\
\Rightarrow \lambda(s, t) &= (1 - \gamma)(A_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} c_2(s, t)^{-\frac{1}{\sigma}} \left[\gamma^\varepsilon (1 - \gamma)^{1-\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma) \right]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma(\varepsilon-1)}} \\
\Rightarrow \lambda(s, t) &= (1 - \gamma)(A_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} c_2(s, t)^{-\frac{1}{\sigma}} j_1(p_t)^{1/\sigma} \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) \frac{1}{\lambda(s, t)} &= \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{d}{dt} A_t \frac{1}{A_t} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} c_2(s, t) \frac{1}{c_2(s, t)} + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} j_1(p_t) \frac{1}{j_1(p_t)} \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) \frac{1}{\lambda(s, t)} &= \frac{\sigma-1}{\sigma} g - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} c_2(s, t) \frac{1}{c_2(s, t)} + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} j_1(p_t) \frac{1}{j_1(p_t)} \tag{260}
\end{aligned}$$

onde

$$(68) : \quad j_1(p_t) \equiv \left[\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon \right]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Então a equação de Euler se torna

$$\frac{\partial}{\partial t} q(s, t) = \left[\rho + v - \frac{\sigma-1}{\sigma} g + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} c_2(s, t) \frac{1}{c_2(s, t)} - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} j_1(p_t) \frac{1}{j_1(p_t)} \right] q(s, t) - [r_t + v - \delta] \tag{261}$$

Temos ainda que impor a condição de transversalidade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho+v)t} q(s, t) k(s, t) = 0 \tag{262}$$

Repare que a agregação da equação (261) se mostra bem mais complexa do que as agregações anteriores, pois mistura duas taxas de variação na mesma equação. Por isso, na próxima seção resolvemos o modelo em economia fechada sem custo de instalação, no qual a agregação analítica será possível. Como nosso interesse, no que se refere ao modelo em economia fechada, se restringe à calibração do estado estacionário, no qual o custo de instalação é nulo, não há prejuízo em adotar este procedimento.

5.5.3 Sem custo de instalação do capital

Suponho que o resto do mundo está em estado estacionário e que os parâmetros de preferência e tecnologia são os mesmos na economia doméstica e no resto do mundo. A estrutura estática é idêntica à do modelo com economia aberta. Tratando o resto do mundo como uma economia fechada, o problema do indivíduo nascido no instante s é:

$$\begin{aligned}
&\max \int_{t=s}^{\infty} e^{-(\rho+v)(t-s)} u[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] dt \\
&s.t. \begin{cases} \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} = i(s, t) - (\delta - v)k(s, t) \\ p_t c_1(s, t) + c_2(s, t) + i(s, t) - \omega(s, t) - r_t k(s, t) = 0 \\ u[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] = \frac{C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma} \\ C(c_1(s, t), c_2(s, t)) = \left[\gamma(c_1(s, t))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1 - \gamma)(c_2(s, t))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\ k(s, s) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

5.5.4 Condições de otimalidade

Montando a função auxiliar de Hamilton em valor presente:

$$H_t = e^{-(\rho+v)t} \{u[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] + \lambda(s, t) [\omega(s, t) + (r_t + v - \delta)k(s, t) - p_t c_1(s, t) - c_2(s, t)]\} \quad (263)$$

Var. de estado: $k(s, t)$.

Var. de controle: $c_1(s, t), c_2(s, t)$.

Var. de coestado: $\lambda(s, t)$.

Aplicando o Princípio do Máximo obtemos as seguintes condições necessárias para a trajetória ótima:

$$\begin{aligned} [c_1]: \quad H_{c_1} &= 0 \\ &\Rightarrow u_{c_1}[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] = \lambda(s, t)p_t \\ &\Rightarrow C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{-1/\sigma} C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{1/\varepsilon} \gamma A_t (A_t c_1(s, t))^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda(s, t)p_t \end{aligned} \quad (264)$$

$$\begin{aligned} [c_2]: \quad H_{c_2} &= 0 \\ &\Rightarrow u_{c_2(s, t)}[C(c_1(s, t), c_2(s, t))] = a\lambda(s, t) \\ &\Rightarrow C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{-1/\sigma} C(c_1(s, t), c_2(s, t))^{1/\varepsilon} (1 - \gamma) A_t (a A_t c_2(s, t))^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda(s, t) \end{aligned} \quad (265)$$

$$\begin{aligned} [k]: \quad H_k &= -\frac{d}{dt} \left[e^{-(\rho+v)t} \lambda(s, t) \right] \\ &\Rightarrow e^{-(\rho+v)t} \lambda(s, t) [r_t + v - \delta] = - \left[-(\rho + v) e^{-(\rho+v)t} \lambda(s, t) + e^{-(\rho+v)t} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) \right] \\ &\Rightarrow r_t + v - \delta = \rho + v - \frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) \frac{1}{\lambda(s, t)} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \lambda(s, t) = \lambda(s, t) [\rho + \delta - r_t] \end{aligned} \quad (266)$$

$$\Rightarrow \lambda(s, t) = \lambda(s, s) e^{-\int_s^t [r(t') - \rho - \delta] dt'} \quad (267)$$

Repare que a restrição orçamentária pode ser expressa como

$$\begin{aligned} p_t c_1(s, t) + c_2(s, t) + \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} - \omega(s, t) - (r_t + v - \delta)k(s, t) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t) + \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} - \omega(s, t) - (r_t + v - \delta)k(s, t) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial k(s, t)}{\partial t} &= (r_t + v - \delta)k(s, t) + \omega(s, t) - \lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t) \\ \Rightarrow \frac{d}{dz} \left[k(s, z) e^{-\int_t^z [r(t') + v - \delta] dt'} \right] &= e^{-\int_t^z [r(t') + v - \delta] dt'} [\omega(s, z) - \lambda(s, z)^{-\sigma} j_2(p_z)] \\ \Rightarrow \left[k(s, z) e^{-\int_t^z [r(t') + v - \delta] dt'} \right]_t^\infty &= \int_t^\infty e^{-\int_t^z [r(t') + v - \delta] dt'} \omega(s, z) dz - \int_t^\infty e^{-\int_t^z [r(t') + v - \delta] dt'} \lambda(s, z)^{-\sigma} j_2(p_z) dz \\ \Rightarrow \int_t^\infty e^{-\int_t^z [r(t') + v - \delta] dt'} \lambda(s, z)^{-\sigma} j_2(p_z) dz &= k(s, t) + h(s, t) \\ \Rightarrow \int_t^\infty e^{-\int_t^z [r(t') + v - \delta] dt'} \lambda(s, z)^{-\sigma} j_2(p_z) dz &= k(s, t) + h(s, t) \\ \Rightarrow \lambda(s, t)^{-\sigma} \int_t^\infty e^{-\int_t^z [r(t') + v - \delta] dt'} e^{\sigma \int_t^z [r(t') - \rho - \delta] dt'} j_2(p_z) dz &= k(s, t) + h(s, t) \\ \Rightarrow \lambda(s, t)^{-\sigma} &= j_{3t}^{-1} [k(s, t) + h(s, t)] \end{aligned} \quad (268)$$

onde

$$\begin{aligned}
 j_2(p_t) &= [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-1}{\varepsilon-1}} \\
 h(s, t) &\equiv \int_t^\infty e^{-\int_t^z [r(t') + v - \delta] dt'} \omega(s, z) dz \\
 j_{3t} &= \int_t^\infty e^{-\int_t^z [\sigma\rho + v + (1-\sigma)(r(t') - \delta)] dt'} j_2(p_z) dz \quad \text{ou} \quad j_{3t} = \int_t^\infty e^{-\int_t^z [\rho + v + (1-\sigma)(r(t') - \delta - \rho)] dt'} j_2(p_z) dz
 \end{aligned} \tag{269}$$

5.5.5 Agregação e dinâmica

A derivação da agregação e a dinâmica do modelo é feita de forma análoga aos procedimentos utilizados nas seções 3.3 e 3.4 do *Capítulo 2*, de modo que não reproduziremos aqui todo o algebrismo. Abaixo seguem as expressões para as variáveis agregadas do modelo.

$$A_t N_t k_t = \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} k(s, t) ds \tag{270}$$

$$A_t N_t h_t = \tilde{N}_{t_0} e^{n(t-t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-(n+v)(t-s)} h(s, t) ds \tag{271}$$

$$\lambda_t^{-\sigma} = j_{3t}^{-1} (h_t + a_t) \tag{272}$$

$$c_{1t} = \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} \tag{273}$$

$$ac_{2t} = (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} \tag{274}$$

No caso da restrição orçamentária individual, temos

$$\begin{aligned}
 i(s, t) &= r_t k(s, t) + \omega(s, t) - \lambda(s, t)^{-\sigma} j_2(p_t) \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^t N(s, t) i(s, t) ds &= r_t \int_{-\infty}^t N(s, t) k(s, t) ds + \int_{-\infty}^t N(s, t) \omega(s, t) ds - j_2(p_t) \int_{-\infty}^t N(s, t) \lambda(s, t)^{-\sigma} ds \\
 \Rightarrow i_t &= \omega_t + r_t k_t - j_2(p_t) \lambda_t^{-\sigma}
 \end{aligned} \tag{275}$$

Abaixo seguem as equações que descrevem a dinâmica agregada do modelo.

$$\dot{h}_t = (r_t + v + \alpha - g - \delta) h_t - w_t \tag{276}$$

$$\dot{k}_t = \omega_t + (r_t - \delta^{EF}) k_t - j_2(p_t) \lambda_t^{-\sigma} \tag{277}$$

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\sigma} [\rho + g + (1-\sigma)(r(t) - \delta - \rho) - (r_t - \delta + \alpha) + j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n) k_t \lambda_t^\sigma] \tag{278}$$

5.5.6 Condições de factibilidade

O preço relativo do bem doméstico deve ser tal que sua demanda, dada pelo consumo do bem doméstico acrescentada do custo de instalação do capital, deve ser igual à sua oferta:

$$\begin{aligned}
 c_{1t}(p_t, \lambda_t) &= y_1(p_t, k_t) \\
 \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} &= a_1^{\alpha_1-1} \frac{a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\
 \Rightarrow p_t &= p_t(q_t, k_t, \lambda_t)
 \end{aligned} \tag{279}$$

$$\tag{280}$$

Além disso, como estamos em economia fechada, a demanda por bens comercializáveis deve ser igual a sua oferta:

$$\begin{aligned}
c_{2t}(p_t, \lambda_t) + i_t &= y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow i_t &= \dot{k}_t + \delta^{EF} k_t = y_2(p_t, k_t) - c_{2t}(p_t, \lambda_t) \\
\Rightarrow \dot{k}_t &= y_2(p_t, k_t) - (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} - \delta^{EF} k_t \\
\Rightarrow \dot{k}_t &= a_1^{\alpha_1-1} \frac{k_t - a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}} - (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} - \delta^{EF} k_t \quad (281)
\end{aligned}$$

5.5.7 Dinâmica do sistema consolidado

A dinâmica do modelo pode ser caracterizada a partir do seguinte sistema de 3 equações diferenciais em k_t , λ_t e p_t :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{k}_t &= a_1^{\alpha_1-1} \frac{k_t - a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}} - (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} - \delta^{EF} k_t \quad (281) \\ \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} &= \frac{1}{\sigma} [\rho + g + (1 - \sigma)(r(p_t) - \delta - \rho) - (r_t - \delta + \alpha) + j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)k_t \lambda_t^\sigma] \quad (278) \\ \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} &= a_1^{\alpha_1-1} \frac{a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \quad (279) \end{aligned} \right.$$

além das condições iniciais k_0 , λ_0 e da condição de transversalidade.

5.5.8 Estado Estacionário

Da equação $\dot{k}_t = 0$ temos

$$\begin{aligned}
Z_2(p^{ss})k^{ss} - W_2(p^{ss}) - (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} - \delta^{EF} k^{ss} &= 0 \\
\Rightarrow [Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}]k^{ss} &= (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} + W_2(p^{ss}) \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{(1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} + W_2(p^{ss})}{Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}} \quad (282)
\end{aligned}$$

onde

$$(31) : \quad Z_2(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$$

$$(32) : \quad W_2(p) \equiv a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} Z_2(p)$$

Repare que, avaliando (269) em estado estacionário, temos

$$\begin{aligned}
j_{3t} &= \int_t^\infty e^{-\int_t^z [\rho+v+(1-\sigma)(r(t')-\delta-\rho)]dt'} j_2(p_z) dz \\
j_3^{ss} &= \int_t^\infty e^{-\int_t^z [\rho+v+(1-\sigma)(r^{ss}-\delta-\rho)]dt'} j_2(p^{ss}) dz \\
\Rightarrow j_3^{ss} &= j_2(p^{ss}) \int_t^\infty e^{-\int_t^z [\rho+v+(1-\sigma)(r^{ss}-\delta-\rho)]dt'} dz \\
\Rightarrow j_3^{ss} &= j_2(p^{ss}) \left[-\frac{e^{-[\rho+v+(1-\sigma)(r^{ss}-\delta-\rho)](z-t)}}{\rho+v+(1-\sigma)(r^{ss}-\delta-\rho)} \right]_{z=0}^{z=\infty} \\
\Rightarrow j_3^{ss} &= \frac{j_2(p^{ss})}{\rho+v+(1-\sigma)(r^{ss}-\delta-\rho)}
\end{aligned} \tag{283}$$

Então, avaliando (278) em estado estacionário e utilizando (283), temos

$$\begin{aligned}
0 &= (\rho + g) + (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho) - (r^{ss} - \delta + \alpha) + (j_3^{ss})^{-1}(\alpha + v + n)k^{ss}(\lambda^{ss})^\sigma \\
\Rightarrow 0 &= (\rho + g) + (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho) - (r^{ss} - \delta + \alpha) \\
&\quad + (j_2^{ss})^{-1}[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho)](\alpha + v + n)k^{ss}(\lambda^{ss})^\sigma \\
\Rightarrow k^{ss}(\lambda^{ss})^\sigma &= j_2(p^{ss}) \frac{(r^* + \alpha) - (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho) - (\rho + g)}{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho)](\alpha + v + n)} \\
\Rightarrow k^{ss} &= \frac{(r^{ss} - \delta + \alpha) - (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho) - (\rho + g)}{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho)](\alpha + v + n)} j_2(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma}
\end{aligned} \tag{284}$$

Defino o parâmetro

$$\Upsilon \equiv \frac{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho)](\alpha + v + n)}{(r^{ss} - \delta + \alpha) - (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho) - (\rho + g)} \tag{285}$$

Note-se que, pelo problema das firmas, temos $r^{ss} \equiv r(p^{ss})$, de modo que $\Upsilon \equiv \Upsilon(p^{ss})$. Lembrando que o dispêndio com consumo é dado por

$$(180) : \quad D(p) \equiv pc_1 + c_2 = j_2(p)\lambda^{-\sigma}$$

fica evidente que Υ corresponde à razão entre o consumo e a riqueza no longo prazo. Isto é:

$$\begin{aligned}
\Upsilon &= \frac{j_2(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma}}{k^{ss}} \\
\Rightarrow \Upsilon &= \frac{p^{ss}c_1^{ss} + c_2^{ss}}{k^{ss}} \\
\Rightarrow \Upsilon &= \frac{D(p^{ss})}{k^{ss}}
\end{aligned} \tag{286}$$

$$\Rightarrow k^{ss} = \frac{D(p^{ss})}{\Upsilon} \tag{287}$$

Igualando (282) e (287) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} + W_2(p^{ss})}{Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}} = \frac{D(p^{ss})}{\Upsilon} \\
\Rightarrow & \frac{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} + W_2(p^{ss})}{Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}} = \frac{j_2(p)\lambda^{-\sigma}}{\Upsilon} \\
& \left[\frac{j_2(p)}{\Upsilon} - \frac{(1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})}{Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}} \right] (\lambda^{ss})^{-\sigma} = \frac{W_2(p^{ss})}{Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}} \\
& (\lambda^{ss})^{-\sigma} = \frac{W_2(p^{ss})}{[Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}] \frac{j_2(p)}{\Upsilon} - (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})} \tag{288}
\end{aligned}$$

Logo, temos $\lambda^{ss} \equiv \lambda^{ss}(p^{ss}, \sigma, \rho, \gamma, \varepsilon, g, n, \delta, a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha, v)$ e $k^{ss} \equiv k^{ss}(p^{ss}, \sigma, \rho, \gamma, \varepsilon, g, n, \delta, a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha, v)$. Então, a equação (279) define implicitamente $p^{ss} \equiv p^{ss}(\sigma, \rho, \gamma, \varepsilon, g, n, \delta, a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha, v)$. Levando (288) em (279) podemos definir a função $G(p, k, \alpha)$ conforme abaixo

$$\begin{aligned}
(279) : & \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss})(\lambda^{ss})^{-\sigma} = W_1(p^{ss}) - Z_1(p^{ss})k^{ss} \\
\Rightarrow & \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss}) \frac{W_2(p^{ss})}{[Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}] \frac{j_2(p^{ss})}{\Upsilon(p^{ss}, \alpha)} - (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})} = W_1(p^{ss}) - Z_1(p^{ss})k^{ss} \\
\Rightarrow & G(p^{ss}, k^{ss}, \alpha) = \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss}) \frac{W_2(p^{ss})}{[Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}] \frac{j_2(p^{ss})}{\Upsilon(p^{ss}, \alpha)} - (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss})} - W_1(p^{ss}) + Z_1(p^{ss})k^{ss}
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita sabemos que

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = -\frac{\partial G / \partial \alpha}{\partial G / \partial p} \quad e \quad \frac{\partial k}{\partial \alpha} = -\frac{\partial G / \partial \alpha}{\partial G / \partial k}$$

Calculando $\partial G / \partial k$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial G}{\partial k^{ss}} = Z_1(p^{ss}) \\
\Rightarrow & \frac{\partial G}{\partial k^{ss}} = \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p^{ss} \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\
\Rightarrow & \frac{\partial G}{\partial k^{ss}} = \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\bar{\omega}^{ss}}{a_1} \right)^{\alpha_1-1} \\
\Rightarrow & \frac{\partial G}{\partial k^{ss}} = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(k^{ss})^{\alpha_1}}{\bar{\omega}_t} \\
\Rightarrow & \frac{\partial G}{\partial k^{ss}} = \frac{(k_1^{ss})^{\alpha_1}}{k_2^{ss} - k_1^{ss}} > 0 \tag{289}
\end{aligned}$$

Calculando $\partial G / \partial \alpha$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \alpha} &= - \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon j_1(p^{ss}) W_2(p^{ss}) \frac{-\frac{j_2(p^{ss})[Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}]}{\Upsilon(p^{ss}, \alpha)^2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha}}{\left\{ [Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}] \frac{j_2(p^{ss})}{\Upsilon(p^{ss}, \alpha)} - (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) \right\}^2} \\
\frac{\partial G}{\partial \alpha} &= \left(\frac{\gamma}{p^{ss}} \right)^\varepsilon \frac{j_1(p^{ss})}{\Upsilon(p^{ss}, \alpha)} W_2(p^{ss}) \frac{\frac{j_2(p^{ss})[Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}]}{\Upsilon(p^{ss}, \alpha)}}{\left\{ [Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF}] \frac{j_2(p^{ss})}{\Upsilon(p^{ss}, \alpha)} - (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p^{ss}) \right\}^2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha} \tag{290}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \Upsilon &= \frac{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho)] \{ (r^{ss} - \delta + \alpha) - (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho) - (\rho + g) - (\alpha + v + n) \}}{[(r^{ss} - \delta + \alpha) - (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho) - (\rho + g)]^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \Upsilon &= \frac{[(\rho + v) + (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho)] \{ \sigma(r^{ss} - \delta - \rho) - (g + v + n) \}}{[(r^{ss} - \delta + \alpha) - (1 - \sigma)(r^{ss} - \delta - \rho) - (\rho + g)]^2}\end{aligned}$$

Então, supondo $\sigma \leq 1$, temos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Upsilon \gtrless 0 \Leftrightarrow r^{ss} - \delta \gtrless \rho + \frac{g + n + v}{\sigma} \quad (291)$$

Na *calibração base* temos $\rho = 0.0229$, $\sigma = 0.50$, $g = 0.015$, $n = 0.01$ e $v = 0.0125$, de modo que

$$\rho + \frac{g + n + v}{\sigma} = 0.0979 > 0.06 = r^{ss} - \delta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \Upsilon < 0 \quad (292)$$

Além disso temos $Z_2(p^{ss}) - \delta^{EF} \simeq 0.282$, de modo que

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} < 0 \quad (293)$$

Calculando $\partial G / \partial p$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial p} &= \varepsilon \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon-1} \left(-\frac{\gamma}{p^2} \right) j_1(p) \lambda^{-\sigma} + \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} \frac{\partial j_1(p)}{\partial p} \lambda^{-\sigma} + \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} j_1(p) \frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p} \\ &\quad + \frac{\partial Z_1}{\partial p} k - \frac{\partial W_1}{\partial p} \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial p} &= -\frac{\varepsilon}{p} \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} j_1(p) \lambda^{-\sigma} + \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} \frac{\partial j_1(p)}{\partial p} \lambda^{-\sigma} + \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} j_1(p) \frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p} \\ &\quad + \frac{\partial Z_1}{\partial p} k - \frac{\partial W_1}{\partial p} \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial p} &= \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} j_1(p) \lambda^{-\sigma} \left[-\frac{\varepsilon}{p} + \frac{1}{j_1(p)} \frac{\partial j_1(p)}{\partial p} \right] + \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} j_1(p) \frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p} \\ &\quad + \frac{\partial Z_1}{\partial p} k - \frac{\partial W_1}{\partial p} \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial p} &= \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} j_1(p) \lambda^{-\sigma} \left[-\frac{\varepsilon}{p} + \frac{1}{j_1(p)} \frac{\sigma - \varepsilon}{\varepsilon - 1} [\gamma^{\varepsilon} p^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma - \varepsilon}{\varepsilon - 1} - 1} [\gamma^{\varepsilon} (1 - \varepsilon) p^{-\varepsilon}] \right] \\ &\quad + \left(\frac{\gamma}{p} \right)^{\varepsilon} j_1(p) \frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p} \\ &\quad - \frac{\eta_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}}{\eta_2 - \eta_1} \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} (p)^{\frac{1 - \alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \\ &\quad - \frac{\eta_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} - k}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} p^{\frac{2\alpha_1 - \alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\frac{\gamma}{p} \right)^\varepsilon j_1(p) \lambda^{-\sigma} [\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{1}{p} \left[\varepsilon - \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{(1-\varepsilon)\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon}}{\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon} \right] \\
&\quad + \left(\frac{\gamma}{p} \right)^\varepsilon j_1(p) \frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p} \frac{\eta_2 \bar{\omega}}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(\eta_1 \bar{\omega})^{\alpha_1}}{\bar{\omega}} - \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p} \frac{k_2 - k}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(\eta_1 \bar{\omega})^{\alpha_1}}{\bar{\omega}} \\
&= - \left(\frac{\gamma}{p} \right)^\varepsilon j_1(p) \lambda^{-\sigma} [\gamma^\varepsilon(p)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{1}{p} \left[\varepsilon + (\sigma - \varepsilon) \frac{\gamma^\varepsilon(p)^{1-\varepsilon}}{\gamma^\varepsilon(p)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon} \right] \\
&\quad + \left(\frac{\gamma}{p} \right)^\varepsilon j_1(p) \frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p} \frac{k_2}{k_2 - k_1} k_1^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p} \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} k_1^{\alpha_1} \\
&= - \left(\frac{\gamma}{p} \right)^\varepsilon j_1(p) \lambda^{-\sigma} [\gamma^\varepsilon(p)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{1}{p} \left[\varepsilon + (\sigma - \varepsilon) \frac{\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon}}{\gamma^\varepsilon p^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p} \frac{(k_1)^{\alpha_1}}{k_2 - k_1} [k_2 - (1 - \alpha_1)(k_2 - k)] + \left(\frac{\gamma}{p} \right)^\varepsilon j_1(p) \frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p}
\end{aligned}$$

Note-se que as primeira duas parcelas da expressão acima são negativas para valores razoáveis de parâmetros. Defino

$$X \equiv [Z_2(p) - \delta^{EF}] \frac{j_2(p)}{\Upsilon} - (1-\gamma)^\varepsilon j_1(p) \quad (294)$$

Calculando $\partial \lambda^{-\sigma} / \partial p$:

$$\begin{aligned}
(288): \quad \lambda^{-\sigma} &= \frac{W_2(p)}{X} \\
\Rightarrow \frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p} &= \frac{\frac{\partial W_2(p)}{\partial p} X - W_2(p) \frac{\partial}{\partial p} X}{X^2} = \frac{\partial W_2(p)}{\partial p} - W_2(p) \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial p}
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_2(p_t)}{\partial p_t} &= \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}-1} \\
\Rightarrow \frac{\partial Z_2(p_t)}{\partial p_t} &= \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p_t} Z_2(p_t) < 0 \quad (295)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_2(p_t)}{\partial p_t} &= a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} \frac{\partial Z_2(p_t)}{\partial p_t} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}-1} Z_2(p_t) \\
\Rightarrow \frac{\partial W_2(p_t)}{\partial p_t} &= a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_2(p_t) \left[\frac{1}{Z_2(p_t)} \frac{\partial Z_2(p_t)}{\partial p_t} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{-1} \right] \\
\Rightarrow \frac{\partial W_2(p_t)}{\partial p_t} &= a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_2(p_t) \left[\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{-1} \right] \quad (296)
\end{aligned}$$

Percebe-se que o sinal de $\frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p}$ é ambíguo a princípio. Na calibração temos $\frac{\partial W_2(p_t)}{\partial p_t} < 0$ e $X > 0$. Além disso, de (54) sabemos que um aumento em p eleva $\frac{c_1}{c_2^2}$, de modo que é claro que $\frac{X}{\partial p} > 0$. Portanto, temos $\frac{\partial \lambda^{-\sigma}}{\partial p} < 0$, implicando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial p} < 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial G}{\partial k} > 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial k^{ss}}{\partial \alpha} > 0 \quad e \quad \frac{\partial p^{ss}}{\partial \alpha} < 0 \end{aligned} \quad (297)$$

Note-se que o efeito total de uma alteração de α sobre p^{ss} precisa levar em conta que p^{ss} também depende de k^{ss} . Isto é,

$$\frac{dp^{ss}}{d\alpha} = \frac{\partial p^{ss}}{\partial \alpha} + \frac{\partial p^{ss}}{\partial k^{ss}} \frac{\partial k^{ss}}{\partial \alpha}$$

De fato, na calibração obtemos $\frac{dp^{ss}}{d\alpha} > 0$. Isto é, quanto menos generosa for a previdência (α maior), maior serão a riqueza (k^{ss}) e o consumo de longo prazo, e maior será o preço relativo dos serviços.

Finalmente, mostramos que o consumo inicial será tanto menor quanto maior for α . No instante inicial temos

$$\begin{aligned} \Lambda_{t_0}^{-\sigma} &= A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} = \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) \lambda(s, t_0)^{-\sigma} ds \\ \Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) j_{3t_0}^{-1} [h(s, t_0) + k(s, t_0)] ds \\ \Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) k(s, t_0) ds + j_{3t_0}^{-1} \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) h(s, t_0) ds \\ \Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} K_0 + j_{3t_0}^{-1} \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-(r_{t'} - \delta + v)(t' - t_0)} \omega(s, t') dt' \right] ds \\ \Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} A_{t_0} N_{t_0} k_0 + j_{3t_0}^{-1} \int_{-\infty}^{t_0} N(s, t_0) \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-(r_{t'} - \delta + v)(t' - t_0)} X^2 e^{-\alpha(t' - s)} A_{t'} w_{t'} dt' \right] ds \\ \Rightarrow A_{t_0} N_{t_0} \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} A_{t_0} N_{t_0} k_0 \\ &+ j_{3t_0}^{-1} \frac{n + v + \alpha}{n + v} A_{t_0} (n + v) N_{t_0} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v)(t_0 - s)} \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-(r_{t'} - \delta + v)(t' - t_0)} e^{g(t' - t_0) - \alpha(t' - s)} w_{t'} dt' \right] ds \\ \Rightarrow \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \left\{ k_0 + (n + v + \alpha) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(n+v+\alpha)(t_0 - s)} \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-(r_{t'} - \delta + v + \alpha - g)(t' - t_0)} w_{t'} dt' \right] ds \right\} \\ \Rightarrow \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \left\{ k_0 + \frac{n + v + \alpha}{n + v + \alpha} \int_{t_0}^{\infty} e^{-(r_{t'} - \delta + v + \alpha - g)(t' - t_0)} w_{t'} dt' \right\} \\ \Rightarrow \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \left\{ k_{t_0} + \int_{t_0}^{\infty} e^{-(r_{t'} - \delta + v + \alpha - g)(t' - t_0)} w_{t'} dt' \right\} \quad (298) \\ \Rightarrow \lambda_{t_0}^{-\sigma} &= j_{3t_0}^{-1} \{ k_{t_0} + h_{t_0} \} \quad (299) \end{aligned}$$

Então temos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \lambda_{t_0}^{-\sigma} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \lambda_{t_0} > 0, \quad \frac{\partial}{\partial k_{t_0}} \lambda_{t_0} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} p_{t_0} < 0$$

Ou seja, se duas economias fechadas, com os mesmos parâmetros de preferências e tecnologias, iniciam a dinâmica de transição com a mesma riqueza inicial (k_{t_0}) mas com sistemas previdenciários diferentes, a economia com previdência mais generosa (α menor) apresentará consumo inicial ($\lambda_{t_0}^{-\sigma}$) e preço relativo do bem doméstico maiores na fase inicial da dinâmica de transição. No longo prazo esta economia apresentará nível de riqueza (k^{ss}) menor, e preço relativo do bem doméstico (p^{ss}) menor e taxa de juros maior.

5.5.9 Estratégia de Calibração

Adotamos os mesmos valores para os parâmetros de preferências e tecnologias utilizados na *calibração base*, apresentada na *seção 4.2*, para $\alpha_1, \alpha_2, g, n, \delta, \varepsilon, \sigma, \rho, \beta$ e v . Para calibrar α e γ , seguimos o mesmo procedimento adotado no *Capítulo 3*, obtendo

$$(195): \quad \alpha = -\frac{1}{id^{ap}} \ln \left[\nu^{ss} \frac{y^{ss}}{w^{ss}} + e^{-(n+v+\beta)id^{ap}} \right] - (n+v)$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv \alpha(\nu^{ss}, id^{ap}, \beta, v, n, y^{ss}, a, p^{ss}, \alpha_2)$$

e

$$(199): \quad \gamma = \frac{(p^{ss}(a))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \left(\frac{1-\zeta^{ss}}{\zeta^{ss}} \right)^{1/\varepsilon}}{1 + (p^{ss}(a))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \left(\frac{1-\zeta^{ss}}{\zeta^{ss}} \right)^{1/\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \gamma \equiv \gamma(a, \zeta)$$

Pela equação (287) sabemos que $k^{ss} \equiv k^{ss}(a, p^{ss})$. Então, a condição de equilíbrio no mercado de bens domésticos (equação ((279))) nos fornece uma primeira relação entre a e p^{ss} :

$$\left(\frac{\gamma(a, \zeta)}{p^{ss}} \right)^{\varepsilon} j_1(p^{ss}) [\lambda^{ss}(p^{ss}, \alpha(a, p^{ss}, \nu, id^{ap}))]^{-\sigma}$$

$$= a_1^{\alpha_1-1} \frac{a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p^{ss} \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} - k^{ss}(a, p^{ss}, \gamma(a, \zeta))}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p^{ss} \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}}$$

$$\Rightarrow f_1(a, p^{ss}, \nu, id^{ap}, \zeta) = 0 \quad (300)$$

Para obter uma segunda relação entre a e p^{ss} utilizamos a condição de equilíbrio no mercado de fatores e o fato de que $k_1^{ss} \equiv k_1^{ss}(a, p^{ss})$, $k_2^{ss} \equiv k_2^{ss}(a, p^{ss})$, $l_1^{ss} \equiv l_1^{ss}(k^{ss}, k_1^{ss}, k_2^{ss}, a)$ e $l_2^{ss} \equiv l_2^{ss}(k^{ss}, k_1^{ss}, k_2^{ss}, a)$:

$$k^{ss}(a, p^{ss}) = l_1^{ss}(a, p^{ss}) k_1^{ss}(a, p^{ss}) + a l_2^{ss}(a, p^{ss}) k_2^{ss}(a, p^{ss})$$

$$\Rightarrow f_2(a, p^{ss}) = 0 \quad (301)$$

A seguir apresentamos a sensibilidade do estado estacionário do modelo ao grau de avareza do sistema previdenciário. Repare que, quanto mais generoso for o sistema previdenciário, menores serão o produto, a razão capital / produto e o consumo por trabalhador, e maior será a taxa de juros de longo prazo. Além disso, sistemas de previdência mais generosos estarão associados a níveis menores do preço relativo do bem doméstico, sugerindo que alterações nas instituições previdenciárias que afetem a poupança global podem ter efeito sobre as taxas de câmbio.

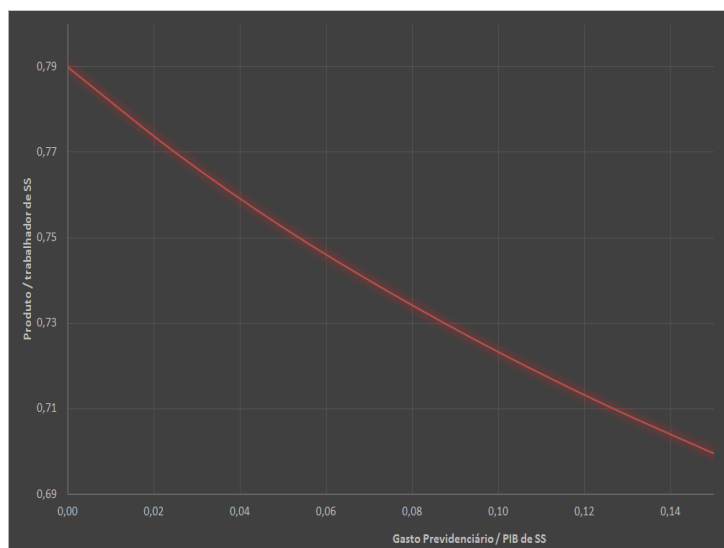


Figura 10: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Produto / trabalhador de SS

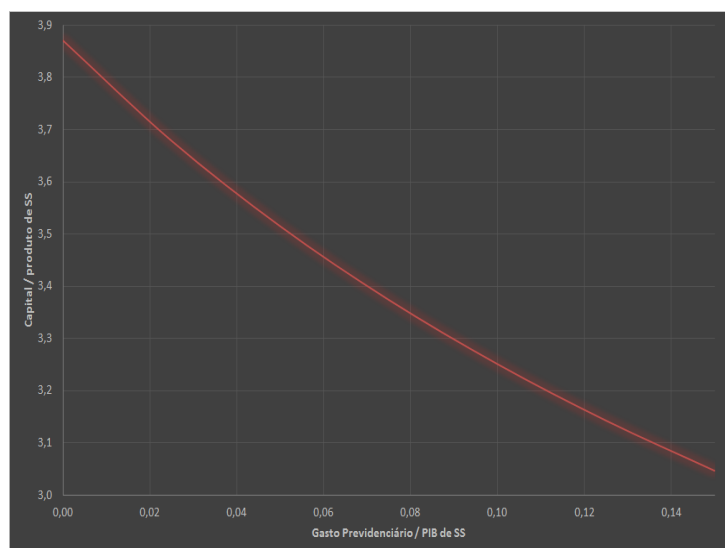


Figura 11: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Capital / Produto de SS

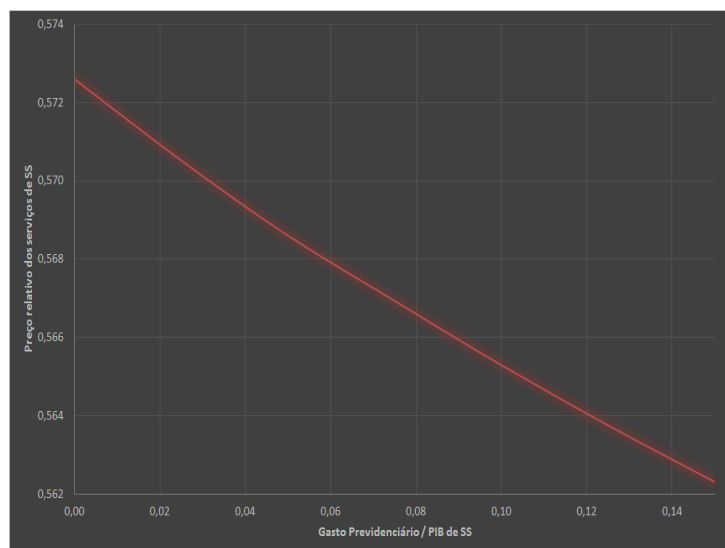


Figura 12: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Preço Relativo dos Serviços de SS

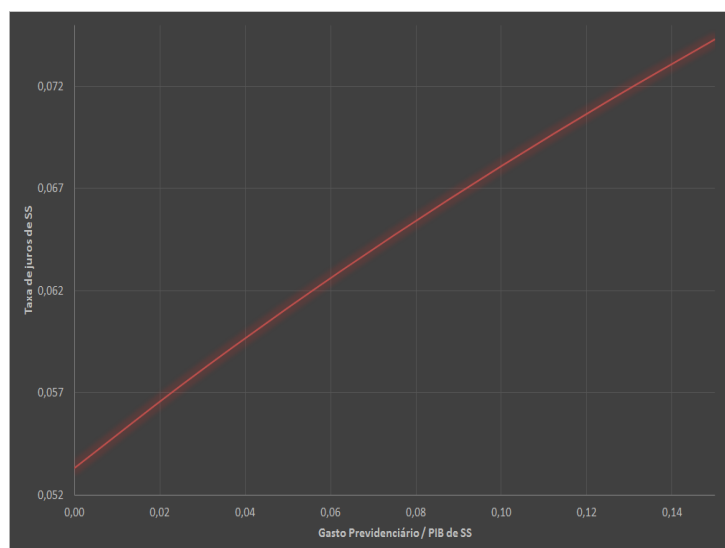


Figura 13: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Taxa de Juros de SS

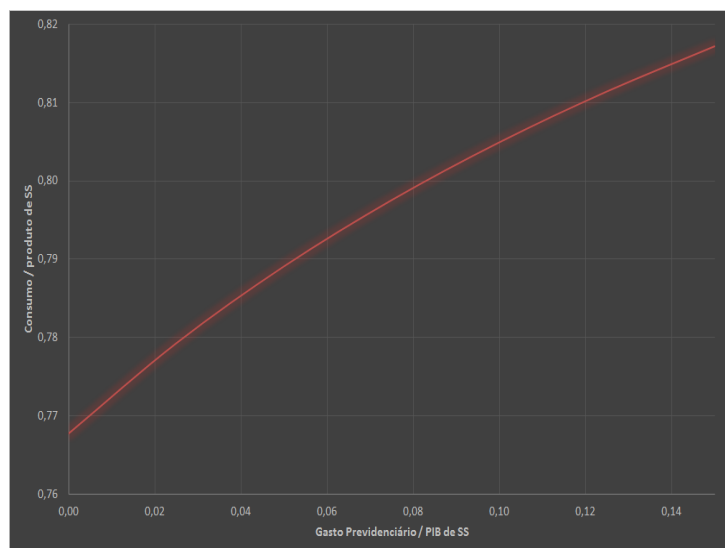


Figura 14: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Consumo / Produto de SS

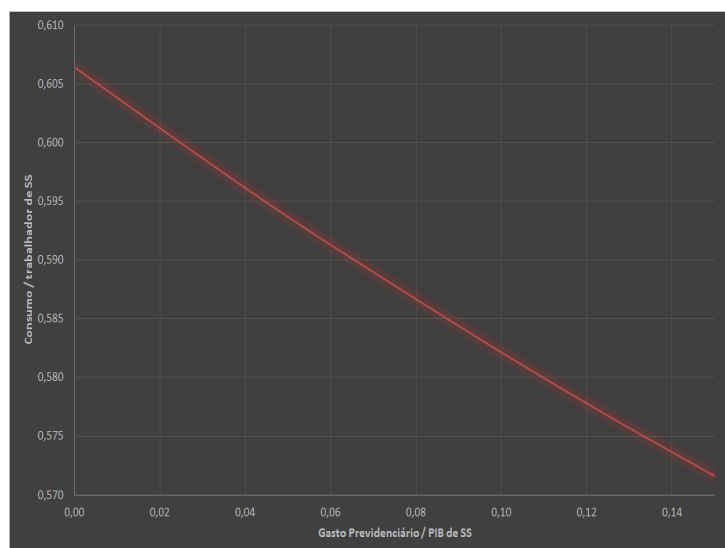


Figura 15: Gasto Previdenciário / PIB de SS X Consumo / trabalhador de SS

5.6 Estabilidade e dinâmica do modelo do *Capítulo 2*

No modelo com gerações sobrepostas temos o seguinte sistema dinâmico em k_t , q_t , λ_t , b_t e p_t :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{k}_t = k_t \left[\frac{q_t - 1}{bp_t} \right]^{1/\xi} \quad (152) \\ \dot{q}_t = (r^* + v)q_t - (r_t + v - \delta) \quad (154) \\ \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\sigma} [(\rho + g) + (1 - \sigma)(r^* - \rho) - (r^* + \alpha) + j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)(q_t k_t - b_t)\lambda_t^\sigma] \quad (167) \\ \dot{b}_t = R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + \delta^{EF} - Z_2(p_t) \right] + W_2(p_t) \quad (158) \\ \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) = W_1(p_t) - Z_1(p_t)k_t \quad (175) \end{array} \right.$$

Tomando uma expansão de Taylor de 1a. ordem em torno de um vetor arbitrário $v^* = (k^*, q^*, \lambda^*, b^*)$ obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_t \\ \dot{q}_t \\ \dot{\lambda}_t \\ \dot{b}_t \end{bmatrix}_{v^*} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial \lambda_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial b_t} \right|_{v^*} \\ \left. \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial \lambda_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial b_t} \right|_{v^*} \\ \left. \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial k_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial q_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial \lambda_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial b_t} \right|_{v^*} \\ \left. \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial k_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial q_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial \lambda_t} \right|_{v^*} & \left. \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial b_t} \right|_{v^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ q_t - q^* \\ \lambda_t - \lambda^* \\ b_t - b^* \end{bmatrix}$$

Calculando $\frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial k_t} &= \phi(q_t, p_t) + k_t \phi_p(q_t, p_t) \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{k}}{\partial k_t} &= \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} - \frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} \frac{k_t}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{k}}{\partial k_t} &= \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi} \frac{k_t}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \right) \end{aligned} \quad (302)$$

Avaliando o sistema linearizado em $v^* = v^{ss} + \tilde{\delta}$, para $\tilde{\delta}$ arbitrariamente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{k}}{\partial k_t} \right|_{v^*} &= \left(\frac{\tilde{\delta}_1}{bp^*} \right)^{1/\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi} \frac{k^*}{p^*} \frac{\partial p}{\partial k} \right|_{v^*} \Big) \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial \dot{k}}{\partial k_t} \right|_{v^*} &\xrightarrow{v^* \rightarrow v^{ss}} 0 = \left. \frac{\partial \dot{k}}{\partial k_t} \right|_{ss} \end{aligned} \quad (303)$$

onde estamos utilizando o fato de que $\left. \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \right|_{v^*}$ possui valor absoluto finito, conforme será mostrado mais adiante.

Derivada de \dot{k}_t em relação a q_t :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} &= k_t \left[\phi_q(q_t, p_t) + \phi_p(q_t, p_t) \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right] \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} &= k_t \left[\frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{1}{bp_t} - \frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} \frac{1}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right] \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} &= k_t \frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{1}{bp_t} \left[1 - b \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right] \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} &= k_t \frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{1}{bp_t} \left(1 - b \frac{q_t - 1}{q_t} \frac{q_t}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right)
\end{aligned} \tag{304}$$

Avaliando o sistema linearizado em $v^* = v^{ss} + \tilde{\delta}$, para $\tilde{\delta}$ arbitrariamente pequeno, temos

$$\left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} \right|_{v^*} = k^* \frac{1}{\xi} \left(\frac{\tilde{\delta}_1}{bp^*} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{1}{bp^*} \left(1 - b \frac{\tilde{\delta}_1}{q^*} \frac{q^*}{p^*} \frac{\partial p}{\partial q} \Big|_{v^*} \right) \tag{305}$$

Note que, dada a convexidade da função custo de instalação, temos $\xi > 1$, implicando que a derivada de \dot{k}_t em relação a q_t , $\frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t}$, não é definida em $\tilde{\delta} = 0$, ou, equivalentemente, em $(k_t, q_t, \lambda_t, b_t) = (k^{ss}, q^{ss}, \lambda^{ss}, b^{ss})$ ³²:

$$\left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial q_t} \right|_{v^*} \xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} \infty \tag{306}$$

Derivada de \dot{k}_t em relação a λ_t :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{k}_t}{\partial \lambda_t} &= k_t \phi_p(q_t, p_t) \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial \lambda_t} &= k_t \left[-\frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} \frac{1}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} \right]
\end{aligned}$$

Avaliando o sistema linearizado em $v^* = v^{ss} + \tilde{\delta}$, para $\tilde{\delta}$ arbitrariamente pequeno, temos

$$\left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial \lambda_t} \right|_{v^*} \xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} 0$$

Finalmente, como nem k nem p dependem de b , temos $\left. \frac{\partial \dot{k}_t}{\partial b_t} \right|_{v^*} = 0$.

Derivada de \dot{q}_t em relação a k_t :

³²Estamos utilizando o fato de que $\left. \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right|_{v^*} \xrightarrow{\tilde{\delta} < \infty} 0$, conforme será mostrado mais adiante.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} &= \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} &= - \left[f_2''(k_{2t}) \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} \right] \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} &= - \left[\alpha_2(\alpha_2 - 1) k_{2t}^{\alpha_2-2} \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} \right] \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} &= \left[\frac{\alpha_2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{k_{2t}^{\alpha_2-1}}{p_t} \right] \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} \Big|_{v^*} &= \left[\frac{\alpha_2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{(k_2^*)^{\alpha_2-1}}{p^*} \right] \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \Big|_{v^*} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial k_t} \Big|_{v^*} &\xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{(k_2^{ss})^{\alpha_2-1}}{p^{ss}} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \Big|_{v^*}
\end{aligned} \tag{307}$$

onde estamos utilizando o fato de que $\frac{\partial p_t}{\partial k_t} \Big|_{v^*} < \infty$, conforme será mostrado mais adiante, e que, pela equação (??), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} &= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} (p_t)^{\frac{1 - \alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \\
&= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \frac{1}{p_t} \\
&= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \eta_2 \frac{\bar{\omega}_t}{p_t} \\
&= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{k_{2t}}{p_t}
\end{aligned} \tag{308}$$

Derivada de \dot{q}_t em relação a q_t :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} &= r^* + v - f_2''(k_{2t}) \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} &= r^* + v + \alpha_2(1 - \alpha_2) k_{2t}^{\alpha_2-2} \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} \Big|_{v^*} &= r^* + v + \frac{\alpha_2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{(k_2^*)^{\alpha_2-1}}{p^*} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \Big|_{v^*} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial q_t} \Big|_{v^*} &\xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} r^* + v
\end{aligned} \tag{309}$$

onde estamos utilizando o fato de que $\frac{\partial p_t}{\partial q_t} \Big|_{v^*} \xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} 0$, conforme será mostrado mais adiante.

Derivada de \dot{q}_t em relação a λ_t :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{q}_t}{\partial \lambda_t} &= -f_2''(k_{2t}) \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial \lambda_t} &= \alpha_2(1 - \alpha_2) k_{2t}^{\alpha_2-2} \frac{\partial k_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_t}{\partial \lambda_t} \Big|_{v^*} &\xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{(k_2^{ss})^{\alpha_2-1}}{p^{ss}} \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} \Big|_{v^*}
\end{aligned} \tag{310}$$

Finalmente, como nem q nem p dependem de b , temos $\frac{\partial \dot{q}_t}{\partial b_t} \Big|_{v^*} = 0$.

Derivada de $\dot{\lambda}_t$ em relação a k_t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial k_t} &= \frac{\lambda_t}{\sigma} [j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)q_t \lambda_t^\sigma] \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial k_t} \Big|_{v^*} &= \frac{\lambda^*}{\sigma} \left[\frac{1}{j_3^*}(\alpha + v + n)q^*(\lambda^*)^\sigma \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial k_t} \Big|_{v^*} &\xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} \frac{\lambda^{ss}}{\sigma j_3^{ss}} [(\alpha + v + n)(\lambda^{ss})^\sigma]\end{aligned}$$

Derivada de $\dot{\lambda}_t$ em relação a q_t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial q_t} &= \frac{\lambda_t}{\sigma} [j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)k_t \lambda_t^\sigma] \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial q_t} \Big|_{v^*} &= \frac{\lambda^*}{\sigma} \left[\frac{1}{j_3^*}(\alpha + v + n)k^*(\lambda^*)^\sigma \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial q_t} \Big|_{v^*} &\xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} \frac{\lambda^{ss}}{\sigma j_3^{ss}} [(\alpha + v + n)k^{ss}(\lambda^{ss})^\sigma]\end{aligned}$$

Derivada de $\dot{\lambda}_t$ em relação a λ_t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial \lambda_t} &= \frac{1}{\sigma} [(\rho + g) - (r^* + \alpha) + j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)a_t \lambda_t^\sigma] \\ &\quad + \frac{\lambda_t}{\sigma} [j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)a_t \sigma \lambda_t^{\sigma-1}] \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial \lambda_t} \Big|_{v^*} &= \frac{1}{\sigma} \left[(\rho + g) - (r^* + \alpha) + \frac{1}{j_3^*}(\alpha + v + n)a^*(\lambda^*)^\sigma \right] \\ &\quad + \frac{\lambda^*}{\sigma} \left[\frac{1}{j_3^*}(\alpha + v + n)a^* \sigma (\lambda^*)^{\sigma-1} \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial \lambda_t} \Big|_{v^*} &\xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \left[(\rho + g) - (r^* + \alpha) + \frac{1}{j_3^{ss}}(\alpha + v + n)a^{ss}(\lambda^{ss})^\sigma \right] \\ &\quad + \frac{\lambda^{ss}}{\sigma j_3^{ss}} [(\alpha + v + n)a^{ss} \sigma (\lambda^{ss})^{\sigma-1}]\end{aligned}$$

Derivada de $\dot{\lambda}_t$ em relação a b_t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial b_t} &= -\frac{\lambda_t}{\sigma} [j_{3t}^{-1}(\alpha + v + n)b_t \lambda_t^\sigma] \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial b_t} \Big|_{v^*} &= -\frac{\lambda^*}{\sigma} \left[\frac{1}{j_3^*}(\alpha + v + n)b^*(\lambda^*)^\sigma \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial b_t} \Big|_{v^*} &\xrightarrow{\tilde{\delta} \rightarrow 0} -\frac{\lambda^{ss}}{\sigma j_3^{ss}} [(\alpha + v + n)b^{ss}(\lambda^{ss})^\sigma]\end{aligned}$$

Derivada de \dot{b}_t em relação a k_t :

$$\begin{aligned}
\dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\frac{q_t - 1}{b p_t} + \delta^{EF} \right] - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial k_t} &= (1 - \gamma)^\varepsilon \lambda_t^{-\sigma} \frac{\partial j_{1t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} + \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} + \delta^{EF} \right) + k_t \left(-\frac{q_t - 1}{b p_t^2} \right) \frac{\partial p_t}{\partial k_t} - \frac{\partial y_{2t}}{\partial k_t} - \frac{\partial y_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial k_t} &= (1 - \gamma)^\varepsilon \lambda_t^{-\sigma} \frac{\partial j_{1t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} + \delta^{EF} + \left(\frac{q_t - 1}{b p_t} \right) \left(1 - \frac{k_t}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \right) - \frac{\partial y_{2t}}{\partial k_t} - \frac{\partial y_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial k_t} \quad (311)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
j_1(p_t) &= [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\Rightarrow \frac{\partial j_{1t}}{\partial p_t} &= \frac{\sigma - \varepsilon}{\varepsilon - 1} [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} \gamma^\varepsilon (1 - \varepsilon) p_t^{-\varepsilon} \\
\Rightarrow \frac{\partial j_{1t}}{\partial p_t} &= (\varepsilon - \sigma) \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} \\
\Rightarrow \frac{\partial j_{1t}}{\partial p_t} &= j_{1t} \frac{\varepsilon - \sigma}{\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1 - \gamma)^\varepsilon} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon
\end{aligned}$$

A oferta do setor de bens comercializáveis pode ser expressa como $y_2 = Z_2(p)k - W_2(p)$ onde $Z_2(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}}$ e $W_2(p) \equiv a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_2(p)$. Então temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_{2t}}{\partial k_t} &= Z_2(p_t) \\
\frac{\partial y_{2t}}{\partial p_t} &= \frac{\partial Z_2(p_t)}{\partial p_t} k_t - \frac{\partial W_2(p_t)}{\partial p_t} \\
\frac{\partial Z_2(p_t)}{\partial p_t} &= \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2^{\alpha_2} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}-1} \\
\Rightarrow \frac{\partial Z_2(p_t)}{\partial p_t} &= \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p_t} Z_2(p_t) \quad (312)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_2(p_t)}{\partial p_t} &= a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} \frac{\partial Z_2(p_t)}{\partial p_t} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}-1} Z_2(p_t) \\
\Rightarrow \frac{\partial W_2(p_t)}{\partial p_t} &= a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_2(p_t) \left[\frac{1}{Z_2(p_t)} \frac{\partial Z_2(p_t)}{\partial p_t} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{-1} \right] \\
\Rightarrow \frac{\partial W_2(p_t)}{\partial p_t} &= a_1 \eta_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_2(p_t) \left[\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{-1} \right] \quad (313)
\end{aligned}$$

Derivada de \dot{b}_t em relação a q_t :

$$\begin{aligned}
\dot{b}_t &= R^* b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\frac{q_t - 1}{b p_t} + \delta^{EF} \right] - y_2(p_t, k_t) \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial q_t} &= (1 - \gamma)^\varepsilon \lambda_t^{-\sigma} \frac{\partial j_{1t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} + \frac{k_t}{b p_t} + k_t \left(-\frac{q_t - 1}{b p_t^2} \right) \frac{\partial p_t}{\partial q_t} - \frac{\partial y_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial q_t} &= (1 - \gamma)^\varepsilon \lambda_t^{-\sigma} \frac{\partial j_{1t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} + \frac{k_t}{b p_t} \left(1 - \frac{q_t - 1}{p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \right) - \frac{\partial y_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial q_t} \quad (314)
\end{aligned}$$

Derivada de \dot{b}_t em relação a λ_t :

$$\begin{aligned}\dot{b}_t &= R^*b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\frac{q_t - 1}{bp_t} + \delta^{EF} \right] - y_2(p_t, k_t) \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial \lambda_t} &= -\sigma(1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma-1} + (1 - \gamma)^\varepsilon \lambda_t^{-\sigma} \frac{\partial j_{1t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} + k_t \left(-\frac{q_t - 1}{bp_t^2} \right) \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} - \frac{\partial y_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial \lambda_t} &= -\frac{\sigma}{\lambda_t} (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + (1 - \gamma)^\varepsilon \lambda_t^{-\sigma} \frac{\partial j_{1t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} - \frac{k_t}{p_t} \left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right) \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t} - \frac{\partial y_{2t}}{\partial p_t} \frac{\partial p_t}{\partial \lambda_t}\end{aligned}$$

Derivada de \dot{b}_t em relação a b_t :

$$\begin{aligned}\dot{b}_t &= R^*b_t + (1 - \gamma)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\frac{q_t - 1}{bp_t} + \delta^{EF} \right] - y_2(p_t, k_t) \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{b}_t}{\partial b_t} &= R^*\end{aligned}$$

Agora calculamos $\frac{\partial p_t}{\partial k_t}$ e $\frac{\partial p_t}{\partial q_t}$ utilizando a equação de factibilidade para o mercado de bens domésticos (equação (174)). Definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned}G(p_t, q_t, k_t, \lambda_t) &= \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon j_1(p_t)\lambda_t^{-\sigma} + k_t \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) \\ &\quad - a_1^{\alpha_1-1} \frac{a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}}\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita sabemos que

$$\frac{\partial p}{\partial k} = -\frac{\partial G / \partial k}{\partial G / \partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial q} = -\frac{\partial G / \partial q}{\partial G / \partial p} \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial \lambda} = -\frac{\partial G / \partial \lambda}{\partial G / \partial p} \quad (315)$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial k_t} &= \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) + \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial k_t} &= \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) + \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\bar{\omega}}{a_1} \right)^{\alpha_1-1} \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial k_t} &= \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(k_{1t})^{\alpha_1}}{\bar{\omega}_t} \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial k_t} &= \left[\left(\frac{q_t - 1}{bp_t} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t - 1}{p_t} \right) + \frac{1}{k_{2t} - k_{1t}} (k_{1t})^{\alpha_1} \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial k_t} \Big|_{(k^*, q^*)} &\xrightarrow{\varepsilon, \delta \downarrow 0} \frac{(k_1^{ss})^{\alpha_1}}{k_2^{ss} - k_1^{ss}}\end{aligned} \quad (316)$$

Note que, se $\alpha_2 > \alpha_1$, então $\frac{\partial G}{\partial k} \Big|_{(k^*, q^*)} > 0$.

A oferta do setor de serviços pode ser expressa como $y_1 = W_1(p) - Z_1(p)k$ onde $Z_1(p) \equiv \frac{a_1^{\alpha_1-1}}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}}$ e $W_1(p) \equiv a_1 \eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} Z_1(p)$. Então temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial p} &= \varepsilon \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon-1} \left(-\frac{\gamma}{p_t^2} \right) j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon} \frac{\partial j_1(p_t)}{\partial p_t} \lambda_t^{-\sigma} \\
&+ k_t \left[\frac{1}{\xi} \left(\frac{q_t-1}{bp_t} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \left(-\frac{q_t-1}{p_t^2} \right) \right] \left(\frac{q_t-1}{p_t} \right) + k_t \left[\left(\frac{q_t-1}{bp_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} + g + n + v \right] \left(-\frac{q_t-1}{p_t^2} \right) \\
&+ \frac{\partial Z_1}{\partial p_t} k_t - \frac{\partial W_1}{\partial p_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial p} &= -\frac{\varepsilon}{p_t} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon} j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} + \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon} \frac{\partial j_1(p_t)}{\partial p_t} \lambda_t^{-\sigma} \\
&- \frac{k_t}{\xi p_t} \left[\left(\frac{q_t-1}{bp_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} \right] \left(\frac{q_t-1}{p_t} \right) - \frac{k_t}{p_t} \left[\left(\frac{q_t-1}{bp_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} + g + n + v \right] \left(\frac{q_t-1}{p_t} \right) \\
&+ \frac{\partial Z_1}{\partial p_t} k_t - \frac{\partial W_1}{\partial p_t} \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial p} &= \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon} j_1(p_t) \lambda_t^{-\sigma} \left[-\frac{\varepsilon}{p_t} + \frac{1}{j_1(p_t)} \frac{\partial j_1(p_t)}{\partial p_t} \right] \\
&- \frac{k_t}{p_t} \left(\frac{q_t-1}{p_t} \right) \left[\left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \left(\frac{q_t-1}{bp_t} \right)^{\frac{1}{\xi}} + g + n + v \right] \\
&+ \frac{\partial Z_1}{\partial p_t} k_t - \frac{\partial W_1}{\partial p_t} \\
\frac{\partial G}{\partial p} &= \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \varepsilon \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon-1} \left(-\frac{\gamma}{p_t^2} \right) [\gamma^{\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
&+ \lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon} \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} [\gamma^{\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} [\gamma^{\varepsilon} (1-\varepsilon) p_t^{-\varepsilon}] \\
&- \frac{bk_t}{\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{1}{\xi}} \left(\frac{q_t-1}{bp_t^2} \right) \\
&- \frac{\eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}}{\eta_2 - \eta_1} \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} (p_t)^{\frac{1-\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\
&- \frac{\eta_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_t \right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \eta_1^{\alpha_1} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1} p_t^{\frac{2\alpha_1-\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}} \\
&= -\lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon} [\gamma^{\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \frac{1}{p_t} \left[\varepsilon - \frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{(1-\varepsilon)\gamma^{\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon}}{\gamma^{\varepsilon} p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}} \right] \\
&- \frac{bk_t}{\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} \frac{1}{p_t} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{\eta_2 \bar{\omega}_t}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(\eta_1 \bar{\omega}_t)^{\alpha_1}}{\bar{\omega}_t} - \frac{\alpha_1-1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{k_{2t} - k_t}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(\eta_1 \bar{\omega}_t)^{\alpha_1}}{\bar{\omega}_t} \\
&= -\lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^{\varepsilon} [\gamma^{\varepsilon} (p_t)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \frac{1}{p_t} \left[\varepsilon + (\sigma-\varepsilon) \frac{\gamma^{\varepsilon} (p_t)^{1-\varepsilon}}{\gamma^{\varepsilon} (p_t)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^{\varepsilon}} \right] \\
&- \frac{bk_t}{\xi} \left[\frac{q_t-1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} \frac{1}{p_t} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{k_{2t}}{k_{1t}} k_{1t}^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1-1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{k_{2t} - k_t}{k_{2t} - k_{1t}} k_{1t}^{\alpha_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p_t} \right)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon (p_t)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \frac{1}{p_t} \left[\varepsilon + (\sigma - \varepsilon) \frac{\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon}}{\gamma^\varepsilon p_t^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon} \right] \\
&\quad - \frac{bk_t}{\xi} \left[\frac{q_t - 1}{bp_t} \right]^{\frac{\xi+1}{\xi}} \frac{1}{p_t} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p_t} \frac{(k_{1t})^{\alpha_1}}{k_{2t} - k_{1t}} [k_{2t} - (1 - \alpha_1)(k_{2t} - k_t)] \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial p} \Big|_{(k^*, q^*)} &= -\lambda_0^{-\sigma} A_0^{\sigma-1} \left(\frac{\gamma}{p^*} \right)^\varepsilon [\gamma^\varepsilon (p^*)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon]^{\frac{\sigma-\varepsilon}{\varepsilon-1}} \frac{1}{p^*} \left[\varepsilon + (\sigma - \varepsilon) \frac{\gamma^\varepsilon (p^*)^{1-\varepsilon}}{\gamma^\varepsilon (p^*)^{1-\varepsilon} + (1-\gamma)^\varepsilon} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{p^*} \frac{(k_1^*)^{\alpha_1}}{k_2^* - k_1^*} [k_2^* - (1 - \alpha_1)(k_2^* - k^*)] \tag{317}
\end{aligned}$$

Avaliando cada termo de (317) percebemos que, para valores razoáveis do vetor de parâmetros, teremos

$$\frac{\partial G}{\partial p} \Big|_{(k^*, q^*)} < 0 \tag{318}$$

Então, se $\alpha_2 > \alpha_1$, teremos

$$\frac{\partial p}{\partial k} \Big|_{ss} > 0 \tag{319}$$

Interpretamos (319) assim: um aumento na razão capital / trabalho aumenta o custo de instalação do capital e reduz a oferta do bem doméstico, tudo mais constante. Logo, para que o mercado de bens domésticos permaneça em equilíbrio, é necessário que o preço também aumente de modo a gerar redução do consumo.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial q} &= \frac{k}{p} \left[\left(\frac{q-1}{bp} \right)^{1/\xi} + g + n + v \right] + \frac{k}{b\xi p} \left[\left(\frac{q-1}{bp} \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \right] \left(\frac{q-1}{p} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial q} &> 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial q} &> 0 \tag{320}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \lambda} &= -\sigma \left(\frac{\gamma}{p} \right)^\varepsilon j_1(p) \lambda^{-\sigma-1} \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \lambda_t} &= -\frac{\sigma}{\lambda_t} \left(\frac{\gamma}{p} \right)^\varepsilon j_1(p) \lambda^{-\sigma} \\
\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \lambda} &< 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \lambda} &< 0 \tag{321}
\end{aligned}$$

Interpretamos (321) da seguinte forma: se o consumo diminui (ou λ aumenta), o câmbio de equilíbrio se deprecia, pois a oferta do bem doméstico será menor. Já (320) nos diz que um aumento do preço-sombra do capital está associado a uma taxa de investimento maior, aumentando o custo de instalação do capital e gerando um câmbio mais apreciado de modo a viabilizar uma elevação da oferta de bens domésticos.

Referências

- Atolia, Manoj, and Edward F. Buffie, 2009. “Smart forward shooting”, *Computational Economics*, 33, 1–30.
- Atolia, Manoj, and Edward F. Buffie. “Reverse shooting made easy: Automating the search for the global nonlinear saddle path”, *Computational Economics*, 33, 1–30.
- Atolia, Manoj, and Edward F. Buffie, 2011. “Solving the unit root problem in models with an exogenous world market interest rate”, *Macroeconomic Dynamics*, 15, 681–712.
- Abel, Andrew e Olivier Blanchard, 1983. “An intertemporal model of saving and investment”, *Econometrica* 51, 675–692.
- Abel, Andrew e Janice Eberly, 2002. “Investment and q with fixed costs: an empirical analysis”, *Mimeo*
- Acemoglu, Daron, 2009. *Introduction to Modern Economic Growth*. First Edition. Princeton University Press.
- Acemoglu, Daron e Veronia Guerrieri, 2008. “Capital deepening and nonbalanced economic growth”, *Journal of Political Economy* 116, 467–498, University of Chicago Press.
- Aghion, Philippe, Diego Comin e Peter Howitt 2006, “When does domestic saving matter for economic growth?”, *NBER Working Paper 12275*
- Aguirre, Álvaro e César Calderón 2005. “Real exchange rate misalignments and economic performance”, *Central Bank of Chile Working Papers 315*
- Aiyagari, Rao, 1994. “Idiosyncratic risk and aggregate saving”, *The Quarterly Journal of Economics* 109, 659–684, MIT Press.
- Barro, Robert and Xavier Sala-i-Martin, 2004. *Economic Growth*. The MIT Press.
- Blanchard, Olivier, 1983. “Debt and the current account deficit in Brazil”. *Financial Policies and the World Capital Markets: The Problem of Latin American Countries*, NBER volume ISBN 0-226-02996-4, pp. 187–198, University of Chicago Press, (<http://www.nber.org/chapters/c11192>).
- Blanchard, Olivier, 1985. “Debt, deficits, and finite horizons”, *Journal of Political Economy* 93, 223–247, University of Chicago Press.
- Blanchard, Olivier and Stanley Fischer, 1989. *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press.
- Brock, Philip, 1988. “Investment, the current account and the relative price of non-traded goods in a small open economy”, *Journal of International Economics*, 24, 235–253.
- Carrol, Christopher, Jody Overland e David Weil 2000, “Saving and growth with habit formation”, *American Economic Review*, 90, 341–355.
- Dasgupta, P.S. 1968. “Optimum growth when capital is non-transferable”, *Review of Economic Studies*, 77–88.
- Duczynski, Petr, 2002. “Adjustment costs in a two-capital growth model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26, 837–850.
- Gavin, M. 1990. “Structural adjustment to a terms of trade disturbance - The role of relative prices”, *Journal of International Economics*, 28, 217–243.

- Hayashi, Fumio, 1982. "Tobin's marginal q: a neoclassical interpretation", *Econometrica*, 50, 213–224.
- Hirsch, Morris, Stephen Smale e Robert Devaney, 2004. *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*. Second Edition. Elsevier Academic Press.
- Judd, Kenneth, 1998. *Numerical Methods in Economics*. The MIT Press.
- Kemp, Murray, 1969. *The Pure Theory of International Trade and Investment*. Prentice-Hall Inc..
- King, Robert and Sergio Rebelo, 1993. "Transitional dynamics and economic growth in the neoclassical model", *American Economic Review*, 83, 908–931.
- Ngai, L. Rachel, and Christopher A. Pissarides, 2007. "Structural change in a multisector model of growth", *American Economic Review*, 97, 429–443.
- Obstfeld, Maurice and Kenneth Rogoff, 1996. *Foundations of International Macroeconomics*, The MIT Press.
- Pessoa, Samuel, 1999. "Ajustamento de uma economia após um choque de produtividade", *Pesquisa e Planejamento Economico*, pp. 323–371.
- Prasad, Eswar, Raghuram Rajan e Arvind Subramanian, 2006, "Foreign Capital and Economic Growth", *IMF Research Department*.
- Rappaport, Jordan, 2006. "A bottleneck capital model of development", *Journal of Monetary Economics*, 53, 2113–2129.
- Rybczynski, T. M. 1955. "Factor endowment and relative commodity prices", *Economica*, 22 (88), 336–341
- Ryder Jr., H.E. (1969). "Optimal accumulation in a two-sector neoclassical economy with non-shiftable capital", *Journal of Political Economy*, 77, 665–683.
- Stolper, W. F. Samuelson, Paul A., 1941. "Protection and real wages", *Review of Economic Studies*, 9 (1), 58–73.
- Summers, Lawrence, 1981. "Taxation and corporate investment: a q-theory approach", *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, 67–127.
- Tobin, James, 1969. "General equilibrium approach to monetary theory", *Journal of Money, Credit and Banking*, 1(1).
- Uzawa, T., 1964. "Optimal growth in a two-sector model of capital accumulation", *Review of Economic Growth*, vol. XXXI (1), 85, 124.