

**FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS  
ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ECONOMIA**

**Diego Martins Silva**

**Contágio no modelo de Allen e Gale com infraestrutura  
bancária endógena**

Rio de Janeiro  
2015

**Diego Martins Silva**

**Contágio no modelo de Allen e Gale com infraestrutura  
bancária endógena**

Dissertação submetida a Escola de Pós-Graduação em Economia como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia.

Área de Concentração: Teoria Bancária

Orientador: Ricardo de Oliveira Cavalcanti

Rio de Janeiro  
2015

Silva, Diego Martins

Contágio no modelo de Allan & Gale com infraestrutura bancária endógena /  
Diego Martins Silva. – 2015.  
29 f.

Dissertação (mestrado) - Fundação Getulio Vargas, Escola de Pós-Graduação  
em Economia.

Orientador: Ricardo de Oliveira Cavalcanti

Inclui bibliografia.

1. Bancos. 2. Finanças. 3. Crise financeira. 3. Depósitos interbancários. I.  
Cavalcanti, Ricardo de Oliveira. II. Fundação Getulio Vargas. Escola de  
Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDD – 332.1



**DIEGO MARTINS SILVA**

**CONTÁGIO NO MODELO DE ALLEN & GALE COM INFRAESTRUTURA  
BANCÁRIA ENDÓGENA.**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Economia da Escola de Pós-Graduação em Economia para obtenção do grau de Mestre em Economia.

Data da defesa: 12/03/2015

**ASSINATURA DOS MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA**

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Ricardo de Oliveira Cavalcanti', is positioned above a horizontal line.

**Ricardo de Oliveira Cavalcanti**  
Orientador (a)

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Paulo Kingler Monteiro', is positioned above a horizontal line.

**Paulo Kingler Monteiro**

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Jefferson Donizeti Pereira Bertolai', is positioned above a horizontal line.

**Jefferson Donizeti Pereira Bertolai**

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus;

Ao meu orientador pelas discussões construtivas e auxílio na execução deste trabalho;

À minha família pelo suporte e compreensão;

À Escola de Pós-Graduação em Economia (EPGE) pela sólida formação e excelente estrutura disponibilizada;

Aos professores e funcionários da Fundação Getúlio Vargas (FGV);

Aos meus amigos que me acompanharam ao longo dos últimos dois anos;

À minha noiva pelo apoio e paciência.

## Resumo

Neste trabalho investigamos a formação de network considerando agentes cautelosos. O modelo consiste em duas regiões com  $\frac{n}{2}$  bancos em cada, onde a interligação entre eles ocorre através de depósitos interbancários. Cada banco está sujeito a corrida bancária, ou devido a um choque negativo de agentes impacientes, ou devido a contaminação da corrida de um banco pertencente a infraestrutura bancária. Os bancos podem tentar eliminar a possibilidade de contágio ao fazer um número alto de interligações. Para isso, é necessário uma coordenação entre todos os bancos. Se um banco não se prevenir de um contágio, ele impõe a todos os outros a possibilidade de contágio no pior cenário. Há duas regiões bem definidas de equilíbrio de nash simétrico com network estável, uma na qual todos os bancos se previnem do cenário de contágio no pior cenário e a outra na qual nenhum banco se previne. Devido ao problema de coordenação, o equilíbrio com contágio no pior cenário pode ocorrer mesmo sendo pareto dominado pelo equilíbrio sem contágio. Sob certas condições, o equilíbrio com contágio ocorre com um network pareto eficiente. Neste caso o network eficiente é diferente do network mais resiliente ao contágio.

PALAVRAS-CHAVE: *Formação de Network, Contágio, Bancos, Depósito Interbancário.*

## Abstract

In this work, we analyze network formation with wary agents. The model consists of two regions with  $\frac{n}{2}$  banks in each, where the connection between them occurs through interbank deposits. A bank run is possible to occur in each bank, due to an increase not expected of impatient agents, or due to contagion from run in another bank. If all banks form a high number of interconnections, they can eliminate possibility of contagion. If one does not prevent a contagion, it imposes all the others banks a positive possibility in the worst case. There are two well-defined regions of symmetric nash equilibrium with stable network, one in which all banks prevents the contagion in the worst case and the other in which no bank prevents. As a result of the coordination problem, equilibrium with contagion in the worst case can occur even pareto dominated by the equilibrium without contagion. Under certain conditions, contagion in the worst case occurs with a network pareto efficient, nevertheless the network is not the most resilient one.

KEYWORDS: *Network Formation, Contagion, Banks, Interbank Deposit.*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Modelo</b>	<b>10</b>
2.1	Depósito interbancário . . . . .	11
2.2	Pecking Order . . . . .	12
2.3	Contágio . . . . .	13
2.4	Network . . . . .	16
2.5	Problema . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Equilíbrio</b>	<b>18</b>
3.1	Caso otimista . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Exemplo Numérico</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Literatura Relacionada</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>27</b>

## Lista de Figuras

1	Estrutura de Anel . . . . .	21
2	Estrutura Estrela . . . . .	21
3	Efeito dos parâmetros . . . . .	25

## Lista de Tabelas

1	Resultado quando existe equilíbrio sem contágio. . . . .	24
2	Alocação pareto eficiente quando existe equilíbrio sem contágio. . . . .	25

# 1 Introdução

Um indivíduo aplica seus recursos em um banco na expectativa de obter ganhos futuros. Um banco benevolente buscará aplicar estes recursos de forma a maximizar a utilidade esperada dos seus depositantes. A fim de mitigar riscos, o banco pode investir parte de seus recursos em outros bancos, como se fosse um depositante comum. Essa interligação bancária tem o benefício de diversificar investimento, porém abre a possibilidade de contágio.

O contágio ocorre quando a perda de um banco se propaga para os demais através das interligações. O banco considera ótimo assumir esse risco de ocorrência de contágio frente ao ganho de se estar em um ambiente interligado. O número de interligações ótimo dependerá da crença que o banco possui sobre o network de equilíbrio, onde haverá equilíbrio em que todos escolhem evitar o contágio, quando possível, e em que o contágio ocorre com probabilidade positiva.

Os indivíduos levam em consideração a pior alocação de consumo possível, sem levar em conta a probabilidade de ocorrência do pior evento. Ao mitigar risco através das interligações, os bancos alteram o consumo no cenário de corrida bancária e no cenário de contágio. No caso de sofrer uma corrida bancária, o banco dissipa suas perdas entre os bancos que depositaram nele, porém por outro lado, o banco assume o risco de ter perdas dado a quebra de um banco que recebeu seu depósito. O número ótimo de interligações dependerá do peso que os agentes dão ao pior cenário, corrida bancária ou contágio.

O network de equilíbrio pode ser aquele que evita a ocorrência do contágio, ou o que aceita a ocorrência do contágio. Uma vez que os indivíduos não consideram a probabilidade de ocorrência de contágio, só haverá duas regiões possíveis de estrutura bancária de equilíbrio, a que evita e a que não evita o contágio. Na presença de um custo positivo para realizar depósitos interbancários, o network de equilíbrio que não evita o contágio é o menor possível.

A literatura de contágio se expandiu a partir do trabalho de Allen and Gale (2000) que usa o *environment* de Diamond and Dybvig (1983) para descobrir o network mais resiliente ao contágio. Os autores consideram a estrutura mais simples, onde cada banco se interliga com apenas um banco e a estrutura completa onde todos os bancos se interligam. Eles afirmam que quanto mais completo o network for, mais resiliente ele será ao contágio. Para isso eles simulam um cenário de quebra e observa a propagação dado uma infraestrutura bancária.

Babus (2014) utiliza o *framework* de Allen and Gale (2000) e permite aos bancos escolherem o contrato ótimo e um network estável. Os depósitos interbancários são diferen-



ciados de acordo com a região em que o banco receptor se encontra. A autora encontra que há diversos equilíbrios com diferentes probabilidades de contágio, tendo casos em que não ocorre contágio. O modelo de Babus será uma das bases deste trabalho, onde os bancos escolherão os dois tipos de interligação.

A diferenciação das interligações com bancos da mesma região, e bancos de outra região possibilitam avaliar se a infraestrutura bancária é integrada ou diversificada seguindo as definições feitas em Elliott et al. (2014). Estes autores analisam diversas estruturas financeiras e observam a propagação do contágio dado o nível de integração e diversificação do network. Eles demonstram que dado um choque negativo que provoque uma primeira quebra, o número de instituições que quebrarão por efeito cascata será tão menor quanto mais/menos integrado e diversificado for o sistema. Para os autores, o network intermediário é o network mais ineficiente dado um choque negativo médio.

Acemoglu et al. (2013) consideram a magnitude do choque para determinar qual o network ótimo. Os autores demonstram que a estrutura completa é mais resiliente e estável para choques de baixa magnitude. Por outro lado, quando o choque for suficientemente grande para quebrar o mercado inteiro no caso de mercado completo, a melhor estrutura será uma em que os bancos formam submercados completos interligados com outros submercados completos ao invés de se interligarem com todos os demais bancos.

O mercado eficiente passa então a depender da magnitude do choque negativo da economia. Quando o choque é pequeno Acemoglu et al. (2013) concordam com o resultado de Allen and Gale (2000), porém quando o choque é grande eles possuem resultados com a mesma ideia de Elliott et al. (2014). Dasgupta (2004) tem um resultado semelhante, que com uma probabilidade de bankrupt baixa, o mercado completo é o mais eficiente.

Castiglionesi and Navarro (2010) endogenizam a estrutura de mercado baseado na hipótese de que a interligação é desejável pelos bancos dado a possibilidade de mitigar a incerteza agregada<sup>1</sup>. Os autores consideram que o banco, sob a influência dos acionistas com responsabilidade limitada, assumem riscos maiores ao se interligarem. Os bancos consideram que no caso do investimento arriscado não der certo, o mercado o salvará; e em caso contrário, o banco possui responsabilidade limitada quanto aos prejuízos. Logo, a estrutura de network de equilíbrio é frágil e sujeita a contágio. Para um survey sobre a literatura de network bancária, ver Allen and Babus (2009) e Allen et al. (2009).

Neste trabalho, o choque negativo ocorrerá com uma probabilidade irrisória em um único banco. Onde se o choque for maior que um certo *threshold*, o banco que sofreu o choque sofrerá corrida bancária. E dada a interligação e a diversificação do network de

---

<sup>1</sup>Lorenzoni et al. (2009) afirmam que é ótimo para as instituições financeiras se interligarem para mitigar a incerteza agregada.

equilíbrio, verificaremos se ocorrerá contágio ou não. Aqui, o modelo apresenta apenas dois cenários, ou somente um banco quebra, ou todos quebram devido ao contágio.

O modelo será apresentado na próxima seção com seus possíveis equilíbrios sendo discutidos na seção três. A seção quatro apresenta simulações computacionais do modelo, onde na seção cinco, os resultados encontrados serão confrontados com os resultados dos artigos supracitados. Por fim, a seção seis conclui o trabalho e discute sobre pesquisas futuras.

## 2 Modelo

O modelo possui três períodos, duas regiões, cada qual com  $\frac{n}{2}$  bancos e uma massa unitária de indivíduos por banco. Em  $t=0$ , cada indivíduo possui uma dotação unitária de um bem de consumo. O indivíduo pode consumir o bem em  $t=1$  ou em  $t=2$  a depender do seu tipo. Dizemos que o indivíduo é impaciente se almeja consumir em  $t=1$  e paciente se decidir consumir em  $t=2$ . O tipo do indivíduo é realizado em  $t=1$ , onde apenas ele toma conhecimento da realização. Os demais agentes conhecem apenas a distribuição do tipo.

A utilidade do agente depende da realização do seu tipo e do momento em que consome. Um indivíduo paciente auferir utilidade zero consumindo em  $t=1$ , e uma utilidade positiva se consumir em  $t=2$ . Neste modelo, o indivíduo dá um peso positivo para a menor utilidade que ele pode auferir. Um indivíduo impaciente só auferir utilidade se consumir em  $t=1$ , portanto seu pior cenário é consumir em  $t=2$ , onde auferir a utilidade zero. Essa característica da função utilidade denomina, segundo Araujo et al. (2011), o agente sendo wary. Sendo assim, escrevemos sua função utilidade no formato:

$$u(c_1) + u(c_2) + \rho u(c^q) \quad (1)$$

Onde  $c_1$  é o consumo em  $t=1$ ,  $c_2$  o consumo em  $t=2$ ,  $c^q$  o consumo no pior cenário e  $\rho$  o peso dado pelo agente ao pior cenário. A função  $u(\cdot)$  é duas vezes continuamente diferenciável, crescente e estritamente concava e atende a condição de Inada. Seja  $\omega_i$  a probabilidade do indivíduo ser impaciente, logo, a utilidade esperada será:

$$\omega_i u(c_1) + (1 - \omega_i) u(c_2) + \rho u(c^q) \quad (2)$$

A probabilidade do indivíduo ser impaciente pode assumir dois valores,  $\omega_i \in \{\omega_L, \omega_H\}$ , com  $\omega_L < \omega_H$ . A região em que o indivíduo se encontra é que determina o valor de  $\omega_i$ . Se o indivíduo estiver em uma região que recebeu o choque de liquidez alto, ou seja,  $\omega_H$ , tem-se que a probabilidade do indivíduo ser impaciente será de  $\omega_H$ . A realização deste

choque ocorre em  $t=1$ , onde as regiões sofrem choques de liquidez diferentes.

O banco capta recursos em  $t=0$  da massa unitária de indivíduos e recebe depósito de outros bancos. Os indivíduos que depositam no banco são denominados depositantes constituintes, já os bancos que efetuam depósito são chamados de depositantes bancários. Em troca do depósito, o banco oferta um contrato  $(c_1^h, c_1^l, c_2^h, c_2^l)$  para seus depositantes. Onde  $c_1^i$  é o montante a ser sacado em  $t=1$ , quando o depositante anunciar ser do tipo impaciente e a região em que o banco estiver receber o choque  $\omega_i$ . E  $c_2^i$  o montante a ser sacado em  $t=2$ , quando o depositante em  $t=1$  anunciar ser do tipo paciente e a região em que o banco se encontra receber o choque  $\omega_i$ .

Todos os depositantes são tratados de forma igualitária pelo banco, independente de ser constituinte ou bancário. Além disso, o banco espera o anúncio do tipo de todos os seus depositantes antes de liberar o primeiro saque. O montante a ser sacado depende apenas do anúncio do tipo, o qual pode ser verdadeiro ou não. Seguindo Allen and Gale (2000) temos um problema não sequencial com incerteza agregada.

Ao captar recursos em  $t=0$ , o banco tem duas opções de investimento, além da opção de efetuar um depósito bancário. O banco pode investir os recursos na tecnologia  $R$ , onde a cada unidade investida em  $t=0$ , o banco recebe, em  $t=2$ ,  $R>1$ . Porém, se liquidar o investimento antes do período de maturação, ou seja, em  $t=1$ , o banco recebe apenas  $r<1$  por unidade investida. Ou, o banco pode simplesmente armazenar os recursos, onde a cada unidade armazenada, o banco terá direito a uma unidade em  $t=1$  ou em  $t=2$ .

## 2.1 Depósito interbancário

O depósito interbancário é um outro tipo de investimento. A cada unidade depositada em um banco, o receptor se compromete a disponibilizar  $\bar{c}_1^j$  caso o banco demande o depósito em  $t=1$ , ou  $\bar{c}_2^j$  em  $t=2$ , onde  $j$  se refere ao choque de liquidez que o banco receptor sofreu. Este tipo de investimento pode ser realizado em um banco da mesma região, ou em um banco da outra região. Dizemos que um banco  $A$  está interligado ao banco  $B$  quando  $A$  efetua ou recebe depósito interbancário no banco  $B$ .

A interligação com banco de outra região combate a incerteza agregada ao qual os bancos são expostos. Note que o banco sabe que terá com probabilidade  $1/2$  uma proporção alta de depositantes impacientes,  $\omega_H$ , ou, com a mesma probabilidade uma proporção baixa,  $\omega_L$ . De Allen and Gale (2000), em um cenário simétrico, quando os bancos de diferentes regiões trocam depósitos no montante  $z=\omega_H - \gamma$ , eles eliminam a incerteza agregada, onde  $\gamma$  é a média dos choques de liquidez. O banco que receber o choque de liquidez alta, irá demandar seu depósito interbancário em  $t=1$  ao banco que recebeu o choque baixo,

e que portanto tem excesso de bem em  $t=1$ . Seguindo a nomenclatura de Babus (2014) definimos este tipo de depósito de *Liquidity Link*.

A interligação com banco da mesma região não tem o efeito de troca de liquidez, uma vez que todos os bancos dentro de uma região sofrem o mesmo choque de liquidez. Entretanto, ao considerar a possibilidade da corrida bancária, e da consequente antecipação do investimento da tecnologia R, o banco vê o depósito interbancário em bancos da mesma região como alternativa de investimento com uma taxa de penalização por liquidação em  $t=1$  menor do que o caso da tecnologia R. Babus (2014) denomina esse link como *Solvency Link*, vamos seguir essa denominação.

Neste modelo, o banco escolhe o número de ambos os tipos de interligação. O montante a ser depositado em cada banco é definido  $\frac{z}{b}$ , onde "b" é o número de depósitos feitos em bancos na outra região. E "a" é o número de *Solvency Link*. Para eliminar a incerteza agregada, o banco precisa realizar pelo menos um liquidity link, o conjunto de escolha será de um até  $n/2$  liquidity link. Fazendo um paralelo com o trabalho de Elliott et al. (2014), quanto maior o montante de depósitos feito pelos bancos,  $(a+b)$ , mais integrado o sistema estará. E quanto menor o montante depositado em cada banco, mais diversificado o investimento do banco está. Logo,  $(a+b)$  passa a ser um indicador de integração do sistema e "b" um indicador de diversificação.

O banco é livre para escolher depositar e onde depositar seus recursos, cabendo ao banco que recebe o depósito interbancário garantir o mesmo contrato de depósito ofertado aos seus depositantes constituintes,  $\{\bar{c}_1^h, \bar{c}_1^l, \bar{c}_2^h, \bar{c}_2^l\}$ . O depósito interbancário possui um custo  $\xi$  positivo custeado pelo banco depositante.

## 2.2 Pecking Order

Em  $t=0$ , o banco divide seus recursos nos três diferentes investimento. Os recursos investidos devem ser utilizados para atender a demanda de saque dos agentes impacientes em  $t=1$ , e dos pacientes em  $t=2$  na ausência de corrida bancária. A ordem de liquidação do investimento é como vista em Allen and Gale (2000), a tecnologia de armazenagem, os depósitos interbancários e por último a tecnologia R.

Ao liquidar antecipadamente os recursos investidos na tecnologia R, o banco abre mão de receber  $R>1$  em  $t=2$  para receber  $r<1$  em  $t=1$ , incorrendo em um custo oportunidade de  $\frac{R}{r} > 1$ . Ao utilizar o recurso armazenado, o custo oportunidade é de um, logo, o banco utiliza primeiro o recurso armazenado e depois o recurso investido na tecnologia R. Seguindo a literatura de Diamond and Dybvig (1983) em que o banco ao determinar o contrato ótimo é sujeito a condição de *truth telling*,  $\bar{c}_2 > \bar{c}_1$ . Logo, ao demandar o depósito

bancário em  $t=1$ , o banco abre mão de receber  $\bar{c}_2$  em  $t=2$ , tendo o custo oportunidade de  $\frac{\bar{c}_2}{c_1} > 1$ . Sabendo que  $R > c_2 > c_1 > 1 > r$  tem-se:

$$\frac{R}{r} > \frac{c_2}{c_1} > 1 \quad (3)$$

Portanto, em  $t=1$  o banco utiliza os recursos armazenados para atender os depositantes que reportam ser impacientes em  $t=1$ , no caso de não ter recursos suficiente armazenados, o banco utiliza os recursos do depósito interbancário. E se ainda assim, não conseguir anteder os depositantes, o banco liquida antecipadamente os recursos investidos na tecnologia  $R$ .

Dado o custo para antecipar a maturação do investimento da tecnologia  $R$ , o banco almeja atender seus agentes impacientes apenas com recursos armazenados ou depositados em outros bancos. O banco que sofre choque de liquidez alta tem a opção de demandar os recursos depositados nos bancos da outra região, que sofreu choque de liquidez baixa. Portanto, o banco tem uma restrição orçamentária em  $t=1$  de, considerando que todos os demais bancos ofertem o mesmo contrato  $\{\bar{c}_1^h, \bar{c}_1^l, \bar{c}_2^h, \bar{c}_2^l\}$  e fazem o mesmo número de interligações  $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ :

$$\omega_H c_1^h + \bar{a} \frac{z}{b} c_1^h \leq y + a \frac{z}{b} \bar{c}_1^h + z \bar{c}_1^l \quad \text{se } \omega_i = \omega_H; \quad (4)$$

$$\omega_L c_1^l + z c_1^l \leq y \quad \text{se } \omega_i = \omega_L. \quad (5)$$

Onde  $y$  é a quantidade investida na tecnologia de armazenamento. Em  $t=2$ , o banco irá redistribuir todo os recursos entre os depositantes pacientes, bancários ou não. O banco que sofreu o choque de liquidez baixo em  $t=1$ , liquida o depósito interbancária apenas em  $t=2$ . Sendo assim, a restrição em  $t=2$  será:

$$(1 - \omega_H) c_2^h + z c_2^h \leq R x \quad \text{se } \omega_i = \omega_H; \quad (6)$$

$$(1 - \omega_L) c_2^l + \bar{a} \frac{z}{b} c_2^l \leq R x + z \bar{c}_2^h + a \frac{z}{b} \bar{c}_2^l \quad \text{se } \omega_i = \omega_L. \quad (7)$$

## 2.3 Contágio

Contágio é definido como a propagação de uma corrida bancária em um banco para os demais bancos. A corrida bancária, assim como em Allen and Gale (2000), será exógena neste modelo. Para o contágio ocorrer é necessário que uma primeira corrida bancária ocorra, e que algum banco do sistema seja vulnerável o suficiente ao banco que sofreu a

corrida de tal forma que também ocorra corrida.

Uma corrida bancária ocorre quando os agentes pacientes preferem reportar de forma errada o seu tipo, ou seja,  $c_2 < c_1$ . Para que isso não ocorra, é necessário que o banco tenha recursos suficientes em  $t=2$  para distribuir aos seus depositantes pacientes tal que prefiram reportar o seu tipo corretamente. Para o caso em que o banco recebe o choque de liquidez alto, temos pela equação (6) que  $\frac{Rx}{(1-\gamma)} \geq c_1^h$  para não ocorrer corrida. No caso de um choque de liquidez baixo, pela equação (7) tem-se que,  $\frac{Rx+z\bar{c}_2^h+a\frac{z}{b}\bar{c}_2^l}{(1-\omega_L)+\bar{a}\frac{z}{b}} \geq c_1^l$ . Baseado nisso, conseguimos determinar um *threshold* no qual se o banco antecipar um valor maior ocorrerá corrida.

**Proposição 1.** *Em equilíbrio simétrico, o resgate antecipado de um valor superior a  $U = r \left[ x - (1 - \gamma) \frac{c_1}{R} \right]$  do investido na tecnologia  $R$  provoca corrida bancária.*

*Demonstração.* Suponha que o banco antecipe um valor  $G > r \left[ x - (1 - \gamma) \frac{c_1}{R} \right]$ , logo em  $t=2$  o banco terá disponível para saque  $R(x - G)$ , logo:

$$(1 - \gamma)c_2 = R(x - \frac{G}{r}) < R \left[ x - x + (1 - \gamma) \frac{c_1}{R} \right] = (1 - \gamma)c_1$$

Portanto,  $c_2 < c_1$ , caracterizando a corrida bancária. □

Sem a suposição de simetria, mas de forma análoga, temos que para  $\omega_H$ :

$$U^h = r \left[ x - (1 - \gamma) \frac{c_1^h}{R} \right] \quad (8)$$

E para o caso de  $\omega_L$ :

$$U^l = r \left[ x - (1 - \omega_L)c_1^l + \bar{a}\frac{z}{b}\frac{c_1^l}{R} \right] - z\bar{c}_2^h - a\frac{z}{b}\bar{c}_2^l \quad (9)$$

Seja  $\xi$  um choque inesperado de depositantes impacientes demandando saques em  $t=1$ . Por simplificação, esse choque ocorre com uma probabilidade perto de zero e em apenas em um banco. Da proposição 1 temos que para  $\xi$  suficientemente grande, ou seja,  $\xi \geq \begin{cases} (8) \text{ se } \omega_i = \omega_H; \\ (9) \text{ se } \omega_i = \omega_L. \end{cases}$ , o banco sofre corrida bancária.

Quando ocorre corrida bancária, o banco recebe pedido de saque de todos os seus depositantes, inclusive os bancários. E, uma vez que todos os depositantes são tratados de forma igualitária e que não há filas, o banco disponibiliza partes iguais de todos os recursos a disposição do banco. Por construção a corrida pode ocorrer apenas em  $t=1$ , neste período o banco conta com os recursos armazenados y, os depósitos interbancários<sup>2</sup>,

---

<sup>2</sup>Considerando a quebra de apenas um banco neste primeiro momento.

$\frac{(a+b)}{b} z \bar{c}_1$ , e os recursos da tecnologia R liquidados antecipadamente,  $rx$ . Por outro lado, o banco em  $t=1$ , possui uma massa unitária de depositantes não bancários e  $(\bar{a} + \bar{b}) \frac{z}{b}$  depositantes bancários. O montante distribuído para cada depositante de um banco falido será de:

$$\left[1 + (\bar{a} + \bar{b}) \frac{z}{b}\right] c_1^q = y + rx + (a + b) \frac{z}{b} \bar{c}_1 \Rightarrow c_1^q = \frac{y + rx + (a + b) \frac{z}{b} \bar{c}_1}{1 + (\bar{a} + \bar{b}) \frac{z}{b}} \quad (10)$$

Este é o caso em que apenas o banco quebrou, porém é fácil generalizar para o caso em que todos quebram:

$$c_1^q = \frac{y + rx + (a + b) \frac{z}{b} \bar{c}_1^q}{1 + (\bar{a} + \bar{b}) \frac{z}{b}} \quad (11)$$

O número de depósitos influencia diretamente o consumo no pior cenário, de acordo com as equações (10) e (11). O banco pode aumentar o consumo no estado de quebra ao realizar *solvency Link* e reduzir ao realizar *liquidity Link*. Apesar de reduzir o consumo no pior cenário, o *liquidity Link* dificulta a ocorrência de contágio. Note que, ao ocorrer a quebra de um banco no qual tem-se depósito, o banco depositante recebe  $\bar{c}_1^q$  ao invés de  $\bar{c}_1$ , onde  $\bar{c}_1^q \leq \bar{c}_1$ . Portanto, a perda proveniente da quebra de um banco "parceiro" é representada pela seguinte *loss function*.

$$LF = \frac{z}{b} [\bar{c}_1^i - \bar{c}_1^q] \quad (12)$$

Para que não ocorra contágio então, a perda com a quebra de um banco vizinho deve ser menor do que o threshold da corrida bancária.

$$LF = \frac{z}{b} [\bar{c}_1 - \bar{c}_1^q] \leq \begin{cases} (8) \text{ se } \omega_i = \omega_H; \\ (9) \text{ se } \omega_i = \omega_L. \end{cases} \quad (13)$$

Note que a condição acima se refere a quebra de apenas um banco, para se precaver de quebras de  $n$  bancos, será necessário multiplicar a *loss function* pelo número de bancos que podem quebrar. Olharemos o caso de apenas um banco, ou seja, se um banco não se precaver, não atender a condição de não contágio, equação (13), e sofrer corrida bancária ele provocará a quebra dos demais. É fácil ver isso, dado que os bancos se precavam a quebra de apenas um banco. Ao analisar o problema deste forma, evitamos encontrar diferenças entre o banco fazer depósito no banco  $j$  ou no banco  $k$ . O que diferencia o resultado é o número de bancos em que o banco  $i$  faz depósitos interbancários.

## 2.4 Network

O network é definido de acordo com a decisão de número de links de cada banco. O processo de formação de network segue um jogo não cooperativo, uma vez que os bancos são obrigados a receber os depósitos interbancários. Dada a externalidade provocada pela formação de links, o jogo é do tipo two way flow, onde apenas um jogador escolhe se o link é constituído ou não, porém ambos recebem benefícios ou malefício pela formação do link (Bala and Goyal, 2000).

O custo de interligação é bem definido e igual a  $\xi$ , por outro lado, o benefício da interligação é incerto e depende da crença do jogador. Por isso, a infraestrutura bancária de equilíbrio não se restringirá a dois casos como em Bala and Goyal (2000). Vamos dizer que o network é de equilíbrio quando ele for estável. Adaptando a definição de network *pairwise stability* de Jackson (2008), temos que um network é estável quando:

**Definição 1.** Um network  $g$  é estável se para qualquer jogador  $i$ ;

1. Para todo  $ij \in g$ ,  $u_i(g) \geq u_i(g - ij)$ ;
2. Para todo  $ij \notin g$ ,  $u_i(g + ij) > u_i(g)$ .

Mesmo restringindo a análise de equilíbrio de tal forma que apenas o número de interligações seja relevante, o modelo apresentará múltiplos equilíbrios devido a presença de externalidade. Para contornar esse problema, Bala and Goyal (2000) sugerem usar o conceito de equilíbrio de nash estrito. A definição é semelhante a de um network pareto eficiente. Seja  $\mathcal{G}$  um conjunto de networks.

**Definição 2.** Um network  $g$  é pareto eficiente relativo à  $(u_1, \dots, u_n)$  se não existe  $g' \in \mathcal{G}$  tal que  $u_i(g') \geq u_i(g)$  para todo  $i$ , com pelos menos uma desigualdade estrita para algum  $i$ .

## 2.5 Problema

O banco irá maximizar a utilidade esperada dos depositantes constituintes, sujeito as restrições orçamentárias em  $t=1$  e em  $t=2$  e a restrição de factibilidade. O banco possui uma unidade de bem para ser dividida entre a tecnologia de armazenamento, a tecnologia  $R$ , e para depositar e custear os depósitos interbancários. Logo, a restrição de factibilidade será:

$$y + x + \epsilon(a + b) + (a + b)\frac{z}{b} \leq 1 + (\bar{a} + \bar{b})\frac{z}{b} \quad (14)$$

A função de utilidade esperada dos depositantes constituintes possuem um "salto" a partir do ponto em que todos os bancos se protegem de um eventual contágio. O salto



ocorre devido a diferença de  $c_1^q$  no caso de um contágio, equação (11), ou no caso sem contágio, equação (10). A função referente a  $c_1^q$  depende da decisão de todos os bancos quanto a atender ou não a restrição de não contágio. Se  $2n-1$  não atendem, mesmo que o banco faltante decida atender a condição,  $c_1^q$  será igual a equação (11). Entretanto, se  $2n-1$  bancos atendem a condição, o formato de  $c_1^q$  dependerá da decisão do último banco. Se decidir por atender  $c_1^q$  será igual a equação (10), caso contrário será igual a equação (11).

Dado isso, o banco terá dois problemas, um em que ele acredita que os demais estão atendendo a condição de não contágio, e o outro em que ele não acredita. Ao acreditar que algum banco não irá se precaver do contágio, o banco determina a sua estratégia  $s_i = \{c_1^h; c_1^l; c_2^h; c_2^l; y; x; c_1^q; a, l\}$  ao resolver o seguinte problema de otimização.

### Problema 1.

$$\underset{c_1^h; c_1^l; c_2^h; c_2^l; y; x; c_1^q; a; b}{Max} \frac{1}{2} [\omega_H u(c_1^h) + (1 - \omega_H) u(c_2^h)] + \frac{1}{2} [\omega_L u(c_1^l) + (1 - \omega_L) u(c_2^l)] + \rho u(c_1^q) \quad (15)$$

s.a

$$\omega_H c_1^h + \bar{a} \frac{z}{b} c_1^h \leq y + a \frac{z}{b} \bar{c}_1^h + z \bar{c}_1^l \quad (16)$$

$$\omega_L c_1^l + z c_1^l \leq y \quad (17)$$

$$(1 - \omega_H) c_2^h + z c_2^h \leq Rx \quad (18)$$

$$(1 - \omega_L) c_2^l + \bar{a} \frac{z}{b} c_2^l \leq Rx + z \bar{c}_2^h + a \frac{z}{b} \bar{c}_2^l \quad (19)$$

$$y + x + \epsilon(a + b) + (a + b) \frac{z}{b} \leq 1 + (\bar{a} + \bar{b}) \frac{z}{\bar{b}} \quad (20)$$

$$a \geq 0 \quad (21)$$

$$b \geq 1 \quad (22)$$

$$c_1^i \leq c_2^i \quad (23)$$

$$c_1^q = \frac{y + rx + \frac{(a+b)}{b} z \bar{c}_1^q}{1 + \frac{(\bar{a}+\bar{b})}{b} z} \quad (24)$$

Na resolução deste problema encontramos um equilíbrio em que o pior cenário é o contágio. Entretanto isso não significa que o contágio ocorrerá, para que isso ocorra, é necessário que pelo menos um banco tenha corrida bancária. Para encontrar um equilíbrio sem a possibilidade de um contágio ocorrer, o banco, ao acreditar que todos os demais estão se precavendo do equilíbrio, resolve o seguinte problema:

**Problema 2.**

$$\underset{c_1^h; c_1^l; c_2^h; c_2^l; y; x; a; b}{Max} \frac{1}{2} [\omega_H u(c_1^h) + (1 - \omega_H) u(c_2^h)] + \frac{1}{2} [\omega_L u(c_1^l) + (1 - \omega_L) u(c_2^l)] + \rho u(c_1^q) \quad (25)$$

s.a

$$\omega_H c_1^h + \bar{a} \frac{z}{b} c_1^h \leq y + a \frac{z}{b} \bar{c}_1^h + z \bar{c}_1^l \quad (26)$$

$$\omega_L c_1^l + z c_1^l \leq y \quad (27)$$

$$(1 - \omega_H) c_2^h + z c_2^h \leq Rx \quad (28)$$

$$(1 - \omega_L) c_2^l + \bar{a} \frac{z}{b} c_2^l \leq Rx + z \bar{c}_2^h + a \frac{z}{b} \bar{c}_2^l \quad (29)$$

$$y + x + \epsilon(a + b) + (a + b) \frac{z}{b} \leq 1 + (\bar{a} + \bar{b}) \frac{z}{b} \quad (30)$$

$$\frac{z}{b} [\bar{c}_1^l - \bar{c}_1^q] \leq r \left[ x - (1 - \gamma) \frac{c_1^h}{R} \right] \quad (31)$$

$$\frac{z}{b} [\bar{c}_1^h - \bar{c}_1^q] \leq r \left[ x - (1 - \omega_L) \frac{c_1^l}{R} - \bar{a} \frac{z}{b} \frac{c_1^l}{R} \right] + z \bar{c}_2^h + a \frac{z}{b} \bar{c}_2^l \quad (32)$$

$$a \geq 0 \quad (33)$$

$$b \geq 1 \quad (34)$$

$$c_1^i \leq c_2^i \quad (35)$$

$$c_1^q = \frac{y + rx + \frac{(a+b)}{b} z \bar{c}_1}{1 + \frac{(\bar{a}+b)}{b} z} \quad (36)$$

A ocorrência de contágio no pior cenário depende de todos os bancos atenderem a condição de não contágio simultaneamente. Logo, se um decidir não atender essa condição, temos pela proposição abaixo que atender a condição de não contágio será uma estratégia fracamente dominada para os demais jogadores.

**Proposição 2.** *Ao acreditar que algum banco na economia não atenda a condição de não contágio, o jogador estará em uma situação pelo menos tão boa ao escolher não atender a condição do que ao atender.*

### 3 Equilíbrio

O equilíbrio deste modelo consistirá em um contrato ótimo,  $\{c_1^h, c_1^l, c_2^h, c_2^l, y, x\}$  e uma infraestrutura bancária estável  $\mathcal{G} = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_i, b_i\} \times \dots \times \{a_{2n}, b_{2n}\}$ , formada pela união da decisão da quantidade de depósitos interbancários. O objetivo é encontrar um equilíbrio de nash simétrico para o contrato ótimo com um network estável simétrico.

O jogo tem a seguinte estrutura  $\Gamma = \{2n, \{S_i\}, Eu(\cdot)_i\}$ , com  $2n$  jogadores, função objetivo sendo a utilidade esperada dos agentes constituintes e vetor de estratégias  $s_i = \{c_1^h; c_1^l; c_2^h; c_2^l; y; x; a, l\}$ . Seja  $f_h(s_{-i})$  a função valor do banco referente ao problema  $h = \{1, 2\}$  e sujeito a escolha dos demais bancos.

**Proposição 3.** *O problema com a possibilidade do contágio, (1), possui ponto fixo.*

A função objetivo é contínua com um conjunto de escolhas contínuo, compacto e convexo, portanto a função valor do problema é contínua. Sendo  $f_h(\cdot)$  contínua em  $s = \{s_1, \dots, s_n, \dots, s_{2n}\}$  e quase côncava temos que existe o equilíbrio de Nash, e pelo teorema do ponto fixo de Brouwer existe equilíbrio de nash simétrico.

**Proposição 4.** *No equilíbrio de nash simétrico,  $c_1^h = c_1^l$  e  $c_2^h = c_2^l$ .*

*Demonstração.* Note as seguintes slackness condition,

$$\lambda_{1,H} \left[ y + a \frac{z}{b} c_1^h + z \bar{c}_1^l - \omega_H c_1^h - \bar{a} \frac{z}{b} c_1^h \right] = 0 \quad (37)$$

$$\lambda_{1,L} \left[ y - \omega_L c_1^l - z \bar{c}_1^l \right] = 0 \quad (38)$$

$$\lambda_{2,H} \left[ Rx - (1 - \omega_H) c_2^h - z \bar{c}_2^h \right] = 0 \quad (39)$$

$$\lambda_{2,L} \left[ Rx + z \bar{c}_2^h + a \frac{z}{b} \bar{c}_2^l - (1 - \omega_L) c_2^l - \bar{a} \frac{z}{b} c_2^l \right] = 0 \quad (40)$$

$$(41)$$

Dado que a função utilidade  $u(\cdot)$  é crescente e estritamente concâva, temos que o ótimo é quando  $\lambda_{1,H}, \lambda_{1,L}, \lambda_{2,H}, \lambda_{2,L} \neq 0$ . Logo, pela equação (38),  $c_1^l = \frac{y}{\gamma}$ . Aplicando isso na equação (37), e considerando o equilíbrio simétrico, temos que  $c_1^h = \frac{y}{\gamma} = c_1^l$ . De forma análoga pode-se provar que  $c_2^h = c_2^l$ . □

Em equilíbrio simétrico os bancos eliminam a incerteza agregada ao depositar em bancos de outra região o montante  $\frac{z}{b}$ . Essa proposição vale para o problema com e sem contágio no pior cenário. No problema sem contágio no pior cenário o conjunto de alocações factível pode ser nulo, não possuindo portanto um equilíbrio de nash simétrico.

**Proposição 5.** *O problema (2) possui equilíbrio simétrico se existe um par  $(a, b)$  que atenda:*

$$\frac{z}{r} \leq \frac{\left[ \left( 1 - (a + b)\epsilon \right) - \frac{(1-\gamma)+\gamma R}{R} \right] [b + (a + b)z]}{r \left[ \frac{(1-\gamma)+\gamma r}{r} - (1 - \epsilon(a + b)) \right]} \quad (42)$$

*Demonstração.* Em equilíbrio simétrico temos pela proposição (4) que  $c_1$  é independente do choque de liquidez regional. Temos pela proposição (1) que a condição de não contágio é:

$$\begin{aligned} \frac{z}{b} [c_1^l - c_1^q] &\leq r \left[ x - (1 - \gamma) \frac{c_1}{R} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{z}{r} &\leq \frac{br \left[ x - (1 - \gamma) \frac{c_1}{R} \right]}{[c_1 - c_1^q]} \end{aligned}$$

No cenário em que não há contágio  $c_1^q$  assume o valor da equação (10). Portanto,

$$c_1 - c_1^q = \frac{c_1 - y - rx}{1 + (a + b) \frac{z}{b}}. \quad (43)$$

Note que se o *upper bound* do lado direito da equação for menor que o lado esquerdo, não haverá uma estratégia que respeite essa restrição. Temos pela proposição (4) que  $c_1 = y/\gamma$ , como  $c_1 \in [1, c_2] \Rightarrow y \geq \gamma$ . Logo, usando (43), temos que

$$\begin{aligned} \frac{br \left[ x - (1 - \gamma) \frac{c_1^h}{R} \right]}{[\bar{c}_1^l - \bar{c}_1^q]} &= \frac{br \left[ x - (1 - \gamma) \frac{c_1^h}{R} \right]}{\left[ \frac{c_1 - y - rx}{1 + (a + b) \frac{z}{b}} \right]} \\ &= \frac{br \left[ (1 - y - \epsilon(a + b)) - \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} \frac{y}{R} \right]}{\left[ \frac{\frac{y}{\gamma} - y - r(1 - y - \epsilon(a + b))}{1 + (a + b) \frac{z}{b}} \right]} \\ &= \frac{\left[ 1 + \epsilon(a + b) - \left[ \frac{(1 - \gamma)}{\gamma R} + 1 \right] y \right] [b + (a + b)z]}{\left[ \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} + r \right] y - r(1 - \epsilon(a + b))} \\ &\leq \frac{\left[ 1 + \epsilon(a + b) - \left[ \frac{(1 - \gamma)}{\gamma R} + 1 \right] \gamma \right] [b + (a + b)z]}{\left[ \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} + r \right] \gamma - r(1 - \epsilon(a + b))} \\ &= \frac{\left[ (1 - (a + b)\epsilon) - \frac{(1 - \gamma) + \gamma R}{R} \right] [b + (a + b)z]}{r \left[ \frac{(1 - \gamma) + \gamma r}{r} - (1 - \epsilon(a + b)) \right]} \end{aligned}$$

□

Caso não exista um par  $(a, b)$  que atenda essas condições, dizemos que o problema dois não possui alocação factível e assim, a única escolha factível do jogador advém da solução do problema (1). Neste caso, pela proposição (2), o único equilíbrio de nash simétrico

no modelo é {contágio,contágio}. Quando a condição da proposição (5) é atendida, o modelo apresenta duas possibilidade de equilíbrio simétrico, {contágio,contágio} e {Não contágio,Não contágio}.

No problema com contágio no pior cenário a derivada do lagrangeano referente ao *liquidity link* é negativa independente dos parâmetros, portanto teremos uma solução de canto referente a 'b'. A solução de *solvency link* dependerá dos parâmetros do problema. Na próxima seção encontraremos equilíbrios através de uma rotina computacional. No caso extremo, onde tanto o *liquidity link* e *solvency link* são solução de canto, o network de equilíbrio será no formato de um anel. O equilíbrio do segundo problema será avaliado na seção numérica deste trabalho. Um exemplo seria o network no formato de estrela.

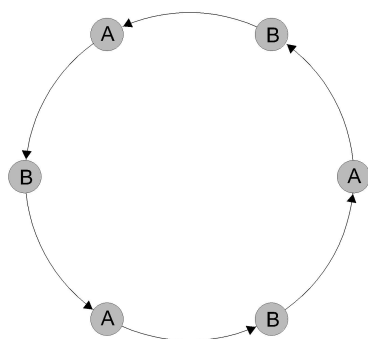


Figura 1: Estrutura de Anel

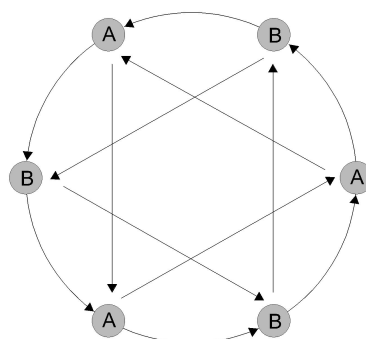


Figura 2: Estrutura Estrela

### 3.1 Caso otimista

Podemos reproduzir o modelo de Allen and Gale (2000) ao retirar a condição wary dos agentes.

**Problema 3.**

$$\underset{c_1^h, c_1^l; c_2^h, c_2^l; y; x; c_1^a; a; b}{Max} \frac{1}{2} [\omega_H u(c_1^h) + (1 - \omega_H) u(c_2^h)] + \frac{1}{2} [\omega_L u(c_1^l) + (1 - \omega_L) u(c_2^l)] \quad (44)$$

s.a

$$\omega_H c_1^h + \bar{a} \frac{z}{b} c_1^h \leq y + a \frac{z}{b} c_1^h + z \bar{c}_1^l \quad (45)$$

$$\omega_L c_1^l + z c_1^l \leq y \quad (46)$$

$$(1 - \omega_H) c_2^h + z c_2^h \leq Rx \quad (47)$$

$$(1 - \omega_L) c_2^l + \bar{a} \frac{z}{b} c_2^l \leq Rx + z \bar{c}_2^h + a \frac{z}{b} \bar{c}_2^l \quad (48)$$

$$y + x + \xi(a + b) + (a + b) \frac{z}{b} \leq 1 + (\bar{a} + \bar{b}) \frac{z}{b} \quad (49)$$

$$a \geq 0 \quad (50)$$

$$b \geq 1 \quad (51)$$

$$c_1^i \leq c_2^i \quad (52)$$

Ao resolver este problema temos a seguinte solução para o contrato ótimo, assim como em Allen and Gale (2000):

$$c_1^h = c_1^l = \frac{y}{\gamma} \quad (53)$$

$$c_2^h = c_2^l = \frac{Rx}{(1 - \gamma)} \quad (54)$$

$$(55)$$

E a seguinte condição de optimalidade análoga a de Diamond and Dybvig (1983):

$$u(c_1) = Ru(c_2) \quad (56)$$

Portanto, neste cenário, temos que em equilíbrio  $c_1 < c_2$ . Considerando uma função utilidade homotética no formato:

$$u(x) = \frac{x^{(1-\sigma)}}{(1-\sigma)} \quad (57)$$

Temos um resultado explícito para y e x em função do números de interligações feita.

$$y = \frac{1}{A+1} [1 - \epsilon(a+b)] \quad (58)$$

$$x = \frac{A}{A+1} [1 - \epsilon(a+b)] \quad (59)$$

Onde  $A = \frac{\gamma}{R^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}(1-\gamma)}$

Se considerarmos  $\epsilon = 0$ , teremos a solução de Allen and Gale (2000). Como os bancos não se preocupam com o pior cenário neste exemplo, teremos a estrutura de anel como network de equilíbrio. Note que o contrato ótimo é uma proporção do restante da renda após custear os depósitos interbancários. Ao considerar o ambiente de cautela, continuaremos com o contrato ótimo sendo determinado de acordo com a renda não utilizada para custear as interligações.

## 4 Exemplo Numérico

Nesta seção iremos reproduzir o modelo em uma rotina computacional. Vamos abstrair e considerar todas as variáveis contínuas, inclusive o número de links. Como o jogador possui dois possíveis equilíbrios, a ideia é buscar a *best reply* do jogador frente ao que ele espera que os demais joguem. O seguinte algoritmo será usado para encontrar o equilíbrio de nash simétrico:

- Passo 1: Chute um valor inicial para  $s_i$  e  $s_{-i}$ .
- Passo 2: Encontre  $s_i$  que resolva o problema de maximização.
- Passo 3: Se a distância entre  $s_i$  e  $s_{-i}$  for menor do que a tolerância,  $s_i$  é a resposta, caso contrário vá ao passo 4.
- Passo 4: Atualize o valor de  $s_{-i}$  para  $s_{-i} = s_{-i} + \lambda(s_i - s_{-i})$ .
- Passo 5: Volte ao passo dois.

Onde  $\lambda$  é uma taxa de atualização pré-definida. Ao acreditar que os demais jogadores irão se precaver do contágio, o banco sabe, conforme visto, que a decisão dele determinará a possibilidade do contágio ou não. Ao resolver os problemas (1) e (2), o banco escolhe a alocação que dá a maior utilidade esperada.

A primeira linha se refere a solução do problema no caso em que o banco não atende a condição de não contágio. A segunda é o caso em que antede a condição. Considerando a

Tabela 1: Resultado quando existe equilíbrio sem contágio.

	$c_1$	$c_2$	$y$	$x$	$c_1^q$	$a$	$b$
occ	1.024	1.024	0.512	0.488	0.756	0.04	1
oc	1.013	1.034	0.510	0.493	0.808	6.84	4.11

$\rho=0.7; r = 0.5; \epsilon=0.0001; N=100$

função utilidade (57), o problema sem contágio é preferível ao problema com contágio no pior cenário. Portanto, o equilíbrio sem contágio no pior cenário pareto domina o equilíbrio com contágio no pior cenário. Entretanto como visto na proposição (5) o equilíbrio sem contágio nem sempre existe.

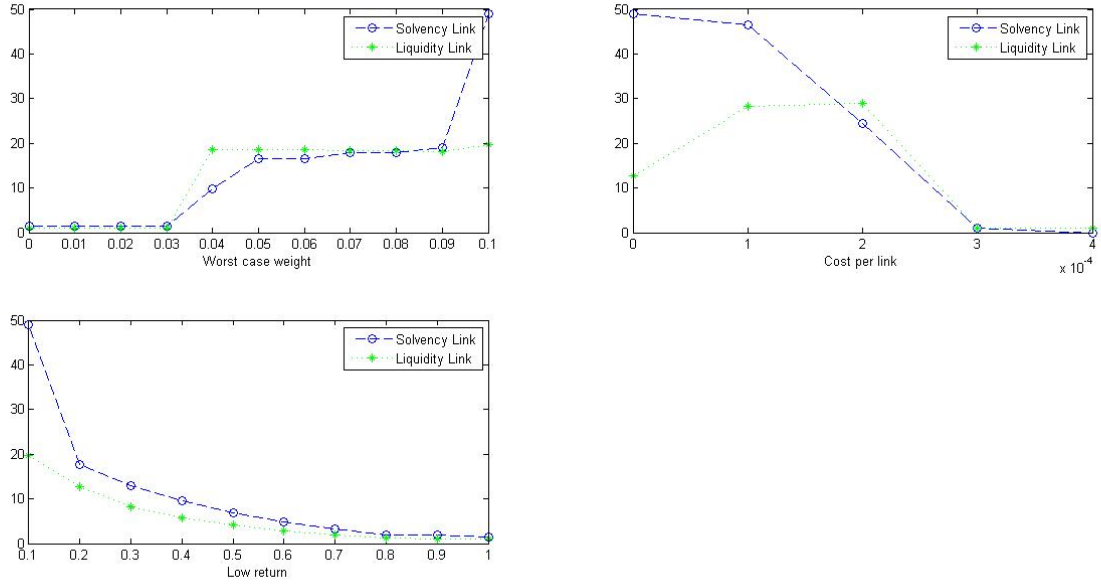
Considere o exemplo com um custo de interligação um pouco maior e com uma taxa de recuperação baixa,  $\epsilon = 0.0005$  e  $r = 0.1$ . Neste caso, não haverá combinação (a,b) que atenda a condição da proposição (5). Logo, o banco irá sempre escolher jogar ‘contágio no pior cenário’. Pela seção referente ao depósito interbancário, o aumento de *liquidity link* reduz o consumo no pior cenário e ainda reduz o montante de depósito interbancário feito, logo, o banco sempre escolhe uma solução de canto para este tipo de interligação. Mesmo no equilíbrio ‘sem contágio no pior cenário’, o banco escolhe o menor número possível de *liquidity link* tal que atenda a condição de não contágio.

O *solvency link* apresenta características diferentes, pois ele aumenta o consumo no pior cenário. Logo, o banco tem incentivos a fazer esse tipo de interligação. A quantidade de interligação depende de quão cauteloso o banco é, do custo de se fazer depósito interbancário e das taxas de juros. Na imagem abaixo observa-se o efeito destes três parâmetros no network de equilíbrio.

O gráfico superior esquerdo apresenta a escolha do network dado o nível de *wary*. Para  $\rho$  muito baixo, ou seja, para bancos poucos cautelosos, é preferível o equilíbrio com contágio no pior cenário. A partir de  $\rho = 0.03$ , o banco passa a preferir o equilíbrio ‘sem contágio’, onde quanto maior o  $\rho$ , maior o número de interligações. O custo fixo possui um efeito diferente para cada tipo de interligação. Pela proposição (5) vimos que o custo influencia a existência de equilíbrio. Ao aumentar o custo, fica mais difícil atender a condição de não contágio. Para isso, o banco aumenta o número de interligações com bancos de outra região e diminui as interligações com bancos da mesma região. Até o ponto em que o custo é tão alto de tal forma que é preferível o contágio no pior cenário ou quando não há equilíbrio sem contágio. O efeito do custo no network pode ser observado no gráfico superior a direita. No gráfico inferior a esquerda vemos o efeito da taxa de recuperação  $r$  na quantidade de interligação. Quanto maior essa taxa, menor a probabilidade



Figura 3: Efeito dos parâmetros



de contágio, podemos observar isso pela condição de não quebra. Logo, quanto maior  $r$ , menor será a quantidade de interligações.

As alocações da tabela 1 apresentam um contrato ótimo e um network estável. Porém, pode-se encontrar um network pareto eficiente, e consequentemente estável, ao considerar o equilíbrio de first best. O problema de first best é similar aos problemas (1) e (2), supondo simetria antes de resolver os problemas. A alocação pareto eficiente é:

Tabela 2: Alocação pareto eficiente quando existe equilíbrio sem contágio.

	$c_1$	$c_2$	$y$	$x$	$c_1^q$	$a$	$b$
fb	1.024	1.024	0.512	0.488	0.756	0.00	1
fb	1.012	1.031	0.506	0.491	0.882	25.68	2.85

$\rho=0.7; r = 0.5; \epsilon=0.0001; N=100$

Note que a quantidade de solvency link é maior no cenário de first best, enquanto o *liquidity link* é menor. O equilíbrio de first best é mais eficiente para evitar o contágio do que o equilíbrio descentralizado, pois requer um número de interligações menor de *liquidity link* para evitar o contágio.

## 5 Literatura Relacionada

No modelo apresentado neste trabalho, os bancos escolhem o nível de interligação ótima dado o peso para o evento com menor utilidade, o custo de se fazer interligação e a crença do que os outros bancos irão fazer. O network de equilíbrio corresponderá a união da decisão de número de *links* de cada banco. Allen and Gale (2000) acreditam que o network mais resiliente ao contágio é o com maior número de interligações possível. Ao endogeneizar o network encontramos que a infraestrutura que Allen and Gale (2000) acreditam ser mais resiliente ao contágio não é eficiente e tão pouco estável, uma vez que dado o custo de interligação e a possibilidade de contágio os bancos escolhem ou o caso mais simples, estrutura de anel, ou um caso intermediário, como é o caso da estrutura de estrela, dado que ele evite o contágio.

Em Acemoglu et al. (2013) a ideia que o network mais resiliente ao contágio é o mais completo é contestada. Ao considerar um choque negativo alto, o network completo pode servir de um meio de propagação de quebras, onde neste caso o network mais eficiente seria aquele com um número de interligações pequeno, onde o efeito da quebra não se propagaria muito. Note que esta argumentação é semelhante aos resultados encontrados neste trabalho, pois ao acreditar que é impossível conter o contágio dado a quebra de um banco, todos os bancos escolhem fazer poucas interligações. Por outro lado, se eles acreditam que o efeito do choque negativo pode ser diluído entre os demais de forma a não acontecer o contágio, os bancos formam um network mais completo.

A diferenciação do tipo de interligações permite avaliar o network de equilíbrio quanto ao nível de integração e diversificação. A integração é almejada pelos bancos dado que melhora o consumo em caso de corrida bancária ou de contágio. A diversificação por outro lado, dificulta a ocorrência de contágio. Os bancos escolhem a diversificação necessária para evitar o contágio, quando possível, e a integração ocorre até o ponto em que seu benefício seja maior que o custo de se fazer a interligação. Elliott et al. (2014) argumentam que os casos extremos de diversificação e integração são mais resilientes ao contágio, no modelo deste artigo, os bancos ou escolhem o caso menos diversificado e menos integrado se acreditam que não podem evitar o contágio, ou fazem o suficiente de integração e diversificação para evitar o contágio. O meio termo não é uma escolha eficiente, e por Elliott et al. (2014) é propensa ao contágio.

A literatura com network endógeno comparável a esta é a de Babus (2014). Considerando um environment em que o banco só escolhe um tipo de interligação, a autora encontra que os bancos fazem interligações a fim de diminuir a probabilidade de contágio. Quando existe um número de interligações capaz de evitar o contágio, os bancos a

preferem. Apesar do environment ser parecido com o deste trabalho, nós encontramos que nem sempre o equilíbrio que evita o contágio é eficiente para os bancos.

## 6 Conclusão

A literatura de contágio no sistema financeiro busca a estrutura bancária mais resiliente a ocorrência de contágio. Uma pequena parte dessa literatura busca o network estável em que cada banco, de forma descentralizada, escolhe o número de interligações a serem feitas. O network surge da união de todas as interligações feitas. Falta a literatura comparar o network dito resiliente ao contágio e o network eficiente aos olhos dos depositantes constituintes.

Os indivíduos se preocupam com o consumo no pior cenário. Ao depositar seus recursos em um banco benevolente, o pior consumo do depositante será quando o banco quebrar, caso não tenha nenhum tipo de interligação com outro banco. Se o banco pertencer a uma rede financeira, o pior cenário será em que todos os bancos quebrem, que é a definição de contágio. Os bancos podem ‘escolher’ qual será o pior cenário possível ao definirem o número de depósitos interbancários a serem feitos. A escolha dependerá da crença do que os demais estão fazendo, do custo de interligação e do peso dado ao pior cenário.

No equilíbrio com contágio no pior cenário, os bancos realizam um número baixo de interligações, aproximando o network de equilíbrio da estrutura de anel. Para obter o equilíbrio sem contágio no pior cenário, todos os bancos devem atender a condição de não contágio, a qual requer uma combinação mínima de *liquidity link* e *solvency link*. Ao acreditar que pelo menos um banco não atende a condição de não contágio, todos os demais irão considerar ótimo não atender também, mesmo que seja eficiente que todos atendam. Portanto, um equilíbrio pareto dominado pode ocorrer devido a um problema de coordenação entre os bancos.

O equilíbrio sem contágio no pior cenário nem sempre existe, e a depender dos parâmetros não será eficiente. Ao considerar que os depositantes constituintes não se preocupam muito com o pior cenário,  $\rho$  baixo, não será ótimo para os bancos custearem um número de interligações que atenda a condição de não contágio. Portanto, ao endogeneizar a estrutura financeira, temos que o network dito mais resiliente ao contágio pode não ser eficiente. A possibilidade de ocorrência de propagação de quebra pode ser ótima.

Este trabalho considera apenas duas regiões de equilíbrio devido ao fato dos agentes não se preocuparem com a probabilidade em que o contágio ocorre. Uma expansão imediata deste modelo é considerar uma distribuição de probabilidade de ocorrência de

contágio.

## Referências

- Acemoglu, D., A. Ozdaglar, and A. Tahbaz-Salehi (2013, January). Systemic Risk and Stability in Financial Networks. NBER Working Papers 18727, National Bureau of Economic Research, Inc.
- Allen, F. and A. Babus (2009). *Networks in Finance*, Chapter 21, pp. 367. Prentice Hall Professional.
- Allen, F., A. Babus, and E. Carletti (2009). Financial crises: theory and evidence. *Annu. Rev. Financ. Econ.* 1(1), 97–116.
- Allen, F. and D. Gale (2000, February). Financial Contagion. *Journal of Political Economy* 108(1), 1–33.
- Araujo, A., R. Novinski, and M. Páscoa (2011). General equilibrium, wariness and efficient bubbles. *Journal of Economic Theory* 146, 785–811.
- Babus, A. (2014). The Formation of Financial Networks. Working Papers 2007.69, Fondazione Eni Enrico Mattei.
- Bala, V. and S. Goyal (2000, september). A noncooperative model of network formation. *Econometrica* 68(5), 1181–1229.
- Castiglionesi, F. and N. Navarro (2010). Optimal Fragile Financial Networks. Discussion Paper 2007-100, Tilburg University, Center for Economic Research.
- Dasgupta, A. (2004). Financial contagion through capital connections: A model of the origin and spread of bank panics. *Journal of European Economic Association* 2, 1049–1084.
- Diamond, D. and P. Dybvig (1983, june). Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *Journal of Political Economy* 91(3), 401–419.
- Elliott, M., B. Golub, and M. O. Jackson (2014, October). Financial Networks and Contagion. *American Economic Review* 104(10), 3115–53.
- Jackson, M. (2008). *Social and Economics Networks*. Princeton University Press.
- Lorenzoni, G., F. Feriozzi, and F. Castiglionesi (2009). Financial Integration, Liquidity and the Depth of Systemic Crises. 2009 Meeting Papers 440, Society for Economic Dynamics.