

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS  
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

MARCELO HIROKI

**PREVISÃO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXA DE JUROS APLICANDO  
O FILTRO DE KALMAN AO MODELO VASICEK: O CASO BRASILEIRO**

SÃO PAULO  
2014

MARCELO HIROKI

**PREVISÃO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXA DE JUROS APLICANDO  
O FILTRO DE KALMAN AO MODELO VASICEK: O CASO BRASILEIRO**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de Concentração:  
Finanças Quantitativas

Orientador:  
Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

SÃO PAULO  
2014

Hiroki, Marcelo.

Previsão da Estrutura a termo de taxa de juros aplicando o Filtro de Kalman ao Modelo Vasicek: O caso Brasileiro / Marcelo Hiroki. - 2014. 86 f.

Orientador: Afonso de Campos Pinto

Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Taxas de juros - Brasil. 2. Taxas de juros - Modelos matemáticos. 3. Kalman, Filtragem de. 4. Investimentos - Administração. I. Pinto, Afonso de Campos. II. Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo. III. Título.

CDU 336.781.5

MARCELO HIROKI

**PREVISÃO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXA DE JUROS APLICANDO  
O FILTRO DE KALMAN AO MODELO VASICEK: O CASO BRASILEIRO**

Dissertação apresentada à Escola  
de Economia de São Paulo da  
Fundação Getúlio Vargas, como  
requisito para obtenção do título de  
Mestre em Economia.

Área de Concentração:  
Finanças Quantitativas

**Data da aprovação:**

\_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Banca examinadora:**

---

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto  
EESP-FGV  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Roberto Barbosa Cintra  
EESP-FGV

---

Prof. Dr. Marcos Eugênio da Silva  
FEA-USP

## RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de testar a qualidade preditiva do Modelo Vasicek de dois fatores acoplado ao Filtro de Kalman. Aplicado a uma estratégia de investimento, incluímos um critério de *Stop Loss* nos períodos que o modelo não responde de forma satisfatória ao movimento das taxas de juros. Utilizando contratos futuros de DI disponíveis na BMFBovespa entre 01 de março de 2007 a 30 de maio de 2014, as simulações foram realizadas em diferentes momentos de mercado, verificando qual a melhor janela para obtenção dos parâmetros dos modelos, e por quanto tempo esses parâmetros estimam de maneira ótima o comportamento das taxas de juros. Os resultados foram comparados com os obtidos pelo Modelo Vetor-auto regressivo de ordem 1, e constatou-se que o Filtro de Kalman aplicado ao Modelo Vasicek de dois fatores não é o mais indicado para estudos relacionados a previsão das taxas de juros. As limitações desse modelo o restringe em conseguir estimar toda a curva de juros de uma só vez denegando seus resultados.

Palavras-chave: Modelo Vasicek, Filtro de Kalman, Vetor Auto Regressivo

## **ABSTRACT**

This work aims to test the quality of forecasting of the two factor Vasicek Model coupled with the Kalman filter. Applied to an investment strategy, it runs with a Stop Loss criteria for periods in which the model does not fit the interest rates. Using BMF's DI future contracts available for the period of 1<sup>st</sup> of March, 2007 to the 30<sup>th</sup> of May 2014, we simulated the strategy for different periods with different conditions, aiming on finding the optimal time series window that will lead to the model parameters that best fit the current term structure, also, it will be analyzed how long these parameters optimally estimate interest rate dynamic. The results were compared with the ones obtained from the vector autoregressive model of lag 1, indicating that Vasicek Model underperform compared to this model. The limitation of the two factor model on capturing the term structure dynamics does not allow the model to estimate the term structure at once denigrating the results.

Keywords: Vasicek Model, Kalman Filter, Vector Auto Regressive

## **AGRADECIMENTOS**

Um especial agradecimento aos meus pais por todo apoio, incentivo e conselhos oferecidos em toda a minha vida, tanto na minha vida pessoal como acadêmica e profissional. Sem o suporte oferecido eu jamais teria a oportunidade de estar escrevendo este trabalho.

Agradeço também a minha esposa Tatiane por toda paciência e apoio nos momentos difíceis. Seu companheirismo, alegria e sorriso até nas situações mais complicadas me deram força para conseguir chegar até esse momento.

Por fim agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto, pelos seus conselhos e orientações extremamente objetivas tanto no fórum acadêmico como o profissional, e também pela compreensão em momentos que minha vida pessoal e profissional criaram empecilhos em dar continuidade nesse trabalho no passo desejado.

## Sumário

|  |    |
|--|----|
| 1. Introdução.....   | 11 |
| 2. Revisão Bibliográfica.....  | 14 |
| 3. Fundamentação Teórica .....   | 21 |
| 3.1 Estrutura a Termo da Taxa de Juros .....   | 21 |
| 3.2 Modelo Vasicek.....  | 22 |
| 3.3 Filtro de Kalman .....   | 27 |
| 3.4 Vetor Auto regressivo .....  | 31 |
| 4. Metodologia e aplicação dos modelos.....  | 35 |
| 4.1 Mercado de Contratos futuros de DI e as taxas Swaps Pré xDI .....                            | 36 |
| 4.2 A estrutura a termo da taxa de juros e o Filtro de Kalman aplicado ao modelo de Vasicek..... | 36 |
| 4.3 A estrutura a termo da taxa de juros aplicada ao modelo VAR(1) .....                         | 42 |
| 4.4 Simulação de uma carteira com derivativos de taxa de juros e descrição do processo.....      | 43 |
| 5. Resultados.....   | 46 |
| 5.1 Obtenção dos parâmetros do Modelo Vasicek de 2 fatores .....                                 | 46 |
| 5.2 Resultados da Estratégia de Investimento.....  | 52 |
| 6. Conclusão.....  | 64 |



|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 - Parâmetros do modelo de Vasicek com base na amostra de 01/04/2007 a 01/05/2014.....    | 48 |
| Tabela 2 - Matriz de correlação dos erros de estimação da janela de 01/04/2007 a 01/05/2014 ..... | 49 |
| Tabela 3 – matriz de covariância dos erros de estimação .....                                     | 50 |
| Tabela 4 resultado do teste de Jarque –Bera para os erros de medição .....                        | 52 |
| Tabela 5 Resultados das simulações com janela de otimização de 63 amostras otimização ....        | 55 |
| Tabela 6 Resultados das simulações com janela de otimização de 126 amostras .....                 | 55 |
| Tabela 7 Resultados das simulações com janela de otimização de 63 amostras.....                   | 57 |
| Tabela 8 Resultados das simulações com janela de otimização de 126 amostras .....                 | 58 |
| Tabela 9 Resultados das simulações com janela de otimização de 63 amostras .....                  | 60 |
| Tabela 10 Resultados das simulações com janela de otimização de 126 amostras .....                | 61 |

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 Processo iterativo do Filtro de Kalman .....  | 30 |
| Figura 2 Taxas teóricas versus estimadas (vértices $T_1$ a $T_4$ ) pelo FKMV2 versus taxas de mercado.....             | 47 |
| Figura 3 Taxas teóricas versus estimadas (vértices $T_7$ a $T_{10}$ ) pelo Modelo Vasicek versus taxas de mercado..... | 48 |
| Figura 4 Histograma dos erros dos vértices $T_1$ a $T_4$ .....   | 51 |
| Figura 5 Histograma dos erros dos vértices $T_7$ a $T_{10}$ .....  | 52 |
| Figura 6 gráfico das taxas de juros e volatilidades do período 01/03/2007 a 01/03/2009 .....                           | 54 |
| Figura 7 Resultado acumulado x média de volatilidade .....   | 56 |
| Figura 8 gráfico das taxas de juros e volatilidades do período 01/03/2010 e 01/03/2012 .....                           | 57 |
| Figura 9 Resultado acumulado x média de volatilidade .....   | 59 |
| Figura 10 gráfico das taxas de juros e volatilidades do período 01/03/2012 e 01/03/2014 .....                          | 60 |
| Figura 11 Resultado acumulado x média de volatilidade .....  | 62 |

## 1. Introdução

Pesquisas relacionadas à estrutura a termo da taxa de juros são extremamente importantes para diversos segmentos. Sua expectativa futura contém diversas informações relevantes. Sendo a taxa de juros uma ferramenta importante para o controle da inflação e gerenciamento da dívida pública, a estrutura a termo<sup>1</sup> prescreve um bom indicativo para a perspectiva do desenvolvimento econômico de um país, servindo de suporte na tomada de decisão de investimentos, tanto para o governo quanto para o setor privado. No mercado financeiro, a taxa de juros é tratada como uma “mercadoria” e sendo assim, é de elevada importância o desenvolvimento de ferramentas que consigam produzir curvas de juros consistentes com a de mercado e ao mesmo tempo possuam parâmetros que possam explicar e replicar sua dinâmica, possibilitando dessa maneira, que os agentes do mercado consigam desenvolver estratégias de investimento com maior potencial de ganho.

Nos estudos relacionados ao comportamento da taxa de juros, é possível dividir em algumas frentes, definidas conforme o modelo adotado: equilíbrio, estatísticos e não arbitragem.

Os modelos estatísticos são base de estudo de diversas pesquisas recentes, principalmente os derivados do Modelo Nelson-Siegel<sup>2</sup> (1987). “Esta classe de modelos têm como objetivo realizar a definição dos possíveis formatos e movimentos da curva de juros através de métodos estatísticos”, (Cavalcanti Jr, 2013, p. 20). Esses modelos possuem a vantagem de não serem muito complexos e também possibilitam replicar de forma consistente a estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ daqui em diante). Todavia, os modelos estatísticos não fornecem nenhuma informação a respeito da dinâmica da taxa de juros, fator importante para precificação de derivativos de taxa de juros, por exemplo.

Os modelos de equilíbrio tiveram sua origem com Vasicek (1977), definindo parâmetros para descrever o comportamento da taxa de juros instantânea, ou *short*

---

<sup>1</sup> Uma definição para a estrutura a termo é como sendo a projeção da taxa de juros de curto prazo em um dado instante no futuro.

<sup>2</sup> O Modelo Nelson-Siegel consiste basicamente em atribuir fatores que possam influenciar os valores das taxas de juros.

*rate*. Baseado no processo de Ornstein-Uhlenbeck<sup>3</sup> (1930), Vasicek (1977) descreve o comportamento da taxa de juros instantânea ao longo do tempo a partir de uma equação diferencial estocástica, caracterizada por mover em torno da chamada taxa média de longo prazo<sup>4</sup>, com uma determinada velocidade, em um movimento conhecido como reversão a média. O trabalho de Vasicek inspirou diversas outras pesquisas na tentativa de eliminar algumas das deficiências apresentadas, sendo um dos mais populares o modelo de Cox, Ingersoll e Ross<sup>5</sup> (1985), mais comumente referenciado na literatura como modelo CIR. Outra categoria que também tenta modelar a dinâmica da taxa de juros, chamados modelos de não arbitragem, os parâmetros são definidos a partir da curva de mercado de forma que a curva gerada consiga replicar seu formato, evitando assim, oportunidades de arbitragem.

A partir dos anos 90, diversos trabalhos foram publicados com base nos modelos de taxas de juros para explicar sua dinâmica e inferir previsões ao adequá-los no formato de Espaço de Estados<sup>6</sup>. Tratando as variáveis dessa maneira, torna-se possível analisar de forma compacta e conveniente um sistema de múltiplas entradas e saídas de uma só vez, extremamente útil para trabalhar com regressões de muitas variáveis. De Jong (1999), Babbs e Nowman (2000) e De Rossi (2003) são exemplos de autores que exploraram os resultados dos modelos de não arbitragem e equilíbrio, enquanto que Diebold e Li (2005) e Cavalcanti Jr (2013) utilizaram para o mesmo fim o modelo estatístico, todos eles utilizando o Modelo de Espaço de Estados. Uma das grandes vantagens, ao tratar as variáveis em formato de Espaço de Estados, reside do fato de ser aplicável a sistemas gaussianos lineares, permitindo assim o uso de uma ferramenta que tem ganhado muitos adeptos nos estudos relacionados a séries temporais: o Filtro de Kalman (1960). Inicialmente associado a aplicações nas áreas de engenharia e física, esse algoritmo recursivo utiliza medições de grandezas realizadas ao longo do tempo, contaminadas com outras variáveis (ruídos), para estimar valores que tendam a se aproximar dos dados reais das grandezas medidas, realizando de forma eficiente,

<sup>3</sup> Maiores detalhes no artigo de nome "On the theory of Brownian Motion"; Uhlenbeck, G.E, LS(1930)

<sup>4</sup> Taxa média de longo prazo é definida como a taxa de juros de equilíbrio de uma determinada economia

<sup>5</sup> Modelo Cox-Ingersoll-Ross apresentado em "A theory of the Term Structure of Interest Rate"; Cox, J.C, J.E. Ingersoll and S.A Ross; 1985 difere do Modelo Vasicek ao tornar a dispersão função do nível da taxa de juros instantânea, evitando que essa taxa atinja valores negativos.

<sup>6</sup> O modelo de Espaço de Estados terá um subcapítulo onde será explicado com mais detalhes, mas de forma resumida, esse modelo nada mais é que uma representação matemática na qual de um sistema de entradas e saídas relacionadas por equações diferenciais de primeira ordem.

estimativas sobre um sistema dinâmico linear. Sua aplicabilidade ganhou importância nas áreas de economia e finanças pelo fato dessa ferramenta possibilitar a geração de previsões sobre variáveis nas quais não temos controle. Nesse sentido, o presente estudo propõe o uso do Filtro de Kalman acoplado ao Modelo Vasicek de dois fatores em formato de Espaço de Estados, para modelar e realizar previsões sobre a dinâmica da taxa de juros aplicada a uma estratégia de investimento. O uso do Filtro de Kalman possui dois objetivos específicos: 1) estimar os parâmetros não observados e 2) produzir estimativas das taxas de juros no passo seguinte. Os resultados são apresentados e discutidos com base no *Profit & Loss*<sup>7</sup>, ou *P&L* de uma carteira de contratos futuros de taxas de juros. Será simulado também para efeito de comparação, a mesma estratégia agora aplicada ao modelo Vetor Auto Regressivo (VAR) de ordem 1 como forma de verificar a eficácia do modelo proposto.

A estrutura do trabalho está dividida da seguinte forma: Além desta introdução, no capítulo dois é apresentado a pesquisa bibliográfica, contextualizando-a no universo já existente no Brasil e no exterior. No capítulo três, é disponibilizada a fundamentação teórica, com os principais conceitos para apoio da leitura do capítulo seguinte, destinado à metodologia de trabalho, onde se encontram as explicações e os detalhes das simulações realizadas. No capítulo cinco são apresentados os resultados obtidos e as discussões a cerca deles, encerrando no capítulo seis com as conclusões e indicações para futuras pesquisas relacionadas ao tema.

---

<sup>7</sup> *Profit & Loss* é o termo usado no mercado financeiro para se referir aos resultados financeiros de uma carteira de ativos.

## 2. Revisão Bibliográfica

Este capítulo destina-se a apresentar os trabalhos já realizados com temas e abordagens similares aos dessa pesquisa, tanto no Brasil como no exterior, oferecendo um breve resumo, destacando pontos relevantes por possuírem, de alguma maneira, importância no desenvolvimento desse trabalho, além de também contextualizar esse estudo em relação aos já existentes.

Chen e Scott (1993) apresentam um método de estimação dos parâmetros do Modelo CIR com base nas taxas de juros das *Treasuries* americanas. Usando a maximização da função de verossimilhança, tentam reproduzir a dinâmica da ETTJ e determinar o número de fatores necessários para realizar esta estimação, de forma a capturar a mudança no formato da curva ao longo do tempo. Constatou-se que modelos de mais de 1 fator são necessários para explicar a curvatura e formato da ETTJ. Foi observado também que o primeiro fator é responsável por responder pela maior parte da variação do nível da curva, enquanto que os demais fatores respondem pelo movimento das taxas prazos mais longos. A partir dos resultados obtidos, não houve ganho considerável em se utilizar modelos de 3 fatores ao invés de 2, pois na maior parte da amostra, ambos se comportaram de forma similar.

Duffie e Kan (1993) definem e analisam modelos multifatoriais simples da ETTJ, focando em modelos com estruturas afins e representando os fatores do modelo pelas taxas de juros. O modelo apresentado é genérico, possuindo como casos especiais os modelos de Vasicek (1977), CIR (1985) e Chen e Scott (1993) entre outros. Os autores estabelecem condições necessárias e suficientes para obtenção de uma estrutura a termo exponencial afim, em que a média condicional e a função de variância das variáveis de estado devem ser afim para qualquer intervalo de tempo discreto.

Duan e Simonato (1995) propõem uma formulação única na estimação dos parâmetros dos modelos de estrutura a termo exponencial afim<sup>8</sup>, caracterizado pelo modelo genérico proposto por Duffie e Kan (1993). O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma abordagem na qual todos os modelos da estrutura a termo

---

<sup>8</sup> O conceito de modelos afim e exponenciais afim serão apresentados no capítulo 3.

exponencial afim possam ser estimados com o uso simultâneo de múltiplas séries de taxas. Utilizando o Filtro de Kalman, a formulação proposta necessita somente da média e variância condicional de forma aproximada. Através da simulação de Monte Carlo, conclui-se que o método é aderente para uma amostra de tamanho moderado.

Babbs e Nowman (1999) aplicam o Filtro de Kalman utilizando as taxas de juros americanas em uma formulação em Espaço de Estados estimando os parâmetros do modelo Vasicek de 1, 2 e 3 fatores, no qual a volatilidade das taxas é independente de seu nível. Os autores afirmam que, exceto em casos extremamente restritos, todos os modelos gaussianos podem ser adaptados ao modelo proposto, desde que as variáveis de estados sejam não observáveis. Para obtenção dos parâmetros do modelo, assumindo que o erro de medição é normalmente distribuído, é feita a maximização da função de verossimilhança (neste caso, uma fórmula fechada para a verossimilhança é possível de ser obtida). Os resultados desse trabalho indicam que o modelo de três fatores apresenta melhor performance comparado aos modelos de 1 e 2 fatores.

De Jong e Santa Clara (1999) desenvolveram uma classe de modelo da ETTJ em que títulos e derivativos de taxa de juros dependem de duas variáveis de estados markovianas<sup>9</sup> (taxa de juros de curto prazo e volatilidade neste caso) de forma conjunta. O estudo foca na dinâmica da curva de juros *forward*, com base em variáveis de estado, utilizando o modelo de Heath, Jarrow e Morton<sup>10</sup> (1992) e comparando os resultados obtidos com o Modelo Vasicek (1977) e CIR (1985). Os autores oferecem uma maneira na qual utilizam dados de painel, combinando de forma eficiente séries de tempo e corte seccional da estrutura a termo, tornando possível assim, calibrar o modelo com a curva de juros e ao mesmo tempo modelar de forma eficiente o movimento das taxas durante um período de tempo. Utilizando o Filtro de Kalman, os autores afirmam que, com base em dados de painel, o modelo leva a estimação dos parâmetros de forma mais eficiente. O modelo aplicado responde bem ao corte seccional da estrutura a termo, com pequenos erros entre a

---

<sup>9</sup> Variáveis de estados markovianas são intituladas assim pois o estado atual depende apenas do estado anterior de uma forma não determinística

<sup>10</sup> Trabalho de título: "A Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation" em que a dinâmica da taxa de juros é descrita por um modelo multifactorial capaz de replicar toda a dinâmica da estrutura a termo da taxa de juros.

taxa real e a teórica. Da mesma maneira que Babbs e Nowman (1999) comprova-se também que os resultados utilizando o modelo de dois fatores melhoram consideravelmente o erro de medição comparado ao modelo unifatorial.

Duffee (2000) discute a estrutura de modelos afim e explica como os modelos padrões funcionam de forma pobre na previsão das taxas das *Treasuries* americanas. Justifica essa afirmação pelo fato do prêmio pelo risco ser um múltiplo da volatilidade da taxa de juros. Modelos que conseguem ser consistentes tanto em cortes seccionais como em séries temporais terão poder de previsão muito maior que os demais. Cita também que modelos multifatoriais não conseguem reproduzir satisfatoriamente o comportamento das taxas de juros de prazos mais longos. O autor apresenta uma nova classe, denominada de “essencialmente afins”<sup>11</sup> que retém a aderência do modelo usual, mas que permite que a compensação do risco da taxa de juros varie de forma independente da volatilidade da taxa. Seus resultados sugerem que os modelos completamente afins possuem poder preditivo menor que os modelos essencialmente afins proposto por ele.

De Jong (2000) realiza um estudo da ETTJ americana utilizando o modelo proposto por Duffie e Kan (1999), comparando as estimativas geradas para 1, 2 e três fatores. Diferentemente do proposto por Dai e Singleton (1997), o autor propõe utilizar mais taxas de juros que fatores do modelo e argumenta que dessa maneira, é possível identificar todos os parâmetros do modelo, incluindo o *market price of risk*. Os resultados obtidos revelam que o modelo de 1 fator é mal especificado e com forte correlação serial dos erros. Já o modelo de dois fatores melhora significativamente os resultados, porém a calibração da parte inicial da curva não foi satisfatório. O modelo de três fatores obteve os melhores resultados, e explica que se deve ao fato de cada um dos fatores se relacionarem respectivamente com o nível, curvatura e inclinação da curva.

Cassola e Luis (2001) apresentam um estudo com base no modelo proposto por Duffie e Kan (1999) de dois fatores com volatilidade constante, utilizando como amostra a ETTJ alemã. As simulações foram feitas com o Filtro de Kalman, e os parâmetros obtidos a partir da função de máxima verossimilhança, para então

---

<sup>11</sup>. *Esse conceito não será abordado nesse trabalho. Caso o leitor queira se aprofundar no tema consulte "Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models", Duffee, G.R, 2002.*



realizar previsões da estrutura a termo. Seu trabalho alerta para o cuidado em usar modelos de 3 fatores, no caso em que a volatilidade seja um dos fatores a serem estimados pois, assumindo que essa variável seja também estocástica, deve-se ter a precaução de garantir que seu valor seja sempre positivos, além de tornar mais difícil a estimação dos parâmetros do modelo.

Theoret, Rostan e Moussadek (2002) apresentam uma maneira de estimar a taxa de juros canadense utilizando o Filtro de Kalman estendido acoplado ao modelo de Fong & Vasicek<sup>12</sup> de dois fatores. Para obter os parâmetros do modelo, utilizaram dois métodos, maximização da função de verossimilhança e pelo método dos momentos quando o primeiro não convergia. A proposta do artigo foi de obter os valores da volatilidade (parâmetro não observado) da taxa de juros e testar a qualidade preditiva desse modelo.

Diebold e Li (2002) utilizam o modelo Nelson-Siegel (1987) para previsão da ETTJ, obtendo os parâmetros a partir do modelo Auto-regressivo. Poucos trabalhos até então focaram em testar a qualidade de previsão dos modelos de taxas de juros. De posse dos resultados, os autores discordam do fato que modelos livres de arbitragem são melhores que os demais em termos de qualidade de previsão, visto que o modelo proposto não é livre de arbitragem, e mesmo assim produziu bons resultados.

De Rossi (2003) propõe um modelo que, diferentemente dos estudos citados anteriormente, lida com os modelos estatísticos e não arbitragem simultaneamente, acoplando uma variante do Modelo Nelson-Siegel de cinco fatores com o modelo de Hull e White<sup>13</sup> (1994) de dois fatores, a fim de obter um modelo que tenha sucesso em replicar tanto a dinâmica temporal da estrutura a termo da taxa de juros quanto a estrutura vigente. O modelo proposto adiciona maior flexibilidade para a forma analítica da equação de medição, pois a equação de medição é dependente do *Market price of risk*<sup>14</sup>. A escolha do modelo de Hull White permite que a função de

---

<sup>12</sup> O modelo Fong& Vasicek modela a dinamica da taxa de juros considerando a volatilidade instantânea como segundo fator do modelo.

<sup>13</sup> O modelo Hull-White de dois fatores foi divulgado em "A Numerical procedures for implementing term structure models II: Two Factor Models", Hull, A; White, The Journal of Derivatives, 1994. Esse modelo tem como um dos fatores a taxa media de longo prazo.

<sup>14</sup> *Market price of risk* é o premio exigido pelos investidores para aplicar em títulos de renda fixa remunerados por uma taxa que não seja livre de risco.

máxima verossimilhança tenha fórmula fechada, facilitando a obtenção dos parâmetros do modelo. Os resultados foram obtidos a partir da curva de juros do Reino Unido e geraram um desempenho satisfatório com desvio padrão do erro de medição baixo.

Chatterjee (2004) modela a estrutura a termo dos *euro bonds* durante o período de 1999-2003, utilizando o Modelo CIR de 1 fator e obtendo seus parâmetros via Filtro de Kalman e quasi-verossimilhança. Os resultados apontam que a taxa de juros instantânea exibe comportamento de reversão a média tanto para a taxa alemã como para a taxa do reino unido.

Christoffersen e Dorion (2012) utilizam o Filtro de Kalman não linear em modelos afim da ETTJ com resultados que demonstram que o uso dessa ferramenta produz melhores resultados para a estimação da estrutura a termo.

No Brasil, Ribeiro (2010), caracteriza a curva de juros mensais através de três fatores, comparando dois tipos de modelos de estimação: formato de Espaço de Estados utilizando o Filtro de Kalman e Mínimos Quadrados em dois estágios<sup>15</sup>. A autora destaca o estudo das taxa de juros e da previsão de seu comportamento como sendo importante ferramenta de análise econômica. Seu argumento é baseado no fato de que, além de refletir os preços que os agentes devem pagar para transferir consumo futuro em consumo corrente, também caracterizam a expectativa desses agentes em relação ao comportamento das taxas de juros de curto prazo. Para gerar a curva de juros, foi utilizado o Modelo Nelson-Siegel (1987). A autora cita Diebold, Rudebusch e Arouba (2006), que afirmam que a estimação em 1 estágio possui a vantagem de conseguir levar em conta toda a incerteza associada a estimação dos parâmetros de uma única vez. Os resultados obtidos concluem que o Filtro de Kalman em um único estágio tem melhor qualidade de previsão do que o método dos mínimos quadrados em dois estágios.

Schoof (2011), realiza estudo no mercado brasileiro utilizando o clássico Modelo Vasicek de 1 fator para fornecer previsões da curva de juros local com base nas

---

<sup>15</sup> Estimação em 1 estágio obtém os parâmetros estimando de forma simultânea as equações de transição e observação enquanto que a estimação feita em dois estágios separa o processo de estimação realizando primeiro para a equação de observação e depois para a equação de transição.

taxas *swap* Pré x DI da BMFBovespa. Para tal objetivo, primeiro são estimados os parâmetros do modelo de forma a reproduzir a curva de juros atual, fazendo uso da técnica dos mínimos quadrados e algoritmos genéticos. Definidos esses parâmetros, é feita a previsão 1 passo a frente com base no modelo autoregressivo de ordem 1 (AR(1)) de duas formas diferentes: estimando os parâmetros do modelo Vasicek e as taxas de juros diretamente. Os resultados foram obtidos através de uma estratégia de investimento comparando a rentabilidade gerada pelos dois modelos. Conclui-se nesse trabalho que a estimação dos parâmetros do modelo Vasicek possui qualidade preditiva inferior ao obtido com a regressão feita na própria taxa.

Morita (2007) estuda a dinâmica da curva de juros de mercados emergentes que indica a existência de um fator global de nível e de curvatura no modelo da curva de mercados emergentes. O trabalho é baseado no modelo de Diebold, Li e Yue (2006), uma extensão do modelo Nelson Siegel (1987) com a estimação dos parâmetros feita através do Filtro de Kalman.

Cavalcanti A. (2011) estuda diversas combinações de modelo de previsão da estrutura a termo, como o passeio aleatório, modelo Auto Regressivo uni variado, Vetor Auto Regressivo e Nelson-Siegel acoplado ao Filtro de Kalman. Conclui-se que não é possível encontrar um único modelo que consistentemente produza menor erro de previsão, assim a proposta desse trabalho se baseia em juntar as previsões de diversos modelos obtendo resultados que comprovam que a combinação desses modelos aumenta o poder preditivo.

Cavalcanti Jr. (2013), apresenta um trabalho com foco em uma estratégia de investimento das taxas de juros, utilizando o Filtro de Kalman para a estimação dos parâmetros do Modelo Nelson Siegel. Otimizando o portfólio através da abordagem de alocação por média-variância proposta por Markowitz (1952), os resultados obtidos foram positivos, mas destaca que o custo de transação é um importante parâmetro a ser levado em conta na análise.

Dentro do contexto dos trabalhos apresentados nesse capítulo, a proposta dessa dissertação é ir adiante à linha de pesquisa de Schoof (2011), utilizando o Modelo Vasicek de 2 fatores com o Filtro de Kalman. Acreditamos que o uso do modelo com mais fatores apresente resultados superiores comparados aos obtidos com o modelo

unifatorial, haja vista os resultados de De Jong (2000) e Babbs e Nowman (1999). Além disso, espera-se que o uso do Filtro de Kalman como ferramenta para estimação dos parâmetros do modelo também possa refinar o modelo no sentido de capturar melhor a dinâmica da estrutura a termo das taxas de juros.

### **3. Fundamentação Teórica**

Este capítulo faz uma revisão dos principais conceitos a serem abordados neste trabalho. Inicialmente, apresentamos o conceito da estrutura a termo da taxa de juros, seguindo para a revisão do Modelo Vasicek. O capítulo prossegue com a descrição do Modelo de Espaço de Estados e sua ligação com o Filtro de Kalman, utilizados para gerar a previsão da estrutura a termo. Finalmente, apresentamos o Vetor Auto-regressivo e seu caso particular de ordem 1, do qual seus resultados serão comparados ao modelo proposto para verificar sua eficácia.

#### **3.1 Estrutura a Termo da Taxa de Juros**

Segundo Cavalcanti A. (2011), a ETTJ é uma função que associa uma única taxa de juros para cada maturidade de um mesmo tipo de ativo de renda fixa. Théoret, Rostan e Moussadek (2002) citam que o estudo da ETTJ é importante, pois é considerado um bom indicador da atividade econômica. Day e Lange (1997) demonstraram que a inclinação da estrutura a termo de 1 a 5 anos é razoavelmente um bom parâmetro para previsão das mudanças futuras da inflação de um determinado país nesse mesmo período.

O Banco Central do Brasil (BCB) tem o papel de definir a taxa de juros de curto prazo e as diretrizes da política monetária, o que acontece a cada 45 dias no Comitê de Política Monetária (COPOM), com o objetivo de cumprir as metas para a inflação definidas pelo Conselho Monetário Nacional e, através desse mecanismo, o BCB tenta manter o controle da demanda agregada, arbitrando o custo de oportunidade, interferindo nas decisões de investimento e de financiamento no curto e longo prazo.

Dessa forma a ETTJ é composta, entre outras variáveis, pelas expectativas dos agentes de mercado com relação às decisões futuras do BCB sobre a taxa de juros de curto prazo e os reflexos do atual nível da taxa sobre a economia no longo prazo.

A construção da ETTJ é feita indiretamente através das taxas médias utilizadas para compor o preço das operações de compra e venda de títulos ou derivativos de renda fixa. No mercado brasileiro, os instrumentos utilizados para essa composição podem ser os títulos do governo brasileiro. Alternativamente, a ETTJ pode ser também

construída a partir dos Contratos Futuros de taxas de juros, derivativos atrelados ao depósito interbancário (DI), listados na BMFBovespa.

### 3.2 Modelo Vasicek

Antes de apresentar o Modelo Vasicek, é conveniente expor alguns conceitos sobre a taxa de juros instantânea para situar a necessidade de modelar sua dinâmica.

Definimos um título de valor  $Z(t, T)$  *zero coupon* no instante  $t$ , como um investimento que paga 1 unidade monetária em  $T$ , sendo  $t \leq T$ . Seu valor é calculado com base em uma taxa de desconto  $y_t$  conforme abaixo:

$$Z(t, T) = 1 * e^{-y_t(T-t)} \quad (1)$$

O que encontramos no mundo real de fato são os preços dos títulos de renda fixa, logo, manipulando a equação (1), a taxa de juros  $y_t$  para um título *zero coupon* é calculada por:

$$\begin{aligned} \ln Z(t, T) &= \ln e^{-y_t(T-t)} \\ \ln Z(t, T) &= -y_t(T-t) \\ y_t &= -\frac{\ln Z(t, T)}{(T-t)} \end{aligned} \quad (2)$$

Da equação (2) verifica-se que é possível obter a taxa de juros de qualquer período à frente com base nos preços dos títulos disponíveis no mercado, sendo dessa maneira que a ETTJ é construída.

A taxa de juros instantânea é definida como a taxa no qual o investidor, ao emprestar dinheiro, é remunerado em um período infinitesimal de tempo. Partindo da equação (2) da taxa de desconto  $y_t$ , calculada a partir de um título de renda fixa que vence em  $T$ , a taxa de juros instantânea é definida abaixo:

$$\begin{aligned} y_t &= -\frac{\ln Z(t, T)}{(T-t)} \\ \lim_{T \rightarrow t} y_t &= -\lim_{T \rightarrow t} \frac{\ln Z(t, T)}{(T-t)} \end{aligned}$$

Associando a taxa de juros instantânea à variável  $r_t$ , onde  $r_t = \lim_{T \rightarrow t} y_t$  temos que:

$$r_t = -\lim_{T \rightarrow t} \frac{\ln Z(t, T)}{(T - t)} = -\frac{\partial \ln Z(t, T)}{\partial T}$$

Na modelagem de renda fixa,  $r_t$  é definida como uma variável aleatória, e sendo assim, não é possível prever seu real curso ao longo do tempo. Da mesma maneira, é possível apenas estimar qual será o real valor de um título de renda fixa em um dado instante à frente (desde que esse instante seja menor ou igual ao seu vencimento). Partindo dessas definições, os modelos de renda fixa foram desenvolvidos com o objetivo de estimar a dinâmica da taxa de juros.

O Modelo Vasicek faz parte da família dos modelos de equilíbrio, sendo o primeiro a modelar a dinâmica da taxa de juros como um processo estocástico. Apresentado na década de 70, é praticamente a base estrutural para todos os demais modelos que surgiram posteriormente. Outros exemplos dessa classe de modelos são: o clássico modelo de Cox-Ingersoll-Ross (1985), Brennan Schwartz (1979), Fong-Vasicek (1992) e Longstaff-Schwartz (1992).

A formulação proposta pelo Modelo Vasicek que descreve a dinâmica da taxa de juros é baseada na seguinte equação:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (3)$$

Onde:

- $\kappa$  : velocidade de reversão à média
- $\theta$  : taxa de juros de longo prazo.
- $r_t$  : *short rate* ou taxa de juros instantânea.
- $\sigma$  : volatilidade da taxa de juros instantânea.
- $dW_t$  : processo de Wiener.

Conforme a equação (3), a taxa de juros instantânea varia no tempo em torno de uma taxa média de longo prazo  $\theta$ , caracterizada como o nível de reversão. Essa característica é explicada por argumentos econômicos, visto que em momentos de taxas de juros mais baixas, a demanda por empréstimos aumenta causando

aumento das taxas. Movimento contrário ocorre quando as taxas de juros estão altas, em que a economia tende a desacelerar.

Considerando um título de renda fixa de valor  $Z(t, T)$  definido em (1), é possível determinar a equação do preço de um título de renda fixa utilizando argumentos similares aos usados na equação de Black&Scholes (1973). No anexo 1 estão todas as deduções para chegar na equação diferencial parcial do preço de um título de renda fixa conforme abaixo:

$$\frac{\partial Z(t, T)}{\partial t} + \kappa(\theta - r_t) \frac{\partial Z(t, T)}{\partial r_t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 Z(t, T)}{\partial r_t^2} - r_t Z(t, T) = 0 \quad (4)$$

Uma solução para a equação (4) é proposta abaixo:

$$Z(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r_t} \quad (5)$$

Onde  $A(t, T)$  e  $B(t, T)$  são dados por:

$$B(t, T) = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \quad (6)$$

$$A(t, T) = \frac{\gamma(B(t, T) - (T - t))}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4\kappa} \quad (7)$$

$\gamma$  e  $\lambda$  são definidos por:

$$\gamma = \kappa^2 \left( \theta - \frac{\sigma \lambda}{\kappa} \right) - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\lambda = \frac{\mu - r_t}{\sigma}$$

sendo  $\lambda$  o *market price of risk*<sup>16</sup>, que pode ser interpretado como sendo o excesso de retorno exigido pelo investidor para adquirir ativos de risco.

Por último, para calcularmos as taxas teóricas a partir da taxa instantânea, basta igualar (1) com (5):

$$y_t = -\frac{A(t, T)}{T - t} + \frac{B(t, T)}{T - t} r_t \quad (8)$$

---

<sup>16</sup> A dedução do *Market price of risk* também está disponível no anexo 1



### Modelo Vasicek Generalizado Multifatorial

O Modelo Vasicek Generalizado assume que a taxa de juros instantânea  $r_t$ , é dada por uma combinação linear de  $n$  variáveis de estado (ou fatores) correlacionadas quaisquer dadas por  $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n)}$  do vetor  $\mathbf{x}_t$  conforme a equação abaixo:

$$r_t = \sum_{i=1}^n x_t^{(i)} \quad (9)$$

Assumindo que cada fator  $x_t^{(i)}$ , com  $i = 1, \dots, n$ , do vetor  $\mathbf{x}_t$  que compõem a taxa de juros instantânea são regidos por uma série de equações estocásticas, seguindo um processo de Ornstein-Uhlenbeck (1930), podemos definir sua dinâmica por:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{\beta} - \mathbf{x}_t)dt + \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Theta}d\mathbf{w}_t \quad (10)$$

Sendo

$\mathbf{\Lambda}_{[n \times n]}$  : matriz composta dos escalares  $\alpha^{(i)}$ , com  $i = 1, \dots, n$  que representam a velocidade de reversão a média dos  $n$  fatores que constituem a taxa de juros instantânea.

$\mathbf{\beta}$  : vetor das variáveis de equilíbrio  $\beta^{(i)}$ , no qual a matriz de velocidade de reversão a média  $\mathbf{\Lambda}$  tende a convergir.

$\mathbf{w}_t$  : vetor com variáveis que seguem um processo de difusão.

$\mathbf{\Sigma}_{[n \times n]}$  : Matriz de correlação do processo de difusão.

$\mathbf{\Theta}_{[n \times n]}$  : Matriz de covariância composto pelos escalares  $\sigma^{(i,j)}$  com  $i = j = 1, \dots, n$  dos fatores que compõem a taxa de juros instantânea.

A equação (10) propõe que cada fator da taxa de juros instantânea se movimenta a partir de uma função que representa o *drift* do movimento mais um coeficiente de difusão, representado pela covariância. Além disso, os fatores que compõem o vetor  $\mathbf{x}_t$  se relacionam através da correlação entre os termos de difusão. No entanto, este trabalho, se baseia na pesquisa feita por De Jong (2000), no qual o autor faz algumas parametrizações para que os parâmetros do modelo sejam identificados. Seguindo o mesmo raciocínio, definimos as matrizes  $\mathbf{\Sigma}$  e  $\mathbf{\Lambda}$  pra que sejam diagonais, portanto:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^{(2)} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha^{(n)} \end{bmatrix}$$

É possível verificar a partir de (10) que o Modelo Vasicek Generalizado multifatorial<sup>17</sup> se trata de uma extensão do modelo unifatorial. Sendo assim, apresentamos o resultado final da equação diferencial parcial, considerando a taxa de juros instantânea composta de  $n$  fatores, do preço de um título de renda fixa com vencimento em  $T$ :

$$\frac{\partial Z(t, T)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \alpha^{(i)} (\beta^{(i)} - x_t^{(i)}) \frac{\partial Z(t, T)}{\partial x_t^{(i)}} + \frac{(\sigma^{(i)})^2}{2} \frac{\partial^2 Z(t, T)}{\partial (x_t^{(i)})^2} - \sum_{i=1}^n x_t^{(i)} Z(t, T) = 0 \quad (11)$$

Com uma pequena mudança na notação definimos  $Z(t, T) = Z(\tau)$  e  $\tau = T - t$ , sendo  $t$  o instante atual. Uma possível solução para equação (11) é dada pela equação abaixo:

$$Z(\tau) = e^{\sum_{i=1}^n A^{(i)}(\tau) - \sum_{i=1}^n B^{(i)}(\tau) x_t^{(i)}} \quad (12)$$

Os parâmetros  $A^{(i)}(\tau)$  e  $B^{(i)}(\tau)$  são obtidos a partir de (11) e possuem estrutura similar a (6) e (7) conforme apresentado abaixo:

$$A^{(i)}(\tau) = \gamma^{(i)} \left( \frac{B^{(i)}(\tau) - \tau}{\alpha^{(i)2}} \right) - \frac{B^{(i)}(\tau) (\sigma^{(i)})^2}{4\alpha^{(i)}} \quad (13)$$

$$B^{(i)}(\tau) = \frac{1}{\alpha^{(i)}} (1 - e^{-\alpha^{(i)} \tau}) \quad (14)$$

Onde novamente,  $\gamma^{(i)}$  e  $\lambda^{(i)}$  são definidos por:

$$\gamma^{(i)} = \alpha^{(i)2} \left( \beta^{(i)} - \frac{\sigma^{(i)} \lambda^{(i)}}{\alpha^{(i)}} \right) - \frac{(\sigma^{(i)})^2}{2}$$

$$\lambda^{(i)} = \frac{\mu^{(i)} - x_t^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$$

<sup>17</sup> A dedução completa para a definição dos parâmetros da equação diferencial parcial do modelo multifatorial pode ser encontrada em Bolder (2001).

Da mesma maneira que obtivemos (8), as taxas de juros teóricas são obtidas da forma:

$$y_t = - \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}(\tau)}{\tau} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{B^{(i)}(\tau)}{\tau} x_t^{(i)} \right) \quad (15)$$

Com base na estrutura das equações acima, é possível notar que os parâmetros que definem o preço de um título de renda fixa no modelo unifatorial, continuam os mesmos no modelo multifatorial, a única diferença é que esses parâmetros se relacionam com as variáveis de estado que compõem a taxa de juros instantânea ao invés da própria taxa.

### 3.3 Filtro de Kalman

Mergner (2009) descreve o Filtro de Kalman (1960) como sendo um algoritmo que computa estimativas das variáveis não observáveis no instante  $t$ , baseado nas informações disponíveis nesse instante. Esse algoritmo pode ser usado tanto para “filtrar” o sinal, removendo a parcela randômica (ruído) que se mistura ao parâmetro não observado, como para inferir previsões em cima desses parâmetros.

O Filtro de Kalman se baseia na estrutura do sistema de equações dos Modelos de Espaço de Estados. Originalmente concebido para modelos lineares gaussianos, outras variantes do algoritmo, como o Filtro de Kalman Estendido, por exemplo, foram desenvolvidos para que possam ser utilizados também para estimar parâmetros em que a distribuição dos ruídos não seja normal.

Antes de detalhar o funcionamento do algoritmo do Filtro de Kalman, é necessário introduzir o conceito do Modelo de Espaço de Estados, pois é com base nesse conceito que o algoritmo é construído.

### Modelos de Espaço de Estado

Durbin e Koopman (1996) descrevem a modelagem de Espaço de Estado como uma metodologia unificada, que torna possível o tratamento de uma gama de problemas em análise de séries temporais. O Modelo de Espaço de Estados, também conhecido como Representação de Espaço de Estados, oferece qualidades atrativas

por ser um modelo genérico, flexível e transparente, e ainda possui a grande vantagem de conseguir lidar bem com sistemas de múltiplas variáveis (Mergner, Sascha 2009). O propósito principal da análise dos modelos de Espaço de Estado é inferir as propriedades relevantes dos parâmetros não observados a partir do comportamento dos parâmetros observáveis. Isso é possível assumindo que toda informação do passado esta contida no estado atual do processo e sendo assim, é possível realizar previsões dos parâmetros observados desde que seja possível inferir o atual estado dos parâmetros não observados.

Os modelos de Espaço de Estado lineares são regidos por duas equações básicas

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{D} + \mathbf{O}\mathbf{q}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t \quad \boldsymbol{\epsilon}_t \sim N(0, \mathbf{R}) \quad (16)$$

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{J} + \mathbf{M}\mathbf{q}_{t-1} + \boldsymbol{\gamma}_t \quad \boldsymbol{\gamma}_t \sim N(0, \mathbf{Q}) \quad (17)$$

No qual  $\mathbf{g}_t$  é chamado de vetor de observação, regido pela equação de observação,  $\mathbf{q}_t$  é o vetor associado aos parâmetros não observados, denominado como vetor de estados. O princípio básico é que o sistema descrito pelas equações (16) e (17) varie de acordo com o vetor  $\mathbf{q}_t$ , mas como esse vetor não pode ser observado, a análise do sistema deve ser feita com base nas variáveis observáveis  $\mathbf{g}_t$ . Assume-se que as matrizes  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{M}$  são inicialmente conhecidas e descrevem o comportamento do sistema. Além disso, ambos os vetores de erros  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  e  $\boldsymbol{\gamma}_t$  são gaussianos, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d). A equação (16) possui a estrutura de um modelo de regressão simples onde  $\mathbf{g}_t$  varia no tempo e a equação (17) é representada por um vetor auto regressivo de ordem 1.

### O algoritmo do Filtro de Kalman

O algoritmo do Filtro de Kalman caminha de forma recursiva, consistindo de um conjunto de equações matemáticas que, de forma geral, estimam de maneira ótima os parâmetros não observados em um instante  $t$  qualquer, a partir dos parâmetros observados minimizando o erro relacionado à medição dessa variável. O algoritmo se baseia na estrutura do Modelo de Espaço de Estados e, basicamente, funciona produzindo a cada passo estimativas ótimas da média e covariância da distribuição

condicional do vetor das variáveis de estados, conforme novas informações são incorporadas pelo sistema.

As premissas que garantem que o Filtro de Kalman produza estimadores ótimos são as seguintes:

- 1) A perturbação dos parâmetros estimados (ruídos) segue uma distribuição Normal com media igual a zero e variância definida de forma genérica  $\vartheta$ .
- 2) Os ruídos não são correlacionados entre si e em qualquer instante de tempo.
- 3) Os valores iniciais são conhecidos.

Para explicar a dinâmica e o funcionamento do Filtro de Kalman, necessitamos dos sistema de equações dado por (16) e (17) no formato de Espaço de Estados.

Considerando um modelo de Espaço de Estados gaussianos, definimos nas equações (16) e (17) que o vetor  $\mathbf{g}_t$  tem distribuição Normal com média  $\hat{\mathbf{g}}_t$  e matriz de covariância  $\mathbf{S}_t$ ,  $\mathbf{q}_t$  também segue uma distribuição Normal, possuindo média  $\hat{\mathbf{q}}_t$  e matriz de covariância  $\mathbf{P}_t$ . Supondo essas premissas verdadeiras, o algoritmo do Filtro de Kalman age de forma a produzir estimativas ótimas dessas variáveis. O processo de geração dessas estimativas pode ser dividido em três fases: Predição, Inovação e Atualização. A Figura 1 abaixo apresenta a sequência das fases do algoritmo, apresentando para cada fase, os parâmetros que serão atualizados:

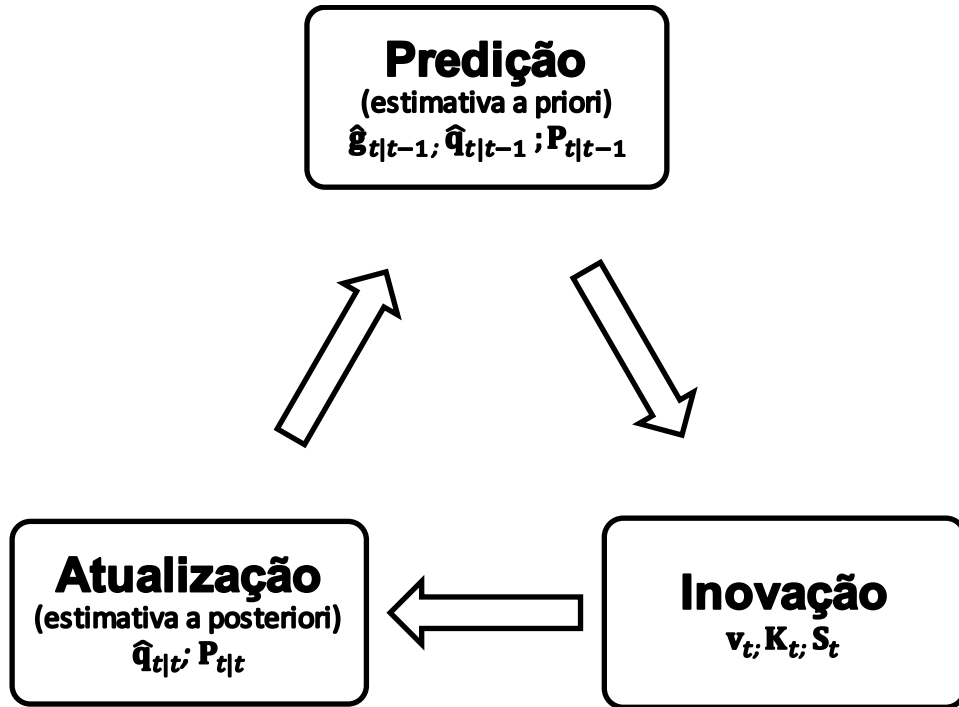


Figura 1 Processo iterativo do Filtro de Kalman

### Fase de Predição (estimativa a priori)

O primeiro passo do algoritmo é a fase de predição. Com base nas informações do passo anterior, o Filtro de Kalman estima os parâmetros do passo seguinte. Nessa fase, estimam-se os vetores  $\hat{\mathbf{q}}_t, \mathbf{M}_{t|t-1}$  e  $\hat{\mathbf{g}}_{t|t-1}$  com base em toda a informação disponível em  $t - 1$ .

$$\hat{\mathbf{q}}_{t|t-1} = \mathbf{J} + \mathbf{M}\hat{\mathbf{q}}_{t-1} \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}\mathbf{M}^T + \mathbf{Q} \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{g}}_{t|t-1} = \mathbf{D} + \mathbf{O}\hat{\mathbf{q}}_{t|t-1} \quad (20)$$

### Fase de Inovação

Na fase de inovação o algoritmo calcula o erro de medição  $\mathbf{v}_t$  (diferença entre a variável real observada no instante  $t$  e sua estimativa realizada em  $t - 1$ ) e atualiza a matriz da covariância  $\mathbf{S}_t$  para enfim calcular o ganho de Kalman, que tem como objetivo minimizar o erro quadrático médio da medição.

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{g}_t - (\mathbf{D} + \mathbf{O}\hat{\mathbf{q}}_{t|t-1}) \quad (21)$$

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{O}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{O}^T + \mathbf{R} \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{M}^T \mathbf{S}_t^{-1} \quad (23)$$

### Fase de Atualização (estimativa a posteriori)

Finalizado a fase de inovação, o vetor das médias das variáveis de estado e sua matriz de covariância são atualizados com base no passo anterior (fase da inovação), iniciando outro ciclo e retornando a fase de predição novamente.

$$\hat{\mathbf{q}}_{t|t} = \hat{\mathbf{q}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{v}_t \quad (24)$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{M}) \mathbf{P}_{t|t-1} \quad (25)$$

Onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

### 3.4 Vetor Auto regressivo

O Vetor Auto-regressivo é um modelo estatístico que captura a interdependência linear entre múltiplas séries de tempo. É uma generalização do modelo univariado de Auto-regressão (AR). Nesse modelo, cada variável tem sua equação que explica o comportamento da variável baseados em seus próprios *lags* e das demais variáveis. Uma qualidade interessante desse modelo é que o prévio conhecimento sobre os fatores que influenciam a variável estimada não é necessário.

### Metodologia de estimação das séries temporais

Assumindo um conjunto  $\zeta_t$  de  $K$  variáveis em um dado instante  $t$  representada por:

$$\zeta_t := (\zeta_{1,t}, \zeta_{2,t}, \dots, \zeta_{K,t}) \quad (26)$$

Conforme Lutkepohl (2005), o modelo VAR de ordem  $p$  para estimar  $K$  variáveis é regido pela seguinte equação:

$$\zeta_t = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Phi}_1 \zeta_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \zeta_{t-p} + \boldsymbol{\varphi}_t \quad (27)$$

onde:

$\zeta_t$  : vetor composto de  $K$  variáveis no instante  $t$

$\boldsymbol{\eta}$  : vetor dos interceptos da equação.

$\boldsymbol{\Phi}_i$  : Matriz dos coeficientes da equação do vetor  $\zeta_t$  com  $i = 1, \dots, p$

$\boldsymbol{\varphi}_t$  : vetor de ruído branco ou processo de inovação

A estrutura apresentada acima para o modelo de vetores auto regressivos, descreve a evolução de  $K$  variáveis, sendo uma função linear dos  $p$  estados anteriores dessas mesmas  $K$  variáveis.

Para realizar a regressão é necessário estimar o vetor de interceptos e os coeficientes da matriz  $\boldsymbol{\Phi}_i$  da equação (27). Vários métodos podem ser utilizados para essa finalidade, dos quais escolhemos utilizar a esperança matemática do parâmetro estimado.

### Estimação dos coeficientes da equação

Iremos demonstrar abaixo uma forma de estimar os coeficientes de forma a minimizar o erro quadrático médio.

Assumindo uma amostra de tamanho  $L$  dada por  $\boldsymbol{\zeta}_1, \dots, \boldsymbol{\zeta}_L$  do vetor  $\boldsymbol{\zeta}_t$  com  $K$  variáveis todas no mesmo período. Da mesma maneira, assumimos que esteja disponível uma pré amostra dessas mesmas variáveis deslocadas de 1 período para trás. De forma a tornar mais fácil a demonstração do estimador ótimo, definimos as seguintes matrizes abaixo:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Omega}_{|K \times L|} &:= (\boldsymbol{\zeta}_1, \dots, \boldsymbol{\zeta}_L) && : \text{matriz das amostras da variável a ser estimada} \\
 &&& \text{com } K \text{ variáveis de tamanho } L \\
 \boldsymbol{\Psi}_{|K \times (Kp+1)|} &:= (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Phi}_1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_p) && : \text{matriz dos interceptos e coeficientes das} \\
 &&& \text{matrizes } \boldsymbol{\Phi}_i \\
 \mathbf{0}_{t|[(Kp+1) \times 1]} &:= (1, \boldsymbol{\zeta}_t, \dots, \boldsymbol{\zeta}_{t-p+1}) && : \text{matriz auxiliar contendo a amostra no instante } t \\
 &&& \text{da variável } \boldsymbol{\zeta} \\
 \boldsymbol{\Theta}_{|(Kp+1) \times L|} &:= (\mathbf{0}_0, \dots, \mathbf{0}_{L-1}) && : \text{matriz das } K \text{ variáveis no instante } t - 1 \\
 \boldsymbol{\Psi}_{|K \times L|} &:= (\boldsymbol{\varphi}_0, \dots, \boldsymbol{\varphi}_L) && : \text{matriz do ruído branco ou processo de inovação.}
 \end{aligned}$$

Com base nas definições das matrizes acima, a equação (27) na forma compacta fica:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\psi} \quad (28)$$



A demonstração abaixo foi feita utilizando a esperança matemática<sup>18</sup> da matriz  $\Omega$ . Para estimar o coeficiente ótimo, considere (28) no qual será tomada base na informação disponível no instante  $t$ :

$$\zeta_t = \Psi \mathbf{o}_{t-1} + \psi \quad (29)$$

Multiplicando os dois lados de (29) por  $\mathbf{o}_{t-1}^T$  e calculando a esperança matemática temos:

$$E(\zeta_t \mathbf{o}_{t-1}^T) = \Psi E(\mathbf{o}_{t-1} \mathbf{o}_{t-1}^T)$$

Estimando  $E(\zeta_t \mathbf{o}_{t-1}^T)$  e  $E(\mathbf{o}_{t-1} \mathbf{o}_{t-1}^T)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \zeta_t \mathbf{o}_{t-1}^T &= \frac{1}{L} \Omega \Theta^T \\ \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{o}_{t-1} \mathbf{o}_{t-1}^T &= \frac{1}{L} \Theta \Theta^T \end{aligned}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \Omega \Theta^T &= \hat{\Psi} \frac{1}{L} \Theta \Theta^T \\ \hat{\Psi} &= \Omega \Theta^T (\Theta \Theta^T)^{-1} \end{aligned} \quad (30)$$

Da equação (30) definimos o estimador ótimo  $\hat{\Psi}$  do vetor Auto regressivo de ordem  $p$  que minimiza o erro quadrático médio. A matriz  $\hat{\Psi}$  será usada posteriormente como gerador de estimativas das taxas de juros.

Até este ponto, foram expostos os principais conceitos e modelos pertinentes para o desenvolvimento desse trabalho, introduzindo com os conceitos da estrutura a termo de taxas de juros para posteriormente apresentar o Modelo Vasicek Generalizado e a estrutura do algoritmo do Filtro de Kalman. Por último, abordamos o Vetor Auto-regressivo que terá seus resultados como base de comparação com o obtido pelo Filtro de Kalman aplicado ao Modelo Vasicek Generalizado. O capítulo seguinte detalha a metodologia proposta neste trabalho, indicando como os conceitos aqui

---

<sup>18</sup> O método mais comum para estimar os parâmetros é por mínimos quadrados. Lutkepohl (2005), demonstra que o resultado via esperança matemática e o método dos mínimos quadrados são equivalentes.

abordados são conectados no sentido de verificar a eficiência da aplicação do Filtro de Kalman ao Modelo Vasicek Generalizado quando comparado com o Vetor Auto-regressivo de ordem 1.

## 4. Metodologia e aplicação dos modelos

Este capítulo apresenta a metodologia empregada para e os detalhes dos algoritmos desenvolvidos para a obtenção dos resultados. Primeiramente introduzimos um resumo do instrumento encontrado no mercado brasileiro de juros futuros, objeto da simulação. A seguir, aproveitamos os conceitos do capítulo 3 para contextualizar a proposta de trabalho já em seu caso particular, que é testar a qualidade do poder de previsão do Filtro de Kalman aplicado ao Modelo Vasicek Generalizado de dois fatores (FKMV2 daqui para frente) , no qual foi desenvolvido um processo que gera estimativas das taxas de juros para um determinado período a frente. Seguindo a mesma linha usada para o FKMV2, apresentamos também a abordagem usada para a simulação feita com base no modelo auto regressivo de ordem 1 (iremos também abreviar utilizando a sigla – VAR(1)), que será o *benchmark* para comparação dos resultados.

As previsões a cerca das taxas de juros geradas pelos dois modelos serão utilizados em uma estratégia de investimento que se baseará nas previsões fornecidas pelos modelos utilizados. Para implementar a estratégia de investimento, foi desenvolvido um algoritmo no software MatLab®, que estima os parâmetros ótimos dos modelos para fornecer estimativas consistentes das taxas juros.

O estudo será realizado com base nas taxas de juros de um total de 10 vértices fixos (em dias úteis): 1, 21, 63, 126, 252, 378, 504, 756, 1260, 1764. Que serão denotados por  $T_1, T_2, \dots, T_{10}$  respectivamente. As taxas de mercados foram obtidas a partir das taxas *swap* Pré x DI da BMFBovespa interpoladas pelo método *cubic spline* (detalhes desse método podem ser encontrados em diversas referencias como, por exemplo, Bartels, R. H.; Beatty, J. C.; e Barsky, B. A, 1998) que serão usadas para precificar os contratos futuros de DI, utilizados para simular o portfólio de renda fixa. A partir de agora, trataremos as variáveis e as equações já no formato discreto para ter uma relação direta com o algoritmo desenvolvido.

#### 4.1 Mercado de Contratos futuros de DI e as taxas Swaps Pré xDI

O DI ou Depósito interbancário, é a taxa referencial apurada com base nas operações de emissão de depósitos interfinanceiros pré-fixados, pactuados por 1 dia útil registradas e liquidadas na CETIP. Considerada por muitas instituições financeiras como a referência do custo de oportunidade, é comumente associada à taxa livre de risco. Os contratos futuros de DI são instrumentos derivativos que na teoria replicam a expectativa futura dessa taxa, mas que na prática acabam sendo impactados por outros fatores na composição do seu preço (liquidez, prêmio de alongamento e etc). Instrumento utilizado com o objetivo de proteção de operações financeiras com risco de taxa de juros, o contrato futuro de DI nada mais é que um *swap* Pré x DI em que a ponta pré-fixada equivale a um título *zero coupon*, negociado a preço zero com valor futuro fixado em R\$100.000, em base de taxa composta ao ano (cada ano tendo 252 dias úteis). Para eliminar o risco de crédito, a BMFBovespa exige das contrapartes o pagamento de ajustes diários, além do depósito de margem de garantia. Por esses fatores, concluímos que as taxas *swap* seriam a melhor alternativa para o estudo proposto. Outra opção seria utilizar as taxas referenciais dos títulos do governo. Porém neste caso existe o risco de não pagamento do governo brasileiro, fato que não é explicitamente considerado no Modelo Vasicek.

#### 4.2 A estrutura a termo da taxa de juros e o Filtro de Kalman aplicado ao modelo de Vasicek

Aqui é apresentada a conexão entre a Representação em Espaço de Estados e o Modelo Vasicek Generalizado de dois fatores para que o algoritmo do Filtro de Kalman possa ser aplicável ao estudo proposto. Para que isso seja possível, utilizaremos a relação entre as taxas de juros do mercado e a taxa de juros instantânea.

##### Modelo de Vasicek Generalizado no formato de Espaço de Estados

Inicialmente é necessário definir os parâmetros das equações de estado e observação da Representação em Espaço de Estados conforme o conjunto de equações (16) e (17). Seguindo o modelo apresentado por De Jong (2000), o vetor das variáveis de observações será representado pelo conjunto de taxas de juros

teóricas, obtidas da relação entre essas taxas e os fatores que compõem a taxa de juros instantânea conforme a equação (15), enquanto que a equação de estados modelará a dinâmica dos fatores da taxa de juros instantânea na qual entraremos em mais detalhes depois.

### Equação de Observação

Conforme já discutido anteriormente, definimos as taxas de juros da ETTJ para representar as variáveis observadas, de forma que o vetor de observação seja composto pelas taxas de juros  $y(t_k, T_j)$  dos vértices  $T_j$  com  $j = 1, \dots, 10$  (utilizaremos de agora em diante a notação  $y(t_k, T_j)$  para identificar as taxas de juros do vértice  $j$  no instante  $k$ ). A partir de (15), a relação entre as variáveis do vetor de estado e o vetor dos fatores da taxa de juros instantânea, dados por  $x^{(1)}(t_k)$  e  $x^{(2)}(t_k)$  no instante  $k$ , fica então da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} y(t_k, T_1) \\ \vdots \\ y(t_k, T_{10}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 \frac{A^{(i)}(T_1)}{T_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^2 \frac{A^{(i)}(T_{10})}{T_{10}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{B^{(1)}(T_1)}{T_1} & \frac{B^{(2)}(T_1)}{T_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{B^{(1)}(T_{10})}{T_{10}} & \frac{B^{(2)}(T_{10})}{T_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)}(t_k) \\ x^{(2)}(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1(t_k) \\ \vdots \\ q_{10}(t_k) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$A^{(i)}(T)$  e  $B^{(i)}(T)$  com  $i = 1, 2$  são definidos conforme (13) e (14) respectivamente. Podemos também definir (31) na forma compacta:

$$\mathbf{y}_{t_k} = \mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{x}_{t_k} + \mathbf{q}_{t_k} \quad (32)$$

Onde:

$$\mathbf{y}_{t_k} = \begin{bmatrix} y(t_k, T_1) \\ \vdots \\ y(t_k, T_{10}) \end{bmatrix}, \mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 \frac{A^{(i)}(T_1)}{T_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^2 \frac{A^{(i)}(T_{10})}{T_{10}} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{B^{(1)}(T_1)}{T_1} & \frac{B^{(2)}(T_1)}{T_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{B^{(1)}(T_{10})}{T_{10}} & \frac{B^{(2)}(T_{10})}{T_{10}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{t_k} = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t_k) \\ x^{(2)}(t_k) \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{q}_{t_k} = \begin{bmatrix} q_1(t_k) \\ \vdots \\ q_{10}(t_k) \end{bmatrix}$$

O vetor  $\mathbf{e}_t$  dos erros de medição possui distribuição normal  $\sim N(0, \mathbf{R})$  com a matriz de covariância da forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (\iota^{(1)})^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\iota^{(2)})^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (\iota^{(10)})^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Com  $\iota^{(1)}$  a  $\iota^{(10)}$ , os desvios padrão dos erros.

### Equação de Estados

A equação de estados é composta pelos parâmetros não observados, que assumimos serem os fatores que compõem a taxa de juros instantânea do modelo Vasicek.

Para adequar a equação de estados à dinâmica dos fatores que compõem a taxa de juros instantânea, é necessário definir a matriz de covariância da variável de estado e uma equação que esteja no formato de regressão, para isso recorreremos ao valor esperado e variância definidos por Vasicek (1977) para o modelo unifatorial.

Supondo um fator da taxa de juros representado por  $x_t$ , no instante  $t$ , sendo  $t \geq s$ , o valor esperado e variância são dadas por:

$$E(x_t) = \beta + (x_s - \beta)e^{-\alpha(t-s)} \quad (34)$$

$$Var(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(t-s)}) \quad (35)$$

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros já definidos em (10).

Levando ao mundo discreto, o valor esperado  $E(x_t)$  será denotado por  $x(t_k)$  e definindo  $t - s = \Delta t$  na equação (34) temos então:

$$x(t_k) = \beta + x(t_{k-1})e^{-\alpha(\Delta t)} - \beta e^{-\alpha(\Delta t)}$$

E finalmente:

$$x(t_k) = \beta(1 - e^{-\alpha(\Delta t)}) + x(t_{k-1})e^{-\alpha(\Delta t)} \quad (36)$$

A equação (36) pode ser usada na equação de estados para representar a dinâmica de um dos fatores do Modelo Vasicek Generalizado. Considerando o modelo de dois

fatores no instante  $t_k$ , a forma matricial da equação de estados fica no seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} x^{(1)}(t_k) \\ x^{(2)}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^{(1)}(1 - e^{-\alpha^{(1)}\Delta t}) \\ \beta^{(2)}(1 - e^{-\alpha^{(2)}\Delta t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-\alpha^{(1)}\Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha^{(2)}\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)}(t_{k-1}) \\ x^{(2)}(t_{k-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Que representamos na forma compacta da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}_{t_k} = \mathbf{C} + \mathbf{F}\mathbf{x}_{t_{k-1}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t_k} \quad (38)$$

Onde:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta^{(1)}(1 - e^{-\alpha^{(1)}\Delta t}) \\ \beta^{(2)}(1 - e^{-\alpha^{(2)}\Delta t}) \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha^{(1)}\Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha^{(2)}\Delta t} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\varepsilon}_{t_k} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t_k}$  dos erros de estimação possui distribuição normal  $\sim N(0, \mathbf{Q})$  com  $\mathbf{Q}$  sendo composto da variância de  $\mathbf{x}_{t_k}$ , assim:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(1)}}{2\alpha^{(1)}}(1 - e^{-2\alpha^{(1)}\Delta t}) & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{2\alpha^{(2)}}(1 - e^{-2\alpha^{(2)}\Delta t}) \end{bmatrix} \quad (39)$$

### O Filtro de Kalman aplicado ao Modelo Vasicek

Apresentado o Modelo Vasicek no formato de Espaço de Estados, podemos enfim utilizar o Filtro de Kalman. Respeitando as premissas do modelo, esse algoritmo irá atuar de forma a produzir estimativas ótimas para os parâmetros desejados.

Os dados de entrada desse algoritmo são: amostra da variável de observação (histórico de taxas de juros), valores dos parâmetros do Modelo Vasicek e o valor inicial do vetor  $\mathbf{x}(t_0)$  dada por  $\hat{\mathbf{x}}_0$  e também da matriz de covariância  $\mathbf{P}_t$  dada por  $\mathbf{P}_0$ .

Supondo conhecidos os parâmetros do modelo dados por:

$$\boldsymbol{\beta}_0 = \begin{bmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} \\ \alpha^{(2)} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} \\ \sigma^{(2)} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} (t^{(1)})^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (t^{(2)})^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (t^{(10)})^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

De posse desses valores é possível calcular as matrizes **A** e **H** definidas em (32), além das matrizes **C**, **F** e **Q** conforme (38) e (39). Utilizando os valores acima, apresentamos o *loop* inicial do algoritmo, que se repetirá até atingir o critério de parada.

### **Passo 1: Inicialização do vetor de estados**

O algoritmo necessita que o usuário informe valores iniciais para a média e variância das variáveis de estado. Dessa forma, para inicializar o processo, utilizamos a média e variância incondicional dadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \end{bmatrix} e \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(1)}}{2\alpha^{(1)}} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^{(2)}}{2\alpha^{(2)}} \end{bmatrix} \quad (41)$$

### **Passo 2: Estimação da equação de observação**

Com base no estado atual das variáveis de transição (representadas pelos fatores da taxa de juros instantânea), o algoritmo calcula o valor esperado da média e desvio padrão das taxas de juros definidas aqui por  $\mathbf{y}_{1|0}$  e  $\mathbf{S}_{1|0}$  respectivamente, conforme apresentado pelo conjunto de equações abaixo:

$$\mathbf{x}_{1|0} = \mathbf{C} + \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_0 \quad (42)$$

$$\mathbf{y}_{1|0} = \mathbf{A} + \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_0 \quad (43)$$

$$\mathbf{P}_{1|0} = \mathbf{F}\mathbf{P}_0\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (44)$$

### **Passo 3: Inovação**

$$\mathbf{S}_{1|0} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{1|0}\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad (45)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{y} - (\mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{x}_{1|0}) \quad (46)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{H}\mathbf{S}_{1|0}^{-1} \quad (47)$$

O algoritmo do Filtro de Kalman utiliza o erro  $\mathbf{v}_1$  entre as taxas estimadas e reais para minimizar o erro quadrático médio da variável de estado e calcular o ganho de Kalman  $\mathbf{K}_1$ .



#### Passo 4: Atualização

$$\hat{\mathbf{x}}_{1|1} = \mathbf{x}_{1|0} + \mathbf{K}_1 \mathbf{S}_t \quad (48)$$

$$\mathbf{P}_{1|1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_1 \mathbf{H}) \mathbf{P}_{1|0} \quad (49)$$

O último passo chamado de estimativa a posteriori, atualiza a média e variância da variável de estado com base na informação do instante atual. Ao fim dessa fase, o algoritmo volta ao passo 1 recomeçando o processo.

Algumas observações são importantes salientar: Da mesma forma que De Jong (2000) e Babbs e Nowman (1999), os ruídos são descorrelacionados entre si para que o esforço computacional seja menor. Assim a matriz de covariância dos ruídos possui valores diferente de zero apenas na diagonal principal.

Para exemplificar o funcionamento do Filtro de Kalman, supomos conhecidos os parâmetros do modelo, bem como os valores iniciais da média e matriz de covariância das variáveis de estado. Na prática o Filtro de Kalman tem sido usado justamente para obter esses parâmetros e mais ainda, esses parâmetros devem ser tal que, o erro de medição seja o menor possível. Como podemos obter esses valores então? Chen e Scott (1993) propuseram uma forma de estimar os parâmetros do modelo ao maximizar a função de verossimilhança do erro de medição. Uma das vantagens de se utilizar o modelo de Vasicek, é que, neste caso, a distribuição da variável de estado é normal e assim a função de máxima verossimilhança possui solução analítica fechada conforme apresentado abaixo:

$$L = -\frac{nN \ln 2\pi}{2} - \frac{1}{2} \sum_1^N \left[ \ln \left( \det(\mathbf{S}_{t|t}) \right) + \mathbf{v}_t^T \mathbf{S}_{t|t}^{-1} \mathbf{v}_t \right] \quad (50)$$

Onde  $n$  é o número de fatores do modelo,  $N$  o tamanho da amostra,  $\mathbf{S}_{t|t}$  é a matriz de covariância da variável de observação e  $\mathbf{v}_t$  o erro de medição.

Para maximizar a função de máxima verossimilhança podemos utilizar um algoritmo otimizador no qual o software MatLab® possui algumas funções com esse objetivo. Neste trabalho foi utilizada a função *fmincon* cujo algoritmo encontra os parâmetros mínimos de uma função escalar a partir de um ponto inicial (nesse caso invertamos o sinal da função para maximiza-la). Esta função consegue impor restrições aos

valores dos parâmetros a serem estimados e utiliza o algoritmo para minimizar a função objetivo.

### 4.3 A estrutura a termo da taxa de juros aplicada ao modelo VAR(1)

Nesse capítulo será exemplificado como será feito o uso do Vetor Auto Regressivo para previsão das taxas de juros e seu uso na estratégia de investimento.

Diferentemente do Modelo Vasicek, ao invés de modelar a taxa de juros com base em parâmetros que tentam explicar seu comportamento, essa ferramenta simplesmente utiliza a inter-relação de uma variável com ela mesma e com outras mais simultaneamente para inferir previsões  $m$  períodos à frente.

Para exemplificar o uso dessa ferramenta nesse trabalho, utilizaremos a equação (29) já considerando o Vetor Auto-regressivo de ordem 1 e as variáveis que serão utilizadas no trabalho:

$$\Omega_t = \Psi \Theta_{t-1} + \psi_t \quad (51)$$

Onde:

- $\Omega_{|10 \times L|}$  : matriz composta das taxas de juros com vértice  $T_i$ , com  $i = 1, \dots, 10$  no instante  $t$  e tamanho  $L$
- $\Psi_{|10 \times 11|}$  : matriz dos interceptos e coeficientes da equação.
- $\Theta_{|11 \times L|}$  : matriz das taxas de juros no instante  $t - 1$  e tamanho  $L$
- $\psi_{|10 \times L|}$  : matriz do ruído branco ou processo de inovação.

Definido uma amostra de tamanho  $L$  representadas pelo histórico das taxa de juros dos vértices  $T_1, \dots, T_{10}$ , o VAR(1) necessita de uma amostra e uma pré amostra deslocada 1 instante atrás dessas variáveis.

A partir dessas amostras, calcula-se a matriz dos coeficientes ótimos  $\Psi_{otm}$  através da equação (30).

De posse de  $\Psi_{otm}$ , as estimativas das taxas de juros são calculadas conforma abaixo:

$$\Omega_{est} = \Psi_{otm} \Theta_t \quad (52)$$

Onde  $\Omega_{est}$  é o vetor contendo as estimativas das taxas de juros,  $\Psi_{otm}$  a matriz dos coeficientes ótimos e  $\Theta_t$  a matriz com as séries históricas das taxas. A última coluna de  $\Omega_{est}$  é a taxa prevista 1 passo a frente.

#### 4.4 Simulação de uma carteira com derivativos de taxa de juros e descrição do processo

Para a simulação, será usada a base histórica das taxas *swaps* Pré x DI dos vértices  $T_1, \dots, T_{10}$  e dos contratos futuros de DI disponíveis na BMFBovespa no período entre 09/09/2004 a 30/05/2014.

O preço unitário, ou PU de um contrato futuro de DI com vencimento em  $\tau$ , dado em dias úteis, no instante  $t$  é:

$$PU_{DI} = \frac{100.000,00}{(1 + tx_\tau)^{\frac{(\tau-t)}{252}}} \quad (53)$$

Com  $tx_\tau$  expressa em base anual, é a taxa referente ao prazo do contrato obtida da ETTJ referente ao instante  $t$ . Já citado anteriormente, o contrato de DI nada mais é que um *swap* PróxDI, no qual paga ou recebe ajustes diários dado por:

$$Ajuste = PU_t - PU_{t-1} * (1 + CDI_{t-1})^{\frac{1}{252}} \quad (54)$$

Como a simulação será feita utilizando um passo de 5 dias úteis, o ajuste será calculado por:

$$Ajuste_{5\ du} = PU_t - PU_{t-5} * \prod_{i=t-5}^{t-1} (1 + CDI_i)^{\frac{1}{252}} \quad (55)$$

Onde  $PU_t$  representa o preço unitário no instante  $t$ ,  $PU_{t-5}$  o preço unitário no instante  $t - 5$  e  $CDI_i$ , expresso em base anual, é a taxa CDI do instante  $i$  com  $i$  variando entre  $t - 5$  até  $t - 1$ . Importante destacar que caso o contrato seja vendido, o sinal da equação deve ser invertido.

A simulação será feita utilizando um valor fixo de R\$ 1.000.000,00 a cada instante que será dividido igualmente entre os contratos de DI existentes no período analisado. Será permitida alavancagem da carteira e não há custo de transação.

Além disso, será possível comprar ou vender qualquer um dos contratos em aberto em qualquer instante do tempo no preço de ajuste. O motivo de relaxarmos essas premissas se deve ao fato de que o objetivo desse trabalho é criticar a qualidade preditiva do FKMV2 comparando a outro modelo (nesse caso o VAR(1)). O resultado total da carteira será a soma dos ajustes de cada passo durante a amostra de  $L$  passos conforme a equação abaixo:

$$P\&L_{total} = \sum_{i=1}^L Ajuste_{5\ du_i} \quad (56)$$

O algoritmo funciona da mesma maneira para os dois modelos. Definida uma janela para minimizar o erro de medição, o algoritmo irá estimar os parâmetros do modelo, que ficarão inalterados por  $n$  passos (definido na simulação) e utilizados para gerar estimativas das taxas de juros no instante atual e 1 passo a frente durante essa janela de tempo. As taxas de juros estimadas e as observadas no mercado serão interpoladas, sendo que a primeira será usada para definir a ordem de compra ou venda e a segunda será base para a precificação e consequentemente calcular o resultado da carteira. O algoritmo possui ainda um critério de *stop loss*, inibindo o sinal de compra ou venda no instante atual quando a perda nos 3 passos anteriores for maior que 30% do CDI acumulado desse mesmo período ou se o estimador errar o sentido do movimento das taxas ( queda ou alta) também dos últimos 3 passos.

Abaixo apresentamos o processo iterativo seguido pelo algoritmo desenvolvido.

Dados de entrada:

- ✓ Taxas de juros dos *swaps* Pré x DI referente aos 10 vértices  $T_1, \dots, T_{10}$
- ✓ Contratos futuros de DI disponíveis no período de análise
- ✓ Ponto de início e fim da amostra no qual o modelo irá realizar a previsão.
- ✓ Tamanho da janela na qual o algoritmo utilizará para encontrar os parâmetros ótimos do modelo.
- ✓ Tamanho da janela no qual os parâmetros estimados se manterão inalterados.

Definidos os dados de entrada, o algoritmo realiza a estimativa das taxas de juros em dois passos: otimização dos parâmetros do modelo com base na minimização dos erros; geração das estimativas futuras das taxas de juros. Esse processo segue a seguinte dinâmica descrita abaixo:

- i. Estimação dos parâmetros ótimos do modelo (Modelo Vasicek e Vetor Auto-regressivo).
- ii. Contagem dos passos.
- iii. Geração das taxas de juros teóricas no instante atual e do passo seguinte.
- iv. Interpolação da curva estimada e real no passo atual e do passo seguinte (previsão).
- v. Geração do sinal de compra ou venda (a ser confirmado em vi).
- vi. Teste das condições de *Stop Loss*.
- vii. Caso esteja dentro das condições, calcula o ajuste do instante atual, do contrario pula para o passo vii.
- viii. Incrementa o ajuste ao  $P\&L_{total}$ .
- ix. Verifica se a contagem dos passos é maior ou igual a janela no qual os parâmetros se manterão inalterados, caso positivo, zerar a contagem e voltar ao passo i, caso contrario voltar ao passo ii.

Ao final desse capítulo abordamos os principais conceitos introduzidos no capítulo 3, apresentando a forma como suas relações são utilizadas para desenvolver a estrutura do FKMV2 e do VAR(1), o objetivo de gerar estimativas das taxas de juros e também como essas ferramentas podem ser utilizadas em uma estratégia de investimentos. Os últimos parágrafos desse capítulo foram destinados a detalhar o funcionamento do algoritmo desenvolvido nesse trabalho, que tem como objetivo simular um portfólio de renda fixa que se aproveita da dinâmica das taxas de juros. O próximo capítulo, é destinado a apresentar os resultados e as análises com base na metodologia apresentada nesse capítulo.

## 5. Resultados

Apresentamos nesse capítulo os resultados gerados com base na metodologia proposta no capítulo 4. Antes de expor os resultados da estratégia de investimento, iniciamos com os resultados da calibração dos parâmetros do FKMV2, no período compreendido entre 01/03/2007 e 01/05/2014 e a análise desses resultados que poderão ser usados para responder questões levantadas na análise da estratégia de investimento.

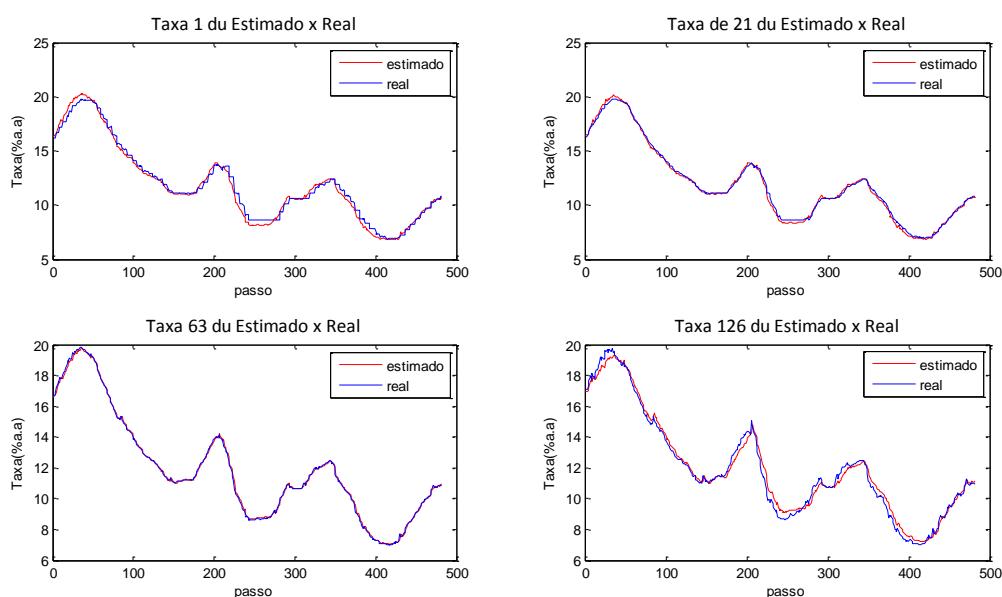
Seguindo com a estrutura proposta acima, são apresentadas as simulações da estratégia de investimento obtidas pelo Modelo Vasicek de dois fatores acoplado ao Filtro de Kalman e do Vetor Auto Regressivo de ordem 1. Foram criadas três amostras a partir do período citado acima com o intuito de verificar a reação dos modelos a situações diferentes do mercado. As simulações realizadas tem o intuito de verificar a qualidade preditiva do Filtro de Kalman aplicado ao Modelo Vasicek de dois fatores e, para avaliar o seu desempenho, os resultados serão comparados aos obtidos pelo VAR(1). Na análise dos resultados serão discutidos também qual o tamanho ideal da amostra para estimar os parâmetros do modelo e por quanto tempo esses parâmetros capturam a dinâmica da taxa de juros de forma satisfatória.

### 5.1 Obtenção dos parâmetros do Modelo Vasicek de 2 fatores

Como uma primeira forma de avaliar o FKMV2, apresentamos os gráficos abaixo que mostram a evolução temporal das taxas de juros observadas, vis-à-vis as taxas estimadas pelo FKMV2. Para facilitar a visualização, apresentamos 8 dos 10 vértices simulados divididos em duas figuras, sendo que a Figura 2 contém as séries das taxas de juros dos vértices  $T_1$  a  $T_4$ , enquanto que Figura 3 contém os vértices  $T_7$  a  $T_{10}$ .

Observa-se da Figura 2 que o FKMV2 consegue capturar de forma simultânea aos movimentos de altas e baixas das taxas de juros durante o período analisado, mas que a replicação não é totalmente perfeita. Uma das limitações do modelo vem do fato de tratar as taxas de juros como uma função linear dos fatores da taxa de juros instantânea, o que implica em uma correlação perfeita das taxas de juros teóricas.

Esse efeito indesejável é em parte reduzido ao considerarmos no uso do Filtro de Kalman que as taxas são medidas com erros. Essa medida adiciona a matriz de covariância dos erros de medição ao cálculo do ganho de Kalman, que por sua vez tem como objetivo minimizar o erro quadrático médio, mas não é o suficiente para que as taxas sejam perfeitamente replicadas.



**Figura 2 Taxas teóricas versus estimadas (vértices  $T_1$  a  $T_4$ ) pelo FKMV2 versus taxas de mercado**

A Figura 3 contém a série histórica das taxas de juros reais e as estimadas pelo modelo dos vértices mais longos. É possível ver que, de modo geral, o FKMV2 consegue capturar os movimentos das taxas de juros, mas para os vértices de prazos mais longos os quais possuem maior volatilidade, a ferramenta não possui o mesmo desempenho. Levando-se em conta este fato, foram escolhidas amostras na simulação da estratégia de investimento de forma que essa característica ficasse mais evidente e pudéssemos analisar a relevância desse fato.

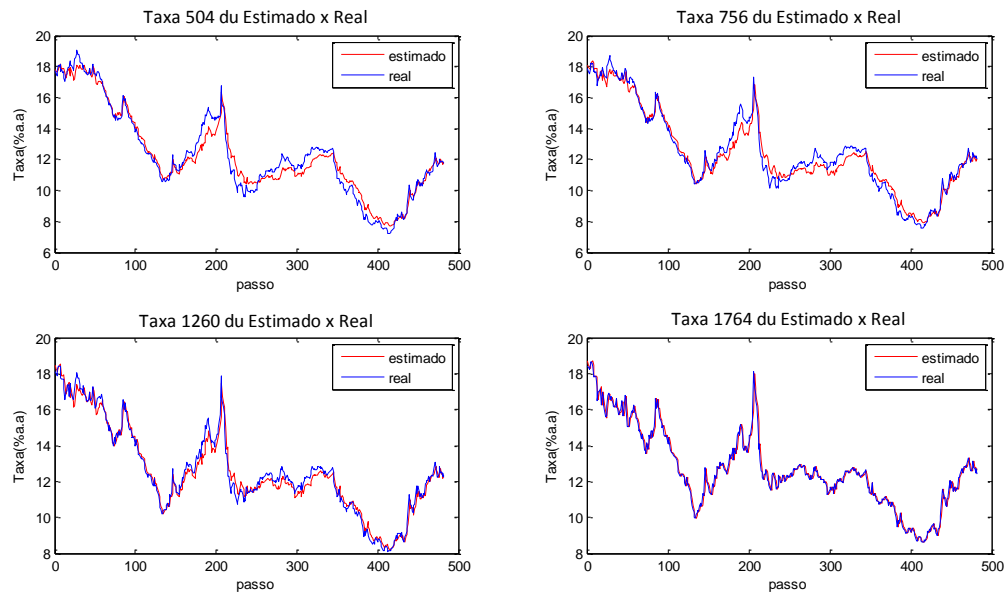


Figura 3 Taxas teóricas versus estimadas (vértices  $T_7$  a  $T_{10}$ ) pelo Modelo Vasicek versus taxas de mercado

Em outra simulação, foram geradas pelo FKMV2 100 diferentes amostras das taxas de juros dos vértices  $T_1, \dots, T_{10}$  variando os chutes iniciais dos parâmetros do modelo. A Tabela 1 contém os resultados da estimação dos valores dos parâmetros do modelo.

Tabela 1 - Parâmetros do modelo de Vasicek com base na amostra de 01/04/2007 a 01/05/2014

| Par./medida  | média | desvio padrão | skewness | Curtose |
|--------------|-------|---------------|----------|---------|
| $\theta_1$   | 0,11  | 0,22          | 7,23     | 59,20   |
| $\theta_2$   | 0,11  | 0,29          | 6,37     | 40,28   |
| $\kappa_1$   | 0,34  | 0,58          | 1,16     | 4,18    |
| $\kappa_2$   | 0,72  | 1,00          | 0,34     | -1,59   |
| $\sigma_1$   | 0,02  | 0,04          | 6,89     | 53,77   |
| $\sigma_2$   | 0,02  | 0,05          | 7,36     | 61,69   |
| $\lambda_1$  | -0,12 | 0,75          | 1,45     | 2,05    |
| $\lambda_2$  | 0,31  | 1,04          | 0,46     | -1,02   |
| $\zeta_1$    | 0,02  | 0,11          | 8,85     | 80,65   |
| $\zeta_2$    | 0,02  | 0,12          | 6,93     | 51,84   |
| $\zeta_3$    | 0,00  | 0,00          | 4,96     | 31,96   |
| $\zeta_4$    | 0,02  | 0,10          | 9,32     | 87,44   |
| $\zeta_5$    | 0,01  | 0,01          | 5,75     | 40,42   |
| $\zeta_6$    | 0,02  | 0,08          | 8,39     | 73,86   |
| $\zeta_7$    | 0,01  | 0,01          | 5,64     | 35,17   |
| $\zeta_8$    | 0,08  | 0,12          | 6,55     | 46,72   |
| $\zeta_9$    | 0,08  | 0,25          | 3,37     | 9,82    |
| $\zeta_{10}$ | 0,05  | 0,14          | 3,19     | 9,23    |



Da Tabela 1 acima, verifica-se a alta dispersão dos parâmetros  $\theta_1$  e  $\theta_2$  do FKMV2, o que mostra a dificuldade em definir uma taxa de longo prazo que seja aderente ao mercado de juros brasileiro. Isso fica evidenciado também ao observar o primeiro gráfico da Figura 1, que mostra o comportamento do CDI ao longo do tempo. Nesse período o CDI variou entre 7,5% a 20% ao ano, enquanto que em economias desenvolvidas, onde esse modelo foi desenvolvido e também muito mais testado, variações dessa magnitude não ocorrem. Entretanto, apesar dessa instabilidade, é interessante notar que  $k_1$  e  $k_2$ , que em conjunto representam a velocidade de reversão à média, é maior que zero, indicio que o processo tende a reverter para seu valor de equilíbrio, qualquer que seja ele.

Por último, a discussão foca nos erros de medição. O uso do Filtro de Kalman é direcionado para sistemas lineares gaussianos, o que implica que os erros da equação de observação são normalmente distribuídos. Com base na mesma simulação que deu origem a tabela acima, foi construída a matriz de correlação dos erros conforme a tabela abaixo:

Tabela 2 - Matriz de correlação dos erros de estimação da janela de 01/04/2007 a 01/05/2014

| erro     | $e_1$  | $e_2$  | $e_3$  | $e_4$  | $e_5$  | $e_6$  | $e_7$  | $e_8$ | $e_9$ | $e_{10}$ |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|----------|
| $e_1$    | 1,00   | 0,88   | (0,25) | (0,63) | (0,59) | (0,47) | (0,19) | 0,05  | 0,05  | 0,16     |
| $e_2$    | 0,88   | 1,00   | 0,00   | (0,48) | (0,47) | (0,34) | (0,05) | 0,15  | 0,16  | 0,25     |
| $e_3$    | (0,25) | 0,00   | 1,00   | 0,82   | 0,70   | 0,68   | 0,62   | 0,41  | 0,45  | 0,35     |
| $e_4$    | (0,63) | (0,48) | 0,82   | 1,00   | 0,95   | 0,88   | 0,64   | 0,30  | 0,35  | 0,19     |
| $e_5$    | (0,59) | (0,47) | 0,70   | 0,95   | 1,00   | 0,97   | 0,67   | 0,27  | 0,40  | 0,20     |
| $e_6$    | (0,47) | (0,34) | 0,68   | 0,88   | 0,97   | 1,00   | 0,79   | 0,41  | 0,49  | 0,29     |
| $e_7$    | (0,19) | (0,05) | 0,62   | 0,64   | 0,67   | 0,79   | 1,00   | 0,88  | 0,46  | 0,34     |
| $e_8$    | 0,05   | 0,15   | 0,41   | 0,30   | 0,27   | 0,41   | 0,88   | 1,00  | 0,25  | 0,22     |
| $e_9$    | 0,05   | 0,16   | 0,45   | 0,35   | 0,40   | 0,49   | 0,46   | 0,25  | 1,00  | 0,92     |
| $e_{10}$ | 0,16   | 0,25   | 0,35   | 0,19   | 0,20   | 0,29   | 0,34   | 0,22  | 0,92  | 1,00     |

A Tabela 2 acima apresenta a matriz de correlação dos erros. A relação entre os erros dos vértices é muito forte entre os vencimentos próximos e diminui rapidamente à medida que a distancia aumenta. Isso mostra que o comportamento das taxas de juros é muito distinto de um vencimento para outro e demonstra a dificuldade do FKMV2 em capturar a dinâmica de toda a estrutura da curva de juros de uma só vez.

Tabela 3 – matriz de covariância dos erros de estimação

| erro     | $e_1$   | $e_2$   | $e_3$  | $e_4$   | $e_5$   | $e_6$   | $e_7$   | $e_8$  | $e_9$  | $e_{10}$ |
|----------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|----------|
| $e_1$    | 0,001%  | 0,001%  | 0,000% | -0,001% | -0,001% | -0,001% | -0,001% | 0,001% | 0,000% | 0,000%   |
| $e_2$    | 0,001%  | 0,000%  | 0,000% | 0,000%  | -0,001% | 0,000%  | 0,000%  | 0,002% | 0,000% | 0,000%   |
| $e_3$    | 0,000%  | 0,000%  | 0,000% | 0,000%  | 0,001%  | 0,001%  | 0,001%  | 0,003% | 0,000% | 0,000%   |
| $e_4$    | -0,001% | 0,000%  | 0,000% | 0,001%  | 0,002%  | 0,002%  | 0,002%  | 0,006% | 0,000% | 0,000%   |
| $e_5$    | -0,001% | -0,001% | 0,001% | 0,002%  | 0,003%  | 0,003%  | 0,004%  | 0,008% | 0,001% | 0,000%   |
| $e_6$    | -0,001% | 0,000%  | 0,001% | 0,002%  | 0,003%  | 0,004%  | 0,005%  | 0,014% | 0,001% | 0,001%   |
| $e_7$    | -0,001% | 0,000%  | 0,001% | 0,002%  | 0,004%  | 0,005%  | 0,009%  | 0,046% | 0,002% | 0,001%   |
| $e_8$    | 0,001%  | 0,002%  | 0,003% | 0,006%  | 0,008%  | 0,014%  | 0,046%  | 0,297% | 0,005% | 0,005%   |
| $e_9$    | 0,000%  | 0,000%  | 0,000% | 0,000%  | 0,001%  | 0,001%  | 0,002%  | 0,005% | 0,001% | 0,001%   |
| $e_{10}$ | 0,000%  | 0,000%  | 0,000% | 0,000%  | 0,000%  | 0,001%  | 0,001%  | 0,005% | 0,001% | 0,001%   |

Na Tabela 3, apresentamos a matriz de covariância dos erros. Pela tabela é possível ver que, apesar dos gráficos mostrarem certo descolamento entre as taxas estimadas e as reais, o nível da dispersão dos erros é muito baixo, mesmo nos vértices com vencimento mais longos. Esse fato mostra que aparentemente existe consistência na estimação das taxas de juros ao longo da amostra analisada. Para complementar as informações contidas na Tabela 3, iremos continuar a análise dos erros adicionando o histograma dos erros de medição na simulação realizada.

As Figuras 4 e 5 contêm os histogramas dos erros de medição dos vencimentos  $T_1$  a  $T_4$  e  $T_7$  a  $T_{10}$  divididos da mesma maneira que as Figuras 1 e 2. Para efeito de comparação, cada histograma possui também a função densidade de probabilidade da distribuição normal com média e variância dos erros.

Como foi dito anteriormente, no modelo de Espaço de Estados, é uma das premissas do modelo que os erros sejam normais. Na Figura 3 nota-se que os erros se distribuem em torno do zero, e que aparentemente não se assemelham a uma distribuição normal. Para constatar de fato se a distribuição é normal, a Tabela 4 apresenta os resultados do teste de Jarque-Bera que verifica se a distribuição é normal ou não. Dos vértices da Figura 4, somente o  $T_3$  foi reprovado no teste, considerando um nível de confiança de 5%.

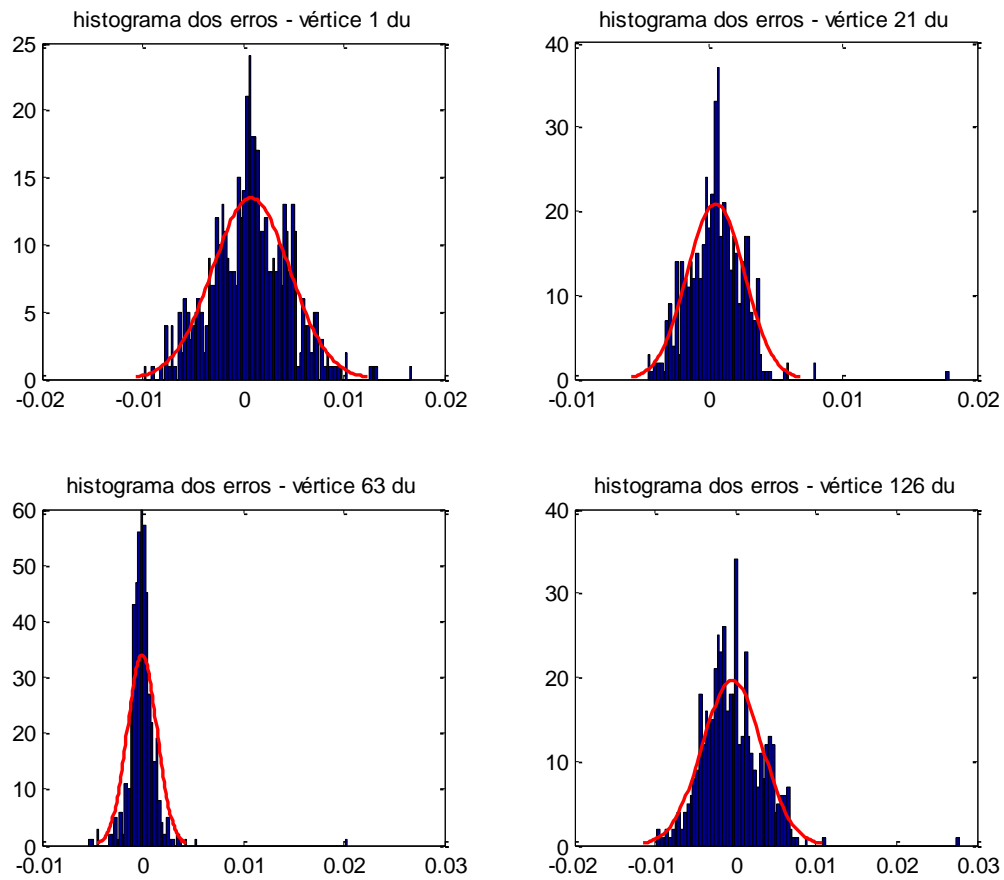


Figura 4 Histograma dos erros dos vértices  $T_1$  a  $T_4$

A Figura 5 apresenta a distribuição dos erros dos vértices mais longos. O excesso de curtose se manteve presente nesses vértices, além da dispersão aparentar ser maior em quase todos os vértices, fato que reforça a maior dificuldade em capturar a dinâmica no longo prazo. Com base na Tabela 4 todos os vértices foram reprovados no teste de normalidade de Jarque Bera com 5% de intervalo de confiança, o que fere a premissa do modelo de Espaço de Estados no qual assume-se que os erros possuem distribuição normal.

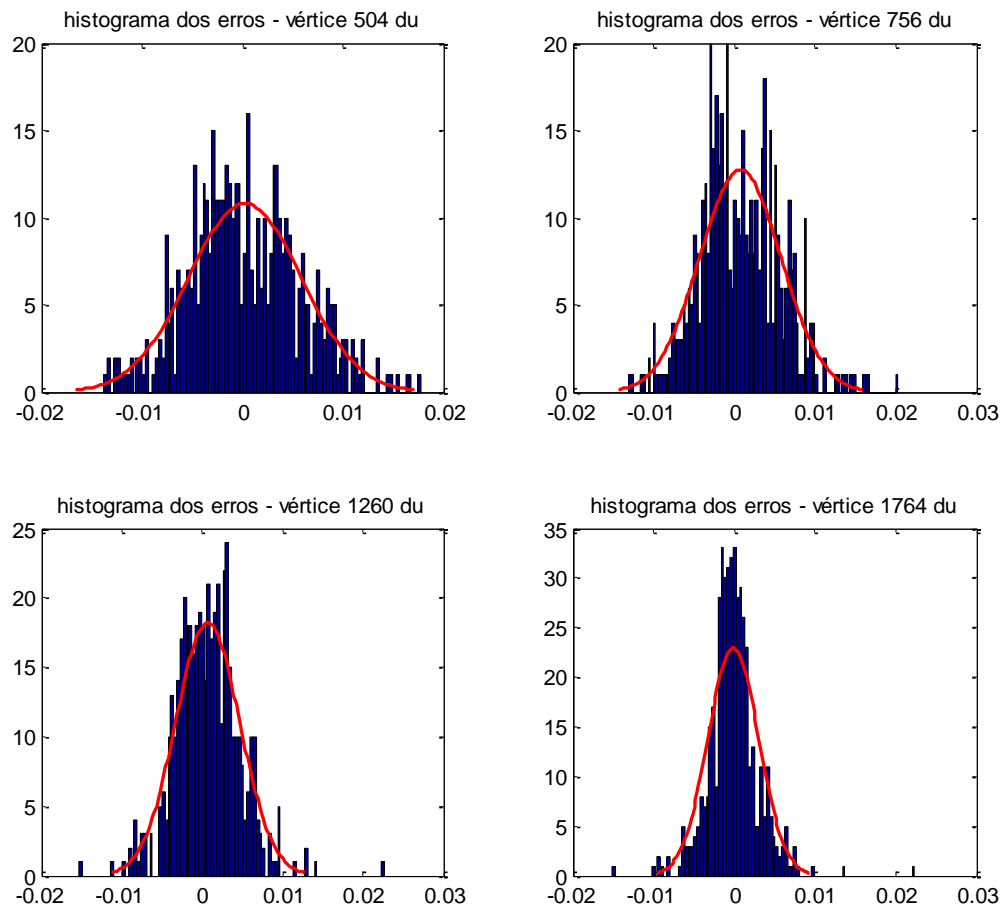


Figura 5 Histograma dos erros dos vértices  $T_7$  a  $T_{10}$

Tabela 4 resultado do teste de Jarque –Bera para os erros de medição

| est/erro | $e_1$  | $e_2$  | $e_3$ | $e_4$  | $e_7$ | $e_8$ | $e_9$ | $e_{10}$ |
|----------|--------|--------|-------|--------|-------|-------|-------|----------|
| JB       | 0      | 0      | 1     | 0      | 1     | 1     | 1     | 1        |
| p-value  | 50,00% | 23,46% | 0,10% | 34,91% | 2,83% | 0,10% | 0,10% | 0,10%    |

## 5.2 Resultados da Estratégia de Investimento

A partir de agora, a discussão focará nos resultados obtidos na estratégia de investimento usando como estimador das taxas de juros o FKMV2 e o VAR(1). Consideramos nas simulações um nocional de R\$1.000.000,00, dividido igualmente para cada contrato de DI futuro em aberto na janela analisada. Custos de transação não serão considerados nas simulações e assume-se que existe liquidez suficiente

para todos os vencimentos de forma que as negociações serão feitas sempre a preço de fechamento. Para cada um dos modelos, serão realizados testes da seguinte forma:

- ✓ Amostras de períodos históricos diferentes (01/03/2007 a 01/03/2009; 01/03/2010 a 01/03/2012 e 01/03/2012 a 01/03/2014).
- ✓ Cada passo do algoritmo corresponde a 5 dias úteis.
- ✓ Janelas para otimização dos parâmetros estimados diferentes (63 e 126 amostras).
- ✓ Janelas nos quais os parâmetros permanecerão inalterados (5, 10 e 15 amostras).
- ✓ Estimativas das taxas de juros dos vértices  $T_1, \dots, T_{10}$ .

O intuito das simulações é apresentar, para diferentes momentos do mercado, a comparação dos resultados obtidos com o FKMV2 frente ao VAR(1). Foram testadas diferentes configurações, com o objetivo de verificar qual é a melhor janela para calibração do modelo e, se esse parâmetro é influenciado pelo momento do mercado. As simulações apresentam também quanto tempo os parâmetros encontrados na calibração perduram, gerando curvas consistentes com as observadas no mercado. Essa parte da análise tem o objetivo de verificar se os parâmetros do modelo estimados de forma ótima, capturam mesmo a dinâmica das taxas de juros.

### **Período entre 01/03/2007 a 01/03/2009**

Antes de iniciar as análises dos resultados, é interessante expor brevemente as condições de mercado no período testado, pois esse fator afetará de forma direta o resultado final. A Figura 6 abaixo contém o histórico das taxas de juros e a volatilidade (anualizada) das taxas no mesmo período. Este trecho da amostra é interessante, pois engloba o ápice da crise financeira de 2008 em que o nível da volatilidade das taxas aumentou praticamente 100% do valor no início da janela conforme podemos observar abaixo:

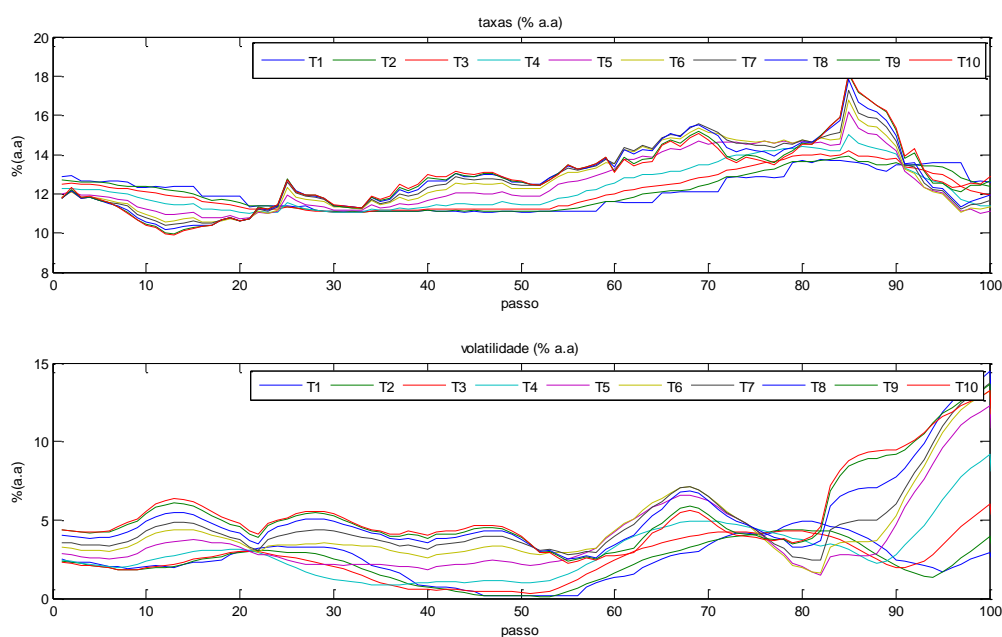


Figura 6 gráfico das taxas de juros e volatilidades do período 01/03/2007 a 01/03/2009

### Janela de otimização de 63 amostras

Apresentamos na Tabela 5 os resultados das simulações com base em uma janela de 63 amostras para otimização dos parâmetros estimados do FKMV2 e VAR(1). Os dados foram divididos de forma que, cada coluna apresente os resultados da simulação com base em uma determinada janela na qual os parâmetros permanecerão fixos (essa janela será citada como janela de recalibração a partir de agora), ou seja, o período que o algoritmo não irá computar os resultados sem estimar os parâmetros ótimos dos modelos.

É possível verificar na Tabela 4 que o FKMV2 apresentou resultados superiores para todas as simulações realizadas com a janela de 63 amostras para a otimização. Apesar da configuração 63-5<sup>19</sup> para o FKMV2 gerar um resultado abaixo do VAR(1), o percentual de acerto foi maior (59,3% contra 57,1%). Isso se deve ao fato do FKMV2 ter acertado em períodos de menor volatilidade, fato que pode ser evidenciado pelo menor desvio padrão dos resultados. É possível notar também que para todas as janelas de recalibração, o FKMV2 foi mais consistente, no qual a

<sup>19</sup> Daqui para frente os resultados serão referenciados por dois números que caracterizam a configuração da simulação. O primeiro será a janela de otimização e o segundo a janela de recalibração. Por exemplo, 63-5 significa uma janela de otimização de 63 amostras que manterá os parâmetros do modelo fixados por 5 passos até realizar a otimização novamente.

mudança dessa janela acarretou em pouca mudança nos resultados, visto fato que pode ser reforçado pelo percentual no qual critério de *stop loss* foi acionado.

**Tabela 5 Resultados das simulações com janela de otimização de 63 amostras otimização**

|                     | 63-5           |               | 63-10          |               | 63-15          |               |
|---------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>Estatística</b>  | <b>Vasicek</b> | <b>VAR(1)</b> | <b>Vasicek</b> | <b>VAR(1)</b> | <b>Vasicek</b> | <b>VAR(1)</b> |
| média (R\$)         | 333,04         | 384,77        | 412,36         | 47,15         | 288,01         | 10,20         |
| máximo (R\$)        | 12.088,71      | 16.505,35     | 12.132,93      | 8.532,95      | 12.132,93      | 5.627,25      |
| mínimo (R\$)        | (9.715,46)     | (9.715,46)    | (9.337,81)     | (4.365,16)    | (9.733,74)     | (9.687,33)    |
| total (R\$)         | 33.636,55      | 38.861,69     | 41.648,54      | 4.762,28      | 29.089,29      | 1.029,82      |
| desvio padrão (R\$) | 2.606,31       | 2.655,65      | 2.688,80       | 1.698,31      | 2.749,41       | 1.936,51      |
| % acerto            | 59,3%          | 57,1%         | 59,4%          | 53,8%         | 57,4%          | 57,3%         |
| % stop loss         | 35,4%          | 35,0%         | 35,9%          | 45,4%         | 38,0%          | 42,8%         |

### Janela de otimização de 126 amostras

Aumentando agora a janela de otimização para 126 passos foram gerados os resultados da Tabela 6. O FKMV2 apresentou uma pequena melhora, comparado com os resultados encontrados na Tabela 5. O maior ganho foi na configuração 63-15, no qual a mudança da parametrização fez com que melhorasse o resultado e aumentasse o percentual de acerto, enquanto que o *stop loss* foi acionado menos. Já no caso do VAR(1), o aumento da janela para definir a matriz dos coeficientes melhorou os resultados para as configurações 126-10 e 126-15, mas denegriu a performance da configuração 126-5. Esperava-se que os melhores resultados fossem apresentados nas simulações em que a otimização dos parâmetros do modelo fosse acionada mais vezes, dado que os parâmetros dos modelos teriam como base informações mais recentes na sua estimação.

**Tabela 6 Resultados das simulações com janela de otimização de 126 amostras**

|                     | 126-5          |               | 126-10         |               | 126-15         |               |
|---------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>Estatística</b>  | <b>Vasicek</b> | <b>VAR(1)</b> | <b>Vasicek</b> | <b>VAR(1)</b> | <b>Vasicek</b> | <b>VAR(1)</b> |
| média (R\$)         | 350,82         | 54,23         | 461,04         | 385,83        | 388,81         | 163,78        |
| máximo (R\$)        | 12.132,93      | 6.767,74      | 12.088,71      | 15.340,21     | 12.088,71      | 4.579,18      |
| mínimo (R\$)        | (9.715,46)     | (8.753,33)    | (9.822,71)     | (9.023,33)    | (9.715,46)     | (9.086,45)    |
| total (R\$)         | 35.433,17      | 5.477,31      | 46.565,43      | 38.969,11     | 39.269,47      | 16.541,85     |
| desvio padrão (R\$) | 2.577,29       | 1.825,44      | 2.646,90       | 2.512,99      | 2.616,97       | 1.775,89      |
| % acerto            | 59,3%          | 52,9%         | 59,9%          | 59,5%         | 59,9%          | 57,5%         |
| % stop loss         | 36,0%          | 36,6%         | 33,8%          | 38,4%         | 35,1%          | 38,6%         |

Abaixo, o gráfico da Figura 7 contém o resultado acumulado dos dois modelos, em conjunto com a volatilidade média das taxas no período analisado, utilizando como referencia a configuração 126-10, a qual apresentou maior percentual de acerto e maior resultado. O desempenho do Modelo Vasicek foi consistentemente melhor comparado com o VAR(1), haja vista o comportamento do *P&L* acumulado (linhas verde e azul) apresentado no gráfico abaixo. Períodos em que essas curvas se mantiveram inalteradas são os momentos nos quais o *stop loss* foi acionado, e conforme podemos observar no gráfico, ocorreram em períodos diferentes para os dois modelos. Isso explica em parte o porquê da diferença dos resultados gerados pelos dois modelos.

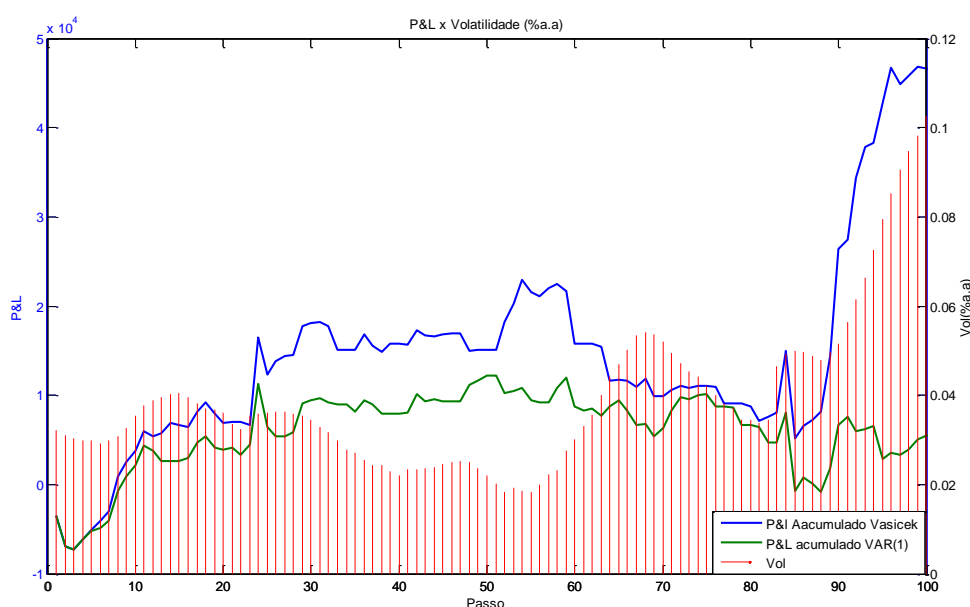


Figura 7 Resultado acumulado x média de volatilidade

### Período entre 01/03/2010 e 01/03/2012

A Figura 8 apresenta os mesmos gráficos da Figura 6 com os dados do período entre 01/03/2010 a 01/03/2012. Conforme a figura abaixo, apesar do nível da volatilidade não atingir patamares elevados como o observado no período anterior, a oscilação ocorreu de forma mais intensa, principalmente para as taxas de juros de longo prazo. Visto que os preços dos derivativos com vencimentos mais longos são mais sensíveis às mudanças das taxas, fato que ocorreu com maior frequência nessa amostra, as simulações nesse período resultaram em um desempenho inferior dos dois modelos comparados com o período anterior.



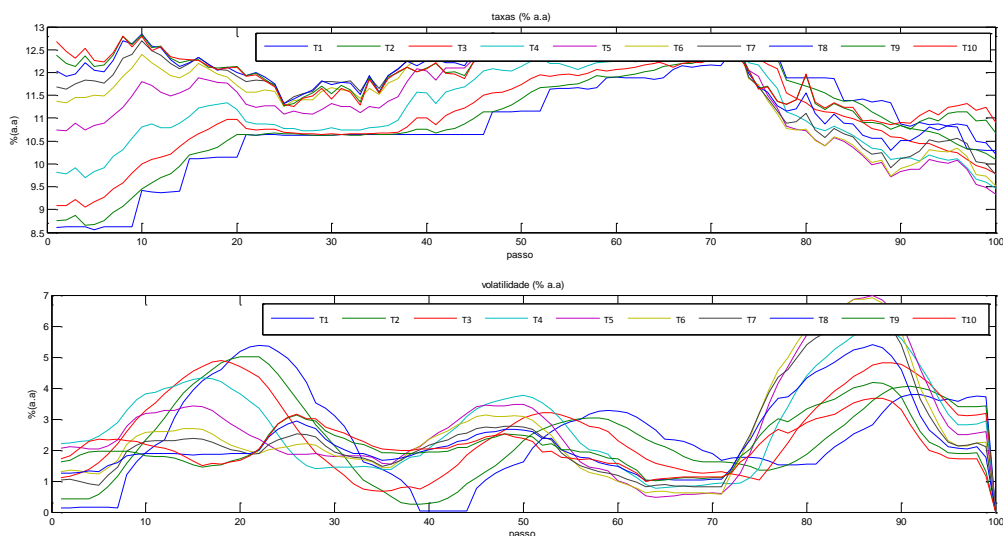


Figura 8 gráfico das taxas de juros e volatilidades do período 01/03/2010 e 01/03/2012

### Janela de otimização de 63 amostras.

A Tabela 7 apresenta os resultados obtidos com uma janela de otimização de 63 amostras para o período em questão. Similar à amostra anterior, os resultados do FKMV2 pouco sofreram com o aumento da janela de recalibragem. Essa constatação reforça o fato que, para esse modelo, a mudança dessa janela afeta pouco na geração da estimativa das taxas de juros no passo seguinte. Já no caso do VAR(1) esse mesmo comportamento não ocorre, como é possível verificar na variação do percentual de acerto, índice que mudou quase 5 pontos percentuais ao aumentar a janela de recalibração, enquanto que o Modelo Vasicek teve variação de 0,8 pontos percentuais.

Tabela 7 Resultados das simulações com janela de otimização de 63 amostras

| Estatística         | 63-5       |            | 63-10      |            | 63-15      |            |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                     | Vasicek    | VAR(1)     | Vasicek    | VAR(1)     | Vasicek    | VAR(1)     |
| média (R\$)         | 63,96      | 213,46     | 91,77      | 103,80     | 59,82      | 118,37     |
| máximo (R\$)        | 3.327,87   | 3.631,84   | 3.833,05   | 3.176,81   | 3.200,61   | 2.822,38   |
| mínimo (R\$)        | (4.728,44) | (2.886,05) | (4.709,03) | (2.109,75) | (4.709,03) | (3.523,98) |
| total (R\$)         | 6.460,13   | 21.559,83  | 9.268,41   | 10.483,57  | 6.041,59   | 11.955,86  |
| desvio padrão (R\$) | 1.098,59   | 1.075,46   | 1.158,55   | 869,18     | 1.092,48   | 933,34     |
| % acerto            | 53,0%      | 55,7%      | 53,1%      | 52,1%      | 51,2%      | 51,8%      |
| % stop loss         | 32,7%      | 30,5%      | 33,3%      | 36,4%      | 35,0%      | 37,0%      |

### Janela de otimização de 126 amostras.

A mudança na janela de otimização nesse período acarretou em maiores mudanças comparado ao anterior (01/03/2007 a 01/03/2009). Apesar do *P&L* acumulado ter aumentado para a maioria das simulações, a janela de 126 amostras não mostrou ser a mais adequada para ser utilizada nesse período. Comparando os dados das Tabelas 7 e 8, verifica-se que houve uma diminuição do percentual de acerto e aumento do uso do *stop loss*, que demonstra que houve uma queda na qualidade preditiva em ambos os modelos.

Tabela 8 Resultados das simulações com janela de otimização de 126 amostras

|                     | 126-5      |            | 126-10     |            | 126-15     |            |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Estatística         | Vasicek    | VAR(1)     | Vasicek    | VAR(1)     | Vasicek    | VAR(1)     |
| média (R\$)         | 128,25     | 98,58      | 98,07      | 83,86      | 58,68      | 16,04      |
| máximo (R\$)        | 3.633,23   | 3.150,92   | 3.633,23   | 2.822,38   | 4.736,22   | 2.822,38   |
| mínimo (R\$)        | (3.275,89) | (2.869,83) | (3.275,89) | (2.545,42) | (4.728,44) | (3.162,39) |
| total (R\$)         | 12.952,99  | 9.956,73   | 9.904,82   | 8.470,09   | 5.926,57   | 1.619,72   |
| desvio padrão (R\$) | 1.041,96   | 1.016,29   | 1.032,28   | 902,01     | 1.154,94   | 885,04     |
| % acerto            | 50,1%      | 51,6%      | 50,1%      | 52,1%      | 50,5%      | 50,1%      |
| % stop loss         | 35,0%      | 31,3%      | 33,4%      | 37,9%      | 37,9%      | 40,3%      |

O gráfico da Figura 9 apresenta o resultado do portfolio na configuração 63-5 dos dois modelos, juntamente com o comportamento da volatilidade média. O uso dessa simulação, assim como na Figura 7, foi a que gerou o maior resultado entre as demais simulações feitas nesse período. Desse gráfico, é possível constatar que o desempenho do FKMV2 foi inferior ao VAR(1) em toda amostra. É interessante observar nesse gráfico que os maiores ganhos ocorreram em momentos de alta da volatilidade e as perdas também coincide com a diminuição da volatilidade, o que coincide com a inversão de movimento de alta para baixa e vice e versa. Analisando esse gráfico de forma conjunta com a Figura 8, é possível notar que os ganhos (para ambos os modelos) ocorreram em momentos em que as taxas de juros se movimentaram em uma direção bem definida (quedas e altas seguidas).

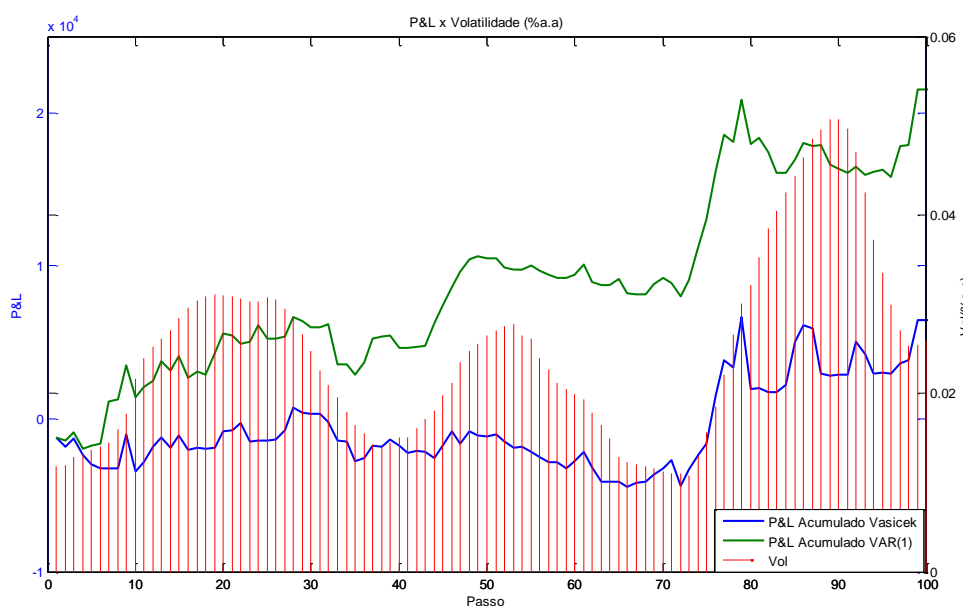


Figura 9 Resultado acumulado x média de volatilidade

As simulações feitas no período entre 01/03/2010 e 01/03/2012, diferentemente do que ocorreu no período anterior (01/03/2007 a 01/03/2009), se mostraram mais sensíveis à mudança na janela de otimização. Como já foi citado anteriormente, apesar de ter sido em menor intensidade, as taxas de juros nesse período variaram com mais frequência, comparado ao que ocorreu entre 2007 e 2009. A necessidade de diminuir a amostra utilizada para otimização vem desse comportamento que, em momentos do mercado similares ao dessa amostra, acarreta em alterações mais frequentes nos parâmetros do modelo. Nesse caso, para maximizar o resultado, é necessária uma medida que consiga indicar qual seria a melhor configuração para o modelo.

### Período entre 01/03/2012 e 01/03/2014

#### Comportamento das taxas e da volatilidade no período

Novamente iniciamos a análise começando com a evolução das taxas e das volatilidades no período. Nessa amostra a curva apresentou movimentos mais bem definidos, inclusive momentos em que houve pouca alteração no formato da curva de juros (entre os passos 20 a 60) e movimentos de seguidas altas nas taxas (entre os passos 60 a 100). Com esse comportamento, é esperado que os modelos tenham desempenho superior ao do período anterior.

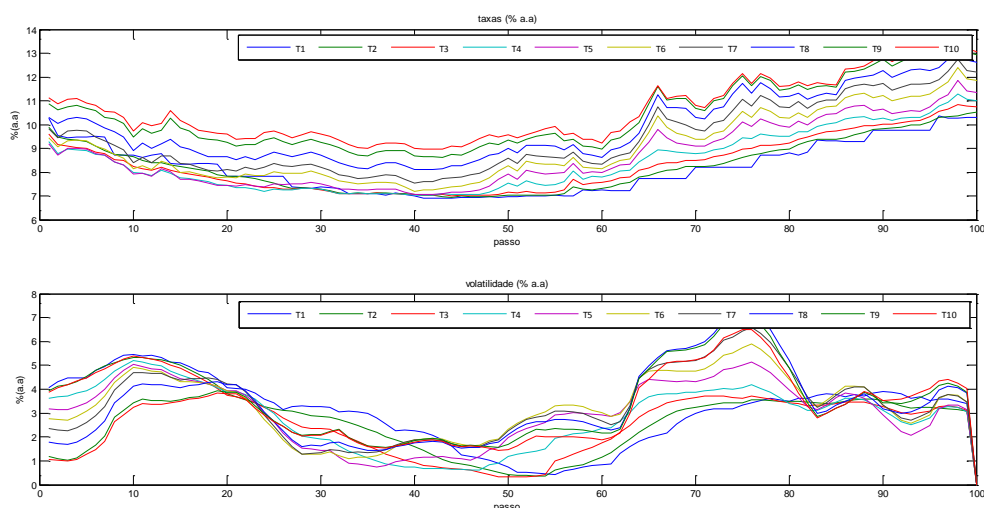


Figura 10 gráfico das taxas de juros e volatilidades do período 01/03/2012 e 01/03/2014

### Janela de otimização de 63 amostras.

Conforme constatado nas simulações anteriores, os modelos respondem melhor a movimentos das taxas de juros mais bem definidos. Os resultados disponibilizados na Tabela 9, utilizando 63 amostras para otimização, foram de fato superiores aos obtidos na amostra anterior (01/03/2010 a 01/03/2012), tanto do ponto de vista financeiro como também na comparação do percentual de acerto, apesar do *stop loss* ter sido acionado mais frequentemente. Dessa vez, os resultados do FKMV2 foram mais impactados com a mudança na janela de recalibração. O motivo dessa perda no desempenho pode ser atribuído ao fato da janela de 63 amostras não ser a mais indicada para o período analisado.

Tabela 9 Resultados das simulações com janela de otimização de 63 amostras

| Estatística         | 63-5       |            | 63-10      |            | 63-15      |            |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                     | Vasicek    | VAR(1)     | Vasicek    | VAR(1)     | Vasicek    | VAR(1)     |
| média (R\$)         | 309,78     | 390,34     | 215,88     | 294,33     | 45,66      | 233,54     |
| máximo (R\$)        | 13.414,08  | 13.544,90  | 13.414,08  | 10.743,76  | 13.491,72  | 8.773,96   |
| mínimo (R\$)        | (9.991,31) | (9.987,35) | (9.991,31) | (9.991,31) | (9.991,10) | (6.269,07) |
| total (R\$)         | 31.288,09  | 39.424,26  | 21.804,16  | 29.727,24  | 4.611,56   | 23.587,52  |
| desvio padrão (R\$) | 2.997,85   | 3.265,24   | 3.000,11   | 2.960,84   | 2.998,98   | 2.450,93   |
| % acerto            | 56,7%      | 55,3%      | 54,6%      | 56,6%      | 52,1%      | 55,8%      |
| % stop loss         | 38,1%      | 34,4%      | 39,7%      | 41,1%      | 41,1%      | 39,7%      |

### Janela de otimização de 126 amostras.

Confrontando as Tabelas 9 e 10, a alteração da janela de otimização de 63 para 126 não surtiu tanto efeito sobre o FKMV2 nas duas primeiras configurações (janela de recalibragem de 5 e 10 amostras), comparado com a configuração com a janela de 15 amostras (aumento de 3% no percentual de acerto contra 0,8% nas duas primeiras). Com a mudança, o resultado da ultima simulação (conforma a Tabela 10) se aproximou mais das outras duas, indicando que, o uso de uma amostra maior para otimização dos parâmetros é mais adequada para esse período.

Tabela 10 Resultados das simulações com janela de otimização de 126 amostras

|                     | 126-5      |            | 126-10     |            | 126-15     |            |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Estatística         | Vasicek    | VAR(1)     | Vasicek    | VAR(1)     | Vasicek    | VAR(1)     |
| média (R\$)         | 284,95     | 359,81     | 228,54     | 391,45     | 193,99     | 286,22     |
| máximo (R\$)        | 13.414,08  | 13.544,90  | 13.414,08  | 13.546,48  | 13.414,08  | 8.832,39   |
| mínimo (R\$)        | (9.991,31) | (9.991,31) | (9.991,31) | (9.991,31) | (9.991,31) | (6.636,24) |
| total (R\$)         | 28.780,16  | 36.341,13  | 23.082,46  | 39.536,45  | 19.593,12  | 28.908,11  |
| desvio padrão (R\$) | 2.965,51   | 3.251,18   | 2.991,78   | 3.339,18   | 2.976,24   | 2.268,64   |
| % acerto            | 57,5%      | 57,5%      | 55,4%      | 56,5%      | 55,1%      | 57,4%      |
| % stop loss         | 37,1%      | 33,3%      | 37,5%      | 39,5%      | 37,7%      | 41,7%      |

A Figura 11 abaixo apresenta o comportamento do resultado acumulado e a volatilidade média no período analisado seguindo a linha de análise dos outros períodos. Os dois modelos reagiram de forma muito parecida em boa parte da amostra, mas entre os passos 75 a 80 o FKMV2 teve desempenho inferior ao VAR(1), sendo que o *stop loss* foi acionado mais vezes no primeiro modelo. É possível notar também que o período de menor volatilidade (entre os passos 30 a 50) onde a volatilidade atingiu o menor patamar, foi onde ambos os modelos conseguiram seguidos ganhos, o que demonstra de fato, que esses modelos são mais adequados para capturar tendências de longo prazo do mercado.

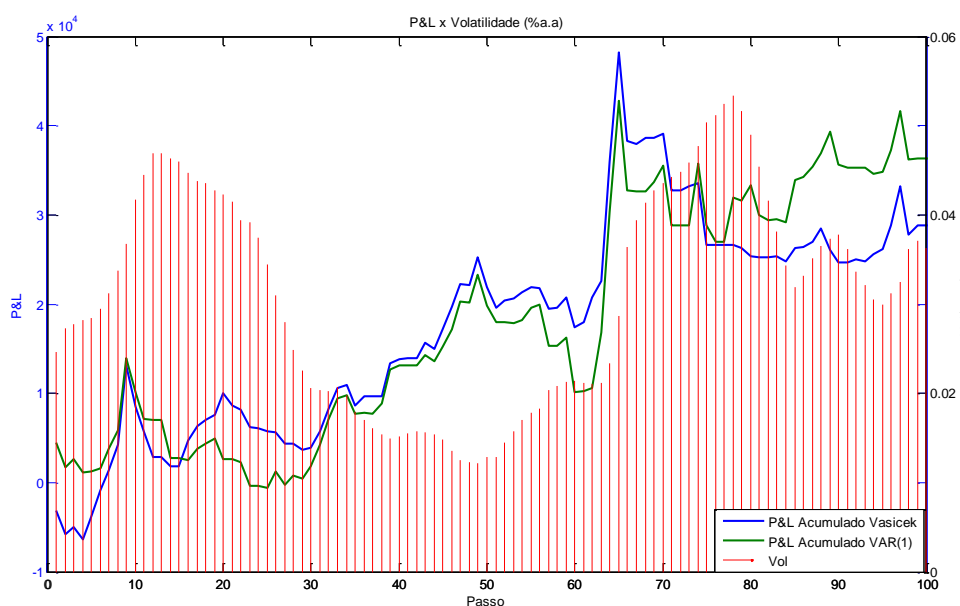


Figura 11 Resultado acumulado x média de volatilidade

Foram realizados diferentes simulações com o intuito de avaliar a qualidade preditiva do FKMV2. Iniciamos o capítulo com a discussão da obtenção dos parâmetros do Modelo Vasicek de dois fatores, e o quão aderente o modelo se mostrou ser para capturar a evolução temporal das taxas de juros ao longo do tempo. O FKMV2 apresentou desempenho superior ao estimar as taxas de juros com prazos mais curtos (vértices de até 1 ano), comparado as estimativas geradas para as taxas de longo prazo. Dito isso, a primeira conclusão é que, o uso do FKMV2 para estratégias de investimento deveria focar em estratégias de longo prazo, pois para movimentos de curto prazo, os quais nos vértices longos se tornaram mais evidentes, o tempo de resposta não foi adequado.

Com o objetivo de analisar o resultado voltado para uma estratégia de investimento, os modelos foram testados em diferentes períodos utilizando um horizonte de tempo de dois anos, em que foram observados momentos de mercado distintos em cada uma delas (cenário de crise, de mudanças frequentes na estrutura da curva de juros e períodos de baixa volatilidade). A resposta dos modelos a cada um desses períodos também foi diferente, principalmente devido à escolha da janela de otimização, que define se o algoritmo irá capturar a dinâmica de curto ou longo prazo para estimar os parâmetros do modelo. Do ponto de vista de uma estratégia de investimento, os melhores resultados foram obtidos com o VAR(1) em dois dos

três períodos analisados, e isso foi constatado com base no percentual de acerto e no uso do *stop loss*. Porém, apesar de seus resultados serem inferiores ao VAR(1), o FKMV2 mostrou ser capaz de manter a qualidade preditiva por mais tempo do que o VAR(1), o que mostra que o modelo é bem especificado no sentido de capturar a dinâmica da curva, mas não é o modelo de mais adequado para gerar previsões.

## 6. Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo testar a qualidade de previsão da evolução das taxas de juros brasileira, utilizando o Filtro de Kalman aplicado ao Modelo Vasicek de 2 fatores (FKMV2) no formato de Espaço de Estados. Com foco em uma estratégia de investimento, definindo o sinal de compra ou venda a partir das previsões geradas, o modelo foi testado em diferentes períodos, de forma a verificar o comportamento do FKMV2 em situações de mercado distintas. Para testar sua acurácia, seus resultados foram comparados aos obtidos utilizando o Vetor Auto regressivo de ordem 1 (VAR(1)). As simulações foram realizadas alterando o tamanho da amostra utilizada para estimação dos parâmetros do modelo e o período em que esses parâmetros ficam inalterados, verificando assim, qual seria a melhor janela de otimização e por quanto tempo os parâmetros encontrados refletiriam o movimento da curva no período em questão. Os resultados obtidos indicam que períodos mais estáveis requerem janelas de otimização maior, enquanto que períodos de maior volatilidade necessitam de uma janela de otimização menor, fato que mostra a necessidade de se ter uma boa percepção do momento do mercado na hora de definir a amostra usada de forma a conseguir maximizar os ganhos. Com relação à janela de recalibragem, o intuito dessa análise foi de verificar a robustez do modelo, testando por quanto tempo os parâmetros estimados conseguem replicar a dinâmica das taxas de juros. Os resultados obtidos indicam que o FKMV2 necessita menos da recalibração do que o VAR(1), o que mostra que esse modelo replica melhor a dinâmica das taxas de juros.

De forma geral, os resultados apresentados utilizando o FKMV2, como modelo de previsão, foram inferiores aos obtidos pelo VAR(1), tanto do ponto de vista financeiro quanto pela análise dos indicadores de percentual de acerto e do uso do *stop loss*. Uma possível causa é o fato do modelo de Espaço de Estados para o cálculo da taxa de juros teórica assumir correlação positiva para todos os vencimentos, e conforme apresentado nas Figuras 1 e 2, isso não ocorre na prática. Apesar do FKMV2 apresentar performance inferior ao VAR(1) no uso dessa ferramenta para investimentos, vale destacar novamente que esse modelo se mostrou de certa forma mais consistente, pois uma vez encontrado os parâmetros ótimos, estes conseguem replicar a dinâmica das taxas de juros por mais tempo que o VAR(1), porém



conforme os resultados apresentados, não é o modelo mais adequado para gerar previsões.

Vale salientar novamente que entre as premissas das simulações, assumiu-se que não existe custo de transação e que é possível comprar e vender ao preço de fechamento qualquer contrato futuro de DI, o que não ocorre na prática. Como contribuição e direcionamento para futuros trabalhos, vale a pena citar a inclusão de custos de transação, desenvolver um modelo que consiga administrar o risco da carteira via *Component VaR*, ou Índice de *Sharp*.

## REFERÊNCIAS

Araujo, R. C: **Combinações de modelos de previsão da estrutura a termo da taxa de juros: Aplicações ao caso brasileiro**, 2011

Babbs S. H; Nowman B: **An application of generalized Vasicek term structure models to the UK gilt-edged market: a Kalman filtering analysis**, Applied Financial Economics, 637-644, 1998

Babbs, S. H.; Nowman, K. B. **Kalman filtering of generalized Vasicek term structure models**, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, v.34, n.1, p. 115-130, 1999.

Bartels, R. H.; Beatty, J. C.; and Barsky, B. A.: **Hermite and Cubic Spline Interpolation. Ch. 3 in An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modelling**. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, pp. 9-17, 1998.

Black, Fischer; Myron Scholes (1973). **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. *Journal of Political Economy* (3): 637–654, 1973.

Bjork, T., Christensen, B.J., 1999. **Interest rate dynamics and consistent forward rate curves**. *Mathematical Finance* 9, 323– 348.

Bolder; D. J: **Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation**, Working Paper, Bank of Canada, 2001

Brennan, M.J., and Schwartz, E.S.: **A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds**," *Journal of Banking and Finance*, 3, 2, 133-155, 1979.

Cavalcanti, R. A.: **Combinações de Modelos de Previsão da Estrutura a Termo de Taxa de Juros: Aplicações ao Caso Brasileiro**, Tese de Mestrado em economia da Universidade de Brasília, 2011.

Cavalcanti, L. C. J.: **Estratégia de investimento utilizando o modelo dinâmico de Nelson Siegel**, Tese de Mestrado em economia da Fundação Getulio Vargas 2013

Cairns, A.J.G., 1998. **Descriptive bond-yield and forward-rate models for the British government securities' market**. *British Actuarial Journal* 4, 265–321.

Cassola, N., Barros Luis, J., 2001. **A two-factor model of the German term structure of interest rates**. ECB Working Paper 46.

Chatterjee, R: **Application of the Kalman filter for estimating continuous time term structure models: Evidence from the UK Germany**, Department of economecs, university of Glasgow

Chen, R.; Scott, L. **Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates**, Journal of Fixed Income, v. 3, p. 14-31, 1993.

Chen, R.; Scott, L. **Multi-Factor Cox Ingersoll-Ross Models of term structure: Estimates and tests from a Kalman Filter Model**,

Christoffersen, P; Dorion C.; Jacobs, K; Karoui, L: **Nonlinear Kalman Filtering in affine term structure models**, Creates research paper, 2012-49

Cox, J. C.; Ingersoll, J. E.; Ross, S. A.: **A theory of the term structure of interest rates**. *Econometrica*, v. 52, n. 2, p. 385-407, 1985

Dai, Qiang; Singleton K,J: **Specification Analysis of Affine Term Structure Models**, Working Paper 6128, National Bureau of economic research, NBER Working Paper Series

Day, J.; Lange, R.: **The Structure of Interest Rates in Canada: Information Content about Medium-Term Inflation** , Working Paper 97-10, Bank of Canada, 1997

De Jong, F. **Time-series and cross-section information in affine term-structure models**, Journal of Business and Economic Statistics, v. 18, p. 3, 2000.

De Jong, F; Santa-Clara, P. **The Dynamics of the Forward interest rate curve: A formulation with state variables**, Journal of Financial and Quantitative Analysis, v. 34,No.1 p. 131-157, 1999.

De Rossi, G: **Kalman Filtering of consistent forward rate curves: a tool to estimate and model dynamically the term structure**, Journal of Empirical Finance, 277-308, 2004

Diebold, Francis X; Li,Canlin: **Forecasting the term structure of government bond yields**, Journal of econometrics 3130 (2006) 337-364, 2005

Diebold, F; Rudebusch, G; Aruoba, S: **The Macroeconomy and the Yield curve: a Dynamic Latent Aproach**, Journal of econometrics 131 309-338, 2006

Duffie, D; Singleton Kan **Econometric Model of the term Structure of interest rate swap yields**, Journal of Finance, Vol.52, 1287-1321, 1997

Durbin, J; Koopman, S. J: **Time series analysis by state space methods**, Oxford University Press, 2012

Duan, J.; Simonato, J. **Estimating and testing exponential-affine term structure models by Kalman filter**, Centre Interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Série Scientifique, p. 95s-44, 1996.

Duffee, G. R.; Stanton, R. **Estimation of dynamic term structure models**, Hass School of Business, Working paper, 2001.

Duffee, G. R. **Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models**, The Journal of Finance, Vol LVII, 2002.

Duffie, D. **Dynamic asset pricing theory**, 3rd Edition, Princeton University Press, 2001.

Duffie, D.; Kan, R. **A yield-factor model of interest rates**, Journal of Mathematical Finance, v. 6, p. 379-406, 1996.

Fernandes, R. P.: **Estrutura a termo da taxa de juros no Brasil e Previsibilidade de Ciclos Economicos**, Tese de Mestrado em economia da Fundação Getulio Vargas, 2010

Fong, H. G.: **Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor**, Working Paper: Gifford Fong Associates, 1992.

Gravelle, T; Morley, J. C: **A kalman filter approach to characterizing the Canadian term structure of interest rates**, Applied Financial Economics, 691-705, 2005

Grewal, M; Andrews A. P: **Kalman Filtering Theory and Practice** using Matlab, 2008

Harvey, A.: **Forecasting, structural time series models and the Kalman Filter**. Cambridge University, 1981

Heath, D.; Jarrow, R. e Morton, A.: **Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation**. *Econometrica*, n. 60, p. 77-105, 1992.

Javaheri, A; Galli, A: **Filtering in Finance**, Technical Article, Wilmott magazine

Hull, A; White, A: **Numerical procedures for implementing term structure models II: Two Factor Models**, The Journal of derivatives, 37-48, 1994

Hull, J: **Options, Futures and other derivatives**, 7th edition, 2009

Kacowicz, L: **Calibração do modelo Gibson-Schwartz para dados de commodities no Brasil**, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012

Kalman, R. E.; Bucy, R. S.: **New Results in Linear Filtering and Prediction Theory**. Journal of Basic Engineering, v. 83, p. 95-108, 1961.

Longstaff, F., Shwartz, E.: **Interest rate volatility and the term structure: A two factor general equilibrium**. *Journal of Finance* 48:1259-1282, 1992

Lutkepohl, Helmut. **New introduction to multiple time series analysis**. Springer, 2007

Markowitz, Harry.: **Portfolio selection**. Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

Mergner, S: **Application of state space models in finance**, Universitätsverlag Gottingen, 2009

Morita, R. H: **Emerging markets yield curve dynamics**, Tese de Mestrado em economia da Fundação Getulio Vargas, 2007

Nelson, C. R.; Siegel, A. F: **Parsimonious modeling of yield curves**. Journal of business, v. 60, n. 4, p. 473-489. 1987.

Pereira; M.H.R: **Estimativa de provisões de IBNR utilizando Espaço de Estados e Filtro de Kalman: Um caso brasileiro**, Tese de Mestrado em economia da Fundação Getulio Vargas, 2013

Uhlenbeck, G. E.; Ornstein, L. S: **On the theory of Brownian Motion"**. *Phys. Rev.* 36: 823–841, 1930

Racicot, F. E; Théoret,R: **Forecasting Stochastic Volatility Using the Kalman Filter: An Application to Canadian interest rates and price-earnings ratio**, Journal of Finance, 28-47, 2010

Ribeiro, P. F: **Estrutura a termo da taxa de juros no brasil e previsibilidade de ciclos economicos**, Tese de Mestrado em economia da Fundação Getulio Vargas 2010

Rosta, P; Théoret,R; Moussadek A. E: **Forecasting the interest rate term structure: Using the modelo f Fong&Vasicek**, the extended kalman filter and the Bollinger Bands

Schoof, H.W.A: **Previsao da taxa de juros utilizando o modelo de Vasicek**, Tese de Mestrado em economia da Fundação Getulio Vargas 2011

VASICEK, O. **An equilibrium characterization of the term structure**, Journal of Financial Economics v. 5, p. 177-88, 1977.

Wells, Curt: **The Kalman Filter in Finance**, University of Lund, Springer Science+ Business Media, 1996

WILMOTT, P. Derivatives: **The theory and practice of financial engineering**, Wiley, 1998.

## ANEXOS

### Modelo de 1 fator

Assumindo que a taxa de juros  $r_t$  instantânea segue o modelo de difusão dada por:

$$dr = f(r, t)dt + \sigma(r, t)dW(t) \quad (57)$$

Onde  $f(r, t)$  é o drift do processo,  $\sigma(r, t)$  é o desvio padrão e  $dW(t)$  um processo de Wiener.

Assumindo também um título de renda fixa como sendo função do instante  $t$ , vencimento em  $\tau$  e da taxa de juros  $r$  dado por  $Z(t, \tau)$  com a condição  $Z(\tau, \tau) = 1$  podemos achar a relação entre o preço desse título e o modelo de difusão proposto por Vasicek (1977).

Aplicando o teorema de Itô na função do preço do título de renda fixa descrito acima teremos uma equação diferencial da seguinte forma:

$$dZ(t, \tau) = Z_t dt + Z_r dr(t) + \frac{1}{2} Z_{rr} d(r, t) \quad (58)$$

Utilizando a equação (57) no segundo termo da equação (58):

$$= Z_t dl + Z_r (f dl + \sigma dW(l)) + \frac{1}{2} Z_{rr} \sigma^2 dl \quad (59)$$

$$= (Z_t + f Z_r + \frac{\sigma^2}{2} Z_{rr}) dt + \sigma Z_r dW(t) \quad (60)$$

A taxa de juros não é um ativo negociado diretamente, ou seja, ela deriva dos preços dos títulos negociados no mercado. Com base nessa premissa, consideramos um portfolio com dois títulos  $Z_1$  com vencimentos  $\tau_1$  e  $Z_2$  com vencimento  $\tau_2$  e quantidade desses títulos iguais a  $v_1$  e  $v_2$  respectivamente, podemos construir um portfólio autofinanciável denotado por  $V$  que possua o seguinte retorno:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = v_1 \frac{dZ_1(t, \tau_1)}{Z_1(t, \tau_1)} + v_2 \frac{dZ_2(t, \tau_2)}{Z_2(t, \tau_2)} \quad (61)$$

Substituindo (60) em (61) e depois rearranjando a equação:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{V(t)} = & \nu_1 \frac{(Z_{1,t} + fZ_{1,r} + \frac{\sigma^2}{2}Z_{1,rr})dt + \sigma Z_{1,r}dW(t)}{P_1(t, x_1)} \\ & + \nu_2 \frac{(Z_{2,t} + fZ_{2,r} + \frac{\sigma^2}{2}Z_{2,rr})dt + \sigma Z_{2,r}dW(t)}{P_2(t, x_2)} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \nu_1(\mu_{s1}dt + \delta_{s2}dW(t)) + \nu_2(\mu_{s2}dt + \delta_{s2}dW(t)) \quad (63)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \mu_{i=} & \frac{(Z_{i,t} + fZ_{i,r} + \frac{\sigma^2}{2}Z_{i,rr})}{P_i(t, x_i)} \\ \delta_{i=} & \frac{\sigma P_{i,r}}{P_i(t, x_i)} \end{aligned}$$

As variáveis acima representam a média e desvio padrão do preço de um título de renda fixa

Isolando os termos determinísticos e estocásticos, a equação (63) pode ser exibida da seguinte maneira:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = (\nu_1\mu_{s1} + \nu_2\mu_{s2})dt + (\nu_1\delta_{s1} + \nu_2\delta_{s2})dW(t) \quad (64)$$

Para anular o risco da carteira, é necessário impor as seguintes condições:

$$\nu_1 + \nu_2 = 1 \quad (65)$$

$$\nu_1\sigma_{s1} + \nu_2\sigma_{s2} = 0 \quad (66)$$

Resolvendo as equações (65) e (66) as soluções para  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são:

$$\nu_1 = \frac{-\sigma_{s2}}{\sigma_{s1} - \sigma_{s2}} \quad (67)$$

$$\nu_2 = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s1} - \sigma_{s2}} \quad (68)$$

Com as condições acima, encontramos as quantidades  $\nu_1$  e  $\nu_2$  representadas por (67) e (68) de forma a eliminar a fonte de incerteza. Portanto o portfólio possui apenas o retorno referente à parcela determinística ligada ao tempo. Para que não



haja oportunidade de arbitragem, essa parcela determinística deve ter rendimento igual ao da taxa livre de risco. É com essa nova condição que o conceito de *market price of risk* surge, pois ela nada mais é que o prêmio a ser recebido por estar com um título com risco de taxa de juros.

Seguindo o raciocínio acima temos:

$$\frac{dV}{V} = r dt \quad (69)$$

$$\left( \frac{-\sigma_{s2}}{\sigma_{s1} - \sigma_{s2}} \mu_{s1} + \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s1} - \sigma_{s2}} \mu_{s2} \right) dt = r dt \quad (70)$$

$$\frac{\mu_{s2} - r}{\sigma_{s2}} = \frac{\mu_{s1} - r}{\sigma_{s1}} = \lambda \quad (71)$$

Da equação (71) é fácil verificar que o *market price of risk*, denotado por  $\lambda$ , é um parâmetro constante e independe do vencimento do título.

Manipulando a equação (71) finalmente obtemos a equação diferencial que descreve a dinâmica da taxa de juros de um modelo de 1 fator.

$$\mu_t - r = \lambda \sigma_t \quad (72)$$

Utilizando a definição de  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  a equação (66) fica na forma:

$$\frac{(Z_t + fZ_r + \frac{\sigma^2}{2} Z_{rr})}{Z} - r = \lambda \delta \frac{Z_r}{Z} \quad (73)$$

E finalmente:

$$Z_t + (f - \delta\lambda)Z_r + \frac{\delta^2}{2}Z_{rr} - rZ = 0 \quad (74)$$

Finalmente, uma solução para a equação (74) é:

$$Z(t, \tau) = e^{A(t, \tau) - B(t, \tau)r_t} \quad (75)$$

Onde  $A(t, \tau)$  e  $B(t, \tau)$  são dados por:

$$B(t, \tau) = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(\tau-t)}) \quad (76)$$

$$A(t, \tau) = \frac{\gamma(B(t, \tau) - (\tau - t))}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 B(t, \tau)}{4\kappa} \quad (77)$$

$\gamma$  e  $\lambda$  são definidos por:

$$\gamma = \kappa^2 \left( \theta - \frac{\sigma \lambda}{\kappa} \right) - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\lambda = \frac{\mu_s - r}{\sigma_s}$$

## Códigos MatLab

### Estrategia\_stop\_loss.m

```

%% Este código gera os resultados com base no Filtro de Kalman aplicado ao
modelo Vasicek de dois fatores

clear all
%
%carrega os dados para a simulação ( curvas, contratos e CDI)
load('C:\Mestrado\diSSERTacao\diSSERTacao_fim.mat');

% este trecho define o periodo da simulação
data_inicio='01/03/2012';
data_fim='01/03/2014';
janela=126; %janela de otimização para estimar os parâmetros do modelo
Vasicek de dois fatores
parada=5; %janela na qual os parametros ficarão fixados na simulação

% Retira a amostra do periodo definido no trecho acima
teste=datenum(data_inicio,'dd/mm/yyyy');
teste2=datenum(data_fim,'dd/mm/yyyy');
aux=find(taxas(:,1)>teste & taxas(:,1)<teste2);

    if aux(1)-janela<0
        aux_inicio=aux(1);
    else
        aux_inicio=aux(1)-janela;
    end

aux_fim=aux(end);
aux=aux_inicio:1:aux_fim;
base_datas_graf=taxas(aux_inicio+janela:aux_fim,1);
taxas=taxas(aux,:);
[nrow, ncol] = size(taxas(:,2:end));

parada_stop_loss=3; %definição dos passos para o critério de stop loss

%inicialização das variáveis
ypred=zeros(nrow-janela,ncol);
j=1;
z=1; %variável a ser utilizada no contador para realizar a otimização
pnl=zeros(nrow-janela,41);
base_vol=zeros(nrow-janela,ncol);
base_vol_aux=vol(aux,2:end);
parametros=zeros(nrow-janela,8+ncol);
mean_ret=zeros(ncol,1);
pnl_total=zeros(nrow-janela,1);
tenors_antes=zeros(ncol,3);
tenors_depois=zeros(ncol,3);
tenors_prev_antes=zeros(ncol,3);
tenors_prev_depois=zeros(ncol,3);
tenors_antes(:,2)=database';
tenors_depois(:,2)=database';
tenors_prev_antes(:,2)=database';
tenors_prev_depois(:,2)=database';
notional=1000000;

```

```

teste_acerto=zeros(nrow-janela,41);
backtest_count=zeros(nrow-janela,ncol);
base_stop_loss=zeros(parada_stop_loss,41);
base_acerto=zeros(parada_stop_loss,41);
stop_loss_est=1;

%este loop faz a varredura no periodo definido no inicio do código
for i=janela:nrow-2

    Y=taxas((i-janela+1:i+2),2:end); %retira a amostra para otimizar os
    %parametros do modelo com base na janela de otimização
    basedatas=taxas((i-janela+1:i+2),1);
    if i==janela
        theta=[0.074,0.18332,0.234,0.17,0.0882,0.0008,-0.9,-
0.98,0.1*rand(1,ncol).*ones(1,ncol)]; %chute inicial na primeira iteração
        parametros(i,:)=theta;
    else
        theta=x_uso; %depois da primeira iteração o chute inicial é baseado
    %nos parâmetros encontrados no passo anterior
        parametros(i,:)=theta;
    end

    [nrow1, ncol1] = size(Y);
    if i==janela %força a estimar os parametros na primeira iteração
        %o procedimento abaixo estima os parametros com base na amostra
        %dada maximizando o log da verossimilhança

    [yfilt,x_uso,ypred(j,:),Variancia]=Otimizacao_FK_Vasicek(janela,Y(1:janela,
:),theta,datas);
        z=z+1;
    else
        %a otimização será feita quando o contador iniciar novamente, caso
        %contrário será feito somente a estimação das taxas com base nos
        %parametros encontrados na última otimização
        if z==1

    [yfilt,x_uso,ypred(j,:),Variancia]=Otimizacao_FK_Vasicek(janela,Y(1:janela,
:),theta,datas);
        else
            [sum11,
yfilt,ypred(j,:),Variancia]=Kalman_Vasicek(theta,Y(1:janela,:), datas,
nrow1-2, ncol1,1);
        end
        if z==parada;
            z=0;
        end

        z=z+1;
    end

    base_vol(j,:)=base_vol_aux(i+2,:);
    %esses vetores recebem a data na qual a simulação está e no passo
    %seguinte
    tenors_prev_antes(:,1)=taxas(i,1);
    tenors_prev_depois(:,1)=taxas(i+1,1);
    tenors_antes(:,1)=tenors_prev_antes(:,1);
    tenors_depois(:,1)=tenors_prev_depois(:,1);

    %carrega com as estimativas geradas no passo atual e no passo seguinte
    tenors_prev_depois(:,3)=ypred(j,:);

```

```

tenors_prev_antes(:,3)=yfilt(janela,:);
tenors_antes(:,3)=Y(janela,:);
tenors_depois(:,3)=Y(janela+1,:);

xx = 1:1:database(end);
taxas_int_prev_antes=zeros(database(end),2);
taxas_int_prev_depois=zeros(database(end),2);
taxas_int_antes=zeros(database(end),2);
taxas_int_depois=zeros(database(end),2);

taxas_int_prev_antes(:,1)=xx;
taxas_int_prev_depois(:,1)=xx;

taxas_int_antes(:,1)=xx;
taxas_int_depois(:,1)=xx;

%interpolação das taxas com base nos vértices definidos e as taxas
%estimadas no passo atual

taxas_int_prev_antes(:,2)=spline(tenors_prev_antes(:,2),tenors_prev_antes(:,3),xx);

taxas_int_prev_depois(:,2)=spline(tenors_prev_depois(:,2),tenors_prev_depois(:,3),xx);
%interpolação das taxas com base nos vértices definidos e as taxas
%estimadas no passo seguinte
taxas_int_antes(:,2)=spline(tenors_antes(:,2),tenors_antes(:,3),xx);
taxas_int_depois(:,2)=spline(tenors_depois(:,2),tenors_depois(:,3),xx);
%calcula o fator acumulado CDI para o cálculo do carregio
cdi_antes=find(fatorcdi(:,1)==basedatas(janela));
cdi_depois=find(fatorcdi(:,1)==basedatas(janela+1));
carry=fatorcdi(cdi_depois,2)/fatorcdi(cdi_antes,2);
%busca os contratos futuros de DI da database do passo atual
ref_date_di_antes=find(baseFut(:,1)==basedatas(janela));
dil_aux=baseFut(ref_date_di_antes,2:end);
available_dil=find(dil_aux(:,1)>5 & dil_aux(:,1)<=database(end));

base_calc=dil_aux(available_dil,:);
[nrow_aux, ncol_aux]=size(base_calc);
qde=notional/nrow_aux;
% calcula o cdi acumulado dos 3 passos anteriores para o critério de
% stop loss
cdi_antes_stop=find(fatorcdi(:,1)==basedatas(janela-3));
cdi_depois_stop=find(fatorcdi(:,1)==basedatas(janela));
fator_cdi_stop=fatorcdi(cdi_depois,2)/fatorcdi(cdi_antes,2)-1;

% para cada contrato existentes calcula o resultado
for w=1:nrow_aux
    if base_stop_loss(end,w)>-fator_cdi_stop*0.3 &&
base_acerto(end,w)<parada_stop_loss

        if
taxas_int_prev_antes(base_calc(w,1),2)<taxas_int_prev_depois(base_calc(w,1),2)

pn1(j,w)=carry*qde/((1+taxas_int_antes(base_calc(w,1),2))^(taxas_int_antes(base_calc(w,1),1)/252))-qde/((1+taxas_int_depois(base_calc(w,1),2))^(taxas_int_depois(base_calc(w,1),1)/252));
        if pn1(j,w)<0

```

```

        teste_acerto(j,w)=1;
    end
    else
        pnl(j,w)=-
        carry*qde/((1+taxas_int_antes(base_calc(w,1),2))^(taxas_int_antes(base_calc
(w,1),1)/252))+qde/((1+taxas_int_depois(base_calc(w,1),2))^(taxas_int_ante
s(base_calc(w,1),1)-5)/252));
        if pnl(j,w)<0
            teste_acerto(j,w)=1;
        end
    end
    else
        pnl(j,w)=qde*(carry-1)*0;
        backtest_count(j,w)=1;
    end

end

pnl_total(j)=sum(pnl(j,:)); %calcula o resultado total do passo atual
if j>parada_stop_loss+1
    base_stop_loss=cumsum(pnl(j-parada_stop_loss+1:j,:)); %calcula o
    resultado para a comparação do critério de stop loss
    base_acerto=cumsum(teste_acerto(j-parada_stop_loss+1:j,:));
end

j=j+1;
end
pnl_acumul_vasicek=cumsum(pnl_total);
acumul=cumsum(pnl);
xlswrite('resultado_hist.xlsx',pnl);
xlswrite('resultado_acerto.xlsx',teste_acerto);
xlswrite('resultado_backtest.xlsx',backtest_count);

figure(1)
subplot(2,2,[1 3]);
plot(acumul);
title('P&L acumulado por vetor')
xlabel({'instante'});
ylabel({'P&L'});

subplot(2,2,2);
plot(pnl_acumul_vasicek);
title('P&L acumulado período')
xlabel({'instante'});
ylabel({'P&L'});

subplot(2,2,4);
plot(pnl_total);
title('P&L por instante de tempo')
xlabel({'instante'});
ylabel({'P&L'});

%%
testetaxas=taxas(janela:end,:);
%
figure(2)
subplot(2,1,1);

```

```

plot(testetaxas(:,2:end)*100);
xlabel({'passo'});
title('taxas (% a.a)')
ylabel({'%(a.a)'});
legend('show');
%
subplot(2,1,2);
plot(base_vol(:,:)*100);
xlabel({'passo'});
title('volatilidade (% a.a)')
ylabel({'%(a.a)'});
legend('show');

```

## Otimizacao\_FK\_Vasicek.m

```

[yfilt_fim,x,ypred,Variancia,xfilt]=Otimizacao_FK_Vasicek(janela,Y,theta,datas)

```

```

%função que maximiza o log da verossimilhança
%inputs:
%janela: quantidade amostra que será a base para encontrar os parametros do modelo
% Y: amostra que será utilizada para encontrar os parametros do modelo
%theta: chute inicial dos parametros
%datas: vértices das taxas de juros

```

```

%inicialização das variáveis

```

```

[nrow, ncol] = size(Y);

```

```

[nrow1, ncol1] = size(theta);
yfilt=zeros(janela,ncol);
yfilt_fim=zeros(janela,ncol);
x=zeros(1,ncol1);

```

```

tau=datas;
[nrow, ncol] = size(Y);

```

```

%restrições para a minimização
lb=[0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,-1,-1, 0.00001*ones(1,ncol)];
ub=[ones(1,8)*10,ones(1,(ncol))];
opt=optimset('fmincon');

```

```

opt=optimset(opt,'Algorithm','interior-point','Display','iter-detailed','MaxIter', 2500,'TolX', 1e-10);
para0=theta;

```

```

[x,fval]=fmincon(@Kalman_Vasicek,para0,[],[],[],[],lb,ub,[],opt,Y,tau,nrow, ncol,1);

```

```

%utiliza os parâmetros encontrados na otimização para estimar as taxas
[ll, yfilt_fim,ypred,Variancia,xfilt]=Kalman_Vasicek(x,Y, tau, nrow, ncol,1);

```

## Kalman\_Vasicek.m

```

[sumll, yfilt,ypred,Variancia,xfilt]=Kalman_Vasicek(para,Y, tau, nrow,
ncol,tipo)
%Filtro de Kalman

theta1=para(1);
theta2=para(2);
kappa1=para(3);
kappa2=para(4);
if tipo==1
    sigma1=para(5);
    sigma2=para(6);
else
    sigma1=exp(para(5));
    sigma2=exp(para(6));
end
sumll=0;
lambda1=para(7);
lambda2=para(8);
if tipo==1
    sigma1=para(9:end);
else
    sigma1=exp(para(9:end));
end
R=eye(ncol);
for i=1:ncol
    R(i,i)=sigma1(i)^2;
end
dt=5/252;

C1=theta1*(1-exp(-kappa1*dt));
C2=theta2*(1-exp(-kappa2*dt));
C=[C1;C2];
F1 = exp(-kappa1*dt);
F2 = exp(-kappa2*dt);
F=[F1 0;0 F2];

A = zeros(ncol, 1);
H = zeros(ncol, 2);
xfilt=zeros(nrow,1);

for i = 1:ncol
    AffineG1=kappa1^2*(theta1-(sigma1*lambda1)/kappa1)-sigma1^2/2;
    AffineG2=kappa2^2*(theta2-(sigma2*lambda2)/kappa2)-sigma2^2/2;
    AffineB1=1/kappa1*(1-exp(-kappa1*tau(i)));
    AffineB2=1/kappa2*(1-exp(-kappa2*tau(i)));
    AffineA1=AffineG1*(AffineB1-tau(i))/kappa1^2-
(sigma1^2*AffineB1^2)/(4*kappa1);
    AffineA2=AffineG2*(AffineB2-tau(i))/kappa2^2-
(sigma2^2*AffineB2^2)/(4*kappa2);% eqn a.4
    A(i)=-(AffineA1+AffineA2)/tau(i);
    H(i,1)=AffineB1/tau(i);
    H(i,2)=AffineB2/tau(i);
end

initx=[theta1; theta2];

Q1=sigma1*sigma1*(1-exp(-2*kappa1*dt))/(2*kappa1);

```



```

Q2=sigma2*sigma2*(1-exp(-2*kappa2*dt))/(2*kappa2);
Q=[Q1 0;0 Q2];

AdjS=initx;
VarS=Q;
LL=zeros(nrow,1);
yfilt=zeros(nrow,ncol);

for i=1:nrow
    PredS=C+F*AdjS;

    VarS=F*VarS*F'+Q;

    PredY=A+H*PredS;
    VarY=H*VarS*H'+R;

    PredError=Y(i,:)-PredY';
    KalmanGain=VarS*H'/VarY;
    AdjS=PredS+KalmanGain*PredError';
    VarS=(eye(length(C))-KalmanGain*H)*VarS;
    yfilt(i,:)=PredY';

    DetY=det(VarY);
    LL(i)=- (ncol/2)*log(2*pi)-0.5*log(abs(DetY))-
0.5*PredError*inv(VarY)*PredError'; % eqn c.12
    if i==nrow-1
        teste=1;
    end
    xfilt(i)=AdjS(1)+AdjS(2);
    if i==nrow
        PredS=C+F*AdjS;
        ypred=A+H*PredS;
        Variancia=H*VarS*H';
    end
end
ypred=ypred';
sumll = -sum(LL);
end

```

### GeraVar\_estrategia\_stop\_loss.m

```

%clear all
%Este código gera os resultados com base no Filtro de Kalman aplicado ao
modelo Vasicek de dois fatores

%carrega os dados para a simulação

load('C:\Mestrado\diSSERTacao\diSSERTacao_fim.mat');

janela=126; %janela de otimização para estimar a matriz dos coeficientes
do vetor auto-regressivo
parada=5; %janela na qual os parametros ficarão fixados na simulação

% este trecho define o periodo da simulação
data_inicio='01/03/2012';
data_fim='01/03/2014';

% Retira a amostra do periodo definido no trecho acima

```

```

teste=datenum(data_inicio,'dd/mm/yyyy');
teste2=datenum(data_fim,'dd/mm/yyyy');
aux=find(taxas(:,1)>(teste) & taxas(:,1)<teste2);

if aux(1)-janela<0
    aux_inicio=aux(1);
else
    aux_inicio=aux(1)-janela;
end
aux_fim=aux(end);
aux=aux_inicio:1:aux_fim;
taxas=taxas(aux,:);

parada_stop_loss=3;    %definição dos passos para o critério de stop loss
[nrow, ncol] = size(taxas(:,2:end));

%inicialização das variáveis
ypred=zeros(nrow-janela,ncol);
pnl=zeros(nrow-janela,41);
backtest_count=zeros(nrow-janela,ncol);
pnl_total=zeros(nrow-janela,1);
tenors_antes=zeros(ncol,3);
tenors_depois=zeros(ncol,3);
tenors_prev_antes=zeros(ncol,3);
tenors_prev_depois=zeros(ncol,3);
tenors_antes(:,2)=database';
tenors_depois(:,2)=database';
tenors_prev_antes(:,2)=database';
tenors_prev_depois(:,2)=database';
notional=1000000;
teste_acerto=zeros(nrow-janela,41);

base_stop_loss=zeros(parada_stop_loss,41);
base_acerto=zeros(parada_stop_loss,41);

j=1;
z=1; %variável a ser utilizada no contador para realizar a otimização

%este loop faz a varredura no periodo definido no inicio do código
beta_zero=zeros(ncol,ncol+1);
for i=janela:nrow-2

    Y=taxas((i-janela+1:i+2),2:end);    %retira a amostra para otimizar os
    %parametros do modelo com base na janela de otimização
    basedatas=taxas((i-janela+1:i+2),1);
    if i==janela
        [beta_ini, ypred, FPE,
AIC,HQ,SC]=estimvar_estrat(Y(1:janela,:),1,1,beta_zero,z);
        beta=beta_ini;
        z=z+1;
    else
        [beta_uso, ypred, FPE,
AIC,HQ,SC]=estimvar_estrat(Y(1:janela,:),1,1,beta,z); %depois da primeira
        %iteração a matriz de coeficientes é baseada no passo anterior
        z=z+1;
    end
    if z==parada;
        beta=beta_uso;
        z=1;
    end
end

```

```

end

%esses vetores recebem a data na qual a simulação está e no passo
seguinte
tenors_prev_antes(:,1)=taxas(i,1);
tenors_prev_depois(:,1)=taxas(i+1,1);
tenors_antes(:,1)=tenors_prev_antes(:,1);
tenors_depois(:,1)=tenors_prev_depois(:,1);

%carrega com as estimativas geradas no passo atual e no passo seguinte
tenors_prev_depois(:,3)=ypred(end,:);
tenors_prev_antes(:,3)=ypred(end-1,:);
tenors_antes(:,3)=Y(janela,:);
tenors_depois(:,3)=Y(janela+1,:);

xx = 1:1:database(end);
taxas_int_prev_antes=zeros(database(end),2);
taxas_int_prev_depois=zeros(database(end),2);
taxas_int_antes=zeros(database(end),2);
taxas_int_depois=zeros(database(end),2);

taxas_int_prev_antes(:,1)=xx;
taxas_int_prev_depois(:,1)=xx;

taxas_int_antes(:,1)=xx;
taxas_int_depois(:,1)=xx;

%interpolação das taxas com base nos vértices definidos e as taxas
%estimadas no passo atual
taxas_int_prev_antes(:,2)=spline(tenors_prev_antes(:,2),tenors_prev_antes(:,3),xx);

taxas_int_prev_depois(:,2)=spline(tenors_prev_depois(:,2),tenors_prev_depois(:,3),xx);
%interpolação das taxas com base nos vértices definidos e as taxas
%estimadas no passo seguinte
taxas_int_antes(:,2)=spline(tenors_antes(:,2),tenors_antes(:,3),xx);
taxas_int_depois(:,2)=spline(tenors_depois(:,2),tenors_depois(:,3),xx);

%calcula o fator acumulado CDI para o cálculo do carregamento
cdi_antes=find(fatorcdi(:,1)==basedatas(janela));
cdi_depois=find(fatorcdi(:,1)==basedatas(janela+1));
carry=fatorcdi(cdi_depois,2)/fatorcdi(cdi_antes,2);

%busca os contratos futuros de DI da database do passo atual
ref_date_di_antes=find(baseFut(:,1)==basedatas(janela));
dil_aux=baseFut(ref_date_di_antes,2:end);
available_dil=find(dil_aux(:,1)>5 & dil_aux(:,1)<=database(end));
base_calc=dil_aux(available_dil,:);
[nrow_aux, ncol_aux]=size(base_calc);
qde=notional/nrow_aux;

% calcula o cdi acumulado dos 3 passos anteriores para o critério de
% stop loss
cdi_antes_stop=find(fatorcdi(:,1)==basedatas(janela-3));
cdi_depois_stop=find(fatorcdi(:,1)==basedatas(janela));
fator_cdi_stop=fatorcdi(cdi_depois,2)/fatorcdi(cdi_antes,2)-1;

```

```

    % para cada contrato existentes calcula o resultado
    for w=1:nrow_aux
        if base_stop_loss(end,w)>-fator_cdi_stop*0.3 &&
base_acerto(end,w)<parada_stop_loss
            if
taxas_int_prev_antes(base_calc(w,1),2)<taxas_int_prev_depois(base_calc(w,1)
,2)

pnl(j,w)=carry*qde/((1+taxas_int_antes(base_calc(w,1),2))^(taxas_int_antes(
base_calc(w,1),1)/252))-qde/((1+taxas_int_depois(base_calc(w,1)-
5,2))^(taxas_int_antes(base_calc(w,1),1)-5)/252));
                if pnl(j,w)<0
                    teste_acerto(j,w)=1;
                end
            else
                pnl(j,w)=-
carry*qde/((1+taxas_int_antes(base_calc(w,1),2))^(taxas_int_antes(base_calc
(w,1),1)/252))+qde/((1+taxas_int_depois(base_calc(w,1),2))^(taxas_int_ante
s(base_calc(w,1),1)-5)/252));
                if pnl(j,w)<0
                    teste_acerto(j,w)=1;
                end
            end
        else
            pnl(j,w)=qde*(carry-1)*0;
            backtest_count(j,w)=1;
        end
    end

    pnl_total(j)=sum(pnl(j,:));    %calcula o resultado total do passo
    atual
    if j>parada_stop_loss+1
        base_stop_loss=cumsum(pnl(j-parada_stop_loss+1:j,:));    %calcula o
resultado para a comparação do critério de stop loss
        base_acerto=cumsum(teste_acerto(j-parada_stop_loss+1:j,:));
    end

    j=j+1;

end

pnl_acumul_var=cumsum(pnl_total);
acumul=cumsum(pnl);
xlswrite('resultado_hist_var.xlsx',pnl);
xlswrite('resultado_acerto_var.xlsx',teste_acerto);
xlswrite('resultado_backtest_var.xlsx',backtest_count);

figure(3)
subplot(2,2,[1 3]);
plot(acumul);
title('P&L acumulado por vetor')
xlabel({'passo'});
ylabel({'P&L'});

subplot(2,2,2);
plot(pnl_acumul_var);

```

```

title('P&L acumulado período')
xlabel({'passo'});
ylabel({'P&L'});

subplot(2,2,4);
plot(pnl_total);
title('P&L por instante de tempo')
xlabel({'passo'});
ylabel({'P&L'});

```

### estimvar\_estrat.m

```

[ beta, Yhat, critFPE, critAIC, critHQ, critSC ] = estimvar_estrat( Y, p,
h,beta_ini,parada )
    %Inputs:
    %Y série das variáveis
    %p Ordem do VAR
    %h horizonte do forecast

    %Outputs:
    %beta estimadores dos interceptos e coeficientes do modelo VAR(p)

    %Yhat forecast do processo

    time_horizon=size(Y,1);
    t=time_horizon-p; % T horizonte de tempo das séries estimadas
    num_series=size(Y,2); % K variáveis

    z_linha=ones(t+h,num_series*p+1); %cria a matriz z(transposta) de 1's
de acordo com o tamanho T da série, qde de lags e o horizonte de forecast h
    ytemp=zeros(t,num_series); %vetor auxiliar do Yhat (estimação das
séries)
    beta=zeros(num_series,num_series*p+1); % matriz dos interceptos +
coeficientes
    ytemp=Y(p+1:end,:);
    Yhat=zeros(t+h,num_series); %matriz de saída com os valores estimados

    %processo de criação da matriz Z(transposta)
    j=2; % o processo começa a partir da coluna 2 ( coluna 1 é a coluna de
1's)
    while j<size(z_linha,2)
        for k=1:num_series
            w=0;
            for i= p:-1:1 % para cada série k a coluna j da matriz recebe
um bloco de uma dada série deslocando um periodo para trás começando em p
                z_linha(1:t+1,j)=Y((i):(end-w),k);
                j=j+1;
                w=w+1;
            end
        end
    end

    % cálculo do beta
    beta=(ytemp'*z_linha(1:t,:))/(z_linha(1:t,:)'*z_linha(1:t,:));

    % cálculo dos valores estimados (exceto o forecast)
    if parada==1;

```

```

        Yhat(1:t,:) = z_linha(1:t,:) * beta';
    else
        Yhat(1:t,:) = z_linha(1:t,:) * beta_ini';
    end

    % processo de cálculo do forecast de t+1 até t+h
    if h > 0
        % como a matriz Z utiliza os dados até t, a linha abaixo calcula o
Y        % estimado utilizando o último ponto de cada série fornecido pela
matriz Y
        if parada == 1;
            Yhat(1:t+1,:) = z_linha(1:t+1,:) * beta';
        else
            Yhat(1:t+1,:) = z_linha(1:t+1,:) * beta_ini';
        end
        % a rotina abaixo completa a matriz Z somente com os dados de
forecast
        % essa rotina primeiro preenche com os dados da linha anterior,
deslocando essa linha de Zn para Zn+1, e utiliza o
        % novo dado apenas na primeira coluna de uma dada série,
        % repetindo esse processo até o ponto t+h
        m = t + 2;
        for i = 1:h-1
            n = 2;
            for k = 1:num_series
                for j = 1:p
                    if j == 1
                        % qdo j == 1 acrescenta com o último valor estimado
                        z_linha(m,n) = Yhat(m-1,k);
                    else
                        % qdo j > 1 pega o vetor z da linha e coluna
anteriores
                        z_linha(m,n) = z_linha(m-1,n-1);
                    end
                    n = n + 1;
                end
            end
            if parada == 1;
                Yhat(t+i+1,:) = z_linha(m,:) * beta';
            else
                Yhat(t+i+1,:) = z_linha(m,:) * beta_ini';
            end
            m = m + 1;
        end
    end

    % cálculo da matriz de covariância
    SigmaU = (1/t) * ytemp' * (eye(t) -
(z_linha(1:t,:) / (z_linha(1:t,:) * z_linha(1:t,:))) * z_linha(1:t,:)') * ytemp;

end

```