



APLICAÇÃO DO ESTUDO DE FILAS : FILAS DE AERONAVES EM AEROPORTOS - ESTUDO DE CASO DO AEROPORTO DE CONGONHAS

JAIR PEREIRA DOS SANTOS

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA À
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DA
FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ADMINISTRAÇÃO**

ORIENTADOR :

**PROF. DR. PIERRE JACQUES EHRLICH
PROFESSOR DO DEPARTAMENTO DE
MÉTODOS QUANTITATIVOS E INFORMÁTICA DA
FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS**

- São Paulo , 1984 -



Fundação Getúlio Vargas
Escola de Administração
de Empresas de São Paulo
Biblioteca



1708/85



1198501708

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Pierre Jacques Ehrlich, meus agradecimentos pela orientação, encorajamento constante e profunda amizade.

Aos Professores e amigos da Fundação Getúlio Vargas: Norberto, Moriz, Samuel, Celeste, Mariotto, Mário e Ricardo, pelo apoio e incentivo, além das inúmeras discussões sobre filas de aeronaves que me proporcionaram, e, portanto, muito contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Professor e amigo Jorge Leal Medeiros, da EPUSP que foi meu mestre em operações de Aeroportos, além de me ceder uma cópia de sua Tese de Doutorado sobre capacidade de Pistas, que muito me auxiliou na realização deste trabalho.

Ao Professor Nicolau D.F. Gualda, da EPUSP, e engenheiro da COPASP, pelas discussões a respeito do Tema e incentivos.

A todo o pessoal do Serviço Regional de Proteção ao Vôo que direta ou indiretamente tem sua parcela de contribuição para com este trabalho, em especial aos Tenentes: Bizotto, Pelatti, Ferreira e Dalmar por terem me auxiliado na coleta de dados da Torre de Controle e da sala de Controle Radar do Aeroporto de Congonhas, São Paulo. Ao Capitão Teramoto, Chefe do Departamento de Estatística do SRPV que me forneceu os dados necessários, além de me proporcionar inúmeras discussões sobre tráfego aéreo. Aos Sargentos: Marcelino e Clério pelo apoio e amizade. Todos eles foram meus mestres em tráfego aéreo e operações em Aeroportos.

Aos colegas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo: Galvão, Nelson, Marcos e Flávio, pelas inúmeras discussões sobre metodologias e modelos de filas.

À Terezinha, grande amiga, minha mestra em Estatística, que me auxiliou nos testes de aderência e fez a revisão em Estatística.

Aos colegas, Professores da Faculdade de Engenharia Mauá: Melvin, André, Fernando e Abraham, pela amizade e contribuições com as discussões de Estatística, Processamento de Dados e Pesquisa Operacional, necessárias

a este trabalho.

Ao colega Martinelli, Engenheiro da ESCA, pelas discussões a respeito de filas de Aeronaves, além de haver me cedido cópias do trabalho da FEA [2], sua dissertação de Mestrado [3] e as frequências dos desvios nas chegadas e nas saídas de aeronaves, que muito contribuiu para a realização deste trabalho.

À Faculdade de Engenharia Mauã, em especial ao colega Professor Amadeu, do Departamento de Publicações, pela contribuição na publicação de alguns exemplares adicionais desta monografia.

Ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira, dedicado funcionário do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo que datilografou os originais e muito me auxiliou na construção dos gráficos e tabelas necessárias.

A Oscar e Honória, pais, que muito me estimularam.

Aos meus filhos, Janaína, Ivan e Anaí, pela compreensão à minha desatenção para com eles, principalmente no final, quando tive de dedicar a maior parte do tempo ao término deste trabalho.

CONTEÚDO

| | |
|--|----|
| RESUMO. | vi |
| Cap. 1. OPERAÇÕES DE POUSOS E DECOLAGENS EM AEROPORTOS. | 1 |
| 1.1. Aviões, Aeroportos e Tempos. | 1 |
| 1.2. Controle de Tráfego Aéreo. | 3 |
| 1.3. Regras de Tráfego Aéreo. | 5 |
| 1.4. Separações | 7 |
| 1.5. Conclusões Relevantes para as Filas. | 13 |
| Cap. 2. INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FILAS | 16 |
| 2.1. Terminologia | 16 |
| 2.2. A Importância da Distribuição Exponencial para um sistema de Filas. | 18 |
| 2.3. O Processo de Nascimento e Morte | 28 |
| 2.4. Modelos de Filas baseado no Processo de Nascimento e Morte. | 34 |
| Cap. 3. APLICAÇÃO DO MODELO ÀS FILAS DE AERONAVES | 41 |
| 3.1. Revisão Bibliográfica. | 41 |
| 3.2. As duas Formas de ver o Problema | 42 |
| 3.3. As justificativas da Aplicação do Modelo | 43 |
| Cap. 4. O MODELO DE FILAS SIMPLES | 49 |
| 4.1. A Fila Aérea | 49 |
| 4.2. A Fila do Solo | 51 |
| 4.2.1. Primeiro caso: Sem Intercalações. | 52 |
| 4.2.2. Segundo caso: Intercalações sempre Possíveis. | 57 |
| 4.2.3. Terceiro caso: Só é Possível uma Porcentagem α de Intercalações. | 61 |
| 4.3. As Curvas de Isodemora | 63 |
| Cap. 5. A FILA DUPLA. | 70 |
| 5.1. O Modelo de Koopman. | 70 |
| 5.1.1. A Fila Simples. | 71 |
| 5.1.2. A Fila Dupla. | 72 |
| 5.1.3. Os Inconvenientes do Modelo de Koopman. | 76 |
| 5.2. A Fila Dupla Simplificada. | 77 |
| 5.2.1. Primeiro caso: Sem Intercalações. | 77 |
| 5.2.2. Segundo caso: Intercalações Sempre Possíveis. | 83 |
| 5.2.3. Terceiro caso: Apenas uma Porcentagem α de Intercalações são Possíveis | 87 |
| 5.3. Conclusões Relativas ao Modelo de Fila Dupla | 87 |
| Cap. 6. COMPARAÇÕES E VALIDAÇÃO DO MODELO | 89 |
| 6.1. A Taxa de Chegada na Fila Aérea. | 90 |
| 6.2. A Taxa de Chegada na Fila do Solo. | 91 |
| 6.3. Os Tempos de Espera. | 92 |

| | |
|---|-----|
| 6.4. As Taxas de Atendimento. | 93 |
| 6.5. A Porcentagem de Intercalações de decolagens entre Aterrissagens Sucessivas | 95 |
| 6.6. Tempos de Espera obtidos pela Aplicação do Modelo. | 95 |
| 6.6.1. Tempos de Espera do dia 08/04/1983. | 96 |
| 6.6.2. Tempos de Espera do dia 14/04/1983. | 98 |
| 6.6.3. Tempos de Espera do dia 14/02/1984. | 99 |
| 6.6.4. Tempos de Espera em 23/02/1984. | 100 |
| 6.7. Comparações. | 102 |
| 6.7.1. Comparações dos Tempos em 08/04/1983. | 102 |
| 6.7.2. Comparações dos Tempos em 14/04/1983. | 103 |
| 6.7.3. Comparações dos Tempos em 14/02/1984. | 104 |
| 6.7.4. Comparações dos Tempos em 23/02/1984. | 105 |
| 6.7.5. Tabela e Resumo das Comparações | 106 |
| Cap. 7. CONCLUSÕES. | 108 |
| APÊNDICE A. TESTE DE ADERÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DOS TEMPOS ENTRE AS CHEGADAS NA FILA AÉREA. | 114 |
| A.1. Primeira Amostra | 114 |
| A.2. Segunda Amostra. | 116 |
| APÊNDICE B. TESTE DE ADERÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DOS TEMPOS ENTRE AS CHEGADAS NA FILA DO SOLO. | 118 |
| B.1. Primeira Amostra - dia 08/04/1983. | 118 |
| B.2. Segunda Amostra - dia 14/04/1983 | 119 |
| B.3. Terceira Amostra - dia 23/02/1984. | 120 |
| B.4. Quarta Amostra - dia 14/02/1984. | 121 |
| APÊNDICE C. TEMPOS DE ESPERA NA FILA DO SOLO. | 122 |
| C.1. Coleta de dados do dia 08/04/1983. | 122 |
| C.2. Coleta de dados do dia 14/04/1983. | 123 |
| C.3. Coleta de dados do dia 14/02/1984. | 124 |
| C.4. Coleta de dados do dia 23/02/1984. | 125 |
| BIBLIOGRAFIA. | 126 |

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de desenvolver um tratamento matemático específico para a determinação dos principais elementos que compõe as filas de espera de Aeronaves. A especificidade desta fila de espera exige um tratamento matemático próprio, diferente em muitos aspectos dos modelos de filas mais convencionais.

Os bons resultados obtidos quando da aplicação deste modelo ao Aeroporto de Congonhas (SP) indicam que ele pode ser objeto de estudos mais profundos a fim de se estudar um critério de atendimento das filas de espera (a fila aérea e a fila do solo) a fim de minimizar os custos operacionais das aeronaves e de estudos relativos a Relação Custo-Benefício de futuras ampliações do Sistema Aeroportuário.

CAPÍTULO 1

OPERAÇÕES DE POUSOS E

DECOLAGENS EM AEROPORTOS

1.1. AVIÕES, AEROPORTOS E TEMPOS

O objetivo principal de um Aeroporto é o de servir de ponto de transferência entre modos de transporte. Os objetos das transferências são passageiros, suas bagagens e cargas, e elas ocorrem, via de regra, entre os modos terrestre (carros, ônibus, metrô e trens) e aéreo (aviões e helicópteros), e, em menor escala, entre veículos de mesmo modo, o aéreo (caso de passageiros em trânsito, de um voo para outro). Como ponto de transferência entre modos de transporte, o aeroporto deve atender seu objetivo de um modo eficiente, podendo ser esta eficiência avaliada em função dos fatores segurança, rapidez, conforto, custo, praticabilidade e contribuição à comunidade em que se enquadra e à qual servirá [2].

O transporte aéreo tem uma importante vantagem comparativa com relação aos outros meios de transporte, que é sua rapidez. E são apenas dois aspectos, os altos custos envolvidos e a rapidez, que tornam o modo aéreo de transporte muito sensível a demoras no tempo de percurso. Via de regra, uma viagem aérea envolve, além do percurso aéreo propriamente dito, dois percursos terrestres e dois processos de transferência,

cada qual tendo uma possibilidade de atraso. O interesse do usuário do transporte aéreo (e de qualquer outro modo de transporte) sendo o tempo total de viagem, os eventuais atrasos são ainda mais agravados pelo fato que Aeroportos, por exigirem uma considerável área para sua implantação e por causarem interferência face ao ruído deles advindo, costumam estar localizados relativamente distantes de seus principais centros geradores de tráfego [1].

Acrescente-se a isto a especial sensibilidade do transporte aéreo às condições meteorológicas encontradas nos aeroportos e poderá ser entendida a afirmação de que "ninguém espera que ele (o transporte aéreo) ocorra de forma inteiramente suave"[17]. Portanto, o usuário não se preocupará muito se o horário previsto não for cumprido à risca, desde que os atrasos não sejam muito relevantes. Uma vez que o tempo gasto no transporte aéreo é, cada vez mais, padronizado em relação aos níveis de demanda envolvidos, justificam-se todos os esforços no sentido de minimizar todos os tempos de espera envolvidos, no sentido de não deixar que os atrasos atinjam um nível de tal forma elevado que faça com que os usuários prefiram um modo alternativo de transporte.

A necessidade de ser mais desenvolvido, em nosso país o planejamento aeroportuário em geral, o estudo de suas possibilidades de atraso, em particular, é evidente. No planejamento aeroportuário e no planejamento de um modo geral, um modelo confiável da determinação dos tempos de espera permite verificar, para um dado aeroporto, qual o melhor plano de de-

envolvimento que o permita atender à demanda prevista, e qual deve ser o cronograma/ampliação mais adequado, tomando-se como base as Relações Benefício-Custo. É apenas com um estudo profundo e criterioso destes elementos que se conseguirá evitar construções futuras, muito caras e de utilidade duvidosa.

1.2. CONTROLE DE TRÁFEGO AÉREO

As regras de tráfego aéreo, no Brasil, são estabelecidas pela Diretoria de Eletrônica e Proteção ao Voo (DEPV) do Ministério da Aeronáutica. A nível internacional, estas regras são estabelecidas pela ICAO (International Civil Aviation Organization), da qual o Brasil é estado-membro, fazendo inclusive parte de seu Conselho.

O serviço de controle de tráfego aéreo é definido pelo DIREPV, com a atividade estabelecida para [18]:

1) Prevenir:

- a) abalroamento entre aeronaves, e
- b) colisão entre aeronaves e obstáculos nas áreas de manobra.

2) Acelerar e manter ordenado o fluxo de tráfego aéreo.

Dos órgãos que o compõe, dois são relevantes para o processo de pousos e decolagens.

- CONTROLE DE APROXIMAÇÃO (APP)

É o órgão estabelecido para prestar o serviço de controle de tráfego aéreo aos vôos controlados que cheguem e que saiam de um ou mais aeródromos [19]. É representada pela sigla

APP e tem jurisdição dentro de uma área terminal (TMA). Esta área é definida como a área de controle situada geralmente na confluência de rotas e nas imediações de um ou mais aeródromos [19].

O serviço de controle de aproximação proporcionado pelo APP pode ser executado de duas formas; quais sejam:

1) Controle convencional, também chamado controle por procedimentos, o APP orienta as aeronaves baseando-se nas informações transmitidas por estas sobre suas posições e as aeronaves executam procedimentos previamente padronizados. Neste caso, sem a vetorização radar, as aeronaves são conduzidas a um circuito de espera, onde ficam em diferentes níveis (Prateleiras), mantendo a diferença entre estes níveis de 1.000 pés (300 metros), e o APP instrui a aeronave que se acha em um nível para descer para o imediatamente abaixo, assim que este for liberado.

2) Controle Radar, também chamado de controle por vetorização radar, onde as aeronaves são dirigidas pelo APP para o ponto de entrada da aproximação final onde são alinhadas com a pista numa determinada altitude. A partir daí, até o final do pouso, a aproximação fica a cargo da Torre de Controle.

- TORRE DE CONTROLE

Representada pela sigla TWR é "o órgão estabelecido para proporcionar o serviço de controle de tráfego aéreo ao tráfego do aeródromo", sendo tráfego de aeródromo, "todo o tráfego (aeronaves, veículos e pessoas) na área de manobras e todas as

aeronaves em vôo na zona de tráfego do aeródromo" [19].

A área de manobras é a "parte do aeródromo destinada ao pouso e à decolagem de aeronaves e aos movimentos de superfície relacionados com o pouso e decolagem; a área de manobras abrange a área de pouso e a pista de taxi" [19].

Cabe à TWR a responsabilidade de, juntamente com os pilotos das aeronaves envolvidas, manter separações entre quaisquer operações – aterragens e/ou decolagens em condições VFR (ver secção 1.3).

Em condições IFR, cabe ao APP a responsabilidade de manter separações entre aterragens e entre decolagens, cabendo à TWR as separações entre aterragens e decolagem e vice-versa.

1.3. REGRAS DE TRÁFEGO AÉREO

O Anexo 2 da ICAO [20] estabelece a divisão básica das Regras de Tráfego Aéreo:

"A operação de uma aeronave em vôo ou na área de manobra de um aeródromo deve estar de acordo com as regras gerais, e, além disso, quando em vôo, com:

- a) as regras de vôo visual (VFR) ou
- b) as regras de vôo por instrumento.

Há dois tipos de condições ambientais, definidas em função de certos parâmetros meteorológicos, em que as operações de uma aeronave para aterragem em uma pista podem ocorrer: VMC (Visual Meteorological Conditions) e IMC (Instrumental Meteorological Conditions), quando o vôo é realizado em condições de

vôo visual (VFR) (Visual Flight Rules) ou de acordo com as Regras de Vôo por Instrumentos (IFR) respectivamente.

NOTA: Um piloto pode escolher voar de acordo com as regras de vôo por instrumento em condições meteorológicas visuais, ou pode ser pedido que assim o faça pela autoridade de serviço de tráfego aéreo. Em geral, nas aerovias de grande densidade de tráfego, são impostas regras IFR em quaisquer condições meteorológicas, para efeitos de maior segurança [7]. Este é o caso do Aeroporto de Congonhas (SP), pelo menos nos horários de pico.

As regras de vôo por instrumento exigem que, antes da partida, o piloto apresente ao centro de controle da área um plano de vôo do qual constem, o local de destino, as aerovias e a altitude de vôo pretendidas. Aprovado o plano, não serão permitidos desvios a não ser mediante aprovação do Centro de Controle da área [7].

Quanto ao controle na área de manobras, este é exercido pela TWR, basicamente através de autorizações às aeronaves controladas, dadas em determinadas posições críticas.

POSIÇÃO 1: É aquela em que a aeronave pede autorização para iniciar a rolagem para a posição 2. Corresponde, em geral, ao próprio local de estacionamento da mesma.

POSIÇÃO 2: É aquela em que a aeronave aguarda a liberação da pista, se esta está sendo utilizada para um pouso ou decolagem. Assim que a aeronave interferente passa por este acesso, não havendo outra aterrissagem conflitante, esta é liberada para a posição 3.

NOTA: Pode, obviamente, haver uma fila de aeronaves nesta posição.

POSIÇÃO 3: É aquela em que a aeronave está na pista, alinhada e pronta para decolar. A autorização para decolar é dada nesta posição, se já não foi possível dá-la na posição 2.

NOTA: A fim de acelerar o tráfego, poderá ser autorizada a decolagem imediata de uma aeronave antes que ela entre na pista. Se aceitar tal autorização, ela deverá rolar para a pista e decolar sem haver necessidade de deter-se, ou seja, a autorização para a decolagem poderá ser dada já na posição 2.

1.4. SEPARAÇÕES

Como uma das funções da TWR é evitar abalroamentos, e todos os provimentos do Aeródromo são por ela controlados, esta impõe inúmeras regras de tráfego, sendo as principais para o estudo das filas as seguintes:

"A uma aeronave partindo, normalmente, não será permitido iniciar a decolagem até que a precedente tenha cruzado o final da pista em uso, ou iniciado uma curva, ou até que todas as aeronaves que tenham pousado anteriormente estejam fora da pista" [19].

NOTA: Embora esteja estabelecido que "não será permitida a uma aeronave na posição 3 quando outra a estiver ocupando" [18] é usual a liberação da posição 3 assim que a aeronave interferente tenha passado pelo acesso em que a aeronave aguardava na posição 2.

Além disso, "não será permitido a uma aeronave pousando, cruzar o início da pista até que a aeronave decolando que a precede tenha cruzado o final da pista em uso, ou tenha iniciado uma curva, ou até que todas as aeronaves que tenham pousado antes estejam fora da pista" [19].

As duas regras citadas acima podem ser resumidas na seguinte: "Duas aeronaves não poderão ocupar simultaneamente uma pista no mesmo sentido, ou em sentidos opostos e que as levem a aproximar-se uma da outra" [1].

Assim sendo, as regras de tráfego aéreo na área de manobras impõem as seguintes separações mínimas entre operações: "Tempo de ocupação de pista na aterrissagem precessora, no caso de duas aterrissagens sucessivas ou de uma decolagem após uma aterrissagem" [1] e "Tempo de ocupação de pista na decolagem da aeronave precessora, no caso de duas decolagens sucessivas, ou de uma aterrissagem após uma decolagem" [1].

Conseqüentemente, ao APP cabe manter as separações de segurança estabelecidas nas regras de tráfego aéreo. As separações a serem usadas dependerão de o controle de tráfego aéreo ser feito através de controle convencional ou de vetoração radar. Neste último caso, a maior certeza da localização das aeronaves permite o uso de separações menores do que as usadas no controle convencional. A vetoração permite, pois, uma maior capacidade no atendimento do tráfego aéreo.

1º) EM CONTROLE CONVENCIONAL

Nas aproximações IFR em controle convencional, são esta-

belecionadas pelo DIREPV [19] as seguintes regras de separação:

"Uma aeronave será autorizada a iniciar um mesmo procedimento de descida que está sendo executado por outra, à sua frente, quando ocorrer uma das seguintes condições:

- a) houver separação mínima de três minutos entre elas;
- b) a aeronave à frente informar haver atingido condições de prosseguir para pouso visual e for autorizado pelo APP;
- c) a aeronave à frente estabelecer contato bilateral com o controle do aeródromo e estiver à vista deste;
- d) decorridos três minutos, ou mais, após a aeronave à frente ter iniciado o afastamento".

Pode-se considerar que, em controle convencional, a separação mínima entre aeronaves em aproximações sucessivas é de três minutos, medidos no início do afastamento.

NOTA: Deve ser ressaltado que, apesar de ser o circuito totalmente padronizado, esta execução padrão pode ser parcialmente abandonada pela aeronave que está na altitude de início de procedimento. Isto ocorre quando o APP comunica a esta aeronave que ela deverá preparar-se para iniciar o afastamento dentro de um determinado tempo, de forma a manter a separação mínima entre ela e sua precessora.

Desta forma, em função da velocidade da aeronave sucessora ser maior ou menor que a da precessora, a separação entre elas tenderá a aumentar ou a diminuir. Quando esta separação é de 3 minutos ou mais, é possível intercalar uma decolagem entre duas aterrissagens. Quando a separação diminui,

não é sempre possível este procedimento.

No caso de subidas por instrumentos sob controle convencional, cada aeroporto tem, para cada uma de suas pistas, uma certa quantidade de procedimentos. O Aeroporto de Congonhas, por exemplo, possui dez procedimentos diferentes.

As regras que estabelecem mínimos de separação longitudinal entre aeronaves decolando sucessivamente, excetuando-se aquelas referentes a esteira de turbulência, são apenas três [19].

"Um minuto de separação entre aeronaves decolando e executando procedimentos de subida para rotas diferentes, desde que tomem rumos divergentes de, no mínimo 30°".

"Dois minutos de separação entre decolagens, quando a aeronave que decolar primeiro tiver a velocidade de 40 nós ou mais, maior que a velocidade da aeronave que a segue, e ambas forem seguir a mesma rota".

"Cinco minutos de separação no cruzamento de nível se a aeronave que ultrapassar o nível da outra que tenha partido antes e ambas seguirem a mesma rota".

NOTA: Quando existe uma fila de aeronaves na posição 2, é comum a TWR estabelecer um critério de prioridades na liberação da posição 1 para a posição 2, intercalando entre duas decolagens com a mesma rota, uma ou várias aeronaves com rotas diferentes, para que a aeronave na posição 3 não fique ocupando a pista enquanto espera. Assim, em períodos de grande intensidade de tráfego, as separações entre as subidas são de apro-

ximadamente 1 minuto, e pode-se considerar como taxa de atendimento para a fila de decolagens, o valor $\mu' = 60$ aeronaves por hora.

Das regras estabelecidas para controle convencional também se deduz que a separação entre uma decolagem e uma aterrissagem é de aproximadamente três minutos, medidos entre o início da corrida de decolagem e cruzamento da cabeceira da aeronave que aterra. Assim, quando a separação entre decolagens é de 3 minutos ou mais no final, é sempre possível intercalar uma decolagem, sem prejuízo de tempo da aterrissagem seguinte.

SEPARAÇÃO EM CONTROLE RADAR

Quanto ao mínimo de separação radar, "a separação mínima horizontal deve ser de 5 mn (milhas náuticas), ou maior quando as circunstâncias o exigirem" [19]. Em condições normais, no Brasil, usa-se 5 mn. Segundo Medeiros [1], "no Brasil, o mínimo de 5 mn é adotado pelo APP entre aeronaves na TMA, mas para aeronaves na aproximação de um processo direto, isto é, para aeronaves situadas a partir do ponto de entrada, o APP poderá reduzir esta separação para 3mn. Ainda em Medeiros [1]. Foi verificado que no APP de Congonhas (S.P.) é adotada a separação padrão 5 mn. No entanto, este valor é adotado mais para aumentar a separação entre aterragens sucessivas, e, conseqüentemente, poder intercalar decolagens entre aterragens. Se não há demanda para decolagens, a separação é dita "pista livre" e a separação pode ser reduzida para no máximo 3 milhas.

SEPARAÇÕES POR ESTEIRAS DE TURBULÊNCIA

Toda aeronave em vôo gera uma esteira de turbulência, causada pela maior pressão existente no intradorso de que no extradorso de sua asa, e que se apresenta na forma de dois vórtices, conforme indicado na Ilustração 1.4.1, Figuras 1.4.1.a e 1.4.1.b.

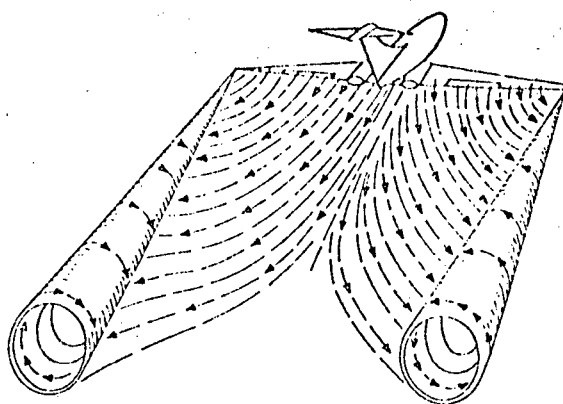


Figura 1.4.1.a - Geração de esteiras de turbulência

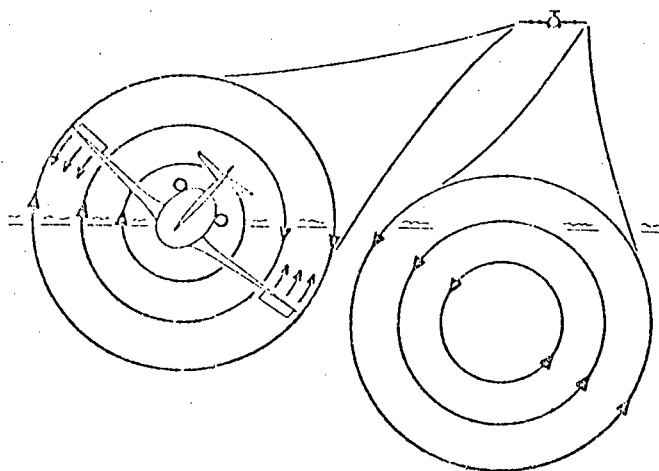


Figura 1.4.1.b - Efeito da esteira de turbulência em aeronaves.

Ilustração 1.4.1 - Esteiras de Turbulência

FONTE: "Aircraft Wake Turbulence" (F.A.A., 1972).

As características destes vórtices dependem de vários fatores, mas sua intensidade é, basicamente, proporcional ao peso e à velocidade da aeronave geradora, e é maior quando a aeronave está pesada e voando lentamente. "O perigo, para uma aeronave que vem atrás, ocorre quando encontra esta massa de ar circulante e suas superfícies de controle de rolagem não são capazes de compensar a perturbação causada em sua altitude de vôo" (ver Ilustração 1.4.1) [1].

Quando em aproximação, aeronaves maiores geram esteiras de turbulências intensas, face às suas velocidades menores e ao seu próprio peso. No caso de decolagens, as intensidades destas esteiras são ainda maiores. Assim, uma aeronave que siga uma maior em uma aproximação ou em uma subida poderá encontrar-se em uma situação realmente perigosa, por ela mesma estar voando em condições críticas quanto à velocidade e a altura.

No Brasil, a DIREPV estabelece que, "quando uma aeronave convencional ou de pequeno porte for decolar logo após a decolagem de um jato pesado, deverá ser feita uma separação de, pelo menos, três minutos entre decolagens" [19].

1.5. CONCLUSÕES RELEVANTES PARA AS FILAS

Como veremos no Capítulo 2, os elementos de filas são perfeitamente determinados a partir da determinação das taxas de chegada e de tempo de serviço, das respectivas distribuições de probabilidade e da disciplina da fila.

Do que foi discutido na secção 1.4 sobre separações entre decolagens ou entre aterrissagens, ou aterrissagem - decolagem, conclui-se o seguinte a respeito dos tempos de serviço.

Em controle convencional, as chegadas obedecem uma separação mínima de três minutos, em média. Logo, pode-se considerar a taxa média de atendimento como sendo de vinte aeronaves por hora. Em controle radar, dada a precisão da localização de cada aeronave, esta separação pode ser diminuída, respeitando-se as limitações por esteira de turbulência e por tempo de ocupação de pistas. Logo, a capacidade de aterrissagens depende da composição da frota que utiliza o aeroporto (percentagens de movimentos de aeronaves pesadas, médias e leves). Medeiros [1], elaborou um modelo para o estudo de capacidade de pistas em aeroportos brasileiros, com o estudo de caso do Aeroporto de Congonhas, onde, dadas as percentagens das categorias de aeronaves determina-se a capacidade de aterrissagens. Em seu trabalho, ele obtém o mínimo de 26,5 e o máximo de 28,8 aeronaves aterrissando por hora, em controle radar, com possibilidades de intercalar 15,4 no máximo, até 11,7 decolagens entre aterrissagens sucessivas.

NOTA: Ele obtém capacidades maiores sem levar em conta tempos de resguardo, obtendo até 34,4 aeronaves/hora com possibilidades de intercalar 10,9 decolagens, mas esta capacidade de aterrissagens não é condizente com a realidade, haja visto o que foi discutido na secção 1.4 acerca de separações.

Em virtude da impossibilidade da obtenção dos dados a respeito da composição da frota, levando-se em conta também o fa-

to deste último trabalho de capacidade de pistas datar de 1979 e que após este estudo houve modificações para o aumento da capacidade, e o fato de que o objetivo principal deste trabalho é o estudo do modelo e não dos resultados em si, neste trabalho serão usados dados hipotéticos, tão perto da realidade quanto for possível. Para decolagens, assumiremos os valores $\mu' = 60$ por hora e $\mu' = 56$ por hora, pois acreditamos que a taxa real encontra-se entre estes dois valores.

NOTA: Usaremos o valor $\mu' = 60$ decolagens por hora no final do Capítulo 4, a título de exemplos, e, o valor $\mu' = 56$ decolagens por hora para a comparação dos resultados no Capítulo 6, pois acreditamos ser este último mais próximo da taxa real (ver secção 6.4).

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FILAS

Em relação a este trabalho, só estaremos interessados nos modelos de filas com um único canal de atendimento e população infinita. Logo, apenas os modelos de filas com estas características serão abordados.

2.1. TERMINOLOGIA

Adotaremos a seguinte notação:

$n(t)$ = Estado do sistema no instante t = número de elementos no sistema (aguardando ou sendo atendido) no instante t .

$P_n(t)$ = Probabilidade de o sistema estar no estado n no instante t .

L = Número esperado de elementos no sistema.

L_q = Comprimento da fila = número esperado de elementos esperando para serem atendidos (excluindo o que está sendo atendido).

W = Valor esperado do tempo de espera no sistema (incluindo o tempo de serviço).

W_q = Valor esperado do tempo de espera na fila (excluindo o tempo de serviço).

λ_n = taxa média de chegadas, (número esperado de chegadas por unidade de tempo) dado que existem n elementos no sistema.

Nota: na maioria dos processos de filas, a taxa de chegadas na fila diminui com o aumento de n , pois muitos clientes desistem ou adiam quando a fila é muito longa.

λ = taxa média de chegadas quando λ_n independe de n ; $\lambda_n = \lambda = \text{constante}$.

μ_n = Taxa média de atendimento, (número esperado de clientes atendidos por unidade de tempo) dado que existem n elementos no sistema.

μ = taxa média de atendimentos quando μ_n independe de n ; $\mu_n = \mu$.

RELAÇÕES ENTRE L E W

Suponha que λ_n é constante λ para todo n , e que o processo da fila tenha atingido o regime estacionário.

Temos, então, as seguintes relações entre L e W .

Sabemos que estão chegando λ elementos por unidade de tempo, em média, e que cada um deles tem um tempo médio de espera no sistema W . Logo, o número esperado no sistema é:

$$L = \lambda \cdot W$$

Analogamente, o comprimento da fila é dado por:

$$L_q = \lambda \cdot W_q$$

Supondo que o tempo médio de atendimento seja $\frac{1}{\mu}$, vem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

2.2. A IMPORTÂNCIA DA DISTRIBUIÇÃO

EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE FILAS

Os elementos de um sistema de filas são totalmente determinados, como veremos, pelas duas propriedades estatísticas, quais sejam: a distribuição de probabilidade dos tempos entre as chegadas no sistema e a distribuição dos tempos de atendimento. Para sistemas de filas em casos reais, estas distribuições podem tomar as mais variadas formas. (A única restrição é que não poderão ocorrer valores negativos).

Para formular um modelo de teoria de filas como uma representação de um sistema real é necessário especificar a forma assumida por cada uma destas distribuições. Para ser útil, a forma assumida por estas distribuições deve ser suficientemente realística para que forneça previsões razoáveis, e ao mesmo tempo, ser suficientemente simples para que o modelo seja matematicamente tratável.

Em um número muito grande de casos realísticos de sistemas de filas, estas distribuições de probabilidade são, ou exponencial, ou de tempo constante. Principalmente no caso realístico das filas de aeronaves em aeroportos, objeto deste trabalho, veremos que este é o caso. Koopman [9] demonstra que, no caso de estudo de aeronaves em aeroportos, os casos extremos que podem ocorrer são: por um lado, o caso de distri-

buições de tempos constantes e no outro extremo da aleatoriedade, a distribuição exponencial. Koopman demonstra que a diferença numérica entre os resultados das duas hipóteses de tempo de serviço podem ser negligenciadas para os propósitos práticos e, no modelo, não teremos de nos preocupar com sua formulação mais exata.

Daí, a importância de nos aprofundarmos nas principais características de uma distribuição exponencial.

Suponha que uma variável aleatória T represente ou o tempo entre as chegadas, ou o tempo de serviço.

Dizemos que T tem uma distribuição exponencial com parâmetro α se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Neste caso, as probabilidades acumuladas são dadas por:

$$P(T \leq t) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha s} ds = -e^{-\alpha s} \Big|_0^t = 1 - e^{-\alpha t}$$

$$P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\alpha t}$$

O valor esperado da variável aleatória T é dado por:

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot \alpha e^{-\alpha t} dt =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} [-te^{-\alpha t}] + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t e^{-\alpha s} ds \right] = \\ &= 0 - \frac{1}{\alpha} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \right] + \frac{1}{\alpha} \cdot e^0 = \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

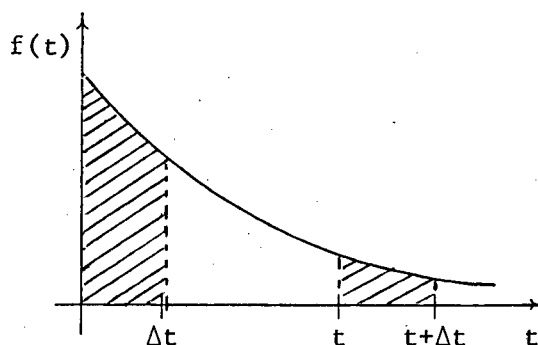
$$\therefore \boxed{E(T) = \frac{1}{\alpha}}$$

Analogamente, calculando a variância de T, vem:

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{\alpha^2}$$

Fica a seguinte questão: Quais são as implicações de supor T como tendo distribuição exponencial para um modelo de filas? Para respondê-la vamos examinar cinco propriedades-chaves da distribuição exponencial.

1ª PROPRIEDADE: $f_T(t)$ é uma função estritamente decrescente de t.



Uma consequência da propriedade de 1 é que

$$P\{0 < T < \Delta t\} > P\{t < T < t + \Delta t\}$$

para todo t , Δt positivos.

Isto segue do fato de que $P\{0 < T < \Delta t\}$ = Área sob a curva desde 0 até Δt e analogamente $P\{t < T < t + \Delta t\}$ = Área desde t até $t + \Delta t$, e como a função é decrescente, segue que a primeira área é maior do que a segunda.

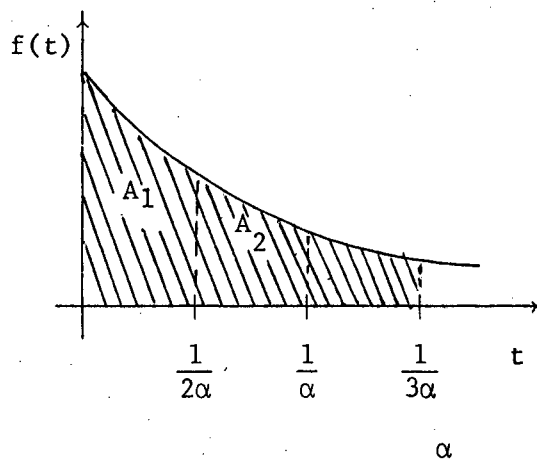
Para exemplificar, vejamos uma consequência importante desta propriedade:

Temos:

$$P\left\{0 \leq T \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha}\right\} = 0,393$$

$$P\left\{\frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} \leq T \leq \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha}\right\} = 0,383.$$

Vê-se, pois que a probabilidade de que o valor de T seja menor de que a metade do valor esperado é maior do que a probabilidade de que o valor de T esteja na vizinhança de raio $\frac{1}{2} \frac{1}{\alpha}$ do valor esperado.



Vejamos qual a importância deste fato para o caso das filas em geral: Suponha que T represente o tempo de atendimento: Se o serviço exigido é essencialmente idêntico para cada cliente, com o atendente realizando sempre a mesma sequência de operações de serviço, então o tempo de atendimento real tenderá a ser próximo do valor esperado. Um tempo de serviço muito abaixo da média será impossível devido a um certo tempo mínimo necessário ao atendimento. Logo, a distribuição exponencial não dará uma boa aproximação para a distribuição dos tempos de atendimento para este tipo de situação. Observe que este será o caso do tempo de atendimento das aeronaves tanto na aterrissagem como na decolagem. Para usarmos este tipo de distribuição é necessário que a natureza do serviço seja a mesma mas a soma dos vários tipos específicos de atendimento diferam.

Se T representa intervalos entre chegadas, a propriedade 1 vale, exceto se os clientes potenciais tendem a adiar sua entrada na fila quando vêem outro cliente entrar em sua frente, ou seja, a distribuição exponencial é inteiramente consistente com o fenômeno comum das chegadas ocorrendo aleatoriamente.

PROPRIEDADE 2: Falta de memória.

$$P\{T > t + \Delta t / T > t\} = P\{T > t\}$$

para todas as quantidades positivas; t e Δt .

Em outras palavras, a distribuição de probabilidade do tempo que falta para ocorrer o incidente é sempre a mesma, in-

dependente de quanto tempo tenha se passado. De fato, o processo esquece a sua história.

Este surpreendente fenômeno ocorre com a distribuição exponencial, pois:

$$\begin{aligned} P\{T > t + \Delta t / t > \Delta t\} &= \frac{P\{T > t + \Delta t, T > \Delta t\}}{P\{T > \Delta t\}} = \frac{P\{T > t + \Delta t\}}{P\{T > \Delta t\}} = \\ &= \frac{e^{-\alpha(t+\Delta t)}}{e^{-\alpha\Delta t}} = e^{-\alpha t} = P\{T > t\} \end{aligned}$$

Para tempos entre as chegadas, esta propriedade descreve a situação comum onde o tempo até que a próxima chegada seja completada não é influenciada pelo tempo passado desde a última chegada. Para tempos de serviço, a propriedade é mais difícil de interpretar. É claro que, na situação onde a seqüência de operações é a mesma para todos os clientes, esta propriedade não irá valer.

PROPRIEDADE 3: O mínimo de várias variáveis aleatórias exponenciais independentes tem uma distribuição exponencial.

Sejam T_1, T_2, \dots, T_n variáveis aleatórias exponenciais independentes com parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, respectivamente. Seja também U a variável aleatória que toma o valor mínimo de T_1, T_2, \dots, T_n .

$$U = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$$

Logo, se T_i representa o tempo até que um tipo especial de incidente deve ocorrer, então, U representa o tempo até que

o primeiro dos incidentes T_1, T_2, \dots, T_n ocorra.

Note que para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(U > t) &= P\{T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t\} = \\ &= P\{T_1 > t\} \cdot P\{T_2 > t\} \cdot \dots \cdot P\{T_n > t\} = \\ &= e^{-\alpha_1 t} \cdot e^{-\alpha_2 t} \cdot \dots \cdot e^{-\alpha_n t} = \\ &= e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)t} = \exp\{(-\sum \alpha_i)t\} \end{aligned}$$

Logo, U é uma distribuição exponencial com parâmetro $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Esta propriedade têm algumas implicações para tempos entre chegadas em modelos de filas. Em particular, suponha que existam n diferentes tipos de clientes, mas os tempos entre as chegadas tem uma distribuição exponencial com parâmetro α_i para cada tipo i . Pela propriedade 2, o tempo que falta até a próxima ocorrência do tipo i tem a mesma distribuição. Logo, T_i será a distribuição dos tempos medidos desde que algum cliente de qualquer tipo chegue. A propriedade 3 demonstra que a variável aleatória U pode ser considerada como a distribuição dos tempos entre as chegadas como um todo e tem distribuição exponencial com parâmetros $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Como consequência, podemos ignorar as distinções entre os clientes e ter uma única distribuição exponencial para os tempos entre as chegadas para o sistema de filas.

Note que o caso objeto deste trabalho é um caso onde o-

correrá este fato, pois, os tempos de aterrissagem e de decolagem são diferentes para diferentes categorias de aeronaves (dependem da velocidade, do peso, do tamanho, etc.). Então, teremos de tratá-los como diferentes categorias, com diferentes taxas de chegada e de atendimento. Mas, devido à propriedade 3, podemos tratar os intervalos entre as chegadas para todos os diferentes tipos de aeronaves sem necessidade de distingui-las.

PROPRIEDADE 4: Afinidade com a Distribuição de Poisson.

Suponha que a distribuição do tempo entre ocorrências consecutivas (chegadas ou atendimentos) seja exponencial.

Seja $X(t)$ o número de ocorrências num certo intervalo de tempo; ($t > 0$). Então, (ver [16] , secção 3.4)

$$P\{X(t)=n\} = \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!}; \quad n=0,1,\dots$$

Esta propriedade tem uma implicação importante para o modelo de filas, que é a seguinte: Se a distribuição entre as chegadas é exponencial, então, a distribuição do número de chegadas por unidade de tempo é uma distribuição de Poisson. Como a distribuição de Poisson acima tem parâmetro αt , seu valor esperado é α . Logo a média do número de chegadas por unidade de tempo é α (taxa de chegadas). O processo $\{X(t); t > 0\}$ é dito processo de Poisson com parâmetro α . Quando a distribuição entre os tempos de serviço é uma distribuição exponencial com parâmetro $1/\mu$ então a distribuição do número de unidades atendidas por unidade de tempo é uma distribuição de Poisson com média de atendimentos de μ unidades atendidas por unidade

de tempo. Analogamente, quando a distribuição dos tempos entre as chegadas é exponencial com parâmetro $1/\lambda$, então, a distribuição do número de elementos que chegam à fila por unidade de tempo é de Poisson, com médias de chegadas de λ unidades por unidade de tempo. Dizemos neste caso que o processo de filas é um processo de chegadas Poisson e λ é a taxa de chegadas.

Devido aos fatos citados nos comentários à propriedade 1, desde que as chegadas sejam aleatórias e não ocorra o fenômeno de adiar ou desistir de incorporar-se à fila quando esta é longa, o processo de chegadas em uma fila é, em geral, de Poisson. Uma interpretação intuitiva, porém importante desta propriedade é que todo período de tempo de comprimento fixado tem a mesma chance de ocorrências independente de quando a última chegada ocorreu. Isto sugere a seguinte propriedade.

PROPRIEDADE 5: Para todos os valores positivos de t ,

$$P\{T \leq t + \Delta t | T > t\} \approx \alpha \Delta t$$

para valores pequenos de Δt . Mais precisamente,

$$P\{T \leq t + \Delta t | T > t\} = \alpha \Delta t + o(\Delta t), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0;$$

ou seja, $o(\Delta t)$ é um nulo de 1ª ordem de Δt .

DEMONSTRAÇÃO: Para uma variável aleatória T que tem distribuição exponencial com parâmetro α , a propriedade 2 implica que:

$$P\{T \leq t + \Delta t | T > t\} = P\{T \leq \Delta t\} = 1 - e^{-\alpha \Delta t}$$

para todas as quantidades positivas, t , Δt .

Mas, como a série de Taylor da função exponencial é dada por:

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

Então,

$$P\{T \leq \Delta t\} = 1 - 1 + \alpha \Delta t - \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2!} + \frac{(\alpha \Delta t)^3}{3!} + \dots$$

Portanto,

$$P\{T \leq \Delta t\} = \alpha \Delta t - \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2!} + \frac{(\alpha \Delta t)^3}{3!} + (-1)^{n+1} \frac{(\alpha \Delta t)^n}{n!}$$

Chamando

$$o(\Delta t) = -\frac{(\alpha \Delta t)^2}{2!} + \frac{(\alpha \Delta t)^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} (\alpha \Delta t)^n}{n!}$$

vem:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[-\frac{\alpha^2 \Delta t}{2!} + \frac{\alpha^3 \Delta t^2}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \alpha^n \Delta t^{n-1}}{n!} \right] = 0$$

Logo,

$$P\{T \leq t + \Delta t / T > t\} = P\{T \leq \Delta t\} \approx \alpha \Delta t.$$

Note que esta propriedade independe do instante t considerado.

Como foi citado anteriormente, em um processo de filas, T deve representar, ou o tempo entre as chegadas, ou o tempo de atendimento. Conseqüentemente, esta propriedade nos dá uma boa aproximação da probabilidade de que um acontecimento (chegada ou término do serviço) ocorra no próximo intervalo de tempo suficientemente pequeno Δt . Esta propriedade também mostra que esta probabilidade é essencialmente proporcional a Δt para valores pequenos de Δt .

2.3. O PROCESSO DE NASCIMENTO E MORTE

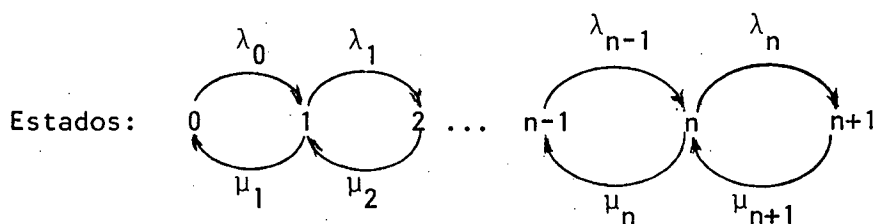
Muitos modelos de filas elementares supõe que as entradas (chegadas de clientes) e saídas (clientes deixando o sistema depois de atendidos) de um sistema de filas ocorre de acordo com um processo de nascimento e morte. Este importante processo em teoria das probabilidades tem aplicação em várias áreas. Entretanto, no contexto da Teoria das Filas, o termo nascimento refere-se à chegada de um cliente no sistema e morte refere-se a partida do cliente após ser atendido. O estado do sistema no instante t é dado por $N(t)$. Então, o processo de nascimento e morte descreve probabilisticamente como $N(t)$ se modifica com o crescimento do tempo t . Grosseiramente falando, ele diz que os nascimentos e as mortes individuais ocorrem aleatoriamente e sua taxa média de ocorrências depende apenas do estado do sistema. As hipóteses do processo de nascimento e morte são as seguintes:

HIPÓTESE 1: Dados $N(t) = n$, a distribuição de probabilidade do tempo que falta até que ocorra o próximo nascimento é exponencial com parâmetro λ_n ; $n=0,1,2,\dots$.

HIPÓTESE 2: Dado $N(t) = n$, a distribuição de probabilidades do tempo que falta até que o serviço seja completado (próxima morte) é exponencial com parâmetro μ_n ; $n=1,2,\dots$.

HIPÓTESE 3: Somente um nascimento e/ou somente uma morte pode ocorrer no intervalo de tempo Δt .

Como a propriedade 4 para a distribuição exponencial mostra que λ_n e μ_n são taxas médias, nós podemos resumir o processo de nascimento e morte no seguinte diagrama:



As setas deste diagrama mostram as únicas transições possíveis do sistema.

Exceto para alguns casos especiais, o processo de nascimento e morte é muito complexo quando o sistema está em condição transiente (isto é, quando as taxas médias estão variando com o tempo). Alguns resultados sobre a distribuição de probabilidade $N(t)$ têm sido obtidos nestas condições, mas são muito complicados para os propósitos práticos deste trabalho. Por outro lado, é relativamente simples obter esta distribuição após o sistema atingir o regime estacionário (as taxas médias independem do tempo; isto é, são constantes

$$\lambda_n(t) = \lambda_n \text{ e } \mu_n(t) = \mu_n, \forall n, \forall t > 0.$$

Considere algum estado n particular. Suponha que nós estamos contando o número de vezes em que o sistema entra neste

estado e o número de vezes em que ele sai deste estado. Como os dois tipos de incidentes (entrar e sair do estado n) se alternam, estes números serão sempre ou iguais, ou diferirão de apenas 1. Esta possível diferença de 1 causaria eventualmente somente uma diferença insignificante nas taxas médias (número total de ocorrências por unidade de tempo) em que estes dois tipos de incidentes ocorrem. Logo, estas duas taxas serão iguais em um período longo de operações. Isto nos permite obter o seguinte princípio chave para o processo.

Princípio da Taxa de Entrada = Taxa de Saída

Para todo estado n do sistema; $n=0,1,2,\dots$ a taxa média (número de ocorrências por unidade de tempo) em que o incidente "entrar no estado" ocorre é igual à taxa média em que o incidente "sair do estado" ocorre.

A equação expressando este princípio é chamada a equação de balanço. Considere o estado 0. A única possibilidade é a de que o estado venha do estado 1. Logo, a probabilidade de estar no estado 1; (P_1) representa a proporção do tempo em que seria possível o sistema entrar para o estado 0, a taxa média de entrar no estado 0 é μ_1 . De qualquer outro estado, para passar para este estado, a taxa média é 0.

Como a taxa média de passar do estado 1 para o estado 0 é igual a taxa média de passar do estado 0 para o estado 1, e esta última pode ser obtida da mesma forma que a primeira, que é igual a $\lambda_0 P_0$, vem a Equação de Balanço:

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

Para qualquer outro estado que não seja o estado 0, existem duas possibilidades de o sistema entrar neste estado, ou seja, pode estar no estado $i-1$ e chegar um cliente, ou estar no estado $i+1$ e um cliente deixar o sistema depois de atendido.

Para exemplificar, vejamos o estado 1. A possibilidade de o sistema entrar no estado 1 é dada por $\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$, pois pode vir do estado 0, ($\lambda_0 P_0$) ou do estado 2 ($\mu_2 P_2$), logo a probabilidade de entrar no estado 1 é a soma destas. Por outro lado, existem duas possibilidades de o sistema sair do estado 1, que é de sair um cliente e passar ao estado 0, e a de estar no estado 1 e chegar um cliente, (passando para o estado 2). Como estas duas probabilidades tem que ser iguais, vem

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1 \quad 2.3.2$$

Logo, as equações de Balanço para todo n pode ser resu-
da na seguinte tabela:

| Estado | Taxa de entrar = Taxa de sair |
|----------|---|
| 0 | $\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$ |
| 1 | $\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1$ |
| 2 | $\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = (\lambda_2 + \mu_2) P_2$ |
| \vdots | |
| n | $\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n$ |

Note que a primeira equação tem duas variáveis que pre-

cisam ser determinadas (P_0 e P_1); as primeiras duas equações têm 3 variáveis (P_0, P_1 e P_2) e assim por diante, tendo sempre uma variável a mais do que o número de equações. Logo, o procedimento natural é determinar todas as outras variáveis em função de uma delas, digamos, P_0 , e depois, como a soma das probabilidades tem que ser 1, determina-se P_0 e conseqüentemente todas as outras.

Aplicando este procedimento, temos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot P_0 \\P_2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} \cdot P_0 \\P_3 &= \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} \cdot P_0 \\&\vdots \\P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdot \dots \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \cdot \dots \cdot \mu_2 \cdot \mu_1} \cdot P_0\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

Para simplificar a notação, chamemos de

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdot \dots \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \cdot \dots \cdot \mu_2 \cdot \mu_1} .\tag{2.3.4}$$

Temos:

$$P_n = C_n P_0$$

Da exigência,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1,$$

vem:

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right] P_0 = 1.$$

Logo,

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n} \quad 2.3.5$$

Determinado o valor de P_0 , determinam-se todas as outras probabilidades por:

$$P_n = C_n \cdot P_0. \quad 2.3.6$$

Conhecidas as probabilidades P_n , podemos calcular o comprimento médio do sistema, L , (número esperado de clientes no sistema).

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n \quad 2.3.7$$

e o comprimento médio da fila (número esperado de clientes no sistema menos o que está sendo atendido).

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n \quad 2.3.8$$

e no caso em que existem s postos de atendimento, teremos

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n \quad 2.3.9$$

Das relações entre L e W e entre L_q e W_q (ver secção 2.1); vem:

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \quad 2.3.10$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \quad 2.3.11$$

onde $\bar{\lambda}$ é a taxa de chegadas média em um período longo de operações. Como λ_n é a taxa de chegadas média quando o sistema está no estado n ($n=0,1,2,\dots$), e P_n é a proporção do tempo em que o sistema está no estado n , vem:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i \quad 2.3.12$$

Várias das expressões obtidas acima envolvem somas com um número infinito de termos. Felizmente, estas somas têm soluções analíticas para um grande número de casos. Em geral, ocorre que $\lambda_n = 0$ para $n \geq N$ (N é um certo número inteiro) tal que somente um número finito de estados ($n < N$) são possíveis.

2.4. MODELOS DE FILAS BASEADO NO PROCESSO

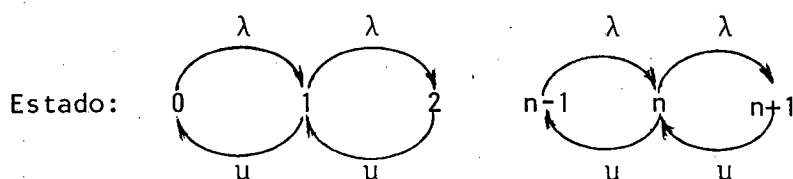
DE NASCIMENTO E MORTE

Como as taxas $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, são todas positivas ou zero, isto dá grande flexibilidade aos modelos matemáticos de filas. Devido às hipóteses de que os tempos entre as chegadas e os tempos de atendimento são exponenciais e a

propriedade 4, dizemos que os modelos têm entrada Poisson e tempo de serviço exponencial.

Irã nos interessar, principalmente, o caso em que as taxas de chegada e de atendimento são constantes. No caso das aeronaves, é claro que a taxa de chegadas é independente do número de aeronaves que se encontram no sistema, exceto para os casos onde haja anomalias, como o radar não estar funcionando ou o aeroporto estar fechado, onde, devido ao acúmulo, algumas aeronaves serão desviadas para outros aeroportos; mas em caso de funcionamento normal, a aeronave que chega incorpora-se à fila naturalmente, independente do número de elementos na fila. No caso de tempo de atendimentos, é possível que haja um aumento da taxa nas horas de pico devido ao aumento do número de controladores em serviço, e devido à vetorização radar para decolagens que só é feita quando há grande demanda. Porém, como a seqüência de operações é sempre a mesma, podemos considerar também a taxa de atendimentos como constante e independente do número de elementos na fila.

Quando o sistema tem um único posto de atendimento, que é o nosso caso, e as taxas de chegada e de atendimento são constantes, o processo de nascimento e morte pode ser mostrado através do seguinte diagrama:



e portanto, as fórmulas 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7 e 2.3.8

ficam da seguinte forma:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad 2.4.1$$

$$C_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad 2.4.2$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \quad 2.4.3$$

Chamando $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$, chamado fator de utilização, pois é exatamente a fração do tempo em que o posto de serviço está atendendo algum cliente, vem:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n}$$

Como $\rho < 1$, caso contrário a fila tende ao ∞ (as chegadas no sistema seriam maiores do que as saídas), a série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ é uma série geométrica de razão menor do que 1. Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Portanto a equação 2.3.5 ficará:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1-\rho}} = 1 - \rho \quad 2.4.4$$

Como P_0 é a probabilidade de não haver nenhum elemento no sistema, é claro que deveria ser o complemento do fator de u-

tilização.

Fator de utilização = ρ .

$$P_0 = 1 - \rho \quad 2.4.5$$

como ficou demonstrado.

A fórmula 2.3.6 tomará a forma:

$$P_n = \rho^n (1 - \rho) \quad 2.4.6$$

Conseqüentemente:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n (1 - \rho) = \\ &= (1 - \rho) \cdot \rho \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} = (1 - \rho) \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} (\rho^n) = \\ &= (1 - \rho) \cdot \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) = (1 - \rho) \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) = \\ &= (1 - \rho) \rho \left[\frac{1}{(1 - \rho)^2} \right] = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda/\mu}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

$$\therefore L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad 2.4.7$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \\ &= L - (1 - P_0) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

$$\therefore L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \quad 2.4.8$$

É possível agora obter a distribuição de probabilidade do tempo de espera no sistema. Seja a variável aleatória W representando o tempo de espera no sistema (incluindo serviço) quando a disciplina da fila é "primeiro a chegar - primeiro a ser atendido". Se um cliente chega na fila e encontra n elementos no sistema, ele deverá esperar no sistema até que $n+1$ elementos da fila sejam atendidos (os n que já estavam mais ele próprio). Quanto ao que está sendo atendido no instante de sua chegada, este não influirá nesta distribuição devido a propriedade do "esquecimento da memória" discutido na secção 2.

Para obter esta distribuição, considere $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ variáveis aleatórias com tempo de serviço independente e tendo uma distribuição exponencial com parâmetro μ .

Seja

$$S_{n+1} = T_1 + T_2 + \dots + T_{n+1}, \text{ para } n=0,1,2,\dots$$

S_{n+1} representa o tempo de espera condicional dado que n elementos já estão no sistema.

Como S_{n+1} é a soma de $(n+1)$ variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição exponencial, S_{n+1} é uma variável aleatória com distribuição gama. Como a probabilidade de que o cliente que chega encontre n clientes em sua frente é P_n , segue que:

$$P\{W>t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot P\{S_{n+1}>t\} \quad 2.4.9$$

que após consideráveis manipulações algébricas, e observando as propriedades da distribuição gama, lembrando que quando α é um número inteiro, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ e que S_{n+1} tem parâmetros $n+1$ e μ , a equação 2.4.9 reduz-se a: (ver Hillier & Lieberman [12])

$$P\{W > t\} = e^{-\mu(1-\rho)t}, \text{ para } t \geq 0.$$

A conclusão surpreendente é que o tempo de espera no sistema; W , tem uma distribuição exponencial com parâmetro $\mu(1-\rho)$, e portanto, segue:

$$\begin{aligned} W = E(W) &= \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}. \end{aligned}$$

Logo:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad 2.4.10$$

Seja agora a variável aleatória W_q , como sendo o tempo de espera na fila (excluindo o tempo de serviço) onde a disciplina da fila é primeiro a chegar, primeiro a ser atendido. É claro que esta distribuição é do mesmo tipo que a distribuição W e que, portanto, é exponencial.

Por outro lado, sabemos que o tempo de espera na fila (excluindo serviço) é igual ao tempo no sistema menos o tempo mé-

dio de serviço. Logo,

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)},$$

ou seja;

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad 2.4.11$$

Conseqüentemente, w_q tem uma distribuição exponencial com média $\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$. Logo,

$$P\{w_q > t\} = e^{-\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}t}, \text{ para } t \geq 0.$$

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DO MODELO ÀS FILAS DE AERONAVES

3.1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A aplicação de modelos de filas às filas de aeronaves tem encontrado sérias resistências entre os especialistas em Aeroportos.

Curiosamente, todos os trabalhos de aplicação de Pesquisa Operacional à resolução de problemas envolvendo Aeroportos e Terminais Aéreos, consultados pelo autor, têm, em algum ponto, necessidade do estudo das filas de espera de Aeronaves. Em todos eles, os autores consideram, ou a fila desprezível para os efeitos práticos, ou foi feita uma estimativa grosseira da fila, ou a fila de espera foi obtida por simulação em computador.

Dentre os trabalhos consultados, vale a pena citar:

- 1) Medeiros [1] onde ele faz uma determinação da capacidade de Pistas do Aeroporto de Congonhas, embora tenha tomado uma grande quantidade de dados suficientes para determinar as taxas de atendimento e de serviço e conseqüentemente levar em conta as filas de espera, seu modelo não o faz em virtude de usar um modelo determinístico.

- 2) Douglas [10] usa modelos probabilísticos para a determinação da capacidade de pistas e calcula atrasos por simulação.
- 3) Esca [8] faz a simulação de várias configurações de rotas, onde alguns elementos de filas são calculados por simulação.
- 4) Morais [5] propõe em seu trabalho a aplicação de uma sobre-tarifa às aeronaves que utilizam o aeroporto nos horários de pico, com o objetivo de desviar algumas das aeronaves para outros horários e conseqüentemente diminuir o congestionamento. Para a determinação de tempos de espera, foi usado em seu trabalho um método rápido de aproximação de Odoni & Kivester [21] publicado pela NASA. É claro que esta aproximação é grosseira, pois não leva em conta as características operacionais do Aeroporto em questão.
- 5) Hashizuma [6] faz um estudo da viabilidade técnica de se aumentar a capacidade de operação para o Aeroporto de Congonhas. Em seu modelo ele utiliza um fator de Espera Média Horária Baseado em resultados teóricos da aplicação do método da FAA para estimativa deste parâmetro. É claro que esta estimativa também é grosseira devido ao fato já comentado anteriormente.

3.2. AS DUAS FORMAS DE VER O PROBLEMA

Para a aplicação de modelos de filas às aeronaves em aeroportos, existem duas possibilidades: A primeira, que será

objeto do Capítulo 4 é considerar que a fila aérea tem prioridade absoluta sobre a fila do solo e portanto, estudar o comportamento apenas da fila aérea. Considera-se como tempo de espera na fila aérea a diferença entre o tempo que a aeronave demora até sua aterrissagem a partir de um ponto pré-determinado, digamos, de 50 milhas, em presença de congestionamento. Neste caso, as decolagens se dariam somente nos períodos em que não houvesse nenhuma aeronave nas 6 milhas que compõem a reta de aproximação final. É claro que neste caso, quando a demanda por aterrissagens supera a capacidade de aterrissagens, a fila do solo tende ao infinito. A segunda possibilidade é, levando-se em conta que embora a aeronave no ar tenha prioridade sobre a do solo, é possível intercalar algumas decolagens entre pousos consecutivos para não crescer muito a segunda fila. É claro que estas intercalações provocarão alguns pequenos atrasos na fila aérea. Este estudo será objeto do capítulo 5, estudando-se simultaneamente as duas filas, usando-se o modelo de Koopman [9] das filas duplas, que será então comentado.

3.3. AS JUSTIFICATIVAS DA APLICAÇÃO DO MODELO

Todos os autores consultados e já citados na secção anterior colocam alguns inconvenientes de se utilizar Teoria das Filas no estudo das esperas de aeronaves em aeroportos.

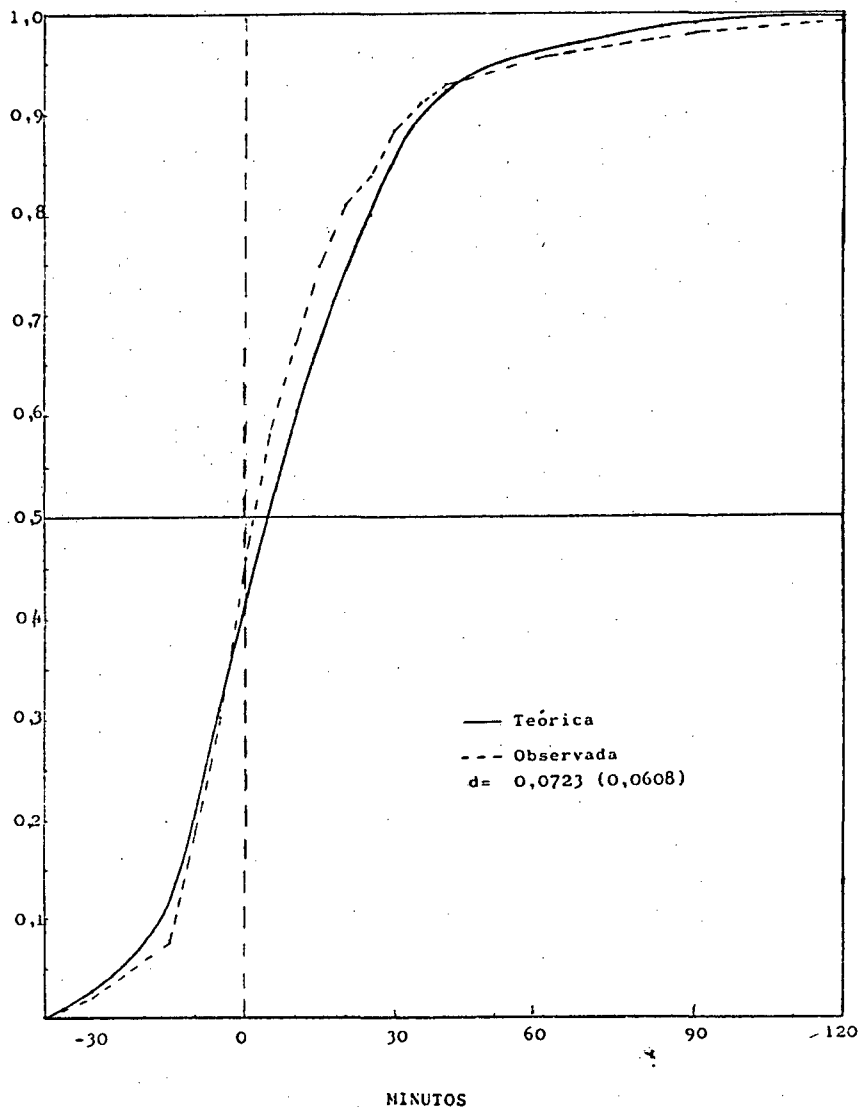
Um dos argumentos mais citados é o de que, em aeroportos, as taxas de chegadas de aeronaves variam constantemente em curtos espaços de tempo, havendo necessidade de ser analisado, per-

manentemente, o regime transitório de filas. Ora, em aeroportos ocorre o seguinte fato: Durante grande parte do dia, o aeroporto funciona com grande ociosidade, havendo congestionamento apenas nos horários de pico. E durante os horários de pico, os pequenos períodos de ociosidade que porventura venham a existir são aproveitados para fazer escoar as aeronaves que esperam liberação para decolar. Além disso, foi constatado, em observações feitas no radar do TMA de São Paulo, que as chegadas são regidas por uma distribuição de Poisson. Quanto à transitoriedade, observamos que só nos interessa o estudo das filas nos períodos de pico, já que fora destes períodos o comprimento da fila é praticamente nulo. Por outro lado, se olharmos o fato da transitoriedade com algum rigor, chegaremos à conclusão de que toda a fila tem esta característica, desde que as chegadas sejam aleatórias, e que, portanto, não teria sentido fazer uso da Teoria das Filas em nenhum caso. Portanto, podemos perfeitamente utilizar modelos de filas em regime estacionário e considerar como taxa de chegadas aquela que se dá nos horários de pico.

Um segundo argumento, que tornaria o modelo de filas inadequado para as filas de aeronaves é o seguinte: Em primeiro lugar, como grande parte das aeronaves que utilizam o Aeroporto de Congonhas são aeronaves de passageiros de empresas comerciais, estas têm um horário de chegadas e de saídas pré-determinado. Neste caso, não seriam as chegadas nas filas (de aterrissagem e de decolagem), mas sim os atrasos é que seriam aleatórios. Em segundo lugar, argumenta-se que em aeroportos,

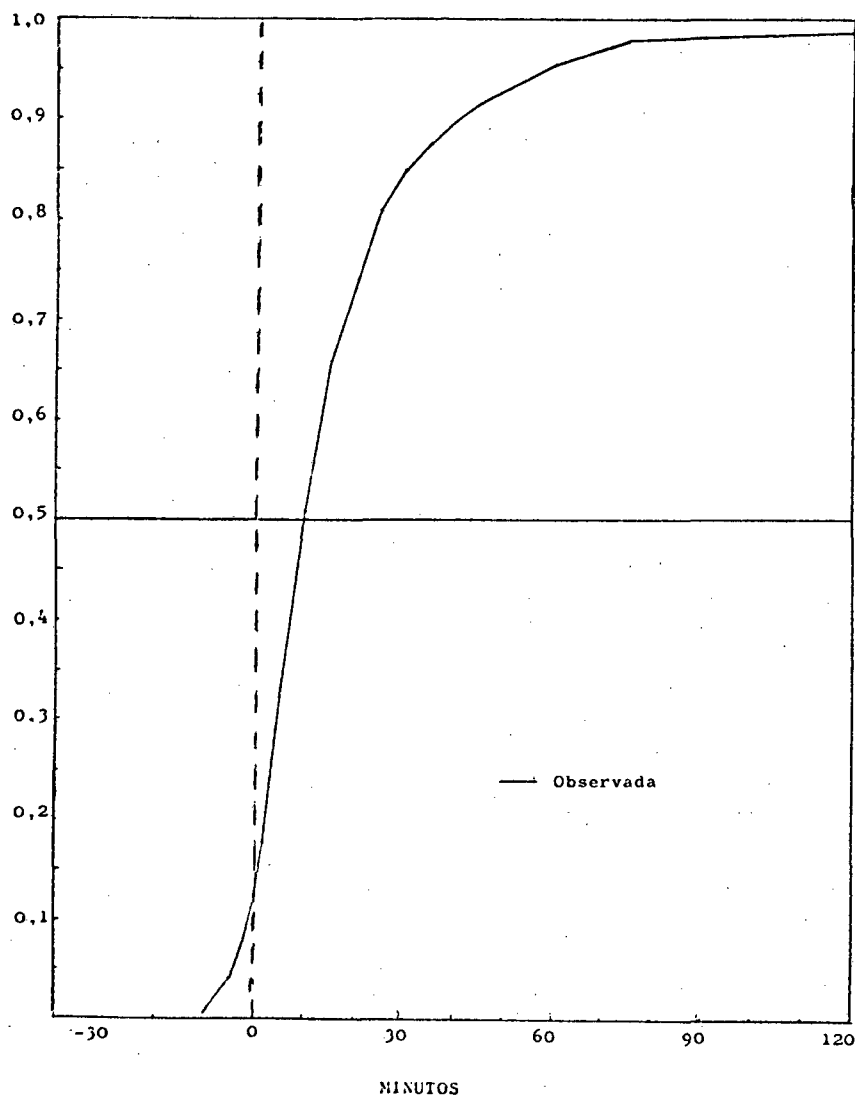
as chegadas e saídas das filas não são regidas por entrada Poisson e o tempo de serviço exponencial, o que praticamente invalidaria a aplicação do modelo de filas devido à complexidade dos modelos sem esta característica.

Quanto ao primeiro argumento, embora seja correto que estas aeronaves tenham um horário pré-determinado, Martinelli [2].



Quadro 3.1 - Desvio de horário nas chegadas
Frequências relativas acumuladas.

Obteve as Freqüências Relativas acumuladas nos desvios de horário nas chegadas (Quadro 3.1), com u'a média próxima de zero e desvio padrão de aproximadamente 15 minutos e as freqüências dos desvios de horário nas saídas, com a média próxima de 10 minutos e desvio padrão próximo de 15 minutos (Quadro 3.2). Isto se deve ao fato de que, embora muitas aeronaves cheguem atrasadas, ocorre também o fato de muitas chegarem adiantadas.



Quadro 3.2 - Desvios de horário na saída
Freqüências relativas acumuladas.

Portanto, podemos perfeitamente utilizar modelos de chegadas aleatórias.

Quanto ao segundo argumento, em observações feitas no radar em três dias de coletas de dados em horários de pico foi constatado que a taxa de chegadas no TMA de São Paulo das aeronaves que se dirigem a Congonhas tem distribuição de Poisson, portanto, justifica-se a aplicação do modelo. Quanto ao tempo de serviço, devido às características próprias, como a seqüência de operações em um procedimento de subida e de descida é sempre a mesma, sempre com os tempos quase iguais, a sua distribuição de probabilidades se aproxima muito mais de uma de tempo constante do que da distribuição exponencial. Porém, como foi citado na secção 1.2, Koopman [9] demonstra a insensitividade de se considerar a distribuição do tempo de serviço exponencial para os propósitos práticos.

Um último fato que inviabilizaria o modelo, segundo alguns autores, seria o de que, em modelos de filas, existem um ou vários postos de atendimento para uma única fila, e que, no caso de aeroportos, existe um único posto de atendimento para atender os dois tipos diferentes de serviços; quais sejam, as aterrissagens e as decolagens. Existem, portanto, duas filas distintas utilizando o mesmo posto de atendimento, cada uma delas interferindo na outra.

Este fato, que ocorre realmente, pode ser encarado de duas maneiras bem distintas, e de qualquer uma das maneiras que se encare o problema é possível utilizar modelos de filas. A primeira delas é considerar que existe prioridade absoluta de fi-

la aérea sobre a fila do solo, e, portanto, justifica-se preocupar-se apenas com o que ocorre na fila aérea, a fila do solo ficando condicionada à existência de ociosidade no atendimento das aterragens. Esta maneira de resolver o problema será objeto do Capítulo 4. A segunda maneira é considerar as duas filas (de aterrissagem e de decolagem) uma interferindo na outra, que será objeto do Capítulo 5 através do modelo de filas duplas de Koopman [9].

CAPÍTULO 4

O MODELO DE FILAS SIMPLES

Sejam λ e μ as taxas de chegada e de serviço respectivamente da fila aérea, isto é, das aeronaves que aguardam liberação de pistas para aterrissagem.

Sejam λ' e μ' as taxas de chegada e de serviço da fila do solo, isto é, das aeronaves que aguardam liberação da pista para decolagens.

Como para estas filas existe um critério que é o de dar prioridade absoluta às aterrizações, estudaremos primeiramente os elementos da fila aérea, estudando o comportamento da fila do solo tendo como base que a pista só será liberada para decolagens apenas quando a fila aérea estiver vazia, ou se forem permitidas intercalações de decolagens entre aterrissagens sucessivas sem atrasar a fila aérea.

4.1. A FILA AÉREA

Dados os valores λ e μ , e do fato de as chegadas serem Poisson e o tempo de serviço exponencial, podemos calcular os seguintes elementos da teoria das filas (ver secção 2.4).

ρ = fator de utilização da pista com respeito às aterrissagens.

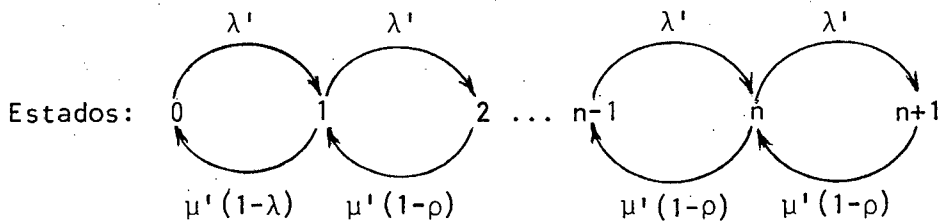
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

4.1.1

α é função da composição da frota das aeronaves que utilizam o aeroporto e das separações permitidas no início da reta de aproximação final. É claro que, aumentando-se as separações permitidas entre aterrissagens sucessivas, (portanto, diminuindo-se a taxa de atendimento μ) esta porcentagem α irá aumentar. Voltaremos a esta porcentagem no Capítulo 6.

4.2.1. PRIMEIRO CASO: SEM INTERCALAÇÕES

Neste caso, o processo de nascimento e morte da fila do solo toma a forma do diagrama abaixo.



A probabilidade de haver a saída de uma aeronave da fila do solo será então:

$$P\left\{\text{uma saída em } [t, t+\Delta t]\right\} = \mu'(1-\rho)\Delta t + o(\Delta t).$$

Isto ocorre porque a aeronave só poderá utilizar a pista para decolagens se a fila aérea estiver vazia, e esta está vazia com probabilidade $P_0 = 1-\rho$.

De maneira análoga à como foram obtidas as equações de balanço de um processo de filas na secção 2.4, as equações de balanço para a fila do solo tomarão a forma seguinte:

| Estado | Taxa de Entrar | Taxa de Sair |
|--------|---|-----------------------------------|
| 0 | $(1-\rho)\mu'P'_1$ | $= \lambda'P'_0$ |
| 1 | $\lambda'P'_0 + (1-\rho)\mu'P'_2$ | $= [\lambda' + \mu'(1-\rho)]P'_1$ |
| 2 | $\lambda'P'_1 + (1-\rho)\mu'P'_3$ | $= [\lambda' + \mu'(1-\rho)]P'_2$ |
| ... | | |
| n | $\lambda'P'_{n-1} + (1-\rho)\mu'P'_{n+1}$ | $= [\lambda' + \mu'(1-\rho)]P'_n$ |

Resolvendo estas equações, de maneira semelhante ao que foi feito na secção 2.4, vem:

$$P'_1 = \left[\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \right] P'_0$$

$$P'_2 = \left[\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \right] P'_1$$

.....

$$P'_n = \left[\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \right] P'_{n-1} \quad 4.2.1.1$$

que nos fornece o valor de P'_n em função de P'_0 pelas equações:

$$P'_1 = \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} P'_0$$

$$P'_2 = \left| \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \right|^2 P'_0$$

.....

$$P'_n = \left[\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \right]^n P'_0 \quad 4.2.1.2$$

Quando o número $\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)}$ é menor do que 1, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \right)^n$$

converge, e teremos: (ver secção 2.4)

$$P'_0 = 1 - \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \quad 4.2.1.3$$

$$P'_n = \left[\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \right]^n P'_0 = \left[\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \right]^n \left[1 - \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} \right] \quad 4.2.1.4$$

$$L' = \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho) - \lambda'} \quad 4.2.1.5$$

Para o cálculo de W' , lembrando que $W' = \frac{L'}{\lambda'}$ (secção 2.4), vem:

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) - \lambda'} \quad 4.2.1.6$$

Para o cálculo de L'_q , na secção 2.4 foi calculado, fazendo-se

$$L'_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P'_n,$$

pois naquele caso, o posto de serviço estava sempre disponível para atender o primeiro da fila. Já no nosso caso, o posto de serviço (pista) só estará livre durante a fração P_0 do tempo total. Assim, para este caso, teremos:

$$\begin{aligned}
 L'_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-P_0)P'_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP'_n - P_0 \sum_{n=1}^{\infty} P'_n = \\
 &= L' - P_0(1-P'_0) = \frac{\lambda'}{\mu'P_0 - \lambda'} - P_0 \frac{\lambda'}{\mu'P_0} = \\
 &= \frac{\lambda'}{\mu'P_0 - \lambda'} - \frac{\lambda'}{\mu'}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$L' = \frac{\lambda'}{\mu'P_0 - \lambda'} - \frac{\lambda'}{\mu'} \quad 4.2.1.7$$

Do fato de que $W'_q = \frac{L'_q}{\lambda'}$, vem,

$$W'_q = \frac{1}{\mu'P_0 - \lambda'} - \frac{1}{\mu'} \quad 4.2.1.8$$

ou seja,

$$W'_q = W' - \frac{1}{\mu'} \quad 4.2.1.9$$

NOTA: Uma observação importante para este processo de filas é que a fila não é totalmente visível. A parte visível da fila do solo é aquela que se dá na posição 2, esperando liberação da pista, quando então se dirigirá à posição 3 e decolará. Além destas que estão na posição 2, encontram-se na fila as aeronaves que pediram permissão para acionar os motores e iniciar o taxiamento, pois quando a fila é pequena, esta autorização é dada instantaneamente e quando a fila é longa, ou

quando existe uma seqüência grande de pousos consecutivos, esta autorização é retardada com o objetivo de se evitar a queima inútil de combustível.

Vejamos a aplicação deste modelo para alguns casos hipotéticos.

EXEMPLO 4.2.1.1. Suponha $\lambda = 20$; $\mu = 30$; $\lambda' = 15$; $\mu' = 60$.

Para a fila aérea, aplicando as fórmulas 4.1.1 a 4.1.4, temos:

$$\rho = 2/3; P_0 = 1/3; L = 2; L_q = 4/3;$$

$W = 6$ minutos, $W_q = 4$ minutos.

Para a fila do solo, aplicando as fórmulas 4.2.1.1 a 4.2.1.9, vem:

$$P'_0 = 1/4; L' = 3; L'_q = 2\frac{3}{4}$$

$W' = 12$ minutos, $W'_q = 11$ minutos.

EXEMPLO 4.2.1.2. Suponha $\lambda = 15$, $\mu = 30$, $\lambda' = 20$, $\mu' = 60$. (Com relação ao exercício 1), a taxa de chegadas na fila aérea foi diminuída de 20 para 15, enquanto que na fila do solo foi aumentada de 15 para 20).

Neste caso, teremos:

Para a fila aérea:

$$\rho = 1/2; P_0 = 1/2; L = 1; L_q = 1/2,$$

$W = 4$ minutos, $W_q = 2$ minutos.

Para a fila do solo, teremos:

$$P'_0 = \frac{1}{3}, L' = 2, L'_q = 1\frac{2}{3}.$$

$W' = 6$ minutos, $W'_q = 5$ minutos.

EXEMPLO 4.2.1.3: $\lambda = 20$, $\mu = 30$, $\lambda' = 20$, $\mu' = 60$.

Os valores para a fila aérea são os mesmos do exemplo 4.2.1.1.

Para a fila de solo, teremos:

$$\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} = \frac{20}{20} = 1.$$

Neste caso, a fila de solo explodirá, isto é, L' tenderá a ∞ .

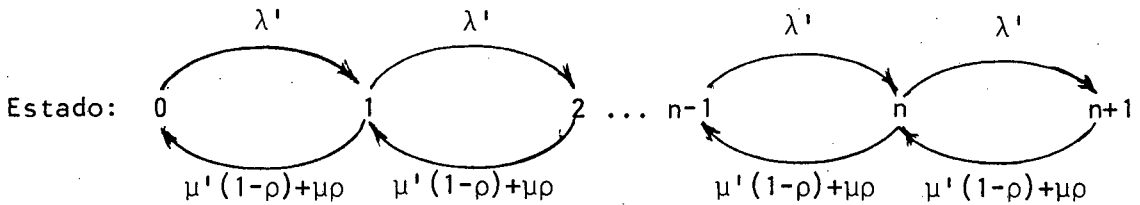
Segue, então que a limitação para a taxa de chegadas na fila do solo, dada a taxa de chegadas na fila aérea, para que a fila não exploda é dada por:

$$\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)} < 1, \text{ ou, } \lambda' < \mu'(1-\rho) \quad 4.2.1.10$$

4.2.2. SEGUNDO CASO - INTERCALAÇÕES SEMPRE POSSÍVEIS

Considerando-se a possibilidade de se intercalar uma decolagem entre duas aterrissagens sucessivas, sempre que a fila aérea esteja ocupada e existam aeronaves na fila do solo, e supondo-se que estas intercalações não atrasem a fila aérea,

teremos o seguinte diagrama para o processo de nascimento e morte na fila do solo



Neste caso, a taxa de atendimentos da fila do solo será aumentada para $\mu'(1-\rho)+\mu\rho$, pois, além de atender μ' aeronaves por hora nos intervalos de tempo em que a fila aérea está vazia, com probabilidade $P_0 = 1-\rho$, ainda pode atender μ aeronaves por hora, nos intervalos de tempo em que a fila aérea está ocupada. Como $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, vem que $\mu \cdot \rho = \lambda$. Logo, a taxa de atendimentos ficará aumentada para $\mu'(1-\rho)+\lambda$.

Efetuando-se os mesmos cálculos da secção anterior, vem os seguintes resultados para a fila do solo:

$$P'_0 = 1 - \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)+\lambda} \quad 4.2.2.1$$

$$L' = \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)+\lambda-\lambda'} \quad 4.2.2.2$$

$$L'_q = L' - \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)+\lambda-\lambda'} - \frac{\lambda'}{\mu'} \quad 4.2.2.3$$

$$W' = \frac{L'}{\lambda'} = \frac{1}{\mu'(1-\rho)+\lambda-\lambda'} \quad 4.2.2.4$$

$$W'_q = \frac{L'_q}{\lambda'} = \frac{1}{\mu'(1-\rho)+\lambda-\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \quad 4.2.2.5$$

Vejamos a aplicação deste modelo para alguns exemplos hi-

potéticas.

EXEMPLO 4.2.2.1: Suponha $\lambda = 25$, $\mu = 30$, $\lambda' = 20$, $\mu' = 60$.

Para a fila aérea, aplicando as fórmulas 4.1.1 a 4.1.6, vem:

$$P_0 = \frac{1}{6}, \rho = \frac{5}{6}, L = 5, L' = 4\frac{1}{6}$$

$W = 12$ minutos, $W_q = 10$ minutos.

Para a fila do solo, aplicando-se as fórmulas 4.2.2.1 a 4.2.2.5, vem:

$$P'_0 = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

$$L' = \frac{4}{3}, L'_q = \frac{16}{21},$$

$W = 4$ minutos, $W'_q = 3$ minutos.

EXEMPLO 4.2.2.2: Suponha $\lambda = 25$, $\mu = 30$, $\lambda' = 25$, $\mu' = 60$.

Os resultados para a fila aérea são, é claro, os mesmos do exercício 4.2.2.1.

Para a fila do solo, teremos aplicando as fórmulas 4.2.2.1 a 4.2.2.5:

$$P'_0 = \frac{2}{7}, L' = 2, L'_q = 1\frac{7}{12}$$

$W' = 6$ minutos, $W'_q = 5$ minutos.

NOTA: Observe que se este fosse o caso real, o aeroporto poderia atender, em uma hora, 25 aterrissagens e 25 decolagens,

com uma média de atrasos de apenas 10 minutos na fila aérea e de 5 minutos na fila de solo, perfazendo o total de 50 movimentos por hora.

É claro que, no caso real, não é sempre possível intercalar uma decolagem entre duas aterrissagens sucessivas, daí os atrasos da fila do solo serem superiores no caso real, dadas estas taxas de chegada.

EXEMPLO 4.2.2.3: Suponha $\lambda = 26$, $\mu = 28$, $\lambda' = 25$, $\mu' = 56$.

Para a fila aérea, teremos, aplicando as fórmulas 4.1.1 a 4.1.9

$$\rho = \frac{13}{14}, P_0 = \frac{1}{14}, L = 13, L_q = 12\frac{1}{14},$$

$W = 30$ minutos, $W_q = 28$ minutos.

Para a fila do solo, teremos, aplicando as fórmulas 4.2.2.1 a 4.2.2.5,

$$P'_0 = \frac{1}{6}, L' = 5, L'_q = 4\frac{21}{56},$$

$W' = 12$ minutos, $W'_q = 10,23$ minutos.

EXEMPLO 4.2.2.4: Suponha $\lambda = 26$, $\mu = 28$, $\lambda' = 30$, $\mu' = 56$.

Os resultados da fila aérea são os mesmos do exercício anterior.

Para a fila do solo, teríamos:

$$\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)+\lambda} = \frac{30}{30} = 1,$$

e neste caso o comprimento da fila do solo tende ao infinito.

Logo, deveremos ter, para que isto não ocorra,

$$\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)+\lambda} < 1,$$

ou seja,

$$\lambda' < \mu'(1-\rho)+\lambda. \quad 4.2.2.6$$

4.2.3. TERCEIRO CASO: SÓ É POSSÍVEL UMA PORCENTAGEM α DE INTERCALAÇÕES

Este caso é totalmente análogo ao caso anterior, com a restrição de não ser sempre possível intercalar uma decolagem entre duas aterrissagens sucessivas, mas apenas a porcentagem α das vezes. Daí, modificar-se as taxas de atendimento da fila do solo para: $\mu'(1-\rho)+\alpha\lambda$. As fórmulas 4.2.2.1 a 4.2.2.6, então, tomarão as seguintes formas:

$$P'_0 = 1 - \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)+\alpha\lambda} \quad 4.2.3.1$$

$$L' = \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)+\alpha\lambda-\lambda'} \quad 4.2.3.2$$

$$L'_q = \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)+\alpha\lambda-\lambda'} - \frac{\lambda'}{\mu'} \quad 4.2.3.3$$

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho)+\alpha\lambda-\lambda'} \quad 4.2.3.4$$

$$W'_q = W' - \frac{1}{\mu'} \quad 4.2.3.5$$

Com a restrição:

$$\mu'(1-\rho) + \alpha\lambda > \lambda', \quad 4.2.3.6$$

Vamos considerar os exemplos de 1 a 3 do exemplo anterior, considerando-se $\alpha = 0,8$, ou seja, que em apenas 80% das vezes é possível a intercalação.

EXEMPLO 4.2.3.1: Suponha $\lambda = 25$, $\mu = 30$, $\lambda' = 20$, $\mu' = 60$.

Os resultados para a fila aérea são, é claro, os mesmos do exercício 4.2.2.1, quais sejam:

$$P_0 = \frac{1}{6}, \quad L = 5, \quad L_q = 4\frac{1}{6},$$

$W = 12$ minutos, $W_q = 10$ minutos.

Para a fila de solo, aplicando-se as fórmulas 4.2.3.1 a 4.2.3.6, vem:

$$P'_0 = \frac{1}{3}, \quad L' = 2, \quad L'_q = 1\frac{1}{3}$$

$W' = 6$ minutos, $W'_q = 5$ minutos.

NOTA: A média dos atrasos, que era de $W'_q = 3$ minutos quando eram sempre possíveis as intercalações, aumentou para $W'_q = 5$ minutos, considerando-se $\alpha = 0,8$.

EXEMPLO 4.2.3.2: Suponha $\lambda = 25$, $\mu = 30$, $\lambda' = 25$, $\mu' = 60$, $\alpha = 0,8$.

Para a fila aérea, os resultados são os mesmos do exercício 4.2.2.2.

Para a fila de solo, aplicando-se as fórmulas 4.2.3.1 a 4-2-3-6, vem:

$$P'_0 = \frac{1}{6}, L' = 5, L'_q = 4\frac{7}{12},$$

$W' = 12$ minutos, $W'_q = 11$ minutos.

Observe que quando as intercalações são sempre possíveis, a média de atrasos é de 3 minutos, e quando são possíveis apenas 80% delas os atrasos sobem para 11 minutos.

EXEMPLO 4.2.3.3: Suponha $\lambda = 26$, $\mu = 28$, $\lambda' = 25$, $\mu' = 25$, $\alpha = 0,8$.

Para a fila aérea, os valores já foram determinados no exemplo 4.2.2.3.

Para a fila do solo, aplicando-se as fórmulas 4.2.3.1 a 4.2.3.6, vem:

$$\frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho)+\alpha\lambda} = \frac{25}{24,8} \text{ maior do que } 1.$$

Neste caso a fila do solo tende ao ∞ .

4.3. AS CURVAS DE ISODEMORA

Um fato surpreendente é que, dadas as taxas de atendimento das filas aérea e do solo, as curvas para os quais o par ordenado (λ, λ') das taxas de chegadas tem o mesmo valor esperado médio de atrasos na fila do solo são retilíneas.

Vejamos como ficam as curvas de isodemora para os três casos estudados na secção anterior.

1º CASO: Sem possibilidades de intercalações. O valor esperado médio dos atrasos é dado por:

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho)-\lambda'}$$

Fazendo-se $W' = \text{Constante} = K$, vem:

$$\mu' \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) - \lambda' = \frac{1}{K}$$

que nos fornece a equação linear em λ e λ' dada por:

$$\frac{\mu'}{\mu} \cdot \lambda + \lambda' = \mu' - \frac{1}{K} \quad 4.3.1$$

cujo domínio é restrito à região, $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$, $\lambda' < \mu'(1-\rho)$.

EXEMPLO 4.3.1: Suponhamos as taxas de atendimento de ambas as filas dadas por: $\mu = 28$, $\mu' = 56$.

As curvas de isodemora, tomarão a forma:

$$2\lambda + \lambda' = 56 - \frac{1}{K} \quad 4.3.2$$

cujo domínio é restrito à região: $0 < \lambda < 28$.

Consideremos as isodemoras dadas por:

$$W' = 4 \text{ minutos} = \frac{1}{15}, \quad W' = 5 \text{ minutos} = \frac{1}{12},$$

$$W' = 6 \text{ minutos} = \frac{1}{10}, \quad W' = 10 \text{ minutos} = \frac{1}{6},$$

$$W' = 15 \text{ minutos} = \frac{1}{4} \text{ e } W' = 20 \text{ minutos} = \frac{1}{3}$$

Teremos:

$$W' = K = \frac{1}{15} \Rightarrow 2\lambda + \lambda' = 41$$

$$W' = K = \frac{1}{12} \Rightarrow 2\lambda + \lambda' = 44$$

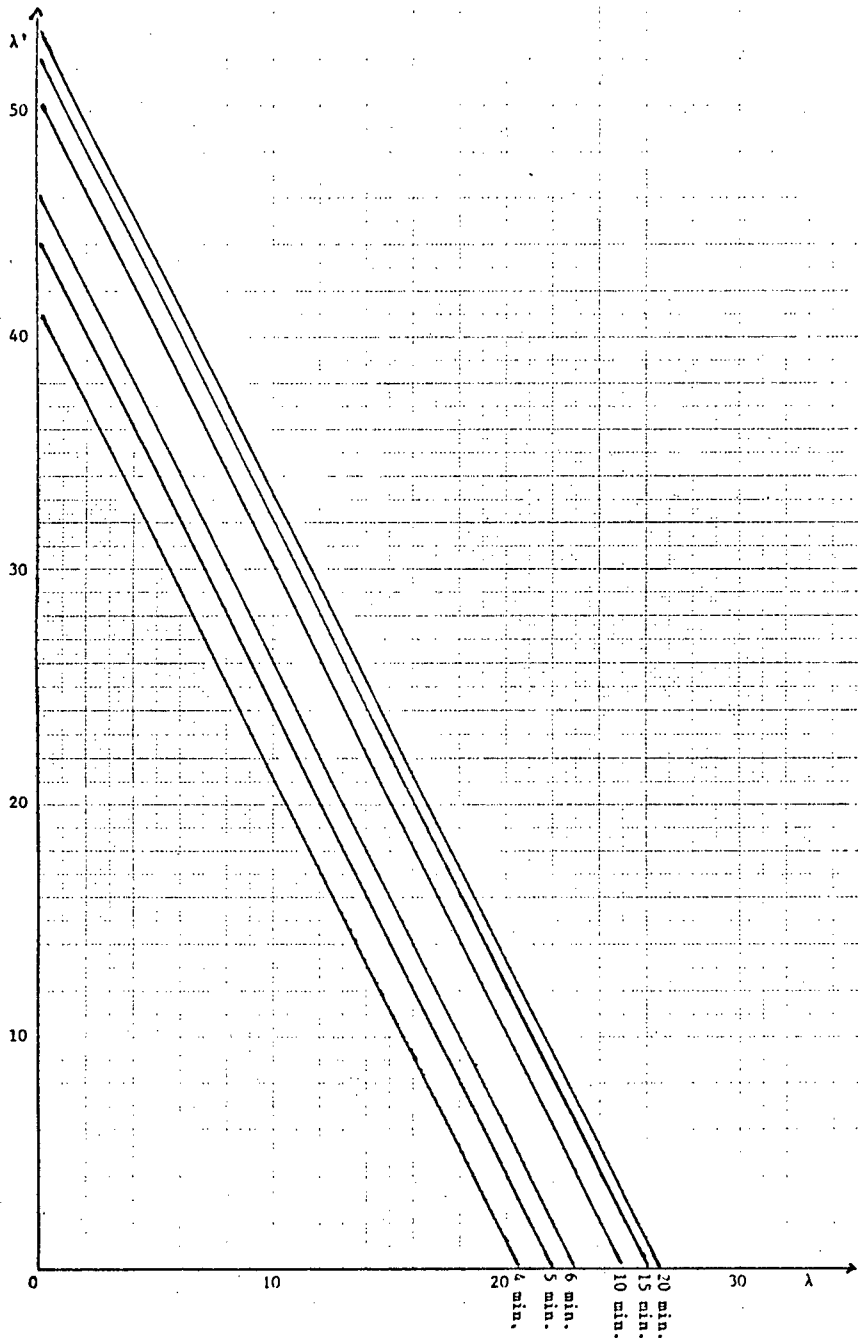


Figura 4.3.1 - Curvas de isodemora - sem intercalações

$$W' = K = \frac{1}{10} \implies 2\lambda + \lambda' = 46$$

$$W' = K = \frac{1}{6} \implies 2\lambda + \lambda' = 50$$

$$W' = K = \frac{1}{4} \implies 2\lambda + \lambda' = 52$$

$$W' = K = \frac{1}{3} \implies 2\lambda + \lambda' = 53$$

Cujos gráficos são apresentados na Figura 4.3.1

2º CASO: Intercalações sempre possíveis.

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) + \lambda - \lambda'}$$

Fazendo-se $W' = \text{Constante} = K$, vem:

$$\mu' \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) + \lambda - \lambda' = \frac{1}{K}$$

que nos fornece a equação linear em λ e λ' dada por:

$$\left(\frac{\mu'}{\mu} - 1 \right) \lambda + \lambda' = \mu' - \frac{1}{K}$$

que nos fornece as seguintes curvas de isodemora cujos gráficos estão na Figura 4.3.2, considerando-se os valores $\mu = 28$, $\mu' = 56$ do exercício anterior:

$$K = \frac{1}{15} \implies \lambda + \lambda' = 41$$

$$K = \frac{1}{12} \implies \lambda + \lambda' = 44$$

$$K = \frac{1}{10} \implies \lambda + \lambda' = 46$$

$$K = \frac{1}{6} \implies \lambda + \lambda' = 50$$

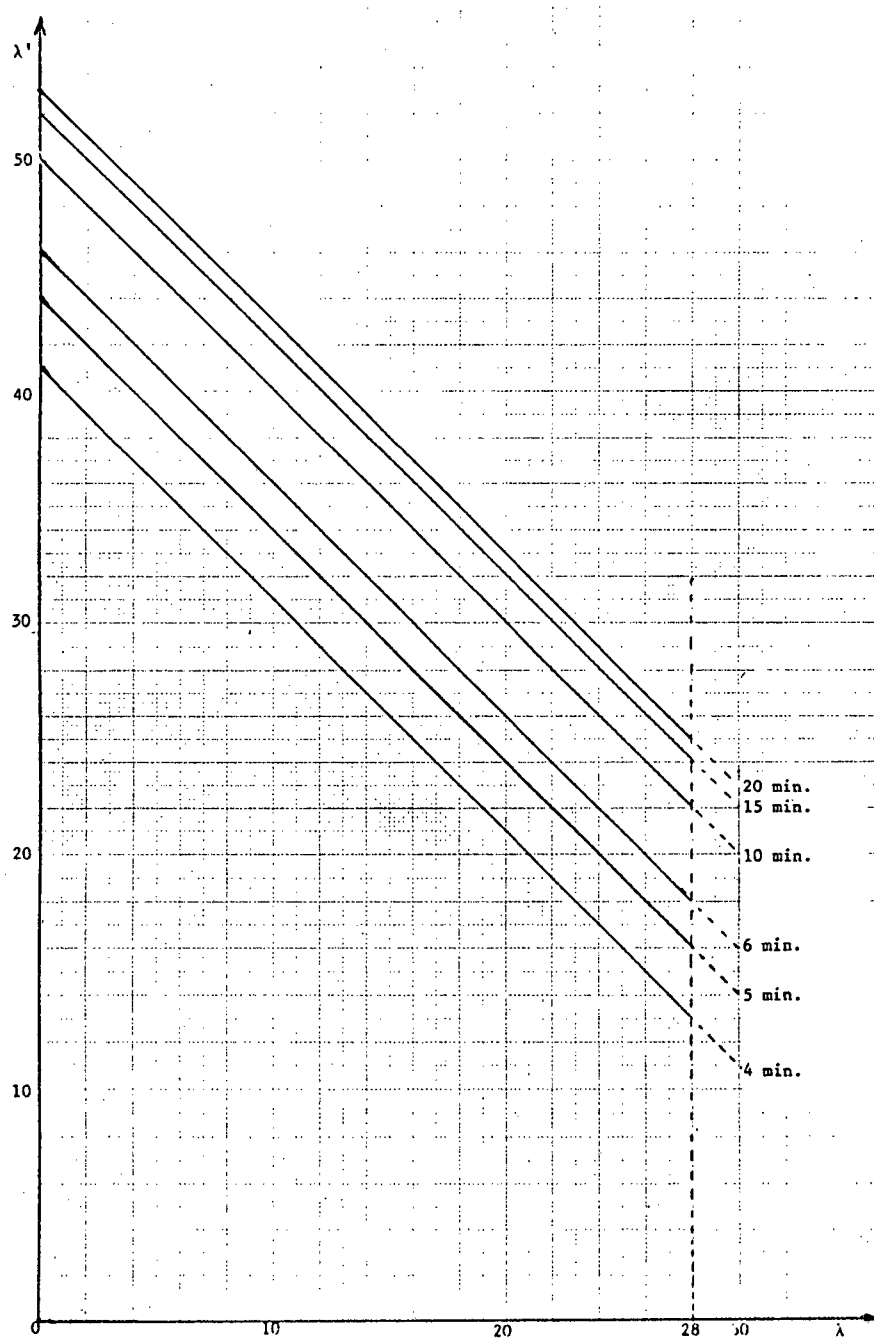


Figura 4.3.2 - Curvas de isodemora - Intercalações sempre possíveis.

$$K = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda + \lambda' = 52$$

$$K = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda + \lambda' = 53$$

Cujo domínio é restrito à região $0 < \lambda < 28$.

3º CASO: Permitidas apenas a porcentagem α de intercalações.

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) + \alpha\lambda + \lambda'}.$$

Fazendo-se $W' = \text{Constante} = K$, vem a equação linear:

$$\left(\frac{\mu'}{\mu} - \alpha\right)\lambda + \lambda' = \mu' - \frac{1}{K}$$

com domínio $0 < \lambda < \mu$.

Considerando-se o exemplo 4.3.1, com $\alpha = 0,8$, as curvas de isodemora são dadas por:

$$1,2\lambda + \lambda' = 56 - \frac{1}{K}.$$

Cujos gráficos estão na Figura 4.3.3.

$$K = \frac{1}{15} \Rightarrow 1,2\lambda + \lambda' = 41$$

$$K = \frac{1}{12} \Rightarrow 1,2\lambda + \lambda' = 44$$

$$K = \frac{1}{10} \Rightarrow 1,2\lambda + \lambda' = 46$$

$$K = \frac{1}{6} \Rightarrow 1,2\lambda + \lambda' = 50$$

$$K = \frac{1}{4} \Rightarrow 1,2\lambda + \lambda' = 52$$

$$K = \frac{1}{3} \Rightarrow 1,2\lambda + \lambda' = 53$$

NOTA: Só é possível analisar as isodemoras da fila do solo, pois a demora da fila aérea é independente de λ' , enquanto que a fila do solo depende da taxa de chegadas na fila aérea, λ .

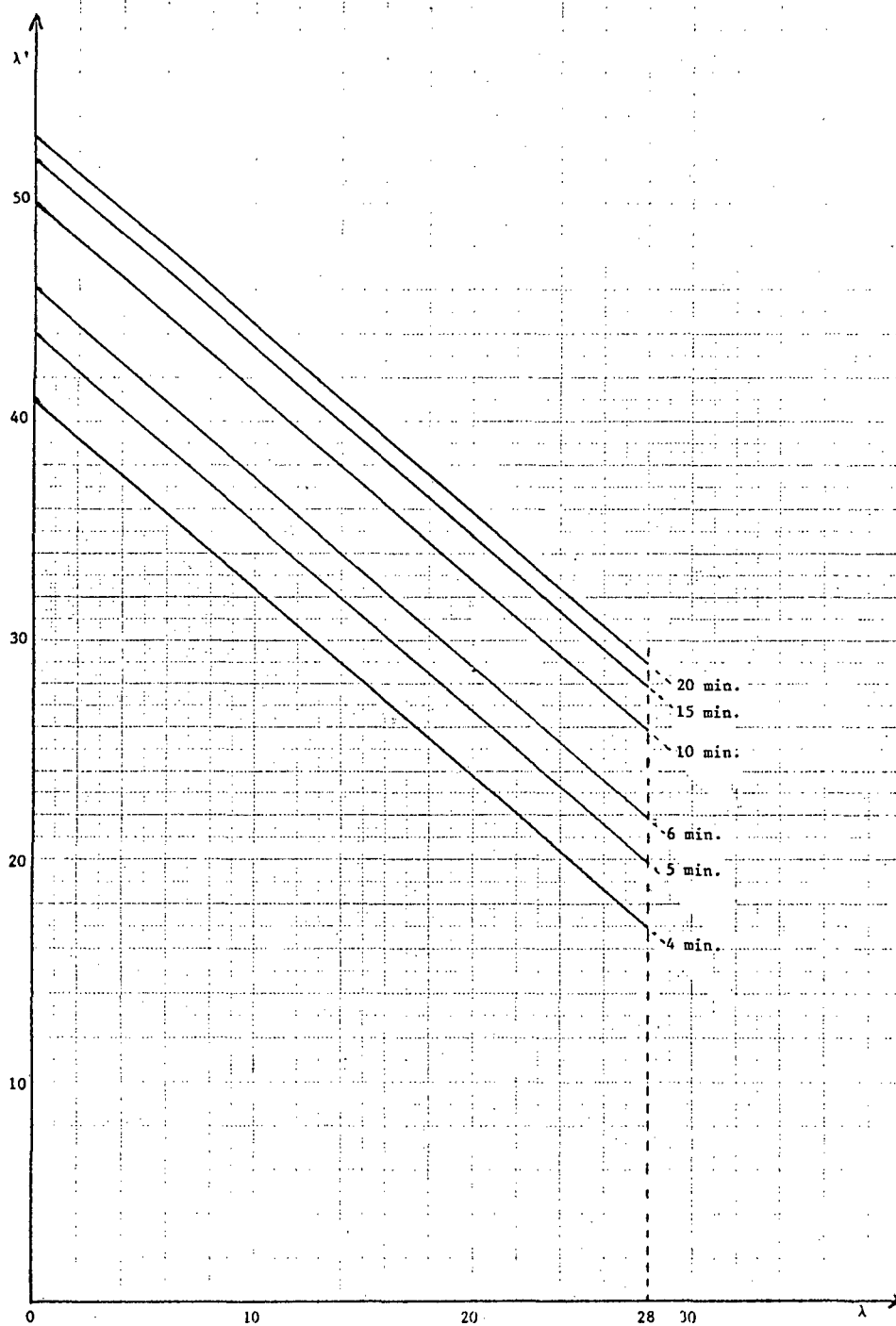


Figura 4.3.3 - Curvas de Isodemora - Porcentagem $\alpha = 0,8$ de intercalações.

CAPÍTULO 5

A FILA DUPLA

5.1. O MODELO DE KOOPMAN

Koopman [9] em seu artigo "Air Terminal Queues Under time-dependent Conditions" desenvolve um modelo para se estudar filas de aeronaves que possibilita o estudo das duas filas simultaneamente. Ele inicia seu trabalho demonstrando a insensitividade de se considerar os tempos de serviço como uma distribuição exponencial para os propósitos práticos, embora se saiba que se distribuem de alguma maneira intermediária entre distribuição de tempo constante e distribuição exponencial.

A seguir, considerando entrada Poisson e tempo de serviço exponencial, com a disciplina "primeiro a chegar, primeiro a ser atendido" e um único canal de atendimento, ele desenvolve, através do processo de nascimento e morte, as equações de balanço de uma fila simples com taxas de chegada e de atendimento fortemente dependente do tempo e com periodicidade de $T = 24$ horas. Obtém, desta forma, um sistema de $n+1$ equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de um tipo estudado em física-matemática, onde uma das propriedades importantes é que dado algum valor inicial $P_n(0)$, $n=0,1,2,\dots$, existe uma única solução para este sistema e se os coeficientes são periódicos de período $T = 24$ horas, então a solução também o é.

Na secção seguinte ele desenvolve, através do processo de nascimento e morte e de maneira análoga ao caso da fila simples, um modelo de fila dupla, chegando também a um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas semelhante ao anterior com a garantia de que existe uma única solução e se os coeficientes são periódicos com $T = 24$ horas, então a solução também o é. Seus modelos tomam as seguintes formas, que passamos a descrever.

5.1.1. A FILA SIMPLES

Koopman define os seguintes elementos de Teoria das Filas, que são, em seu modelo, fortemente dependente do tempo e com periodicidade de $T = 24$ horas.

$P_m(t)$ = Probabilidade de que existam m aeronaves no sistema (somente na fila aérea) no instante t .

$R_m(t)$ = Taxa de chegadas (número de aeronaves que chegam no sistema por unidade de tempo) no instante t dado que existem m aeronaves no sistema.

$L_m(t)$ = Taxa de atendimento no instante t , dado que existem m aeronaves no sistema.

Seu modelo impõe uma restrição para o comprimento da fila, $m \leq M$, alegando que a partir deste número M as aeronaves que chegassem ao aeroporto seriam desviadas para outros aeroportos ou seriam mantidas no solo dos outros aeroportos esperando diminuir o comprimento da fila.

Ele obtém então o sistema de $M+1$ equações diferenciais or-

dinâmicas homogêneas, dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dP_m(t)}{dt} = & R_{m-1}(t)P_{m-1}(t) - [R_m(t) + L_m(t)]P_m(t) + \\ & + L_{m+1}(t)P_{m+1}(t), \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned}$$

E, como foi citado anteriormente, dada a condição inicial $P_m(0)$, $0 \leq m \leq M$, existe uma única solução para este sistema de equações diferenciais, que é periódica, com período $T = 24$ horas.

5.1.2. A FILA DUPLA

Seu modelo de fila dupla também admite uma única pista para decolagens e aterrissagens, entrada Poisson e tempo de serviço exponencial, um limite M para a fila aérea e um limite N para a fila do solo, com taxas de chegada e de atendimento fortemente dependentes do tempo e com periodicidade de $T = 24$ horas.

A seguir, ele define os seguintes elementos de Teoria das Filas para a sua fila dupla:

$P_{m,n}(t)$ = Probabilidade de que existam m aeronaves na fila aérea e n aeronaves na fila do solo no instante t , $0 \leq m \leq M$; $0 \leq n \leq N$.

$R_{m,n}(t) \cdot \Delta t$ = Probabilidade de que haja uma chegada na fila aérea no intervalo $(t, t + \Delta t)$, dado que existem m aeronaves na fila aérea e n na fi-

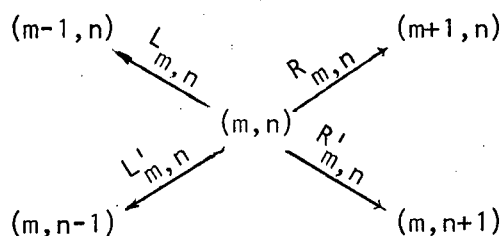
la do solo, para Δt suficientemente pequeno.

$R'_{m,n}(t) \cdot \Delta t$ = Probabilidade de que haja uma chegada na fila do solo no instante t , dado que existam m na fila aérea e n na fila do solo, para Δt suficientemente pequeno.

$L_{m,n}(t) \cdot \Delta t$ = Probabilidade de que uma aeronave da fila aérea aterrisse e deixe o sistema no intervalo Δt suficientemente pequeno, dado que existem m na fila aérea e n na fila do solo.

$L'_{m,n}(t) \cdot \Delta t$ = Probabilidade de que uma aeronave da fila do solo decole e deixe o sistema no intervalo $(t, t+\Delta t)$, dado que existem m aeronaves na fila aérea e n na fila do solo no instante t .

Para escrever as equações de evolução do sistema ele observa as seguintes transições possíveis para fora do estado (m,n) .



Calculando-se o valor $P_{m,n}(t+\Delta t)$ e o limite,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{m,n}(t+\Delta t) - P_{m,n}(t)}{\Delta t},$$

ele obtém o sistema de $(M+1) \times (N+1)$ equações: diferenciais lineares homogêneas com coeficientes dependentes do tempo t :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{(m,n)}(t)}{dt} = & -[R_{m,n}(t) + R'_{m,n}(t) + L_{m,n}(t) + L'_{m,n}(t)]P_{m,n}(t) + \\ & + R_{m-1,n}(t)P_{m-1,n}(t) + R'_{m,n-1}(t)P_{m,n-1}(t) + \\ & + L'_{m,n+1}(t)P_{m,n+1}(t) + L_{m+1,n}(t)P_{m+1,n}(t), \end{aligned}$$

$$0 \leq m \leq M; \quad 0 \leq n \leq N.$$

A seguir, Koopman reduz as equações pelo método das somas marginais, fazendo:

$$P_m(t) = \sum_{n=0}^{n=N} P_{m,n}(t),$$

onde:

$P_m(t)$ = Probabilidade de que existam m aeronaves na fila aérea, no instante t , independente do número de aeronaves na fila do solo

$$P'_n(t) = \sum_{m=0}^M P_{m,n}(t),$$

onde,

$P'_n(t)$ = Probabilidade de que existam n aeronaves na fila do solo no instante t , independente do número de aeronaves na fila aérea.

Assim, as equações de evolução de sua fila dupla tomam as

formas:

$$\begin{aligned} \frac{dP_m(t)}{dt} = & R_{m-1}(t) \cdot P_{m-1}(t) - [R_m(t) + L_m(t)] \cdot P_m(t) + \\ & + L_m(t) P_{m+1}(t), \end{aligned}$$

onde,

$$R_m(t) = \sum_{n=0}^N R_{m,n} \frac{P_{m,n}(t)}{P_m(t)}$$

e

$$L_m(t) = \sum_{n=0}^N L_{m,n} \frac{P_{m,n}(t)}{P_m(t)}$$

para a fila aérea. E para a fila do solo tomam a forma:

$$\begin{aligned} \frac{dP'_n(t)}{dt} = & R'_{n-1}(t) P'_{n-1}(t) - [R'_n(t) + L'_n(t)] P'_n(t) + \\ & + L'_n(t) P'_{n+1}(t), \end{aligned}$$

onde,

$$R'_n(t) = \sum_{m=0}^M R'_{m,n}(t) \frac{P_{m,n}(t)}{P'_n(t)}$$

e

$$L'_n(t) = \sum_{m=0}^M L'_{m,n}(t) \frac{P_{m,n}(t)}{P'_n(t)}$$

A solução deste sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas fornece as probabilidades $P_m(t)$ e $P'_n(t)$ que possibilitam os cálculos de $L(t)$, $L'(t)$, $W(t)$, $W'(t)$, $W_q(t)$, $W'_q(t)$ todos fortemente dependentes do tempo t e com periodicidade de $T = 24$ horas.

5.1.3. OS INCONVENIENTES DO MODELO DE KOOPMAN

Este modelo apresenta alguns inconvenientes fortes, pois, devido ao fato de as taxas de chegada e de atendimento serem fortemente dependentes do tempo, os sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas são extremamente complicadas, tendo como soluções as funções $P_m(t)$ também dependentes do tempo e com periodicidade.

Koopman cita, em seu artigo, o processo de filas para aterrissagem disposta na forma de plataformas. Daí a necessidade de restringir os comprimentos das filas, tanto de aterrissagens como de decolagens. Ele cita como exemplo o Aeroporto de La Guardia, cujos limites, na época eram $M = 60$ e $N = 25$. Atualmente, com o desenvolvimento da vetoração radar nos aeroportos mais movimentados, estas filas já não têm esta característica.

Tão complexo é o modelo de Koopman, que ele cita a possibilidade de aplicar seu modelo ao aeroporto de La Guardia, mas não o faz em termos práticos, deixando em aberto a sua aplicação.

Faremos, então, na próxima secção, um estudo de filas duplas semelhante ao de Koopman, com as simplificações de taxas de chegada e de atendimento constantes com o tempo e sem li-

mites para os comprimentos das filas.

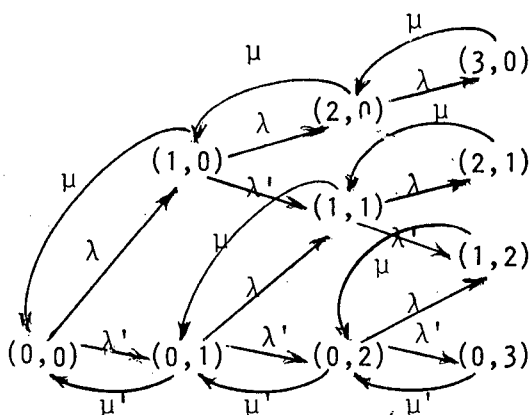
5.2. A FILA DUPLA SIMPLIFICADA

Sejam λ e μ as taxas de chegada e de atendimento na fila aérea e λ' e μ' as taxas de chegada e de atendimento na fila do solo, as quais estamos considerando constantes com o tempo e independentes de quantos elementos encontram-se no sistema.

Vamos analisar o modelo de Fila Dupla de Koopman, com estas simplificações, nos três casos que foram estudados no Capítulo 4.

5.2.1. PRIMEIRO CASO: SEM INTERCALAÇÃO

O processo de nascimento e morte para esta fila dupla pode ser entendido segundo o diagrama abaixo



*(Note que no diagrama não é possível passar do estado (m, n) para o estado $(m, n-1)$ quando $m \neq 0$, devido à prioridade absoluta da fila aérea sobre a fila do solo e não ser permitido intercalações de decolagens entre aterrissagens.

As equações de balanço para este sistema de filas tomarão as seguintes formas:

Para os elementos da forma $(m,0)$:

| Estado | Taxa de Entrar | Taxa de Sair |
|---------|---|--|
| $(0,0)$ | $\mu P_{(1,0)} + \mu' P_{(0,1)}$ | $= (\lambda + \lambda') P_{(0,0)}$ |
| $(1,0)$ | $\lambda P_{(0,0)} + \mu P_{(2,0)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(1,0)}$ |
| $(2,0)$ | $\lambda P_{(1,0)} + \mu P_{(3,0)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(2,0)}$ |
| | | |
| $(m,0)$ | $\lambda P_{(m-1,0)} + \mu P_{(m+1,0)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(m,0)}$ |

Para os estados da forma $(0,n)$:

| Estado | Taxa de Entrar | Taxa de Sair |
|---------|---|---|
| $(0,0)$ | $\mu P_{(1,0)} + \mu' P_{(0,1)}$ | $= (\lambda + \lambda') P_{(0,0)}$ |
| $(0,1)$ | $\lambda' P_{(0,0)} + \mu P_{(1,1)} + \mu' P_{(0,2)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu') P_{(0,1)}$ |
| $(0,2)$ | $\lambda' P_{(0,1)} + \mu P_{(1,2)} + \mu' P_{(0,3)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu') P_{(0,2)}$ |
| | | |
| $(0,n)$ | $\lambda' P_{(0,n-1)} + \mu P_{(1,n)} + \mu' P_{(0,n+1)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu') P_{(0,n)}$ |

Para os estados (m,n) com $m \cdot n \neq 0$, vem:

$$(m,n) \quad \lambda P_{(m-1,n)} + \lambda' P_{(m,n-1)} + \mu P_{(m+1,n)} = (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(m,n)}$$

Para os modelos de filas duplas são definidas as seguintes somas marginais:

$P_m = \sum_{i=0}^{\infty} P_{(m,i)}$ = Probabilidade de que existam m aeronaves na fila aérea, independente do número de aeronaves na fila do solo.

$P'_n = \sum_{i=0}^{\infty} P_{(i,n)}$ = Probabilidade de que existam n aeronaves na fila de solo, independente do número de aeronaves na fila aérea.

Vamos analisar as equações de balanço do sistema de filas para os estados da forma $(0,n)$.

As equações de balanço são:

| Estado | Taxa de Entrar | Taxa de Sair |
|---------|---|---|
| $(0,0)$ | $\mu P_{(1,0)} + \mu' P_{(0,1)}$ | $= (\lambda + \lambda') P_{(0,0)}$ |
| $(0,1)$ | $\lambda' P_{(0,0)} + \mu P_{(1,1)} + \mu' P_{(0,2)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu') P_{(0,1)}$ |
| $(0,2)$ | $\lambda' P_{(0,1)} + \mu P_{(1,2)} + \mu' P_{(0,3)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu') P_{(0,2)}$ |
| | | |
| $(0,n)$ | $\lambda' P_{(0,n-1)} + \mu P_{(1,n)} + \mu' P_{(0,n+1)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu') P_{(0,n)}$ |

Observe que colocando-se λ' em evidência na primeira coluna e somando-se os infinitos termos temos: $\sum_{j=0}^{\infty} P_{(0,j)} = P_0$.

Na segunda coluna, somando-se os infinitos termos e colocando-se μ em evidência, vem: $\sum_{j=0}^{\infty} P_{(1,j)} = P_1$.

Analogamente, na coluna do 2º membro, após a 2ª linha, vem: $\sum_{j=1}^{\infty} P_{(0,j)} = P_0 - P_{(0,0)}$.

Logo, a soma das infinitas equações tomará a forma:

$$\lambda' P_0 + \mu P_1 + \mu' [P_0 - P_{(0,0)}] = (\lambda + \lambda') P_{(0,0)} +$$

$$+ (\lambda + \lambda' + \mu') [P_0 - P_{(0,0)}]$$

Usando a propriedade distributiva e simplificando, esta equação toma a forma:

$$\mu \cdot P_1 = \lambda P_0.$$

Donde

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0. \quad 5.2.1$$

Efetutando-se os mesmos cálculos para as equações de balanço dos estados da forma $(1,n)$, $(2,n)$, ..., etc., vem:

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2$$

.....

$$P_m = \frac{\lambda}{\mu} P_{m-1}$$

Observe que estas equações são as mesmas que foram obtidas para a fila aérea na secção 4.1, e, portanto, o modelo de fila dupla coincide com o modelo de fila simples, para a fila aérea.

Analisando agora as equações de balanço para os estados da forma $(m,0)$, teremos:

| Estado | Taxa de Entrar | Taxa de Sair |
|--------|---|--|
| (0,0) | $\mu P_{(1,0)} + \mu' P_{(0,1)}$ | $= (\lambda + \lambda') P_{(0,0)}$ |
| (1,0) | $\lambda P_{(0,0)} + \mu P_{(2,0)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(1,0)}$ |
| (2,0) | $\lambda P_{(1,0)} + \mu P_{(3,0)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(2,0)}$ |
| | | |
| (m,0) | $\lambda P_{(m-1,0)} + \mu P_{(m+1,0)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(m,0)}$ |

Somando as colunas, de maneira análoga ao caso anterior e substituindo as somas infinitas das colunas pelas somas marginais, vem:

$$\begin{aligned} \lambda P'_0 + \mu [P'_0 - P_{(0,0)}] + \mu' P_{(0,1)} &= (\lambda + \lambda') P_{(0,0)} + \\ &+ (\lambda + \lambda' + \mu) [P'_0 - P_{(0,0)}] \end{aligned}$$

Usando a propriedade distributiva e simplificando, esta equação toma a forma

$$P_{(0,1)} = \frac{\lambda'}{\mu'} P'_0 \quad 5.2.2$$

Como a fila aérea tem prioridade absoluta sobre a fila do solo, segue-se que:

$P\{m/n\}$ = Probabilidade de que existam m aeronaves na fila aérea, dado que existem n na fila do solo, igual a P_m .

Como

$$P\{m/n\} = \frac{P(m,n)}{P'_n} = P_m,$$

então, $P_{(m,n)} = P_m \cdot P'_n$.

Utilizando-se esta relação na equação 5.2.2, vem:

$$P_0 P'_1 = \frac{\lambda'}{\mu'} P'_0$$

Donde,

$$P'_1 = \frac{\lambda'}{\mu' P_0} \cdot P'_0 \quad 5.2.3$$

Efetuada-se os mesmos cálculos para os estados da forma $(m,1), (m,2), \dots$, vem:

$$P'_2 = \frac{\lambda'}{\mu' P_0} \cdot P'_1$$

$$P'_3 = \frac{\lambda'}{\mu' P_0} \cdot P'_2$$

.....

$$P'_n = \frac{\lambda'}{\mu' P_0} \cdot P'_{n-1}$$

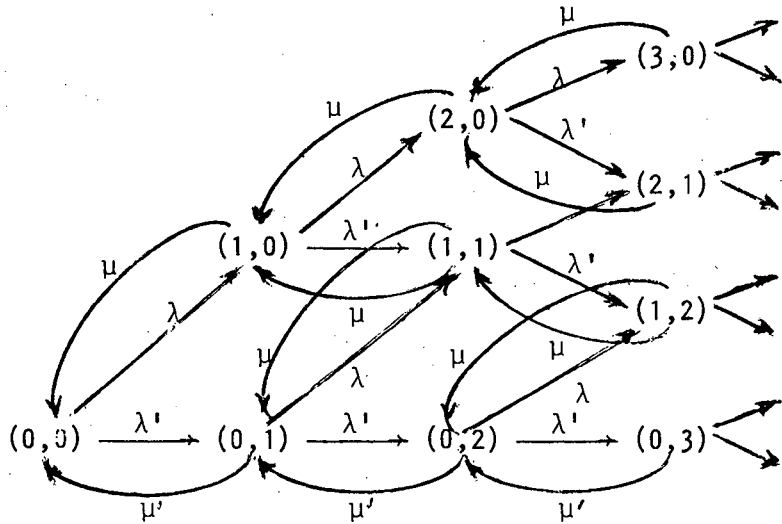
E estas equações nos fornece a equação:

$$P'_n = \left(\frac{\lambda'}{\mu' P_0} \right)^n \cdot P'_0 \quad 5.2.4$$

Observe que esta equação é a mesma que foi obtida para a fila do solo no modelo de fila simples da secção 4.2.1, e a partir desta coincidência, todas as outras equações coincidem.

5.2.2. SEGUNDO CASO: INTERCALAÇÕES SEMPRE POSSÍVEIS

O processo de nascimento e morte para este tipo de fila pode ser entendido pelo diagrama abaixo:



Observe que, para passar do estado $(0, n)$ para o estado $(0, n-1)$ a taxa de atendimentos é igual a μ' , pois neste caso, a fila aérea se encontra vazia. Já para passar do estado (m, n) para o estado $(m, n-1)$, com $m \neq 0$, a taxa de atendimentos é igual a μ , pois neste caso, a fila aérea está não vazia, e por hipótese, é possível intercalar uma decolagem entre duas aterrissagens sucessivas sem atrasar a fila aérea.

De maneira análoga ao que foi feito na secção 5.2.1, vamos analisar as equações de balanço dos estados da forma $(0, n)$.

Estas equações tomam a forma (apresentada na pág. 84).

Observe que nestas equações não aparecem as passagens dos estados (m, n) para os estados $(m, n-1)$ com $m \neq 0$. Logo, as equações são as mesmas da secção 5.2.1, e, portanto, diga-se a mes-

| Estado | Taxa de Entrar | Taxa de Sair |
|--------|---|---|
| (0,0) | $\mu P_{(1,0)} + \mu' P_{(0,1)}$ | $= (\lambda + \lambda') P_{(0,0)}$ |
| (0,1) | $\lambda' P_{(0,0)} + \mu P_{(1,1)} + \mu' P_{(0,2)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu') P_{(0,1)}$ |
| (0,2) | $\lambda' P_{(0,1)} + \mu P_{(1,2)} + \mu' P_{(0,3)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu') P_{(0,2)}$ |
| | | |
| (0,n) | $\lambda' P_{(0,n-1)} + \mu P_{(1,n)} + \mu' P_{(0,n+1)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu') P_{(0,n)}$ |

ma equação da fila aérea:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0$$

Analisando as equações de balanço dos estados da forma (1,n), vem:

| Estado | Taxa de Entrar | Taxa de Sair |
|--------|--|---|
| (1,0) | $\lambda P_{(0,0)} + \mu P_{(2,0)} + \mu P_{(1,1)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(1,0)}$ |
| (1,1) | $\lambda P_{(0,1)} + \mu P_{(2,1)} + \mu P_{(1,2)} + \lambda' P_{(1,0)}$ | $= (\lambda + \lambda' + 2\mu) P_{(1,1)}$ |
| (1,2) | $\lambda P_{(0,2)} + \mu P_{(2,2)} + \mu P_{(1,3)} + \lambda' P_{(1,1)}$ | $= (\lambda + \lambda' + 2\mu) P_{(1,2)}$ |
| | | |
| (1,n) | $\lambda P_{(0,n)} + \mu P_{(2,n)} + \mu P_{(1,n+1)} + \lambda' P_{(1,n-1)}$ | $= (\lambda + \lambda' + 2\mu) P_{(1,n)}$ |

Somando as infinitas equações, vem:

$$\begin{aligned} \lambda P_0 + \mu P_2 + \mu [P_1 - P_{(1,0)}] + \lambda' P_1 &= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(1,0)} + \\ &+ (\lambda + \lambda' + 2\mu) [P_1 - P_{(1,0)}] \end{aligned}$$

que simplificando, vem:

$$\lambda P_0 + \mu P_2 = (\lambda + \mu) P_1 \quad 5.2.5$$

que é a mesma equação de balanço do estado 1 da fila aérea simples do Capítulo 4.

Embora, neste caso apareçam as transições do estado (m,n) para o estado (m,n-1), isto não influi nos resultados da fila aérea, dando, portanto, os mesmos resultados da secção 4.1.1.

Para estudarmos os valores da fila do solo, vamos analisar as equações de balanço dos estados (m,0).

| Estado | Taxa de Entrar | Taxa de Sair |
|--------|---|--|
| (0,0) | $\mu P_{(1,0)} + \mu' P_{(0,1)}$ | $= (\lambda + \lambda') P_{(0,0)}$ |
| (1,0) | $\mu P_{(2,0)} + \lambda P_{(0,0)} + \mu P_{(1,1)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(1,0)}$ |
| (2,0) | $\mu P_{(3,0)} + \lambda P_{(1,0)} + \mu P_{(2,1)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(2,0)}$ |
| | | |
| (m,0) | $\mu P_{(m+1,0)} + \lambda P_{(m-1,0)} + \mu P_{(m,1)}$ | $= (\lambda + \lambda' + \mu) P_{(m,0)}$ |

Somando as infinitas equações, vem:

$$\begin{aligned} \mu [P'_0 - P_{(0,0)}] + \mu' P_{(0,1)} + \lambda P'_0 + \mu [P'_1 - P_{(0,1)}] &= \\ &= (\lambda + \lambda') P_{(0,0)} + (\lambda + \lambda' + \mu) [P'_0 - P_{(0,0)}] \end{aligned}$$

simplificando esta equação, vem:

$$(\mu' - \mu) P_{(0,1)} = \lambda' P'_0 - \mu P'_1$$

Como a fila aérea é independente da fila do solo, temos:

$$P_{(0,1)} = P_0 \cdot P'_1.$$

Logo,

$$(\mu' - \mu) P_0 \cdot P'_1 = \lambda' P'_0 - \mu P'_1$$

Donde,

$$P'_1 = \frac{\lambda'}{(\mu' - \mu) P_0 + \mu} \cdot P'_0$$

De $P_0 = 1 - \rho$, vem:

$$\begin{aligned} (\mu' - \mu) P_0 + \mu &= (\mu' - \mu) (1 - \rho) + \mu = \mu' - \mu' \rho - \mu + \\ &+ \mu \rho + \mu = \mu' (1 - \rho) + \lambda. \end{aligned}$$

Logo,

$$P'_1 = \frac{\lambda'}{\mu' (1 - \rho) + \lambda} \cdot P'_0 \quad 5.2.6$$

Analisando as equações dos estados $(m, 1), (m, 2), \dots$, obtemos as equações:

$$P'_2 = \frac{\lambda'}{\mu' (1 - \rho) + \lambda} \cdot P'_1$$

$$P'_3 = \frac{\lambda'}{\mu' (1 - \rho) + \lambda} \cdot P'_2$$

.....

$$P'_n = \frac{\lambda'}{\mu' (1 - \rho) + \lambda} \cdot P'_{n-1}.$$

Observe que são as mesmas equações que foram obtidas na secção 4.2.1 para o modelo de filas simples. Logo, todos os resultados coincidem com os obtidos naquele.

5.2.3. TERCEIRO CASO: APENAS UMA PORCENTAGEM α DE INTERCALAÇÕES SÃO POSSÍVEIS

É claro que este caso é semelhante ao caso anterior, com a diferença de que a taxa de atendimentos para passar do estado (m,n) ao estado $(m,n-1)$ quando $m \neq 0$, é $\alpha\mu$. Logo, efetuando-se os cálculos de maneira análoga aos que foram efetuados na secção anterior, chegar-se-á à equação:

$$P'_1 = \frac{\lambda'}{\mu'(1-\rho) + \alpha\lambda} \cdot P'_0 \quad 5.2.7$$

ou seja, neste caso, também os resultados da Teoria das Filas obtidos no modelo de fila dupla coincide com os que foram obtidos no modelo de filas simples obtido no Capítulo 4.

5.3. CONCLUSÕES RELATIVAS AO MODELO DE FILA DUPLA

A finalidade principal de se estudar o processo de filas de aeronaves em aeroportos através do modelo de fila dupla, era, antes de iniciar este capítulo, aprimorar os resultados obtidos no Capítulo 4 com o modelo de filas simples.

Quando, no Capítulo 4, fizemos a taxa de atendimento da fila do solo igual a $\mu'(1-\rho)$, pensávamos que estivesse sendo feita uma aproximação grosseira, pois, de acordo com as hipó-

teses feitas, tudo se passaria como se fosse uma fila simples MM1, com a taxa de atendimentos μ' diminuída para $\mu'(1-\rho)$. Achávamos que fosse uma aproximação grosseira porque não se levava em conta as interrupções da fila do solo para a aterrissagem das aeronaves que estivessem na fila aérea. Ou seja, tudo se passaria como se o posto de serviço (Pista) estivesse sempre à disposição para atender a fila de solo, apenas a taxa de atendimentos sendo multiplicada pelo fator $1-\rho$ que é a probabilidade de a fila aérea estar vazia. É claro que o caso real não é este. Daí a desconfiança de que aquele modelo não estivesse representando o modelo real. Pensávamos, então, que estudando o modelo de fila dupla, obteríamos resultados mais representativos da realidade do sistema do que os obtidos no estudo de filas simples.

Surpreendentemente, estudando o modelo de fila dupla, levando-se em conta que quando houvesse aeronaves na fila aérea a taxa de atendimentos da fila do solo seria zero, portanto, considerando-se as interrupções, o que é mais próximo do fenômeno real, os resultados obtidos foram exatamente os mesmos que os obtidos no Capítulo 4 com o modelo de filas simples.

Daí, a conclusão de que estávamos enganados quando pensávamos que o modelo de filas simples como foi desenvolvido fosse apenas uma aproximação grosseira do Modelo Real.

O desenvolvimento do Capítulo 5 serviu-nos, portanto, para confirmar os resultados obtidos no Capítulo 4, bem como, para a validação teórica daqueles, já que a validação prática e comparação das esperas teóricas com as reais será objeto do Capítulo 6.

CAPÍTULO 6

COMPARAÇÕES E VALIDAÇÃO DO MODELO

Para as comparações e validação do modelo foi feito um estudo de caso das filas de aeronaves do Aeroporto de Congonhas, onde os resultados obtidos pela aplicação do modelo foram considerados satisfatórios.

Cabe aqui a seguinte observação: Para uma validação mais rigorosa do modelo necessitaríamos de certos dados que não puderam ser conseguidos, ou por falta de informações das autoridades responsáveis pelo aeroporto, ou por falta de condições e recursos técnicos. Por exemplo, a aplicação do modelo exige a tomada de dados das taxas de chegada das filas aérea e do solo simultaneamente, no mesmo período, o que é impossível para uma única pessoa fazê-lo, pois a sala de controle radar, onde são obtidos os dados da fila aérea, e a torre de controle, onde são obtidos os dados da fila do solo, distam aproximadamente um quilômetro uma da outra. Quando da constatação desta deficiência, foi feito um pedido à Coordenadoria da Pós-Graduação da Fundação Getúlio Vargas para a contratação de um monitor que auxiliasse na tomada dos dados, o que foi negado. Logo, quando da obtenção de uma das taxas, a outra deve ser obtida por estimativa. Como os resultados principais deste trabalho são referentes à fila do solo, faremos a estimativa prin-

principalmente da fila aérea. Esta estimativa será feita com base na ficha de controle da Torre de Controle, sem levar em conta a espera, isto é, a taxa de chegadas na fila aérea será considerada como a taxa de aterrissagens realizadas naquele período. Esta estimativa é razoavelmente próxima da taxa real, pois nesta fila não há desistências, ou seja, todas as aeronaves que chegam na fila completam a aterrissagem. Queremos esclarecer também que o objetivo principal deste trabalho é a determinação de um modelo que trate este tipo específico de filas, ou seja, uma fila dupla com um único canal de atendimento e um esquema de prioridades, e, apesar das deficiências os resultados conseguidos foram considerados satisfatórios.

6.1. AS TAXAS DE CHEGADA NA FILA AÉREA

Para a determinação das taxas de chegada na fila aérea foram obtidas duas amostras em dois dias diferentes. Estas amostras foram obtidas anotando-se, da sala de controle radar do aeroporto de Congonhas, os tempos em que as aeronaves chegam no T.M.A. de São Paulo. Foi considerado entrada no sistema o instante da chegada no círculo concêntrico da tela radar distante 50 milhas do aeroporto. A partir daí, se não há nenhuma outra aeronave em sua frente, os controladores que operam o radar direcionam-na em aproximação direta para a reta de aproximação final; caso contrário, os controladores provocam-lhe alguns desvios de rota para permitir que outras aeronaves chegadas antes aterrissem à sua frente. Os tempos adicionais provocados por estes desvios são os tempos de espera na fila.

A partir da distribuição dos tempos entre as chegadas no sistema, fizemos um teste de aderência para verificar se esta distribuição é exponencial. Foi, então, feito um teste de Kolmogorov-Smirnov (ver Apêndice A). A hipótese de que a distribuição dos tempos provém de uma distribuição exponencial pôde ser aceita ao nível de significância de $\alpha = 0,01$. Logo, consideramos razoável supor as taxas de chegada como sendo uma distribuição de Poisson.

Observamos que estes dados foram obtidos apenas para verificar o tipo de distribuição e não para a determinação da taxa média de chegadas, pois esta só interessaria quando estivéssemos determinando a taxa de chegadas na fila de solo. Daí não acharmos necessário ter um número maior de amostras.

6.2. A TAXA DE CHEGADAS NA FILA DO SOLO

Enquanto na secção anterior os dados referentes à fila aérea tinham interesse apenas para determinar o tipo de distribuição de probabilidades do fenómeno, nesta secção os tempos obtidos são úteis não só para o teste de aderência, mas também para a comparação dos tempos de espera obtidos pela aplicação do modelo com os tempos de espera reais da fila do solo.

Foram, então, obtidas quatro amostras em quatro dias diferentes, em horários de pico, onde foram anotados, simultaneamente, os intervalos entre as chegadas na fila do solo e os tempos de espera de cada aeronave na fila.

Feito o teste de Kolmogorov-Smirnov para cada uma das amostras, a hipótese de que a distribuição dos intervalos en-

tre as chegadas provêm de uma exponencial pôde ser aceita ao nível de significância de $\alpha = 0,01$. Logo, podemos considerar que a taxa de chegadas na fila do solo é regida por uma distribuição de Poisson (ver Apêndice B).

6.3. OS TEMPOS DE ESPERA

Em nosso trabalho não estivemos preocupados em coletar dados sobre os tempos de espera na fila aérea, pois estes tempos são praticamente impossíveis de serem obtidos com os recursos limitados que dispomos. O tempo de espera na fila aérea, como já vimos, é a diferença entre o tempo normal sem congestionamento e o tempo na presença deste. Como existem seis pontos de entrada na área terminal e o tempo depende deste ponto de entrada, além de depender também do tipo de avião, o número de amostras e a quantidade de dados necessários seria extremamente grande. Por outro lado, se fizéssemos isso iríamos constatar o óbvio, pois como o modelo de filas é M-M-1 e a fila aérea tem prioridade absoluta sobre a fila do solo, os tempos de espera médios são dados por

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

A justificativa mais importante para o fato de termos coletado dados apenas das esperas na fila do solo é que nosso modelo apresenta originalidade apenas em relação a esta.

A coleta de dados dos tempos de espera na fila do solo foi feita da Torre de Controle levando-se em conta o tempo de es-

pera da autorização para acionamento dos motores das aeronaves, pois este tempo também é de espera, apesar de a aeronave ainda não se encontrar na posição 2. Estes dados foram coletados simultaneamente aos dados dos intervalos entre as chegadas para podermos comparar com os resultados obtidos pela aplicação do modelo teórico, que será objeto da secção 6.7.

Os dados levantados encontram-se no Apêndice C cujas médias foram: $W' = 6,17$ minutos no dia 08/04/1983, $W' = 5,18$ minutos no dia 14/04/1983; $W' = 3,17$ minutos no dia 14/02/1984 e no dia 23/03/1984 foram calculados os tempos de espera na fila (excluindo o tempo de serviço) e foi obtido $W'_q = 2,16$ minutos.

6.4. AS TAXAS DE ATENDIMENTO

Já foi comentado na secção 1.5 as taxas de atendimento para a fila aérea e a fila do solo que serão utilizadas neste trabalho, quais sejam: $\mu = 28$ aeronaves/hora para a fila aérea e $\mu' = 56$ aeronaves por hora para a fila do solo.

A determinação destes valores foi baseada em trabalhos já publicados, em especial o trabalho de Medeiros [1] e de algumas observações feitas da Torre de Controle, algumas delas de caráter subjetivo, como por exemplo, em entrevistas com os controladores de voo da Torre de Controle.

Sobre a taxa de atendimentos da fila aérea, além dos resultados de Medeiros [1] comentado na secção 1.5 foram feitas algumas observações nos instantes em que havia várias aeronaves na fila aérea e a média de tempo entre aterrissagens suces-

sivas foi de 2,17 minutos. Embora esta média seja obtida a partir de poucos dados pois estes só podem ser considerados quando existe uma seqüência grande de pousos consecutivos, ela é importante porque confirma a taxa de atendimento de $\mu = 28$ aeronaves por hora comentado na secção 1.5.

Sobre a taxa de atendimentos da fila do solo foram observados os seguintes fatos: Quando a aeronave que chega na posição 2 não encontra nenhuma outra na sua frente, o tempo que ela leva para ir da posição 2 até a posição 3 iniciar a decolagem e cruzar a cabeceira da pista, liberando-a, vai de 1 minuto e 10 segundos a 1 minuto e 50 segundos com média de 1 minuto e 35 segundos. Porém, quando a decolagem ocorre após um pouso ou após uma decolagem à sua frente e a aeronave já se encontrava esperando na posição 2, este tempo é bastante diminuído, pois, enquanto a aeronave à sua frente está se preparando para liberar a pista, esta já está rolando para a posição 3 e esperando ordem de livre decolagem. Assim, neste caso, o tempo de serviço é igual apenas ao tempo de ocupação da pista, cerca de 50 segundos.

Em uma amostra foram observados que 70% das decolagens se deu após encontrar outra aeronave à sua frente (pousando ou decolando) cujo tempo é de 50 segundos, enquanto que 30% ocorreu sem este fato, cujo tempo médio é de 1 minuto e 30 segundos. Efetuando-se, então, a média ponderada com 70% e 30% obtém-se a média $\mu' = 56,7$ aeronaves por hora. Este resultado também confirma o que foi comentado na secção 1.5 sobre a taxa de atendimentos de $\mu' = 56$ aeronaves por hora.

6.5. A PORCENTAGEM DE INTERCALAÇÕES DE DECOLAGENS ENTRE ATERRISSAGENS SUCESSIVAS

A determinação desta porcentagem α de intercalações é praticamente impossível com certa precisão, já que ela dependeria de um número muito grande de observações, além de alguns aspectos subjetivos, como por exemplo, da audácia ou cautela do controlador de voo que toma a decisão de intercalar ou não uma decolagem entre dois pousos consecutivos. Além disso, certas decolagens, embora não esteja intercalada entre dois pousos, se dão total ou parcialmente tomando o tempo de atendimento de uma aeronave que está pousando, e portanto entrariam na categoria das aeronaves que estão sendo intercaladas, totalou parcialmente, o que dificulta extremamente a determinação desta taxa.

Devido a todas estas dificuldades, utilizaremos em nosso trabalho as porcentagens $\alpha = 20\%$ e $\alpha = 80\%$ como casos extremos, acreditando que em quase cem por cento dos casos, esta porcentagem real encontra-se entre estes extremos.

6.6. TEMPOS DE ESPERA OBTIDOS PELA APLICAÇÃO DO MODELO

Obteremos nesta secção os tempos de espera obtidos pela aplicação do modelo apenas para a fila de solo, pelos motivos já discutidos na secção 6.3. Calcularemos os tempos de espera pela aplicação do modelo com os dados obtidos da Torre de Controle nos dias 08/04/1983, 14/04/1983, 14/02/1984 e 23/02/1984,

pois nestes dias foram obtidas as distribuições dos tempos de espera observadas.

É claro que nestes dias não foram coletados dados sobre a taxa de chegadas na fila aérea, pois esta teria que ser obtida da sala de controle radar, o que seria impossível para uma só pessoa. Utilizaremos como valor aproximado o número de aeronaves atendidas por hora, já que toda aeronave que entra no sistema tem que ser atendida.

6.6.1. TEMPOS DE ESPERA DO DIA 08/04/1983

Taxa de chegadas na fila aérea (obtido pela ficha de atendimentos da Torre de Controle)

$$\lambda = 18,7 \text{ aeronaves/ hora.}$$

Taxa de chegadas na fila de solo

$$\lambda' = 12,2 \text{ aeronaves/hora (ver Apêndice B).}$$

Taxa de atendimentos da fila aérea:

$$\mu = 28 \text{ aeronaves /hora (ver secção 6.4).}$$

Taxa de atendimentos da fila do solo:

$$\mu' = 56 \text{ aeronaves/hora (ver secção 6.4).}$$

1º CASO: SEM INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu' \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) - \lambda'} = \frac{1}{6,4} = 0,16 \text{ horas}$$

ou seja,

$$W' = 9,37 \text{ minutos} \quad 6.6.1$$

$$W'_q = 8,30 \text{ minutos} \quad 6.6.2$$

2º CASO: COM $\alpha = 20\%$ DE INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu' \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) + \alpha\lambda - \lambda'} = \frac{1}{10,1} = 0,098 \text{ horas.}$$

Logo,

$$W' = 5,92 \text{ minutos} \quad 6.6.3$$

$$W'_q = 4,85 \text{ minutos} \quad 6.6.4$$

3º CASO: COM $\alpha = 80\%$ DE INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu' \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) + \alpha\lambda - \lambda'} = \frac{1}{21,36} = 0,05 \text{ horas.}$$

Logo,

$$W' = 2,8 \text{ minutos} \quad 6.6.5$$

$$W'_q = 1,73 \text{ minutos} \quad 6.6.6$$

6.6.2. TEMPOS DE ESPERA DO DIA 14/04/1983

Dados coletados:

$$\lambda = 17,3 \text{ (ficha da Torre de Controle)}$$

$$\lambda' = 13,6 \text{ (ver Apêndice B)}$$

$$\mu = 28$$

$$\mu' = 56$$

1º CASO: SEM INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) - \lambda'} = \frac{1}{7,8} = 0,128 \text{ horas}$$

Logo,

$$W' = 7,7 \text{ minutos} \quad 6.6.7$$

$$W'_q = 6,62 \text{ minutos} \quad 6.6.8$$

2º CASO: $\alpha = 20\%$ DE INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) + \alpha\lambda - \lambda'} = \frac{1}{11,26} = 0,089 \text{ horas}$$

Logo,

$$W' = 5,33 \text{ minutos} \quad 6.6.9$$

$$W'_q = 4,26 \text{ minutos} \quad 6.6.10$$

3º CASO: $\alpha = 80\%$ DE INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) + \alpha\lambda - \lambda'} = \frac{1}{21,46} = 0,046 \text{ horas}$$

Logo,

$$W' = 2,8 \text{ minutos} \quad 6.6.11$$

$$W'_q = 1,7 \text{ minutos} \quad 6.6.12$$

6.6.3. TEMPOS DE ESPERA NO DIA 14/02/1984

Dados coletados:

$$\lambda = 16 \text{ (ficha da Torre de Controle)}$$

$$\lambda' = 18,8 \text{ (ver Apêndice B)}$$

$$\mu = 28$$

$$\mu' = 56$$

1º CASO: SEM INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) - \lambda'} = \frac{1}{5,2} = 0,192 \text{ horas.}$$

Logo,

$$W' = 11,54 \text{ minutos} \quad 6.6.13$$

$$W'_q = 10,47 \text{ minutos} \quad 6.6.14$$

2º CASO: $\alpha = 20\%$ DE INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) + \alpha\lambda - \lambda'} = \frac{1}{8,4} = 0,119 \text{ horas}$$

Logo,

$$W' = 7,14 \text{ minutos} \quad 6.6.15$$

$$W'_q = 6,07 \text{ minutos} \quad 6.6.16$$

3º CASO: $\alpha = 80\%$ DE INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) + \alpha\lambda - \lambda'} = \frac{1}{18} = 0,055 \text{ horas}$$

Logo,

$$W' = 3,33 \text{ minutos} \quad 6.6.17$$

$$W'_q = 2,26 \text{ minutos} \quad 6.6.18$$

6.6.4. TEMPOS DE ESPERA EM 23/02/1984

Dados coletados:

$\lambda = 16$ (ficha da Torre de Controle)

$\lambda' = 15,8$ (ver Apêndice B)

$\mu = 28$

$\mu' = 56$.

1º CASO: SEM INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) - \lambda'} = \frac{1}{8,2} = 0,122 \text{ horas}$$

Logo,

$$W' = 7,32 \text{ minutos} \quad 6.6.19$$

$$W'_q = 6,25 \text{ minutos} \quad 6.6.20$$

2º CASO: $\alpha = 20\%$ DE INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) + \alpha\lambda - \lambda'} = \frac{1}{11,4} = 0,088 \text{ horas}$$

Logo,

$$W' = 5,26 \text{ minutos} \quad 6.6.21$$

$$W'_q = 4,19 \text{ minutos} \quad 6.6.22$$

3º CASO: $\alpha = 80\%$ DE INTERCALAÇÕES

$$W' = \frac{1}{\mu'(1-\rho) + \alpha\lambda - \lambda'} = \frac{1}{21} = 0,048 \text{ horas}$$

Logo,

$$W' = 2,86 \text{ minutos} \quad 6.6.23$$

$$W'_q = 1,79 \text{ minutos} \quad 6.6.24$$

6.7. COMPARAÇÕES

Aqui faremos as comparações entre os tempos médios observados da Torre de Controle e os tempos obtidos pela aplicação do modelo.

6.7.1. COMPARAÇÕES DOS TEMPOS DE 08/04/1983

Tempos de espera obtidos pela aplicação do modelo (ver secção 6.6.1).

1º CASO: SEM INTERCALAÇÕES

$$W' = 9,37 \text{ minutos} \quad 6.7.1$$

$$W'_q = 8,30 \text{ minutos} \quad 6.7.2$$

2º CASO: $\alpha = 20\%$

$$W' = 5,92 \text{ minutos} \quad 6.7.3$$

$$W'_q = 4,85 \text{ minutos} \quad 6.7.4$$

3º CASO: $\alpha = 80\%$

$$W' = 2,8 \text{ minutos} \quad 6.7.5$$

$$W'_q = 1,73 \text{ minutos} \quad 6.7.6$$

Tempo médio de espera observado (ver secção 6.3):

$$W' = 6,17 \text{ minutos}$$

6.3.1

Neste dia, o tempo médio de espera observado foi próximo do tempo de espera calculado no 2º caso: $\alpha = 20\%$ e é menor do que o calculado no caso $\alpha = 0$.

6.7.2. COMPARAÇÕES DO TEMPO EM 14/04/1983

Tempos de espera obtidos pela aplicação do modelo (ver seção 6.6.2).

1º CASO: SEM INTERCALAÇÕES

$$W' = 7,7 \text{ minutos}$$

6.7.7

$$W'_q = 6,62 \text{ minutos}$$

6.7.8

2º CASO: $\alpha = 20\%$

$$W' = 5,33 \text{ minutos}$$

6.7.9

$$W'_q = 4,26 \text{ minutos}$$

6.7.10

3º CASO: $\alpha = 80\%$

$$W' = 2,8 \text{ minutos}$$

6.7.11

$$W'_q = 1,7 \text{ minutos}$$

6.7.12

Tempo médio de espera observado (ver secção 6.3)

$$W' = 5,18 \text{ minutos.}$$

Neste dia também verificou-se o fato de o tempo médio de espera observado estar entre o 2º caso $\alpha = 20\%$ e o 3º caso $\alpha = 80\%$.

6.7.3. COMPARAÇÕES DOS TEMPOS EM 14/02/1984

Tempos de espera obtidos pela aplicação do modelo (veja secção 6.6.3).

1º CASO: SEM INTERCALAÇÕES

$$W' = 11,54 \text{ minutos} \quad 6.7.13$$

$$W'_q = 10,47 \text{ minutos} \quad 6.7.14$$

2º CASO: $\alpha = 20\%$

$$W' = 7,14 \text{ minutos} \quad 6.7.15$$

$$W'_q = 6,07 \text{ minutos} \quad 6.7.16$$

3º CASO: $\alpha = 80\%$

$$W' = 3,33 \text{ minutos} \quad 6.7.17$$

$$W'_q = 2,26 \text{ minutos} \quad 6.7.18$$

Tempo médio de espera observado (veja secção 6.3)

$$W' = 3,17 \text{ minutos.}$$

Neste dia o tempo médio observado foi levemente inferior aos valores calculados pela aplicação do modelo, porém, consideramos este resultado satisfatório.

6.7.4. COMPARAÇÕES DO TEMPO EM 23/02/1984

Tempos de espera obtidos pela aplicação do modelo (veja secção 6.6.4).

1º CASO: SEM INTERCALAÇÕES

$$W' = 7,32 \text{ minutos} \quad 6.7.19$$

$$W'_q = 6,25 \text{ minutos} \quad 6.7.20$$

2º CASO: $\alpha = 20\%$

$$W' = 5,26 \text{ minutos} \quad 6.7.21$$

$$W'_q = 4,19 \text{ minutos} \quad 6.7.22$$

3º CASO: $\alpha = 80\%$

$$W' = 2,86 \text{ minutos} \quad 6.7.23$$

$$W'_q = 1,79 \text{ minutos}$$

6.7.24

Tempo médio de espera observado (ver secção 6.3).

$$W'_q = 2,16 \text{ minutos.}$$

Neste dia, os valores dos tempos de espera observados limitam-se ao tempo na fila apenas. Daí o valor $W'_q = 2,16$ minutos. Logo, também aqui o valor observado $W'_q = 2,16$ está entre os tempos calculados pelo modelo, quais sejam $W'_q = 4,19$ para $\alpha = 20\%$ e $W'_q = 1,79$ para $\alpha = 80\%$.

6.7.5. TABELA E RESUMO DAS COMPARAÇÕES

| Data | Tempos de espera teórico (minutos) | | | Tempos de espera Observados (min.) |
|----------|------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------------------|
| | 1º Caso: $\alpha=0$ | 2º Caso: $\alpha=20\%$ | 3º Caso: $\alpha=80\%$ | |
| 08/04/83 | 9,37 | 5,92 | 2,8 | 6,17 |
| 14/04/83 | 7,7 | 5,33 | 2,8 | 5,18 |
| 14/02/84 | 11,54 | 7,14 | 3,33 | 3,17 |
| 23/02/84 | 6,25 | 4,19 | 1,72 | 2,16 |

Feitas as comparações, observou-se que nas duas primeiras datas, os tempos de espera observados foram valores próximos de $T_{\alpha} = 20\%$, enquanto que nas duas últimas datas obtivemos valores próximos de $T_{\alpha} = 80\%$. Os dois valores que não caíram dentro do intervalo $T_{\alpha=80\%} < T < T_{\alpha=20\%}$ caíram bem próximos dos extremos, não provocando, portanto, nenhuma discrepância.

O intervalo de tempo extenso, de 14/04/1983 a 14/02/1983 que ficou sem coleta de dados foi devido à dificuldades junto ao SRPV, pois devido ao fato de ser área de segurança nacional, a autorização que havia sido concedida anteriormente foi cancelada por motivo de mudança na chefia e a autorização para continuar a coleta de dados só foi recuperada em fevereiro de 1984. Talvez deva-se a esta demora na coleta de dados a mudança dos resultados obtidos em uma e em outra época. Enfim, isto pode significar que, ou aumentou a utilização da pista auxiliar, diminuindo-se portanto, os tempos de espera, ou aumentou-se a porcentagem α de intercalações neste período. De qualquer forma, estes resultados são satisfatórios com relação à validação do modelo, pois mesmo os dois valores que não caíram dentro do intervalo $T_{\alpha} = 80\% < T < T_{\alpha} = 20\%$ não são discrepantes, pois estão bem próximos dos extremos e estão no intervalo $T_{\alpha} = 100\% < T < T_{\alpha} = 0$.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Ao elaborar o projeto de pesquisa objeto deste trabalho, pensávamos fazer apenas uma revisão bibliográfica de modelos de filas e apresentar ao final, como contribuição a estudos de tempos de espera, o estudo de caso do Aeroporto de Congonhas.

É interessante notar que a maioria dos trabalhos de pesquisa sobre aeroportos rejeitam o estudo das filas de espera de aeronaves por modelos matemáticos. Em algumas consultas com especialistas em Aeronáutica que têm artigos publicados na área, feitas pelo autor, estes utilizaram os argumentos já citados no Capítulo 3, seção 3.1. Sem dúvida, estas consultas não foram em vão, pois destas discussões resultaram valiosas sugestões e explicações sobre operações em Aeroportos, Controle de Tráfego Aéreo, etc. Os especialistas consultados, cujos trabalhos constam da bibliografia, foram: Medeiros [1], Martinelli [2], Gualda [4], Morais [5]. Foram valiosas as explicações sobre tráfego aéreo proporcionadas pelos militares do SRVP que, nesta área, foram meus mestres. Dentre estes destacaram-se o Tenente Bizzoto, Tenente Pelatti, Capitão Teramoto, Sargento Marcelino, aluno de engenharia da FAAP e Sargento Clério. Todos eles, em geral, achava pretencioso o estudo de filas de espera em aeroportos por modelos matemáticos.

De fato, devido às características muito específicas das filas de aeronaves, principalmente da prioridade da fila aérea sobre a fila do solo e da existência de uma única pista para atender os dois tipos de fila (o aeroporto de Congonhas possui uma outra pista, mas de uso muito restrito como foi discutido no Capítulo 3, podendo, então, ser tratado como se fosse uma única pista), pensávamos inicialmente fazer apenas o estudo matemático da fila aérea e obter, talvez, uma simulação do comportamento das duas filas.

Com o posterior desenvolvimento do trabalho, após o cálculo dos elementos da fila aérea, ocorreu-nos que se poderia fazer uma aproximação, que pensávamos ser uma aproximação grosseira, reduzindo a taxa de atendimentos da fila do solo de μ' para $\mu' \cdot P_0$, sendo P_0 a probabilidade de não haver nenhuma aeronave na fila aérea, já que as decolagens só poderiam ocorrer com esta condição. Foram, então, obtidas as fórmulas matemáticas para o cálculo dos principais elementos de Teoria das Filas, da fila de solo usando-se esta aproximação. Pensávamos que esta aproximação fosse apenas uma aproximação grosseira porque, segundo ela, tudo se passaria como se o modelo de filas fosse um modelo simples de tipo M-M-1, apenas tendo a taxa de atendimentos diminuído de μ' para $\mu' P_0$, porém, sem levar em consideração as interrupções da fila do solo, que são reais, cada vez que chega uma ou várias aeronaves na fila aérea, já que esta tem prioridade absoluta.

Após estes resultados, que foram objetos do Capítulo 4, fomos analisar o comportamento das filas usando a simplifica-

ção do modelo de Koopman [9], objeto do Capítulo 5. Este modelo, como parte da probabilidade conjunta $P_{m,n}$, que é a probabilidade de haver m aeronaves na fila aérea e n aeronaves na fila do solo, é claro que leva em conta as interrupções, pois leva em conta que a taxa de se passar do estado (m,n) para o estado $(m,n-1)$ é zero quando $m \neq 0$. Aí tivemos a feliz surpresa de verificar que os resultados obtidos a partir do modelo mais refinado (Filas Duplas) coincidiam com os resultados obtidos no capítulo anterior, com o modelo de filas simples.

Embora para o estudo dos tempos de espera de aeronaves na fila do solo o modelo de filas duplas não tenha dado nenhuma contribuição, já que os resultados coincidiram com os obtidos pelo modelo de filas simples, consideramos o Capítulo 5, que trata deste tópico, o mais importante no sentido de contribuição à Teoria das Filas, pois em indústrias, principalmente ou em Departamento de serviços de algumas empresas existem vários tipos de filas em que um único posto de atendimento deve atender a várias filas com um esquema de prioridades e este modelo pode aí encontrar sua aplicação. Esperamos que futuros pesquisadores possam aventurar-se nesta direção e acreditamos que possam ter sucesso com esta metodologia. Além dos fatos citados acima, este estudo também nos foi útil como uma validação teórica dos resultados obtidos no modelo de filas simples, ou seja, aquela aproximação que fizemos no Capítulo 4 (modelo de filas simples) e que pensávamos ser apenas uma aproximação grosseira, na realidade é uma representação fiel do fenômeno.

O que poderia ser uma contribuição à Aeronáutica, de uma maneira geral a todos os usuários deste sistema de transporte, que é objeto desta monografia, são as curvas de isodemora obtidas na secção 4.3. Um melhor detalhamento destas curvas de isodemora poderia dar subsídios a uma otimização do Controle de Tráfego Aéreo, a uma política de preços de passagens aéreas, e enfim, poderia ser útil a todos os usuários deste importante e rápido sistema de transporte. Por exemplo, dadas as estimativas das taxas de chegada na fila aérea e na fila de solo, que poderia ser obtida por períodos, daria instantaneamente, com a simples observação de um sistema cartesiano (λ, λ') onde estivessem desenhadas estas curvas, a estimativa do tempo de espera na fila do solo naquele período. É claro que com a estimativa deste tempo de espera poder-se-ia calcular os custos operacionais das aeronaves com muito mais precisão, desde que esteja dentro de um nível de confiabilidade razoável.

Finalmente, com as comparações dos tempos de espera obtidos por observação com os resultados obtidos pela aplicação do modelo, apesar das limitações para se determinar valores mais precisos das variáveis e da complexidade do sistema, os resultados foram considerados satisfatórios, validando assim o modelo. Alguns resultados que não corresponderam à expectativa do valor esperado podem ser devido à grande complexidade do sistema, principalmente à existência da pista auxiliar que pode, devido ao seu maior ou menor uso, alterar os resultados.

No trabalho de Koopman [9], ele apresenta o modelo de filas duplas com as taxas de chegada e de atendimento como fun-

ções contínuas, deriváveis e com periodicidade de 24 horas. Daí a grande complexidade do seu trabalho e a impossibilidade de utilizá-lo para aplicações práticas, pois é praticamente impossível obter as funções $P_{(m,n)}(t)$ e suas derivadas para um determinado instante t . Portanto, consideramos o desenvolvimento das filas duplas com as simplificações de taxas constantes como sendo a maior contribuição à teoria das filas desta monografia, pois para que um modelo seja útil, este deve ser o mais próximo possível do fenômeno real para que forneça previsões razoáveis, e ao mesmo tempo, ser suficientemente simples para que seja matematicamente tratável. E neste sentido, o modelo de Koopman é extremamente complexo. Tanto é que ele não faz nenhum estudo de caso, embora cite a possibilidade de se aplicar seu modelo ao estudo do Aeroporto de La Guardia, mas não o faz.

Quanto às possíveis políticas de procedimento para os pousos e as decolagens, ele faz alguns comentários superficiais, sem contudo conseguir nenhum resultado significativo. Por exemplo, no comentário sobre a possibilidade de se intercalar sempre uma decolagem entre dois pousos, estas intercalações se dariam com o retardamento do pouso sucessor, portanto atrasando a fila aérea. Neste caso, o intervalo de tempo necessário ao par aterrissagem mais decolagem seria:

$$\frac{1}{\mu''} = \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\mu}.$$

Logo, a taxa de atendimento μ'' seria a média harmônica entre μ e μ' . Como se vê, mesmo nestes comentários, não surge ne-

nhum resultado significativo no sentido do cálculo do comprimento médio da fila e do tempo de espera. Portanto, consideramos o cálculo do comprimento médio da fila e dos tempos de espera para os três casos; sem intercalações, intercalações sempre possíveis e uma porcentagem α de intercalações, como uma extensão do trabalho de Koopman, estando aí nossa principal contribuição. Principalmente quando da realização do estudo do caso do Aeroporto de Congonhas, e, com os bons resultados conseguidos, acreditamos ter demonstrado também que o modelo de Koopman é consistente. Como desconhecemos alguma aplicação deste modelo em algum aeroporto, esta realização, embora com os recursos escassos de que dispuzemos mostrou a possibilidade de sua aplicação, inclusive em outros modelos de filas com alguma semelhança, que não sejam as de aeronaves em terminais aéreos. Ficaremos satisfeitos se outros pesquisadores aprofundarem estes estudos e nos mandarem as críticas e sugestões pertinentes.

APÊNDICE A

TESTE DE ADERÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DOS TEMPOS ENTRE AS CHEGADAS NA FILA AÉREA

Teste de Kolmogorov-Smirnov para testar a hipótese de que a distribuição dos tempos entre as chegadas na fila aérea é exponencial.

A.1. PRIMEIRA AMOSTRA

A primeira amostra foi obtida no dia 20 de abril de 1983 da sala de Controle Radar. A tabela de freqüências dos intervalos entre as chegadas foi a seguinte:

| Intervalo (minutos) | Freqüência | Freqüência acumulada |
|------------------------|------------|-------------------------|
| 0 | 8 | 8 |
| 1 | 6 | 14 |
| 2 | 6 | 20 |
| 3 | 5 | 25 |
| 4 | 3 | 28 |
| 5 | 2 | 30 |
| 6 | 2 | 32 |
| 7 | 2 | 34 |
| 8 | 1 | 35 |
| 9 | 1 | 36 |
| 10 | 1 | 37 |
| 13 | 1 | 38 |
| 18 | 1 | 39 |
| 19 | 1 | 40 |

O intervalo médio entre as chegadas neste dia foi de:

$$\bar{X} = 3,95 \text{ minutos.}$$

Neste dia, consideramos como intervalo igual a zero todos os intervalos menores do que meio minuto, intervalo igual a 1, os intervalos maiores do que meio e menores do que 1,5 e assim sucessivamente. Logo, a frequência acumulada teórica para $X = 0$ será

$$\int_0^{0,5} f(x)dx, \text{ para } X = 1, \text{ será } \int_0^{1,5} f(x)dx$$

e assim sucessivamente, onde $f(x) = \lambda e^{-\lambda X}$ é a função densidade de probabilidade exponencial com o parâmetro $\lambda = \frac{1}{3,95}$.

| X (minutos) | $f_A(x)$ | $f_0(x)$ | $f_{0A}(x)$ | $ f_A(x) - f_{0A}(x) $ |
|----------------|----------|----------|-------------|------------------------|
| 0 | 0,128 | 8/40 | 0,2 | 0,072 |
| 1 | 0,316 | 6/40 | 0,35 | 0,034 |
| 2 | 0,469 | 6/40 | 0,5 | 0,031 |
| 3 | 0,588 | 5/40 | 0,625 | 0,037 |
| 4 | 0,680 | 3/40 | 0,7 | 0,020 |
| 5 | 0,752 | 2/40 | 0,75 | 0,002 |
| 6 | 0,807 | 2/40 | 0,8 | 0,007 |
| 7 | 0,850 | 2/40 | 0,85 | 0,0 |
| 8 | 0,884 | 1/40 | 0,875 | 0,009 |
| 9 | 0,910 | 1/40 | 0,9 | 0,010 |
| 10 | 0,930 | 1/40 | 0,925 | 0,005 |
| 11 | 0,946 | 0 | 0,925 | 0,021 |
| 12 | 0,958 | 0 | 0,925 | 0,033 |
| 13 | 0,967 | 1/40 | 0,950 | 0,017 |
| 14 | 0,975 | 0 | 0,950 | 0,025 |
| 15 | 0,980 | 0 | 0,950 | 0,030 |
| 16 | 0,985 | 0 | 0,950 | 0,035 |
| 17 | 0,988 | 0 | 0,950 | 0,038 |
| 18 | 0,991 | 1/40 | 0,975 | 0,016 |
| 19 | 0,993 | 1/40 | 1,0 | 0,007 |

Neste caso, temos:

$$D = \max |f_A(x) - f_{0A}(x)| = 0,072.$$

Comparando o valor de D obtido com o valor crítico ao ní-

vel $\alpha = 0,01$,

$$D = \frac{0,63}{\sqrt{n}} = \frac{0,63}{\sqrt{40}} \approx 0,1$$

Vemos,então, que o valor de D encontrado $D = 0,072$ é menor do que D crítico ao nível $\alpha = 0,01$. Logo, a hipótese de que a distribuição é exponencial pode ser aceita ao nível de $\alpha = 0,01$.

Isto prova que a taxa de chegadas na fila aérea, pelo menos neste dia é Poisson, com a taxa média de $\lambda = \frac{1}{3,95}$ aeronaves por minuto ou $\lambda = 15$ aeronaves por hora.

A.2. SEGUNDA AMOSTRA

A segunda amostra foi obtida no dia 17 de fevereiro de 1984. A tabela de frequências foi a seguinte:

| X | $f_A(x)$ | $f_0(x)$ | $f_{0A}(x)$ | $ f_A(x) - f_{0A}(x) $ |
|----|----------|----------|-----------------|------------------------|
| 0 | 0,126 | 5 | $5/36 = 0,139$ | 0,013 |
| 1 | 0,333 | 9 | $14/36 = 0,389$ | 0,056 |
| 2 | 0,491 | 3 | $17/36 = 0,472$ | 0,019 |
| 3 | 0,612 | 5 | $22/36 = 0,611$ | 0,001 |
| 4 | 0,704 | 4 | $26/36 = 0,722$ | 0,018 |
| 5 | 0,774 | 1 | $27/36 = 0,750$ | 0,024 |
| 6 | 0,827 | 2 | $29/36 = 0,806$ | 0,021 |
| 7 | 0,868 | 2 | $31/36 = 0,861$ | 0,007 |
| 8 | 0,899 | 1 | $32/36 = 0,889$ | 0,010 |
| 9 | 0,923 | 1 | $33/36 = 0,917$ | 0,006 |
| 10 | 0,941 | 0 | $33/36 = 0,917$ | 0,024 |
| 11 | 0,955 | 1 | $34/36 = 0,944$ | 0,011 |
| 12 | 0,966 | 0 | $34/36 = 0,944$ | 0,022 |
| 13 | 0,974 | 1 | $35/36 = 0,972$ | 0,002 |
| 14 | 0,980 | 0 | $35/36 = 0,972$ | 0,008 |
| 15 | 0,985 | 1 | 1 | 0,015 |

onde o intervalo médio entre as chegadas foi de $\bar{X} = 3,7$ minutos,

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}, \text{ onde } \lambda = \frac{1}{3,7};$$

$$f_A(x) = \int_0^{x+\frac{1}{2}} f(t) dt$$

como foi comentado em A.1.

Temos:

$$D = \max |f_A(x) - f_{0A}(x)| = 0,056.$$

Comparando com os valores de D crítico ao nível de $\alpha = 0,01$

$$\alpha = 0,01 \implies D_\alpha = \frac{0,63}{\sqrt{36}} = 0,056$$

Vemos então que o valor encontrado $D = 0,056$ é menor do que o valor de D crítico ao nível $\alpha = 0,01$. $D_\alpha = 0,1$. Logo, a hipótese de que a distribuição é exponencial pode ser aceita ao nível de $\alpha = 0,01$.

Isto prova que a taxa de chegadas na fila aérea, pelo menos neste dia, é Poisson com a taxa média de $\lambda = \frac{1}{3,7}$ aeronaves por minuto ou $\lambda = 16,2$ aeronaves por hora.

APÊNDICE B

TESTE DE ADERENCIA DA DISTRIBUIÇÃO DOS TEMPOS ENTRE AS CHEGADAS NA FILA DO SOLO

Teste de Kolmogorov-Smirnov para testar a hipótese de que os intervalos entre as chegadas é exponencial.

B.1. PRIMEIRA AMOSTRA DIA 08/04/1983

| X | $f_A(x)$ | $f_0(x)$ | $f_{0A}(x)$ | $ f_A(x) - f_{0A}(x) $ |
|----|----------|----------------|-------------|------------------------|
| 0 | 0,097 | $3/18 = 0,167$ | 0,167 | 0,07 |
| 1 | 0,264 | $2/18 = 0,111$ | 0,278 | 0,014 |
| 2 | 0,4 | $3/18 = 0,167$ | 0,444 | 0,044 |
| 3 | 0,51 | $2/18 = 0,111$ | 0,555 | 0,045 |
| 4 | 0,601 | $1/18 = 0,067$ | 0,611 | 0,01 |
| 5 | 0,675 | 0 | 0,611 | 0,064 |
| 6 | 0,735 | 0 | 0,611 | 0,124 |
| 7 | 0,784 | $1/18 = 0,067$ | 0,667 | 0,117 |
| 8 | 0,824 | $2/18 = 0,111$ | 0,778 | 0,056 |
| 9 | 0,856 | $1/18 = 0,067$ | 0,833 | 0,023 |
| 10 | 0,883 | 0 | 0,833 | 0,05 |
| 11 | 0,904 | $1/18 = 0,067$ | 0,889 | 0,015 |
| 12 | 0,922 | 0 | 0,889 | 0,067 |
| 13 | 0,936 | $1/18 = 0,067$ | 0,944 | 0,008 |
| 14 | 0,948 | $1/18 = 0,067$ | 1 | 0,052 |

$$\text{Média } \bar{X} = \frac{1}{\lambda} = 4,9 \text{ minutos}$$

$$D = \max |f_A(x) - f_{0A}(x)| = 0,124$$

Comparando com o valor crítico ao nível $\alpha = 0,01$, vem: $D_2 = 0,371$. Logo, podemos aceitar a hipótese de que a distribui-

ção é exponencial ao nível $\alpha = 0,01$.

Logo, a taxa de chegadas na fila do solo nesta amostra é Poisson, com a taxa média de $\lambda' = \frac{1}{4,9}$ aeronaves por minuto ou $\lambda' = 12,2$ aeronaves por hora.

B.2. SEGUNDA AMOSTRA, DIA 14/04/1983

| X | $f_A(x)$ | $f_0(x)$ | $f_{0A}(x)$ | $ f_A(x) - f_{0A}(x) $ |
|------|----------|----------------|-------------|------------------------|
| 0,5 | 0,203 | $8/35 = 0,229$ | 0,229 | 0,026 |
| 1,5 | 0,365 | $6/35 = 0,171$ | 0,4 | 0,035 |
| 2,5 | 0,494 | $3/35 = 0,086$ | 0,486 | 0,008 |
| 3,5 | 0,597 | $2/35 = 0,057$ | 0,543 | 0,054 |
| 4,5 | 0,671 | $3/35 = 0,086$ | 0,629 | 0,042 |
| 5,5 | 0,744 | $2/35 = 0,057$ | 0,686 | 0,078 |
| 6,5 | 0,796 | $2/35 = 0,057$ | 0,743 | 0,053 |
| 7,5 | 0,838 | $2/35 = 0,057$ | 0,8 | 0,038 |
| 8,5 | 0,871 | $2/25 = 0,057$ | 0,857 | 0,014 |
| 9,5 | 0,897 | $1/35 = 0,029$ | 0,886 | 0,011 |
| 10,5 | 0,918 | $1/35 = 0,029$ | 0,914 | 0,004 |
| 11,5 | 0,935 | $2/35 = 0,057$ | 0,971 | 0,036 |
| 12,5 | 0,948 | $1/35 = 0,029$ | 1 | 0,052 |

Média: $\bar{X} = 4,4$ minutos.

$$D = \max |f_A(x) - f_{0A}(x)| = 0,078$$

Comparado com o valor de D crítico ao nível $\alpha = 0,01$, $D_\alpha = 0,27$ nos permite aceitar a hipótese de que a distribuição dos intervalos entre as chegadas na fila do solo é exponencial ao nível $\alpha = 0,01$. Logo a taxa de chegadas na fila do solo é Poisson, com a taxa média de

$$\lambda' = \frac{1}{4,4}$$

aeronaves por minuto ou $\lambda' = 13,6$ aeronaves por hora.

B.3. TERCEIRA AMOSTRA, DIA 23/02/1984

| X | $f_A(x)$ | $f_0(x)$ | $f_{0A}(x)$ | $ f_A(x) - f_{0A}(x) $ |
|------|----------|--------------|-------------|------------------------|
| 0,5 | 0,231 | 7/31 = 0,226 | 0,226 | 0,005 |
| 1,5 | 0,409 | 4/31 = 0,129 | 0,355 | 0,054 |
| 2,5 | 0,546 | 6/31 = 0,194 | 0,548 | 0,002 |
| 3,5 | 0,651 | 4/31 = 0,129 | 0,677 | 0,026 |
| 4,5 | 0,732 | 2/31 = 0,065 | 0,742 | 0,010 |
| 5,5 | 0,794 | 0 | 0,742 | 0,052 |
| 6,5 | 0,842 | 2/31 = 0,065 | 0,806 | 0,036 |
| 7,5 | 0,878 | 0 | 0,806 | 0,072 |
| 8,5 | 0,906 | 2/31 = 0,065 | 0,871 | 0,035 |
| 9,5 | 0,928 | 2/31 = 0,065 | 0,935 | 0,007 |
| 10,5 | 0,945 | 2/31 = 0,065 | 1 | 0,055 |

Média:

$$\bar{X} = \frac{1}{\lambda'} = 3,8 \text{ minutos.}$$

$$D = \max |f_A(x) - f_{0A}(x)| = 0,072.$$

Comparado com o valor crítico ao nível $\alpha = 0,01$, $D_\alpha = 0,27$ nos permite aceitar a hipótese de que a distribuição é exponencial.

Logo, a taxa de chegadas é

$$\lambda' = \frac{1}{3,8}$$

aeronaves por minuto ou $\lambda' = 15,8$ aeronaves/hora e a distribuição é de Poisson.

B.4. QUARTA AMOSTRA - DIA 14/04/1984

| X | $f_A(x)$ | $f_0(x)$ | $f_{0A}(x)$ | $ f_A(x) - f_{0A}(x) $ |
|------|----------|----------------|-------------|------------------------|
| 0,5 | 0,270 | $6/19 = 0,316$ | 0,316 | 0,046 |
| 1,5 | 0,467 | $6/19 = 0,316$ | 0,632 | 0,165 |
| 2,5 | 0,611 | $2/19 = 0,105$ | 0,737 | 0,126 |
| 3,5 | 0,716 | 0 | 0,737 | 0,021 |
| 4,5 | 0,792 | $2/19 = 0,105$ | 0,842 | 0,050 |
| 5,5 | 0,848 | $1/19 = 0,053$ | 0,895 | 0,047 |
| 6,5 | 0,889 | 0 | 0,895 | 0,006 |
| 13,5 | 0,989 | 0 | 0,895 | 0,094 |
| 14,5 | 0,991 | $2/19 = 0,105$ | 1 | 0,009 |

Média:

$$\bar{X} = \frac{1}{\lambda'} = 3,18 \text{ minutos}$$

$$D = \max |f_A(x) - f_{0A}(x)| = 0,165$$

Comparando o valor $D = 0,165$ com o valor D crítico ao nível $\alpha = 0,01$, nos permite aceitar a hipótese de que a distribuição dos tempos entre as chegadas na fila do solo é exponencial. Logo a taxa de chegadas é de Poisson, com a taxa média, para este dia, de $\lambda' = \frac{1}{3,18}$ aeronaves por minuto ou $\lambda' = 18,9$ aeronaves por hora.

APÊNDICE C

TEMPOS DE ESPERA NA FILA DO SOLO

C.1. COLETA DE DADOS DO DIA 08/04/1983

| Tempo de Espera x_i (minutos) | Frequência f_i | $f_i x_i$ |
|------------------------------------|---------------------|-----------|
| 2 | 3 | 6 |
| 3 | 2 | 6 |
| 4 | 2 | 8 |
| 5 | 3 | 15 |
| 6 | 2 | 12 |
| 7 | 4 | 28 |
| 8 | 2 | 16 |
| 9 | 2 | 18 |
| 10 | 1 | 10 |
| 11 | 1 | 11 |
| 12 | 1 | 12 |
| 23 | | 142 |

Média:

$$W' = \frac{142}{23} = 6,17 \text{ minutos} \quad \text{C.1.1}$$

$$W' = \frac{142}{23} \times \frac{1}{60} = 0,103 \text{ horas} \quad \text{C.1.1}$$

C.2. COLETA DE DADOS DO DIA 14/04/1983

| Tempo de Espera x_i (minutos) | Frequência f_i | $f_i x_i$ |
|--|---------------------|-----------|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 7 | 14 |
| 3 | 13 | 39 |
| 4 | 5 | 20 |
| 5 | 3 | 15 |
| 6 | 3 | 18 |
| 7 | 1 | 7 |
| 8 | 3 | 24 |
| 9 | 1 | 9 |
| 10 | 2 | 20 |
| 11 | 2 | 22 |
| 14 | 1 | 14 |
| 24 | 1 | 24 |
| | 44 | 228 |

Média:

$$W' = \frac{228}{44} = 5,18 \text{ minutos} \quad \text{C.2.1}$$

ou

$$W' = \frac{228}{44} \times \frac{1}{60} = 0,09 \text{ horas} \quad \text{C.2.2}$$

C.3. COLETA DE DADOS DO DIA 14/02/1984

| Tempo de Espera x_i (minutos) | Frequência f_i | $f_i x_i$ |
|--|---------------------|-----------|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 10 | 20 |
| 3 | 8 | 24 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 1 | 5 |
| 6 | 2 | 12 |
| 7 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 8 |
| | 30 | 95 |

Média:

$$W' = \frac{95}{30} = 3,17 \text{ minutos}$$

C.3.1

ou

$$W' = \frac{95}{30} \times \frac{1}{60} = 0,05 \text{ horas}$$

C.3.2

C.4. COLETA DE DADOS DO DIA 23/02/1984

| Tempo de Espera x_i (minutos) | Frequência f_i | $f_i \cdot x_i$ |
|--|---------------------|-----------------|
| 0 | 9 | 0 |
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 9 | 18 |
| 3 | 1 | 3 |
| 4 | 3 | 12 |
| 5 | 2 | 10 |
| 6 | 1 | 6 |
| 7 | 1 | 7 |
| 8 | 1 | 8 |
| | 32 | 69 |

OBSERVAÇÕES: Neste dia, os tempos calculados foram apenas os tempos de espera na fila (excluindo o tempo do serviço). Logo, esta média é W'_q e não W' .

Média:

$$W'_q = \frac{69}{32} = 2,17 \text{ minutos} \quad \text{C.4.1}$$

ou

$$W'_q = \frac{69}{32} \times \frac{1}{60} = 0,04 \text{ horas.} \quad \text{C.4.2}$$

BIBLIOGRAFIA

Para o Estudo de Operações em Aeroportos e Aplicações de Pesquisa Operacional em Aeroportos.

- [1] - MEDEIROS, J.E.L. (1980) - *Contribuição ao Estudo de Capacidade de Pistas de Aeroportos Brasileiros*, Tese Doutorado, EPUSP.
- [2] - MARTINELLI, J.C.N. & MEDEIROS, J.E.L. - *Conceito de Aeroporto - Uma Aplicação de Análise de Sistemas - Trabalho apresentado no Curso EAD-756 da FEA- USP (não publicado).*
- [3] - MARTINELLI, J.C.N. (1980) - *Avaliação de Metodologias de Cálculo do Número de Posições de Estacionamento de Aeronaves nos Pátios*, Dissertação de Mestrado, EPUSP.
- [4] - GUALDA, N.D.F. (1978) - *Modeling the Airport Terminal Building for Capacity Evaluation under Level-of-service Criteria*, Ph. D. Thesis, Austin.
- [5] - MORAIS, M.C. (1980) - *Análise Econômica de Tarifas Aeroportuárias na presença de Congestionamento*, Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos.
- [6] - HASHIZUME, J. (1979) - *Maior Capacidade de Operação para o Aeroporto de Congonhas: Viabilidade Técnica*, Trabalho de Graduação - ITA.
- [7] - HORONJEFF, R. (1966) - *Aeroportos - Planejamento e Projeto*, Editora Ao Livro Técnico S.A.
- [8] - ESCA (Engenharia de Sistemas de Controle e Automação) (1980) - *Adequação do ATUAL APP-SP - Relatório Técnico Final de Tráfego Aéreo*, Trabalho realizado para a COPASP.

- [9] - KOOPMAN, B.O. (1972) - Air Terminal Queues under time Dependent Conditions, *Op. Research*, Vol. 20, nº 6, pp. 1089-1114.
- [10] - DOUGLAS AIRCRAFT COMPANY (1973a) - *Procedures for determination of Air Capacity*, (Preparado para FAA).
- [11] - EHRLICH, P.J. (1982) - *Pesquisa Operacional*, Ed. Atlas.
- [12] - HILLIER, F.S. & LIEBERMAN, G.J. (1974) - *Operations Research*, Holden-Day, Inc. San Francisco.
- [13] - DAELLENBACH, H.G. & GEORGE, J.A. (1978) - *Introductions to Operations Research*, Techniques Allyn and Bacon Inc. Boston.
- [14] - NOVAES, A.G. (1975) - *Pesquisa Operacional e Transportes*, EDUSP e McGraw-Hill.
- [15] - NOVAES, A.G. (1978) - *Métodos de Otimização - Aplicação aos Transportes*, Ed. Edgard Blücher Ltda.
- [16] - FONSECA, J.S. & MARTINS, G.A. (1982) - *Curso de Estatística*, Editora Atlas.
- [17] - J.F.B. (1979) - *Who Wold an Airport Planner?*, *Intervista* nº 2, 1979.
- [18] - DIREPV (1979) - *Proteção ao Vôo - Regras do Ar*, IMA - 63-4.
- [19] - DIREPV (1977) - *Manual de Regras de Tráfego Aéreo - Procedimento para os Serviços de Tráfego Aéreo e Aeronavegação*, MMA - DEPV - 60-06.
- [20] - ICAO (1970) - *Rules of the Air-Anex 2 to the convention on International Civil Aviation*, Vol. 1, Montreal.
- [21] - ODONI, A.R. & KIVESTU, P. (1976) - *A Handbook for the estimations of Air Side Delays at Major Airports (Quick Approximation Method)*, NASA Contractor Report CR-2644, Washington, D.C.
- [22] - SIEGEL, S. (1975) - *Estatística não Paramétrica*, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda.