



EPGE

Escola de Pós-Graduação em Economia

TESE DE DOUTORADO

**“Tópicos em Economia Internacional
e Finanças**

**O Regime de Bandas de Câmbio e o Contratos
de Futuro de Ibovespa e Futuro de DI”**

199706 459

T/EPGE F297t



1000081594

Aluno: Cypriano Lopes Feijó Filho
Orientador: Aloísio Pessoa de Araújo

Novembro de 1995

ÍNDICE

	Página
O Regime de Bandas de Câmbio: Resenha da Literatura	A-1
As Reservas e o Caso de Bandas Múltiplas	B-1
Arbitragem de Carteira de Ações contra Futuro de Índice	C-1
Aplicações do Contrato Futuro de Juros no Brasil	D-1

AGRADECIMENTOS

*A um menino, meu pai,
que aos doze anos
se espantou com os fios da cidade*

*A minha mãe por todo o apoio e
por tantos carinhos
que recebemos, eu,
Cristina,
Beatriz, e
Cláudio,
meus irmãos e amigos*

*A você Elisa,
por tantos momentos
e meigos sorrisos*

Esta tese é um tributo ao amor de vocês

O regime de Bandas de Câmbio
Resenha da Literatura

BANDAS DE CÂMBIO: RESENHA DA LITERATURA

INTRODUÇÃO

Esta resenha apresenta o modelo básico da literatura de bandas de câmbio, e resume os principais modelos dessa literatura. Bandas de câmbio, todas elas versões do modelo básico. Nesses modelos obtemos o comportamento esperado de variáveis-chaves da economia - como a taxa de juros interna e a própria taxa de câmbio - quando esta última está num regime de bandas.

Há dois tipos principais de modelos. O primeiro deles trabalha explicita ou implicitamente com a hipótese de que os agentes econômicos efetivamente acreditam na disposição do governo em defender a banda de câmbio.

O segundo tipo de modelo trabalha com credibilidade parcial das bandas. Em geral assume-se que os agentes econômicos atribuem uma probabilidade menor que 1 para a defesa da banda. Assim, quanto menor é a probabilidade de defesa da banda, menos crível ela é.

Os modelos de bandas com credibilidade parcial introduzem várias nuances aos resultados com modelos de bandas críveis e podem mesmo subverter os resultados. Em especial, para bandas suficientemente não críveis o estabelecimento do regime de bandas de câmbio pode ser como um tiro que sai pela culatra: ao invés da pretendida redução da volatilidade do câmbio acaba-se com um câmbio ainda mais instável do que se teria na ausência de intervenção, ou seja, no regime de câmbio livre.

1- O MODELO BÁSICO

A equação básica da literatura de Bandas de Câmbio é a seguinte:

$$x(t) = f(t) + \alpha E[dx | \phi(t)] / d(t) \quad (1)$$

onde $x(t)$ é o logaritmo da taxa de câmbio à vista, no tempo t ; $f(t)$ denota um conjunto de fundamentos macroeconômicos; $\phi(t)$ é o conjunto de informação, comum a todos os agentes, no tempo t . $\phi(t)$ engloba o valor corrente dos fundamentos, bem como as regras de intervenção da política cambial; α é um parâmetro positivo; "E" denota o operador esperança matemática e

$$E[dx | \phi(t)] / dt \equiv \lim_{s \rightarrow 0} E[x(t+s) - x(t) | \phi(t)] / s$$

A equação (1) possui uma interpretação bastante clara: o câmbio (seu logaritmo) é determinado por fundamentos macroeconômicos mais um termo especulativo.

A especificação dos fundamentos f é genérica e a força dos modelos de Bandas de Câmbio reside justamente no fato de que, como mostraremos mais tarde, desde que sigam determinadas propriedades, quaisquer que sejam os fundamentos, $x(t)$ possui algumas características bem definidas, independentemente do fundamento escolhido, i.e., não precisamos identificar os fundamentos.

Em geral, a interpretação de f é feita através do modelo monetário usual com preços flexíveis. As equações do modelo são:

$$m(t) - p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 y(t) - \alpha i(t) + v(t); \alpha_1, \alpha > 0 \quad (2.a)$$

$$m^*(t) - p^*(t) = \alpha_0^* + \alpha_1^* y^*(t) - \alpha i^*(t) + v^*(t); \alpha_1^* > 0 \quad (2.b)$$

$$x(t) = p(t) - p^*(t) + q(t) \quad (2.c)$$

$$i(t) = i^*(t) + E[dx | \phi(t)] / dt + \rho(t) \quad (2.d)$$

onde $m(t)$, $p(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, os logaritmos da oferta doméstica de moeda, do índice de preços doméstico e da renda real; $i(t)$ é a taxa de juros nominal e $v(t)$ é uma variável aleatória denotando choques na demanda por ou na oferta de moeda. O asterisco indica as correspondentes variáveis para o resto do mundo. $q(t)$ é um choque exógeno no câmbio real e $\rho(t)$ é o prêmio de risco. Observe que α , a semi-elasticidade da demanda por moeda em relação à taxa de juros é a mesma para o país em consideração e para o resto do mundo.

As equações (2.a) e (2.b) são equações de equilíbrio nos mercados monetários doméstico e externo, respectivamente. A equação (2.c) supõe a validade da paridade do poder de compra a menos de um choque exógeno $q(t)$ no câmbio real e (2.d) supõe perfeita mobilidade de capitais, i.e., os títulos domésticos e estrangeiros são perfeitos substitutos, a menos de um prêmio de risco.

Após alguns algebrismos com (2), recuperamos a equação (1) com

$$f(t) = m(t) - m^*(t) - q(t) + \alpha_1^* y^*(t) - \alpha_1 y(t) + \alpha \rho(t) + v^*(t) - v(t) + \alpha_0^* - \alpha_0 \quad (3)$$

Usualmente, costuma-se distinguir dentre os fundamentos aqueles que são usados pelo governo para implementar uma intervenção no câmbio, daqueles que não se prestam a essa função. Estes últimos, os fundamentos livres, serão denotados por $k(t)$. O governo é suposto controlar a oferta de moeda, que dessa forma se constitui na variável de intervenção sobre o mercado cambial. Denotando-se o logaritmo da oferta monetária por $m(t)$, temos então:

$$f(t) = m(t) + k(t) \quad (4)$$

Os fundamentos livres são supostos seguir um movimento browniano com "drift" μ e variância instantânea σ^2 :

$$dk = \mu dt + \sigma dW \quad (5)$$

onde $W(t)$ é um processo de Wiener.

Das propriedades do processo de Wiener, temos que $k(\tau)$ é normalmente distribuída com média $k(t) + \mu (\tau-t)$ e variância $(\tau-t)\sigma^2$, condicional à informação \mathcal{F}_t . Observe que $E[k(\tau)|\mathcal{F}_t]$ é crescente em $k(t)$, i.e., quanto maior é o nível do fundamento livre hoje, maior é o seu nível esperado no futuro.

A variável de intervenção $m(t)$ somente se modifica, como o próprio nome indica, quando ocorre uma intervenção. Na ausência desta:

$$df = dk \quad (6.a)$$

Quando ocorre intervenção:

$$df = dm + dk \quad (6.b)$$

onde o termo dm varia de acordo com a regra de intervenção considerada.

Há três regimes cambiais básicos a considerar: câmbio fixo, câmbio livre e câmbio em bandas. No primeiro regime o termo especulativo em (1) é nulo e temos:

$$x = f \quad (7)$$

Nessas circunstâncias, se o governo deseja fixar o câmbio em x' , terá que intervir de modo a fazer com que $df = 0$, i.e., $dm = -dk$.

No regime de câmbio livre, o governo deixa que o mercado livremente determine a cotação do câmbio, de maneira que $dm = 0$. A equação do câmbio nesse caso, equação (11), será obtida mais tarde.

Por fim, suponha que o governo anuncie que não permitirá que a taxa de câmbio ultrapasse os limites superior e inferior X_s e X_i , respectivamente, o que implica que $x_i \leq x \leq x_s$, onde $x_i = \ln [X_i]$ e $x_s = \ln [X_s]$. Como posteriormente mostraremos, teremos uma equação relacionando x a f , de acordo com a regra de intervenção escolhida.

O termo "dm" varia com o tipo de intervenção, podendo ser infinitesimal ou discreto. O artigo seminal de Krugman (1991) considera a primeira possibilidade. Flood e Garber (1991) estendem os resultados para a intervenção discreta.

Nosso objetivo nessa seção é responder à seguinte questão: dadas uma regra de intervenção, a equação (1) básica e as hipóteses (4) e (5) sobre os fundamentos, podemos obter $x = G(f)$?

Podemos proceder de duas maneiras. A primeira mostra que o câmbio à vista é a soma infinita dos fundamentos futuros esperados, descontados até o presente, incorporando-se na previsão dos fundamentos toda a informação disponível, o que inclui a regra de intervenção governamental e o comportamento dos fundamentos livres como em (4) e (5). Embora muito intuitiva, esta abordagem apresenta grandes dificuldades para a obtenção da equação $x = G(f)$ (veja Flood and Garber (1983), e Froot and Obstfeld (1991, Econometrica)).

A segunda maneira é de natureza mais técnica e nos permite obter a equação desejada explicitamente. Mais do que isso, esta abordagem nos fornece uma família de soluções e aquelas específicas são obtidas escolhendo-se condições de contorno apropriadas.

A proposição abaixo enuncia o resultado obtido através da primeira técnica.

PROPOSIÇÃO 1: Em equilíbrio de expectativas racionais sem bolhas especulativas, existe uma única trajetória de equilíbrio para $x(t)$ que satisfaz a (1) dada por

$$x(t) = (1/\alpha) \int_t^{\infty} \exp[(t-\tau)/\alpha] E[f(\tau)|\phi(t)] d\tau \quad (8)$$

DEM: Defina $z(t+s) = E[x(t+s)|\phi(t)]$ e $H(t+s) = E[f(t+s)|\phi(t)]$. Então,

$$dz/dt = \lim_{s \rightarrow 0} [z(t+s) - z(t)]/s = E[dx|\phi(t)]/dt$$

A equação (1) pode ser reescrita como:

$$dz/dt - (1/\alpha) z = (1/\alpha) H \quad (9)$$

já que $E[x(t)|\phi(t)] = x(t)$ e $E[f(t)|\phi(t)] = f(t)$.

Multiplicando (9) pelo coeficiente de integração $\exp[-t/\alpha]$ e efetuando alguns cálculos chegamos a:

$$x(t) = (1/\alpha) \int_t^{\infty} \exp[(t-\tau)/\alpha] H(\tau) d\tau + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp[(t-\tau)/\alpha] z(\tau)$$

O último termo à direita não contém fundamentos, i.e., é uma bolha. Denotemo-o por $B(t)$. Claramente $dB/dt = (1/\alpha) B$, o que mostra que $B(t)$ é solução da equação homogênea em (9) que, de fato, não está relacionada aos fundamentos. A expressão geral para uma bolha é $B(t) = B_0 \exp(-t/\alpha)$, onde B_0 é uma constante arbitrária.

Na presença de bolhas o câmbio cresceria espontaneamente, sem nenhuma relação com os fundamentos. Por hipótese, as bolhas estão excluídas. Usando as definições de $z(t+s)$ e de $H(t+s)$, a equação (9) recai em (8).■

A hipótese de ausência de bolhas é essencialmente uma condição de não arbitragem quando a moeda que está desaparecendo é parcialmente lastreada em ativos reais¹: com o câmbio indo para infinito a uma taxa superior a do desconto $1/\alpha$, a moeda do país nada valeria para os agentes econômicos, enquanto claramente seu valor não pode ser nulo, já que o ativo real que o lastreia possui valor de mercado.

A equação (8) nos diz que o câmbio é uma média ponderada do valor esperado dos fundamentos, com pesos decrescentes com o tempo dados por $(1/\alpha) \exp[(t-\tau)/\alpha]$. Esta interpretação será muito útil quando falarmos da situação onde o governo utiliza duas barreiras superiores para restringir a oscilação cambial. Em particular, uma contração dm da moeda anunciada para o futuro reduz tanto mais o câmbio quanto mais próxima da data corrente for a data da contração.

A equação (8) também permite uma caracterização bastante simples da equação $x = G(f)$ quando o regime é de câmbio livre e não há intervenções. Nessa situação vale (6) e:

$$E[f(t)|\phi(t)] = E[k(t)|\phi(t)] + m(t) = f(t)$$

$$E[f(\tau)|\phi(t)] = E[k(\tau)|\phi(t)] + m(t) = k(t) + \mu(\tau - t) + m(t) \quad \text{i.e.}$$

$$E[f(\tau)|\phi(t)] = f(t) + \mu(\tau - t) \quad (10)$$

Substituindo (10) em (8) e resolvendo a integral resultante por partes obtemos:

$$x(t) = f(t) + \alpha\mu \quad (11)$$

i.e., o câmbio é linear nos fundamentos.

No regime de câmbio livre, o câmbio herda a volatilidade dos fundamentos, já que $dx = df$.

¹ O argumento original é devido a Obstfeld e Rogoff (1983), que trabalham num contexto de hiperinflação. Bertola (1991) chama a atenção para o fato de que, num modelo com paridade de poder de compra, o argumento vale tanto para preços quanto para a taxa de câmbio.

Quando consideramos intervenções das autoridades monetárias através de $m(t)$ de maneira a manter $x_i \leq x \leq x_s \quad \forall t$, a obtenção da equação $x = G(f)$ fica muito complexa através da equação (8).

Podemos, de fato, assegurar que x seja função apenas de f , ou mais explicitamente, que não depende de t como numa formulação do tipo $x = F(f, t)$. Isto decorre da hipótese (5) que faz com que a distribuição de $f(\tau)$ condicional à $\phi(t)$ dependa apenas de $f(t)$, μ e σ^2 , e do fato de que todos os termos à direita em (8) serem funções de $f(\tau)$ ². Pelo lema de Itô:

$$dG = \left[1/2 \sigma^2 \partial^2 G / \partial f^2 + \mu \partial G / \partial f \right] dt + \sigma \partial G / \partial f dW \quad (12)$$

Logo:

$$E[dG | \phi(t)] / dt = 1/2 \sigma^2 \partial^2 G / \partial f^2 + \mu \partial G / \partial f \quad (13)$$

Substituindo (13) em (1) obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\alpha/2 \sigma^2 \partial^2 G / \partial f^2 + \alpha \mu \partial G / \partial f - G = f \quad (14)$$

A solução particular de (14) tomando-se G linear em f fornece $G = f + \alpha\mu$, a equação do câmbio livre.

A solução geral é dada por:

$$G(f) = f + \alpha\mu + A \exp[\lambda_1 f] + B \exp[\lambda_2 f] \quad (15)$$

onde $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ são as raízes da equação característica

$$\alpha\sigma^2 / 2 \lambda^2 + \alpha\mu\lambda - 1 = 0 \quad (16)$$

e A e B são constantes a serem determinadas de acordo com a regra de intervenção do governo sobre o mercado cambial.

A equação (15) nos diz que o efeito da introdução da regra de intervenção é adicionar não-linearidades à relação entre o câmbio e os fundamentos.

Observe também que, qualquer que seja a regra de intervenção, $A < 0$ e $B > 0$ se a regra é tal que $x_i \leq x \leq x_s$. Com efeito, quando f tende a infinito, o último termo em (15) tende a zero e, a menos que $A < 0$, x tende a infinito. Quando f tende a menos infinito, o termo do meio em (15) tende a zero e, a menos que $B > 0$, x tende a menos infinito.

² Veja Bertola (1991).

Quando temos apenas um limitante superior para o câmbio, ou seja, $x \leq x_s$, $B = 0$. Com efeito, para f suficientemente pequeno a probabilidade de que haja intervenção do governo num futuro próximo é muito pequena, de maneira que a relação entre o câmbio e os fundamentos é quase linear, i.e., estamos quase em câmbio livre. Isso significa que B não pode ser negativo. Mas B também não pode ser positivo, pois para f suficientemente pequeno o câmbio divergiria para infinito, o que é um contra-senso em vista de (8). Claramente $A < 0$.

Quando temos apenas um limitante inferior, $A = 0$ e $B > 0$ por motivos análogos.

Os resultados acima estão sumariados na proposição 2 abaixo.

PROPOSIÇÃO 2: Valendo (5), enquanto não ocorre intervenção do governo, a equação do câmbio é dada por:

$$x = \begin{cases} f + \alpha\mu + A \exp[\lambda_1 f] + B \exp[\lambda_2 f] & \text{se } x_i \leq x \leq x_s \quad (15) \\ f + \alpha\mu + A \exp[\lambda_1 f] & \text{se } x \leq x_s \quad (15.a) \\ f + \alpha\mu + B \exp[\lambda_2 f] & \text{se } x \geq x_i \quad (15.b) \end{cases}$$

onde $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ são as raízes de (16) e A e B são constantes a serem determinadas de acordo com a regra de intervenção adotada.

Uma constante preocupação da literatura de bandas de câmbio é saber se a introdução da regra de intervenção estabiliza a taxa de câmbio relativamente ao regime de câmbio livre. De (12), o desvio padrão instantâneo do câmbio, denotado por σ_x , é dado por $\sigma dG/df$.

Em câmbio livre, $dG/df = 1$ e, como apontado anteriormente, a taxa de câmbio herda a volatilidade dos fundamentos. Com a regra de intervenção há dois efeitos a se considerar. O primeiro deles é o efeito de comprometimento prévio: a decisão do governo em restringir as oscilações cambiais reduziria, por si só, a volatilidade dos fundamentos e consequentemente do câmbio. Embora seja uma possibilidade teórica interessante, este efeito será ignorado o que está implícito em (5) quando trabalhamos com σ independente da regra de intervenção.

O segundo efeito depende da magnitude da derivada dG/df . Nos modelos a seguir G será crescente em f , de maneira que o câmbio é estabilizado quando $dG/df < 1$.

2- BANDAS TOTALMENTE CRÍVEIS E O EFEITO LUA DE MEL³

Consideremos a regra de intervenção infinitesimal. Suponha que o câmbio tenha atingido seu limite superior de maneira que $x = x_s$. Se no instante seguinte os fundamentos se alteram de modo que, na ausência de intervenção, o câmbio ultrapasse seu limite, então o governo altera a oferta monetária o suficiente para que a banda não seja ultrapassada. Caso a alteração dos fundamentos traga o câmbio para dentro da faixa de flutuação, o governo não intervém. Mais especificamente para $x = x_s$, aumentos de k são automaticamente compensados por contrações em m de maneira que $f = k + m$ não se altere. Caso k se reduza, o governo nada faz. Analogamente, para $x = x_i$ reduções em k são compensadas por aumentos na oferta de moeda enquanto esta permanece inalterada se k cresce.

Claramente a fixação de uma banda para o câmbio estabelece uma banda para os fundamentos: para $x_i \leq x \leq x_s$ teremos $f_i \leq f \leq f_s$. Na literatura de movimento browniano regulado, dizemos que f_i e f_s são barreiras refletoras: uma vez que f atinge quaisquer das barreiras este é refletido para dentro da banda de flutuação.

As condições de contorno apropriadas nessas circunstâncias são as chamadas condições de "smooth-pasting"⁴, que requerem que $x = G(f)$ seja tangente à x_i e à x_s em f_i e f_s , respectivamente. Dessa forma:

$$dG/df|_{f=f_i} = dG/df|_{f=f_s} = 0 \quad (17)$$

Aplicando este resultado à equação (15) obtemos:

$$1 + \lambda_1 A \exp[\lambda_1 f_i] + \lambda_2 B \exp[\lambda_2 f_i] = 0 \quad (18.a)$$

$$1 + \lambda_1 A \exp[\lambda_1 f_s] + \lambda_2 B \exp[\lambda_2 f_s] = 0 \quad (18.b)$$

o que fornece:

$$A = -1 / \lambda_1 \Delta [\exp[\lambda_2 f_i] - \exp[\lambda_2 f_s]] \quad (19.a)$$

$$B = -1 / \lambda_2 \Delta [\exp[\lambda_1 f_i] - \exp[\lambda_1 f_s]] \quad (19.b)$$

$$\text{onde } \Delta = \exp[\lambda_1 f_s + \lambda_2 f_i] - \exp[\lambda_2 f_s + \lambda_1 f_i]$$

Substituindo (19) em (15) obtemos a expressão para x :

$$x = f + \alpha\mu + 1 / \lambda_1 \lambda_2 \Delta [\lambda_2 \exp[\lambda_2 f_s + \lambda_1 f] - \lambda_2 \exp[\lambda_2 f_i + \lambda_1 f] + \lambda_1 \exp[\lambda_1 f_i + \lambda_2 f] - \lambda_1 \exp[\lambda_1 f_s + \lambda_2 f]] \quad (20)$$

³ O caso de intervenção discreta só será devidamente detalhado numa próxima versão deste trabalho. O artigo pioneiro nessa intervenção é Flood e Garber (1991). De qualquer maneira, a idéia básica dessa intervenção será vista quando falarmos de bandas não críveis, no modelo de Bertola e Cabalero (1990).

⁴ Veja Harrison (1985) para uma derivação formal dessas condições.

Observe que x é monotonamente crescente em f . Devido a essa propriedade podemos tanto obter f_i e f_s a partir de x_i e x_s , o que requer cálculo numérico, ou x_i e x_s a partir de f_i e f_s diretamente de (20). A literatura em geral opta por esta última alternativa.

Normalmente, algumas hipóteses simplificadoras são adotadas para tornar a equação (20) mais "tratável". A primeira hipótese supõe que a banda dos fundamentos seja simétrica em torno de um nível central f_0 , de maneira que $f_s = f_0 + \theta$ e $f_i = f_0 - \theta$. A segunda retira o "drift" do movimento browniano dos fundamentos livres, tornando $\mu = 0$, o que implica que $\lambda_1 = -\lambda_2$ por (16). Nessas condições:

$$x = f - 1/\lambda \Delta [\exp[\theta\lambda] - \exp[-\theta\lambda]] [\exp[\lambda(f - f_0)] - \exp[-\lambda(f - f_0)]] \quad (21)$$

$$\text{onde } \Delta = \exp[2\theta\lambda] - \exp[-2\theta\lambda] > 0 \text{ e } \lambda = 1/\sigma\sqrt{2/\alpha}$$

Observe que $x_s = f_0 + \delta$ e $x_i = f_0 - \delta$ onde $\delta = \theta - (\Delta + 2)/(\lambda\Delta)$.

Esse resultado é enunciado na proposição abaixo.

PROPOSIÇÃO 3: Na regra de intervenção infinitesimal, na ausência de "drift" dos fundamentos, uma banda simétrica nos fundamentos define uma única banda simétrica no câmbio, de menor amplitude, e vice-versa.

DEM: A menor amplitude decorre do fato que $\Delta > 0$. A unicidade é trivial. Com efeito, sejam x_0^* e δ^* tais que $x_s = x_0^* + \delta^*$ e $x_i = x_0^* - \delta^*$. Então $x_0^* = f_0$ e $\delta^* = \delta$. Por fim, a recíproca decorre da monotonicidade do câmbio em relação aos fundamentos. ■

A proposição acima nos informa que para analisarmos as propriedades do regime cambial com bandas simétricas, basta olharmos para bandas simétricas nos fundamentos. Essa pequena modificação permite que evitemos as complicações de obter f_i e f_s a partir de x_i e x_s ...

A menor amplitude da banda de câmbio significa que a regra de intervenção estabiliza a taxa de câmbio quando consideramos todo o intervalo $[f_i, f_s]$. Mais do que isso, em cada ponto do intervalo, o câmbio é mais estável relativamente à situação de câmbio livre.

PROPOSIÇÃO 4: Na regra de intervenção infinitesimal, $dx/df < 1$ para todo f em $[f_i, f_s]$. Quando $\mu = 0$ e a banda é simétrica, dx/df atinge o máximo em $f = f_0$, quando $dx/df = 1 - 2/[\exp[\theta\lambda] + \exp[-\theta\lambda]]$.

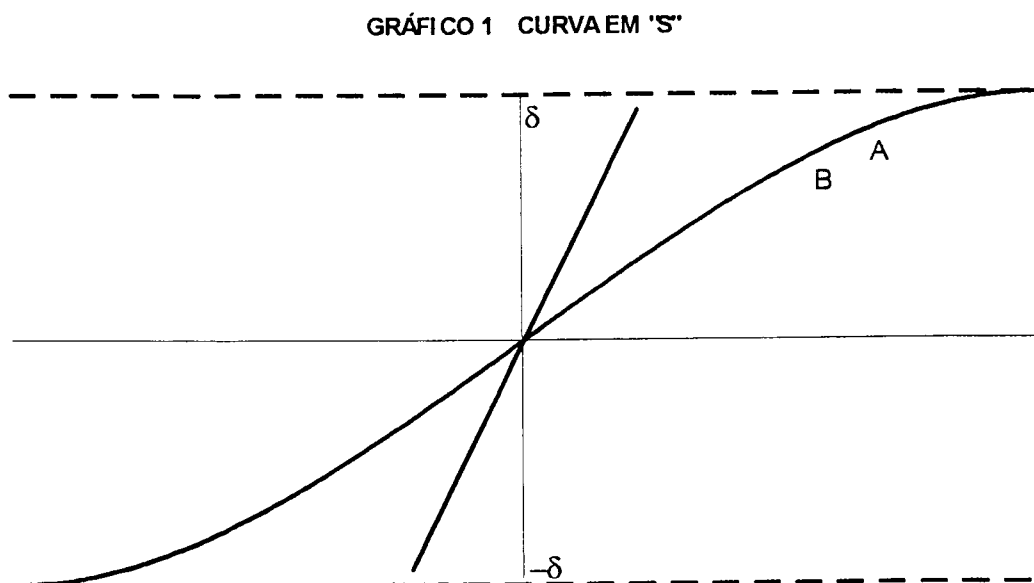
DEM: Basta derivar a equação (20) e observar que dx/df é estritamente côncava em $[f_i, f_s]$ e portanto atinge um máximo, que é inferior a 1. Para os outros resultados, basta derivar (21). ■

Quando tomamos $f = f_0$ e lembramos que Δ pode ser reescrito como $\Delta = [\exp[\theta\lambda] - \exp[-\theta\lambda]] [\exp[\theta\lambda] + \exp[-\theta\lambda]]$ obtemos:

$$x = f - 1/\lambda [\exp[\lambda f] - \exp[-\lambda f]] [\exp[\theta\lambda] + \exp[-\theta\lambda]] \quad (22)$$

que corresponde à equação obtida no artigo seminal de Krugman. Note que nesse caso $f_s = \theta = -f_i$ e $A = -B$.

O gráfico abaixo ilustra a equação (22). A curva em "S" corresponde à equação (22)⁵, enquanto a linha reta corresponde ao regime de câmbio livre.



Repare que mesmo enquanto o governo não intervém, i.e., quando estamos no interior da banda, o câmbio é mais estável no regime de bandas de câmbio, como demonstrado na proposição 4. Esse efeito estabilizador desse regime cambial ficou conhecido na literatura como "honeymoon effect" (efeito lua-de-mel) e corresponde formalmente ao fato que $dx/df < 1$.

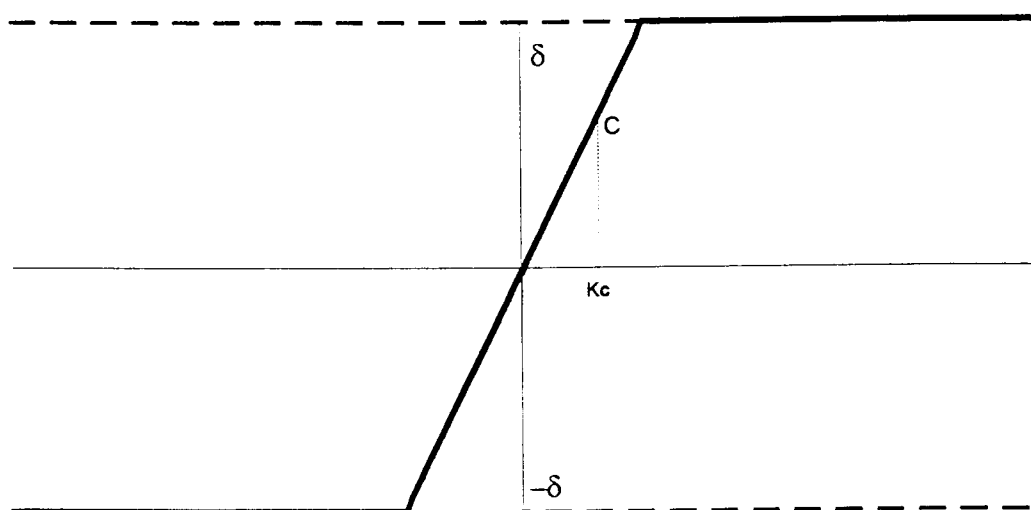
Intuitivamente, a curvatura da equação (22) se deve ao fato de que à medida que o câmbio se aproxima de seus limites, maior é a expectativa de que este retorne para dentro da banda, uma vez que o governo se compromete a intervir nos extremos da banda. Mais claramente, suponha que x esteja próximo de sua banda superior. Por simplicidade de raciocínio, suponha válida a equação (22), ou seja, estamos supondo

⁵ O formato em "S" não é particular à equação (22), mas corresponde à equação (20), mais geral. Ilustramos a equação (22) por ser mais conveniente.

que $\mu = f_0 = 0$. Como não há tendência nos fundamentos livres, estes podem aumentar ou cair com a mesma probabilidade, de maneira que o valor esperado do deslocamento é nulo. Mas isso não é verdade para os fundamentos como um todo, já que quanto mais próximo f estiver de x , maior é a probabilidade de uma intervenção do governo e, portanto, mais negativo é o deslocamento esperado dos fundamentos. Como o câmbio é crescente em f , teremos uma expectativa de apreciação cambial, que é tão maior em valor absoluto quanto mais próximo f estiver de x . Assim, por exemplo, no ponto "A" do gráfico 1 a expectativa de apreciação cambial é maior que no ponto "B".

O gráfico 1 mostra que o regime de câmbio em bandas é qualitativamente diferente de um regime misto, onde o câmbio é livre enquanto o governo não intervém, e passa a ser fixo quando o câmbio atinge os extremos da banda, conforme salientado por Krugman em seu artigo seminal (1991). O gráfico 2 abaixo ilustra essa combinação de regimes para $\mu = f_0 = 0$. Observe que nos eixos das abscissas estão os fundamentos livres apenas, e não os fundamentos todos como vínhamos fazendo.

GRÁFICO 2



Uma maneira simples de ver que o gráfico acima não pode corresponder ao regime câmbio em bandas é considerar um ponto como "C", que está a uma distância e arbitrariamente pequena da borda superior. Em "C", vale a equação (11) e temos que a expectativa de desvalorização do câmbio é nula, pois $\mu = 0$. Mas isso não pode ser verdade. Com efeito, seja $\varepsilon' > \varepsilon$. Se k decresce de ε' , x decresce do mesmo montante, mas se k cresce de ε' , a intervenção do governo restringe o aumento de x a apenas ε . Como k pode aumentar ou cair com a mesma probabilidade, a expectativa de desvalorização é negativa em "C", o que contraria a hipótese inicial de câmbio livre neste ponto: para $k = k_c$, o câmbio tem que ser menor que x_c .

Como será mostrado numa próxima seção, o efeito "lua-de-mel" decorre fundamentalmente da hipótese de que as bandas de câmbio sejam críveis, ou seja, de que os agentes econômicos efetivamente acreditem na intenção do governo em restringir a oscilação cambial. Caso isso não seja verdadeiro, o estabelecimento das bandas de câmbio pode tornar a taxa de câmbio mais volátil do que no regime de câmbio livre.

3- PROPRIEDADES DO CÂMBIO (BANDAS CRÍVEIS E INTERVENÇÃO INFINITESIMAL)

Na proposição 4 vimos que a derivada do câmbio é tão menor quanto mais próximo dos extremos da faixa de flutuação o câmbio estiver. Isso significa que o câmbio é mais volátil nas regimes próximas à paridade central, do que naquelas próximas aos extremos da banda já que $\sigma_x = \sigma dx / df$.

Outra propriedade interessante do câmbio diz respeito à sua distribuição de probabilidades assintótica⁶. Para um movimento browniano regulado, a distribuição de probabilidades assintótica é derivada formalmente em Harrison (1985). Denotando-se por $F_Z(Z)$ a função de distribuição da variável aleatória Z , teremos para $f_i \leq f \leq f_s$:

$$Ff(f) = \begin{cases} 1 / (f_s - f_i) & \mu = 0 \\ \beta \exp[\beta f] / [\exp[\beta f_s] - \exp[\beta f_i]] & \mu \neq 0 \end{cases} \quad (23)$$

onde $\beta = 2\mu / \sigma^2$

Dessa forma, com $\mu = 0$ devemos ter f uniformemente distribuída em $[f_i, f_s]$ no longo prazo, enquanto que se $\mu \neq 0$, f terá a distribuição de uma exponencial truncada, com maior massa para valores próximos a f_i ou a f_s conforme $\mu < 0$ ou $\mu > 0$, respectivamente.

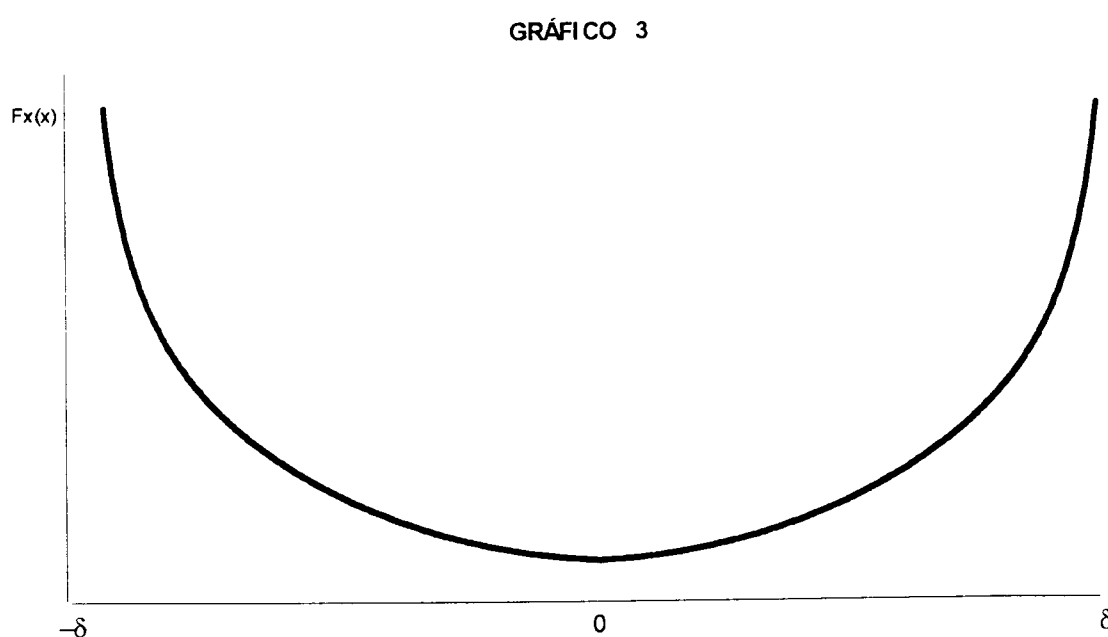
Para obter a distribuição de probabilidades assintótica para o câmbio em (x_i, x_s) , basta lembrar que nesse intervalo (o interior da banda, excluindo os extremos) x é crescente em f . Assim, existe a função inversa de x , denotada por x^{-1} e a função de distribuição é dada por:

$$Fx(x) = Ff(x^{-1}(x)) / [dx(x^{-1}(x)) / df] \quad (24)$$

⁶ Tal distribuição de probabilidades independe de f . Observe que σx é o desvio padrão instantâneo da distribuição de x condicional a f , i.e., não é o desvio padrão da distribuição assintótica de x .

Como mostrado por Svensson (1991), para $\mu = 0$, $Fx(x)$ é bimodal com mais massa nas vizinhanças dos extremos da banda. Já que o numerador em (24) é constante nesse caso, o resultado decorre do comportamento de dx/df que é tão menor quanto mais próximo x estiver dos extremos da banda.

O gráfico 3 abaixo devido também a Svensson (1991) ilustra a distribuição de probabilidades assintótica para o câmbio quando $\mu = f_0 = 0$ (lembre que nessas condições $x_0 = 0$).



Intuitivamente, como o câmbio é pouco volátil próximo às bandas, uma vez que ele atinge tais regimes, leva muito tempo para sair das mesmas. Nas regimes em torno da paridade central, ao contrário, o câmbio é mais volátil, ficando menos tempo nessas regimes. Assim, ao longo do tempo, esperamos observar o câmbio mais frequentemente próximo a x_i e a x_s do que nas regimes centrais.

Quando $\mu \neq 0$, $Fx(x)$ é unimodal com maior massa numa vizinhança do extremo inferior ou superior, conforme $\mu < 0$ ou $\mu > 0$, respectivamente.

4- A EQUAÇÃO DA TAXA DE JUROS

A obtenção da equação da taxa de juros no regime de bandas de câmbio também se deve a Svensson (1991). Assumindo-se que o prêmio de risco seja constante, ou mais convenientemente que seja nulo⁷, a equação (2.d) se reduz a

$$i(t) = i^*(t) + E[dx | \phi(t)]/dt \quad (25)$$

Denotando-se o diferencial de taxa de juros por $\delta(t) = i(t) - i^*(t)$, obtemos:

$$\delta(t) = E[dx | \phi(t)]/dt \quad (26)$$

De (1) e (26) temos que

$$\delta(t) = (1/\alpha) [G(f(t)) - f(t)] \quad (27)$$

A proposição abaixo obtém as equações do diferencial de juros nos regimes de câmbio fixo, livre e em bandas.

PROPOSIÇÃO 5: O diferencial de taxas de juros é dado por:

- i) $\delta(t) = 0$, em câmbio fixo;
- ii) $\delta(t) = \mu$, em câmbio livre;
- iii) $\delta(t) = (1/\alpha) [x(t) - f(t)]$, $x(t)$ dado por (20), em câmbio em bandas.

DEM: Basta considerar as equações para o câmbio fixo e câmbio livre dadas por (7) e (11), respectivamente. ■

Também a partir da equação (27), obtemos alguns outros importantes resultados relativos ao diferencial de juros quando a intervenção é marginal e estamos no regime de câmbio em bandas.

PROPOSIÇÃO 6: O diferencial de juros é decrescente no fundamento e é mais volátil nas regimes próximas dos extremos da banda dos fundamentos.

DEM: Derivando (27) em relação aos fundamentos temos: $\partial\delta/\partial f = 1/\alpha [\partial x/\partial f - 1] < 0$, uma vez que $\partial x/\partial f < 1$. Quanto à volatilidade de δ , denotando-se a variância instantânea do diferencial de juros por σ_δ^2 , temos, pelo lema de Itô:

⁷ Do ponto de vista formal, a escolha de um nível constante de prêmio de risco implica apenas num deslocamento da curva do diferencial de juros, mas não altera suas propriedades como curvatura e inclinação.

$$\sigma_{\delta} = -\partial\delta/\partial f \sigma \quad (28)$$

onde o sinal de menos foi adicionado já que $\partial\delta/\partial f < 0$. Como $-\partial\delta/\partial f$ é tão maior quanto menor $\alpha/\partial f$, segue o resultado enunciado, uma vez que $\alpha/\partial f$ é tão menor quanto mais próximos estamos dos extremos da banda dos fundamentos. ■

Este resultado da volatilidade também poderia ser obtido com o auxílio da proposição abaixo, que evidencia que implícito à escolha do regime de bandas de câmbio está o "trade-off" entre volatilidade do câmbio e volatilidade do diferencial de juros, de maneira que quanto menor for uma delas, maior será a outra.

PROPOSIÇÃO 7: Qualquer que seja a banda de câmbio:

$$\alpha\sigma_{\delta} + \sigma_x = \sigma \quad (29)$$

DEM: Por (27), $\sigma_{\delta} = -\partial\delta/\partial f \sigma = -1/\alpha [\alpha/\partial f - 1] \sigma = -1/\alpha [\sigma_x - \sigma]$. Rearrmando os termos, obtemos (28). ■

Por fim, um último resultado concernente à distribuição assintótica do diferencial de juros. Analogamente a (24), temos para δ :

$$F_{\delta}(\delta) = F_f(\delta^{-1}(\delta)) / [\partial\delta(\delta^{-1}(\delta))/\partial f] \quad (29)$$

Como o comportamento de $\partial\delta/\partial f$ é oposto àquele de $\alpha/\partial f$, no sentido de que quanto maior um deles, menor o outro, teremos que, a longo prazo, deveremos encontrar o diferencial de juros mais frequentemente nas regimes centrais de sua banda do que nas regimes extremas. Em outras palavras, com o fundamento livre uniformemente distribuído, a distribuição assintótica do diferencial de juros é unimodal.

Em resumo, quando as bandas de câmbio são críveis, a taxa de câmbio e o diferencial de juros apresentam as seguintes propriedades:

- (i) o câmbio é mais instável no meio da banda do que nos seus extremos. No câmbio livre não há tal fenômeno;
- (ii) o diferencial de juros decresce com o fundamento. Com efeito, ele é positivo na banda inferior e negativo na superior. Dessa forma, a taxa de câmbio e o diferencial de juros estão negativamente correlacionados;
- (iii) o diferencial de juros é mais volátil nos extremos da banda do que na região central;
- (iv) Na ausência de "drift" nos fundamentos livres, sua distribuição de longo prazo é uniforme entre seus níveis inferior e superior. Isso faz com que a distribuição do câmbio

seja simétrica em relação à paridade central e bimodal nos seus extremos, com menor densidade na região central. Assim, devemos ter mais observações nos extremos (i.e, próximo às barreiras) do que na região central. Observe que se o regime fosse de câmbio livre, a distribuição deste também seria uniforme. Caso o fundamento apresente "drift", devemos ter mais observações do câmbio próximo à banda superior caso o "drift" seja positivo, ou próximo à banda inferior no caso de "drift" negativo;

(v) a distribuição de longo prazo do diferencial de juros tem um formato oposto ao da distribuição do câmbio: na ausência de "drift", é simétrica em torno de zero, seu valor modal, com menor densidade em seus valores extremos.

5- BANDAS NÃO TOTALMENTE CRÍVEIS E O EFEITO LUA DE MEL INVERSO

Nos modelos anteriormente vistos os agentes econômicos eram sempre supostos acreditar no regime cambial. Entretanto, como será mostrado na terceira parte desse relatório preliminar, a evidência empírica não corrobora com os resultados teóricos obtidos anteriormente. Um dos possíveis motivos para a inadequação da teoria aos fatos seria justamente o irrealismo da hipótese de perfeita credibilidade da banda.

O modelo de Bertola e Cabalero (1990) procura resolver esse problema através de um modelo de intervenção discreta, extremamente estilizado. A importância do modelo deve-se a seu resultado principal: para uma banda suficientemente não crível, o estabelecimento do regime de bandas de câmbio instabiliza o mesmo ao invés de estabilizá-lo, relativamente ao câmbio livre.

A estrutura do modelo é a seguinte: os fundamentos não têm "drift" (i.e. $\mu = 0$) e as autoridades somente intervêm em $c(t)-s$ e $c(t)+s$ onde $c(t)$ é a paridade central do fundamento no tempo t e $2s$ é o "tamanho" da banda dos fundamentos. A intervenção pode ocorrer de duas maneiras, quando f atinge uma das barreiras:

i) o governo defende a banda, trazendo os fundamentos de volta para a paridade central corrente; ou

ii) o governo realinha o câmbio, e dobra a distância de f a $c(t)$, de maneira que a nova paridade central seja $c(t) \pm 2s$ e o nível do fundamento coincida com a nova paridade central. O tamanho da banda continua fixo em $2s$.

Os agentes econômicos atribuem uma probabilidade p ao realinhamento do câmbio, e $(1-p)$ à defesa do mesmo.

Nesse modelo, x depende não apenas de f , mas também da paridade central corrente e podemos escrever $x(t) = x(f(t), c(t))$. Pode-se mostrar que no interior de qualquer banda (note que toda vez que ocorre um realinhamento de câmbio, muda-se de banda) a função $x(f, c)$ tem a forma simétrica:

$$x(f, c) = f + A \exp[-\lambda(f - c)] - A \exp[\lambda(f - c)] \quad (30)$$

onde $\lambda = \sqrt{2/\alpha\lambda}$ e A é uma constante a ser determinada.

Para obtê-la, recorramos a um argumento comum à literatura de bandas de câmbio e que já foi usado, por exemplo, no modelo de Krugman e Rothemberg e suas variações. Iremos impor que a taxa de câmbio não seja esperada se modificar quando a intervenção é reconhecida como iminente. De outro modo, indivíduos neutros ao risco obteriam ganhos de arbitragem. Formalmente, requeremos que quando $f = c(t) + s$:

$$p x[c(t) + 2s, c(t) + 2s] + (1 - p) x[c(t), c(t)] = x[c(t) + s, c(t)] \quad (31)$$

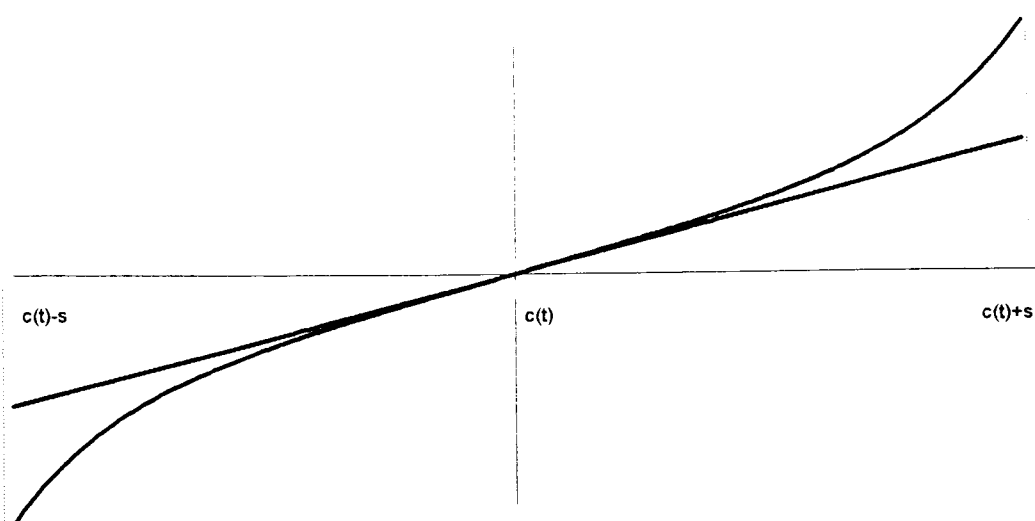
O termo a esquerda de (31) é o valor esperado do câmbio imediatamente à decisão de defendê-lo ou realinhá-lo, enquanto que o termo à direita é o câmbio exatamente antes do governo tomar a decisão.

De (30) e (31) obtemos

$$A = (1 - 2p)s / [\exp(\lambda s) - \exp(-\lambda s)] \quad (32)$$

Para $0 \leq p < 1/2$, $A > 0$ e temos uma curva para x semelhante à curva em S de Krugman. Entretanto, e essa é a grande contribuição do modelo de Bertola e Cabalero, para $p > 1/2$ passamos a ter o chamado "S invertido" como ilustrado no gráfico 4 abaixo.

GRÁFICO 4



Repare que a curva do câmbio é sempre mais inclinada do que a curva do câmbio livre, o que significa que o câmbio passa a ser mais instável do que na livre flutuação, e o câmbio é tão mais instável quanto mais próximo das barreiras estiver. Assim, devemos observar a taxa de câmbio mais frequentemente nas regimes centrais de suas respectivas bandas.

O diferencial de juros também tem um comportamento distinto dos modelos anteriores: passa a ser crescente com os fundamentos. Em particular, quanto mais elevado for o câmbio, mais o diferencial de juros sinaliza uma expectativa de desvalorização cambial.

BIBLIOGRAFIA

Bertola, Giuseppe, 1991, "Continuous-time models of exchange rates and intervention", Working Paper in International Economics G-91-01, December, Princeton University.

Bertola, Giuseppe and Ricardo J. Caballero, 1989, "Target zones and realignments", Working Paper no. 398 (Centre for Economic Policy Research).

Buiter, Willem H. and Paolo A. Pesenti, 1990, "Rational speculative bubbles in an exchange rate target zone", Working paper no. 3467 (National Bureau of Economic Research).

Dixit, Avinash, 1991, "The Art of Smoothing Pasting".

Flood, Robert P. and Peter M. Garber, 1983, "A model of stochastic process switching", *Econometrica* 51, 537-552.

Flood, Robert P. and Peter M. Garber, 1989, "The linkage between speculative attack and target zone models of exchange rates", *The Quarterly Journal of Economics*, November, 1367-72.

Frenkel, Jacob A. and Harry G. Johnson, eds., 1978, *The economics of exchange rates* (Addison-Wesley, Reading, MA).

Froot, Kenneth A. and Maurice Obstfeld, 1991, "Exchange-rate dynamics under stochastic regime shifts - a unified approach", *Journal of International Economics* 31, 203-229.

Froot, Kenneth A. and Maurice Obstfeld, 1991, "Stochastic process switching: some simple solutions", *Econometrica* 59, 241-250.

Froot, Kenneth A. and Maurice Obstfeld, 1991, "Intrinsic bubbles: the case of stock prices", *The American Economic Review* 81, 1189-1214.

Leiderman, Leonardo and Elhanan Helpman, 1992, "Israel's exchange rate band", mimeo, Tel Aviv University.

Giovannini, Alberto, 1989, "How do fixed exchange-rate regimes work? Evidence from the gold standard, Bretton Woods and the EMS", chapter 2 in *Blueprints for Exchange Rate Management*, Academic Press.

Grilli, Vittorio U., 1986, "Buying and selling attacks on fixed exchange rate systems", *Journal of International Economics* 20, 143-156.

Klein, Michael W., 1990, "Playing with the band: dynamic effects of target zones in an open economy", *International Economic Review* 31, 757-772.

Krugman, Paul R., 1979, "A model of Balance-of-Payments Crises", *Journal of Money, Credit and Banking* 11, 311-325.

Krugman, Paul R., 1991, "Target zones and exchange rate dynamics", *Quarterly Journal of Economics* 106, 669-682.

Krugman, Paul and Julio Rotemberg, 1990, "Target zones with limited reserves", Working Paper no. 3418 (National Bureau of Economic Research).

Lindberg, Hans, Lars E. O. Svensson and Paul Söderlind, 1991, "Devaluation expectations: the Swedish Coroa 1982-1991", Seminar Paper no. 495 (Institute for International Economic Studies).

Miller, Marcus and Paul Weller, 1989, "Exchange rate bands and realignments in a stationary stochastic setting", chapter 7 in *Blueprints for Exchange Rate Management*, Academic Press.

Miller, Marcus and Paul Weller, 1990, "Currency bubbles which affect fundamentals: a qualitative treatment", *The Economic Journal Supplement* 100, 170-179.

Miller, Marcus and Paul Weller, 1991, "Exchange rate bands with price inertia", *The Economic Journal* 101, 1380-1399.

Miller, Marcus and Paul Weller, 1991, "Currency bands, target zones and price flexibility", *IMF Staff Papers* 38, 184-215.

Minford, Patrick, 1989, "Exchange-rate regimes and policy coordinations", chapter 9 in *Blueprints for Exchange Rate Management*, Academic Press.

Obstfeld, Maurice, 1984, "Balance-of-Payments crisis and devaluation", *Journal of Money, Credit and Banking* 16, 208-217.

Obstfeld, Maurice, 1986, "Rational and self-fulfilling Balance-of-Payments Crises", *The American Economic Review* 76, 72-81.

Svensson, Lars E. O., 1990, "The foreign exchange risk premium in a target zone with devaluation risk", Working paper no. 3466 (National Bureau of Economic Research).

Svensson, Lars E. O., 1991, "Target zones and interest rate variability", *Journal of International Economics* 31, 27-54.

Svensson, Lars E. O., 1991, "The term structure of interest rate differentials in a target zone: theory and Swedish data", Discussion Paper no. 495 (Centre for Economic Policy Research).

Svensson, Lars E. O., 1991, "Assessing target zone credibility: mean reversion and devaluation expectations in the EMS", Working Paper no. 3795 (National Bureau of Economic Research).

Svensson, Lars E. O., 1991, "The simplest test of target zone credibility", *IMF Staff Papers*, vol. 38, no. 3, September, 655-65

Svensson, Lars E. O. and Giuseppe Bertolla, 1991, "Stochastic devaluation risk and the empirical fit of target zone models", Working Paper no. 3576 (National Bureau of Economic Research).

Welch, John y Darryl Mcleod, 1992, "El libre comercio y el peso", *Economía Mexicana, Nueva Época*, vol. I, num. 1, Enero-Junio, 193-235.

As Reservas e o Caso de Bandas Múltiplas

AS RESERVAS E O CASO DE BANDAS MÚLTIPLAS

INTRODUÇÃO

Neste artigo fazemos uma pequena resenha da literatura de bandas de câmbio e apresentamos um modelo que mostra, de maneira estilizada, que intervenções frequentes do governo na tentativa de estabilizar o câmbio geram maior estabilidade cambial a curto prazo em detrimento de uma maior estabilidade futura.

Na primeira seção apresentamos as hipóteses e equações básicas da literatura de bandas. Nesta seção, obtemos de maneira explícita as equações que relacionam a taxa de câmbio aos seus fundamentos, para diversos regimes cambiais.

Na seção seguinte apresentamos o modelo de Krugman e Rothemberg que procura explicar o papel das reservas no regime de câmbio em bandas. Nesse modelo, o simples fato de que o governo se compromete a intervir no mercado de câmbio vendendo suas reservas faz com que o câmbio seja mais estável relativamente à situação de câmbio livre.

O resultado mais importante desse modelo é o fato de que mesmo que o governo não tenha reservas em volume suficiente para impedir a desvalorização cambial além de um nível desejado, a sua decisão de intervir faz com que o câmbio se estabilize a curto prazo e também consegue retardar no tempo o momento em que o câmbio ultrapassa o nível desejado.

Quando o volume de reservas é pequeno, o governo perde todas as suas reservas num ataque especulativo na primeira vez que o mercado "testa" o governo, i.e., na primeira vez que o câmbio atinge o nível máximo desejado pelo mesmo. Em outras palavras, o governo vende todas as suas reservas na tentativa de conter o câmbio, mas não consegue fazê-lo. Em suma, com poucas reservas o governo se vê diante de duas alternativas:

- i) anuncia que irá intervir no mercado de câmbio caso este atinja um determinado nível máximo; com isso retarda a desvalorização, estabiliza o câmbio a curto prazo, mas perde toda as reservas num ataque especulativo;
- ii) governo não intervém: mantém suas reservas, mas o mercado cambial segue seu rumo irrestrito.

Quando as reservas são suficientemente grandes, os resultados são basicamente os apresentados acima com as qualificações que se consegue retardar a desvalorização

por mais tempo e que o ataque especulativo, com o governo perdendo todas as suas reservas, não acontece na primeira vez que o mercado "testa" o governo.

Quão grandes as reservas têm que ser para evitar o ataque especulativo depende inversamente do nível máximo desejado para câmbio: quando maior o nível máximo, i.e., menos restritiva é a ação do governo, menor pode ser o volume inicial de reservas. O motivo disto é que quanto maior o câmbio no momento da intervenção, maior é a contração monetária decorrente da venda de reservas e, portanto, mais fácil o controle cambial. Na primeira parte do relatório obtemos explicitamente o nível crítico de reservas: para reservas maiores que o nível crítico, não temos ataque especulativo na primeira vez que o mercado "testa" o governo; para reservas inferiores ao nível crítico, temos o ataque.

Poder-se-ia argumentar que a estratégia do governo de somente intervir no momento em que o câmbio atinge o nível desejado pela primeira vez é pouco realista, já que, na prática, o governo iria fazer intervenções em níveis intermediários entre os níveis corrente e máximo desejado, ou seja, o governo interviria mais frequentemente.

Na terceira seção, investigamos que modificações seriam introduzidas nos resultados anteriores quando passamos para uma nova regra de intervenção nos moldes descritos acima, consideramos o seguinte modelo estilizado. O governo se compromete a intervir no mercado de câmbio em dois momentos: quando o câmbio atinge o nível máximo desejado (segundo momento) e quando atinge um determinado nível (primeiro momento), anunciado aos agentes econômicos, intermediário entre o nível corrente e o nível máximo desejado.

Os resultados principais obtidos são que, com a nova regra, o câmbio é mais estável a curto prazo (até atingir o nível intermediário) e passa a ser mais instável em seguida, em comparação com a regra inicial. Além disso, o tempo total do programa de defesa cambial (tempo até que o nível máximo desejado seja superado) é reduzido com a nova regra. Portanto, intervenções mais frequentes estabilizam momentaneamente a taxa de câmbio em detrimento da estabilidade futura.

Por fim, a última seção conclui o artigo.

1- O MODELO BÁSICO

A equação básica da literatura de Bandas de Câmbio é a seguinte:

$$x(t) = f(t) + \alpha E[dx | \phi(t)]/d(t) \quad (1)$$

onde $x(t)$ é o logaritmo da taxa de câmbio à vista, no tempo t ; $f(t)$ denota um conjunto de fundamentos macroeconômicos; $\phi(t)$ é o conjunto de informação, comum a todos os agentes, no tempo t . $\phi(t)$ engloba o valor corrente dos fundamentos, bem como as

regras de intervenção da política cambial; α é um parâmetro positivo; "E" denota o operador esperança matemática e

$$E[dx | \phi(t)] / dt \equiv \lim_{s \rightarrow 0} E[x(t+s) - x(t) | \phi(t)] / s$$

A equação (1) possui uma interpretação bastante clara: o câmbio (seu logaritmo) é determinado por fundamentos macroeconômicos mais um termo especulativo.

A especificação dos fundamentos f é genérica e a força dos modelos de Bandas de Câmbio reside justamente no fato de que, como mostraremos mais tarde, desde que sigam determinadas propriedades, quaisquer que sejam os fundamentos, $x(t)$ possui algumas características bem definidas, independentemente do fundamento escolhido, i.e., não precisamos identificar os fundamentos.

Em geral, a interpretação de f é feita através do modelo monetário usual com preços flexíveis. As equações do modelo são:

$$m(t) - p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 y(t) - \alpha i(t) + v(t); \alpha_1, \alpha > 0 \quad (2.a)$$

$$m^*(t) - p^*(t) = \alpha_0^* + \alpha_1^* y^*(t) - \alpha i^*(t) + v^*(t); \alpha_1^* > 0 \quad (2.b)$$

$$x(t) = p(t) - p^*(t) + q(t) \quad (2.c)$$

$$i(t) = i^*(t) + E[dx | \phi(t)] / dt + \rho(t) \quad (2.d)$$

onde $m(t)$, $p(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, os logaritmos da oferta doméstica de moeda, do índice de preços doméstico e da renda real; $i(t)$ é a taxa de juros nominal e $v(t)$ é uma variável aleatória denotando choques na demanda por ou na oferta de moeda. O asterisco indica as correspondentes variáveis para o resto do mundo. $q(t)$ é um choque exógeno no câmbio real e $\rho(t)$ é o prêmio de risco. Observe que α , a semi-elasticidade da demanda por moeda em relação à taxa de juros é a mesma para o país em consideração e para o resto do mundo.

As equações (2.a) e (2.b) são equações de equilíbrio nos mercados monetários doméstico e externo, respectivamente. A equação (2.c) supõe a validade da paridade do poder de compra a menos de um choque exógeno $q(t)$ no câmbio real e (2.d) supõe perfeita mobilidade de capitais, i.e., os títulos domésticos e estrangeiros são perfeitos substitutos, a menos de um prêmio de risco.

Após alguns algebrismos com (2), recuperamos a equação (1) com

$$f(t) = m(t) - m^*(t) - q(t) + \alpha_1^* y^*(t) - \alpha_1 y(t) + \alpha \rho(t) + v^*(t) - v(t) + \alpha_0^* - \alpha_0 \quad (3)$$

Usualmente, costuma-se distinguir dentre os fundamentos aqueles que são usados pelo governo para implementar uma intervenção no câmbio, daqueles que não se prestam a essa função. Estes últimos, os fundamentos livres, serão denotados por $k(t)$. O governo é suposto controlar a oferta de moeda, que dessa forma se constitui na variável de intervenção sobre o mercado cambial. Denotando-se o logaritmo da oferta monetária por $m(t)$, temos então:

$$f(t) = m(t) + k(t) \quad (4)$$

Os fundamentos livres são supostos seguir um movimento browniano com "drift" μ e variância instantânea σ^2 :

$$dk = \mu dt + \sigma dW \quad (5)$$

onde $W(t)$ é um processo de Wiener.

Das propriedades do processo de Wiener, temos que $k(\tau)$ é normalmente distribuída com média $k(t) + \mu(\tau-t)$ e variância $(\tau-t)\sigma^2$, condicional à informação \mathcal{F}_t . Observe que $E[k(\tau)|\mathcal{F}_t]$ é crescente em $k(t)$, i.e., quanto maior é o nível do fundamento livre hoje, maior é o seu nível esperado no futuro.

A variável de intervenção $m(t)$ somente se modifica, como o próprio nome indica, quando ocorre uma intervenção. Na ausência desta:

$$df = dk \quad (6.a)$$

Quando ocorre intervenção:

$$df = dm + dk \quad (6.b)$$

onde o termo dm varia de acordo com a regra de intervenção considerada.

Há três regimes cambiais básicos a considerar: câmbio fixo, câmbio livre e câmbio em bandas. No primeiro regime o termo especulativo em (1) é nulo e temos:

$$x = f \quad (7)$$

Nessas circunstâncias, se o governo deseja fixar o câmbio em x' , terá que intervir de modo a fazer com que $df = 0$, i.e., $dm = -dk$.

No regime de câmbio livre, o governo deixa que o mercado livremente determine a cotação do câmbio, de maneira que $dm = 0$. A equação do câmbio nesse caso, equação (11), será obtida mais tarde.

Por fim, suponha que o governo anuncie que não permitirá que a taxa de câmbio ultrapasse os limites superior e inferior X_s e X_i , respectivamente, o que implica que $x_i \leq x \leq x_s$, onde $x_i = \ln [X_i]$ e $x_s = \ln [X_s]$. Como posteriormente mostraremos, teremos uma equação relacionando x a f , de acordo com a regra de intervenção escolhida.

O termo " dm " varia com o tipo de intervenção, podendo ser infinitesimal ou discreto. O artigo seminal de Krugman (1991) considera a primeira possibilidade. Flood e Garber (1991) estendem os resultados para a intervenção discreta.

Nosso objetivo nessa seção é responder à seguinte questão: dadas uma regra de intervenção, a equação (1) básica e as hipóteses (4) e (5) sobre os fundamentos, podemos obter $x = G(f)$?

Podemos proceder de duas maneiras. A primeira mostra que o câmbio à vista é a soma infinita dos fundamentos futuros esperados, descontados até o presente, incorporando-se na previsão dos fundamentos toda a informação disponível, o que inclui a regra de intervenção governamental e o comportamento dos fundamentos livres como em (4) e (5). Embora muita intuitiva, esta abordagem apresenta grandes dificuldades para a obtenção da equação $x = G(f)$ (veja Flood and Garber (1983), e Froot and Obstfeld (1991, Econometrica)).

A segunda maneira é de natureza mais técnica e nos permite obter a equação desejada explicitamente. Mais do que isso, esta abordagem nos fornece uma família de soluções e aquelas específicas são obtidas escolhendo-se condições de contorno apropriadas.

A proposição abaixo enuncia o resultado obtido através da primeira técnica.

PROPOSIÇÃO 1: Em equilíbrio de expectativas racionais sem bolhas especulativas, existe uma única trajetória de equilíbrio para $x(t)$ que satisfaz a (1) dada por

$$x(t) = (1/\alpha) \int_t^{\infty} \exp[(t-\tau)/\alpha] E[f(\tau)|\phi(t)] d\tau \quad (8)$$

DEM: Defina $z(t+s) = E[x(t+s)|\phi(t)]$ e $H(t+s) = E[f(t+s)|\phi(t)]$. Então,

$$dz/dt = \lim_{s \rightarrow 0} [z(t+s) - z(t)]/s = E[dx|\phi(t)]/dt$$

A equação (1) pode ser reescrita como:

$$dz/dt - (1/\alpha) z = (1/\alpha) H \quad (9)$$

já que $E[x(t)|\phi(t)] = x(t)$ e $E[f(t)|\phi(t)] = f(t)$.

Multiplicando (9) pelo coeficiente de integração $\exp[-t/\alpha]$ e efetuando alguns cálculos chegamos a:

$$x(t) = (1/\alpha) \int_t^{\infty} \exp[(t-\tau)/\alpha] H(\tau) d\tau + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp[(t-\tau)/\alpha] z(\tau)$$

O último termo à direita não contém fundamentos, i.e., é uma bolha. Denotemo-o por $B(t)$. Claramente $dB/dt = (1/\alpha) B$, o que mostra que $B(t)$ é solução da equação homogênea em (9) que, de fato, não está relacionada aos fundamentos. A expressão geral para uma bolha é $B(t) = B_0 \exp(-t/\alpha)$, onde B_0 é uma constante arbitrária.

Na presença de bolhas o câmbio cresceria espontaneamente, sem nenhuma relação com os fundamentos. Por hipótese, as bolhas estão excluídas. Usando as definições de $z(t+s)$ e de $H(t+s)$, a equação (9) recai em (8). ■

A hipótese de ausência de bolhas é essencialmente uma condição de não arbitragem quando a moeda que está desaparecendo é parcialmente lastreada em ativos reais¹: com o câmbio indo para infinito a uma taxa superior a do desconto $1/\alpha$, a moeda do país nada valeria para os agentes econômicos, enquanto claramente seu valor não pode ser nulo, já que o ativo real que o lastreia possui valor de mercado.

A equação (8) nos diz que o câmbio é uma média ponderada do valor esperado dos fundamentos, com pesos decrescentes com o tempo dados por $(1/\alpha) \exp[(t-\tau)/\alpha]$. Esta interpretação será muito útil quando falarmos da situação onde o governo utiliza duas barreiras superiores para restringir a oscilação cambial. Em particular, uma contração da moeda anunciada para o futuro reduz tanto mais o câmbio quanto mais próxima da data corrente for a data da contração.

A equação (8) também permite uma caracterização bastante simples da equação $x = G(f)$ quando o regime é de câmbio livre e não há intervenções. Nessa situação vale (6) e:

$$E[f(t)|\phi(t)] = E[k(t)|\phi(t)] + m(t) = f(t)$$

$$E[f(\tau)|\phi(t)] = E[k(\tau)|\phi(t)] + m(t) = k(t) + \mu(\tau - t) + m(t) \quad \text{i.e.}$$

$$E[f(\tau)|\phi(t)] = f(t) + \mu(\tau - t) \quad (10)$$

Substituindo (10) em (8) e resolvendo a integral resultante por partes obtemos:

$$x(t) = f(t) + \alpha\mu \quad (11)$$

¹ O argumento original é devido a Obstfeld e Rogoff (1983), que trabalham num contexto de hiperinflação. Bertola (1991) chama a atenção para o fato de que, num modelo com paridade de poder de compra, o argumento vale tanto para preços quanto para a taxa de câmbio.

i.e., o câmbio é linear nos fundamentos.

No regime de câmbio livre, o câmbio herda a volatilidade dos fundamentos, já que $dx = df$.

Quando consideramos intervenções das autoridades monetárias através de $m(t)$ de maneira a manter $x_t \leq x \leq x_t \quad \forall t$, a obtenção da equação $x = G(f)$ fica muito complexa através da equação (8).

Podemos, de fato, assegurar que x seja função apenas de f , ou mais explicitamente, que não depende de t como numa formulação do tipo $x = F(f, t)$. Isto decorre da hipótese (5) que faz com que a distribuição de $f(\tau)$ condicional à $\phi(t)$ dependa apenas de $f(t)$, μ e σ^2 , e do fato de que todos os termos à direita em (8) serem funções de $f(\tau)$ ². Pelo lema de Itô:

$$dG = \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial f^2} + \mu \frac{\partial G}{\partial f} \right] dt + \sigma \frac{\partial G}{\partial f} dW \quad (12)$$

Logo:

$$E[dG | \phi(t)] / dt = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial f^2} + \mu \frac{\partial G}{\partial f} \quad (13)$$

Substituindo (13) em (1) obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\alpha / 2 \sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial f^2} + \alpha \mu \frac{\partial G}{\partial f} - G = f \quad (14)$$

A solução particular de (14) tomando-se G linear em f fornece $G = f + \alpha \mu$, a equação do câmbio livre.

A solução geral é dada por:

$$G(f) = f + \alpha \mu + A \exp[\lambda_1 f] + B \exp[\lambda_2 f] \quad (15)$$

onde $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ são as raízes da equação característica

$$\alpha \sigma^2 / 2 \lambda^2 + \alpha \mu \lambda - 1 = 0 \quad (16)$$

e A e B são constantes a serem determinadas de acordo com a regra de intervenção do governo sobre o mercado cambial.

A equação (15) nos diz que o efeito da introdução da regra de intervenção é adicionar não-linearidades à relação entre o câmbio e os fundamentos.

² Veja Bertola (1991).

Observe também que, qualquer que seja a regra de intervenção, $A < 0$ e $B > 0$ se a regra é tal que $x_i \leq x \leq x_s$. Com efeito, quando f tende a infinito, o último termo em (15) tende a zero e, a menos que $A < 0$, x tende a infinito. Quando f tende a menos infinito, o termo do meio em (15) tende a zero e, a menos que $B > 0$, x tende a menos infinito.

Quando temos apenas um limitante superior para o câmbio, ou seja, $x \leq x_s$, $B = 0$. Com efeito, para f suficientemente pequeno a probabilidade de que haja intervenção do governo num futuro próximo é muito pequena, de maneira que a relação entre o câmbio e os fundamentos é quase linear, i.e., estamos quase em câmbio livre. Isso significa que B não pode ser negativo. Mas B também não pode ser positivo, pois para f suficientemente pequeno o câmbio divergiria para infinito, o que é um contra-senso em vista de (8). Claramente $A < 0$.

Quando temos apenas um limitante inferior, $A = 0$ e $B > 0$ por motivos análogos.

Os resultados acima estão sumariados na proposição 2 abaixo.

PROPOSIÇÃO 2: Valendo (5), enquanto não ocorre intervenção do governo, a equação do câmbio é dada por:

$$x = \begin{cases} f + \alpha\mu + A \exp[\lambda_1 f] + B \exp[\lambda_2 f] & \text{se } x_i \leq x \leq x_s, \text{ (15)} \\ f + \alpha\mu + A \exp[\lambda_1 f] & \text{se } x \leq x_i, \text{ (15.a)} \\ f + \alpha\mu + B \exp[\lambda_2 f] & \text{se } x \geq x_s, \text{ (15.b)} \end{cases}$$

onde $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ são as raízes de (16) e A e B são constantes a serem determinadas de acordo com a regra de intervenção adotada.

2- O MODELO DE KRUGMAN-ROTHEMBERG

Este modelo desenvolvido em Krugman e Rothenberg (1991) torna explícito o papel das reservas do governo na defesa de uma paridade cambial.

Suponha que o governo deseje restringir o câmbio de maneira que x não ultrapasse o limitante superior x' (usaremos x' ao invés de x_s por mera comodidade de notação). Para tal, quando x atinge x' , o governo vende reservas apenas o suficiente para que x não ultrapasse x' , ou seja, a intervenção é marginal. Por hipótese, enquanto x é inferior a x' o governo não intervém.

Seja k' o nível do fundamento livre tal que quando x atinge x' pela primeira vez, k atinge k' também pela primeira vez.

Defina $U(t) = \sup_{\tau \leq t} k(\tau)$. $U(t)$ é o maior nível atingido pelo fundamento livre até o tempo t . Para $U(t) < k'$, m está fixo em seu valor inicial. Por comodidade de notação, escreveremos λ no lugar de λ_1 .

Seja B_0 a base monetária inicial, x' a cotação do câmbio onde o governo vende reservas e R_0 o estoque inicial de reservas. Defina $m_0 = \ln(B_0)$ e $m_1 = \ln(B_0 - x' R_0)$.

Suponha que na primeira vez que x atinja x' , ocorra o ataque especulativo com o mercado comprando toda o estoque de reservas do governo. Após o ataque estamos em câmbio livre:

$$x = m_1 + k + \alpha\mu \quad (17)$$

O nível do fundamento livre k' onde ocorre o ataque tem que ser compatível com (17), i.e.,

$$k' = x' - m_1 - \alpha\mu \quad (18)$$

Enquanto $U(t) < k'$, o câmbio segue a equação abaixo, de acordo com (15.a):

$$x = m_0 + k + \alpha\mu + A \exp[\lambda(k + m_0)] \quad (19)$$

Como a ação do governo é plenamente antecipada, a taxa de câmbio não pode dar um salto discreto em k' , senão teríamos oportunidades de arbitragem. Assim:

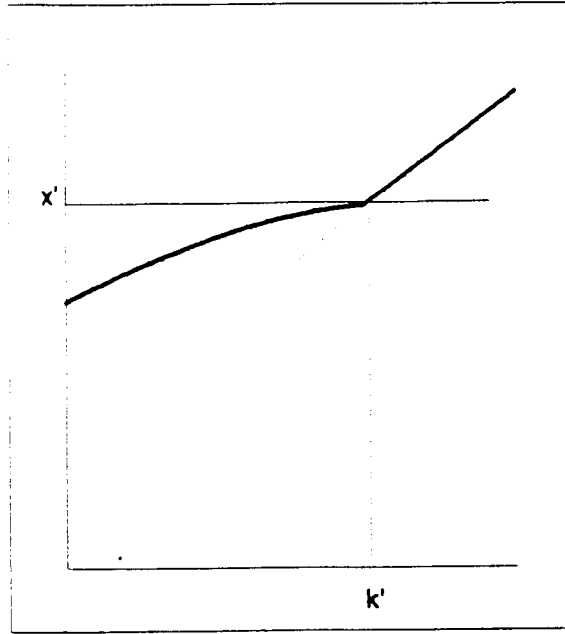
$$x' = m_1 + k' + \alpha\mu = m_0 + k' + \alpha\mu + A \exp[\lambda(k' + m_0)]$$

$$A = -(m_0 - m_1) \exp[-\lambda(k' + m_0)] < 0$$

Dessa forma:

$$x = \begin{cases} m_0 + k + \alpha\mu - (m_0 - m_1) \exp[\lambda(k - k')] & U(t) < k' \\ m_1 + k + \alpha\mu & U(t) \geq k' \end{cases} \quad (20)$$

O gráfico a seguir ilustra a equação (19).



Uma vez que as reservas são perdidas, mesmo que os fundamentos livres se contraíam para um nível inferior à k' , o câmbio se reduz caminhando pela reta do câmbio livre e não mais pela curva côncava através da qual inicialmente atingira k' .

Para que o ataque especulativo seja factível, devemos ter para $U(t) < k'$, $\partial x(k') / \partial k \geq 0$, pois caso contrário já teríamos atingido x' antes. De (20):

$$\frac{\partial x}{\partial k} = \begin{cases} 1 - \lambda(m_0 - m_1) \exp[\lambda(k - k')] & U(t) < k' \\ 1 & U(t) \geq k' \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} 1 - \lambda(m_0 - m_1) &\geq 0 \\ m_0 &\leq m_1 + 1/\lambda \equiv m^* \end{aligned} \quad (22)$$

Ou de outra forma:

$$x' R_0 / B_0 \leq 1 - \exp(-1/\lambda) \quad (22)$$

i.e., $x' R_0 / B_0$ tem que ser suficientemente pequeno.

Podemos enunciar a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 3: Na regra de intervenção marginal, se $m_0 \leq m^*$, i.e., $x' R_0 / B_0 \leq 1 - \exp(-1/\lambda)$, então a equação cambial é dada por (20).

Observe que (22) implica que (21) seja sempre positiva, somente se anulando para $m_0 = m^*$ e $k = k'$. Note também que, para $U(t) < k'$, x é uma função côncava de k .

Ainda supondo $m_0 \leq m^*$, vejamos qual o efeito de um aumento de reservas, mantidos B_0 e x' . Claramente m_1 cai e k' aumenta. Como o governo possui mais reservas e, conseqüentemente, é capaz de gerar maior contração monetária, devemos esperar que os agentes ao anteciparem isso, façam com que o câmbio seja mais estável e menor relativamente ao caso de reservas menores. Adicionalmente, como k' é maior e a barreira dura até que se atinja k' , temos que o tempo esperado de duração da mesma também aumenta. Vejamos, para $U(t) < k'$:

$$d[\alpha / \beta] / dR_0 = \lambda \alpha / R_0$$

A igualdade acima mostra que um aumento de reservas ou reduz e estabiliza o câmbio simultaneamente (derivadas negativas), ou o aumenta e o torna mais volátil. Em termos gráficos, ou a nova curva do câmbio em função de k se desloca para baixo da curva original e se torna menos inclinada que esta, ou se desloca para cima e se torna mais íngreme.

Como k' aumenta com R_0 , segue que ambas as derivadas acima são negativas para todo k .

PROPOSIÇÃO 4: Na regra de intervenção marginal, se $m_0 \leq m^*$, então as derivadas parciais $d[\alpha / \beta] / dR_0$ e α / R_0 são negativas.

Suponhamos agora que R_0 seja grande o suficiente para que, dados B_0 e x' , $m_0 > m^*$. Nessas circunstâncias, quando x atingir x' pela primeira vez não mais teremos um ataque especulativo com o governo perdendo todas as suas reservas; teremos apenas o governo intervindo no mercado de reservas, vendendo-as para contrair a oferta monetária num volume tal que exatamente compense o aumento de k além de k' .

Nessa nova situação, a perda de reservas do governo é gradual até que m caia ao nível m^* , quando, então, voltamos ao caso de ataque especulativo. Agora há que se distinguir entre o nível de k onde x atinge x' pela primeira vez e aquele onde passamos a ter o regime de câmbio livre. O primeiro nível denotaremos por k_0 , enquanto que para o segundo manteremos a notação k' , de maneira que a equação (18) permanece válida.

Entre k_0 e k' o governo perde reservas gradualmente até que $m = m^*$. Dessa forma:

$$k_0 = k' - (m_0 - m^*) \quad (23)$$

Substituindo (18) em (23) e usando a definição de m^* em (22):

$$k_0 = x' - m_0 - \alpha\mu + 1/\lambda \quad (24)$$

Observe que k_0 independe de R_0 para B_0 e x' fixos. Isso significa que desde que $R_0 > 1/x' [B_0[1 - \exp(-1/\lambda)]]$, qualquer que seja R_0 , o tempo esperado de se x atingir x' , i.e., o tempo esperado de k atingir k_0 , não se modifica.

Como mostraremos adiante, para $U(t) < k_0$, a curva $x = G(k)$ é tangente à x' . Como Krugman e Rothemberg (1991) chamam a atenção, a condição de "smooth-pasting" emerge numa situação onde as reservas são suficientemente grandes.

Observe que k_0 é exatamente o valor onde a derivada de $x=G(k)$ se anula, para o caso limite de ataque especulativo onde $m_0 = m^*$. Dessa forma a evolução do nível de fundamento livre ao qual x atinge x' pela primeira vez, relativamente ao volume de reservas, é o seguinte: para "pequenas" reservas um aumento das mesmas eleva esse nível até um máximo dado por k_0 ; para reservas "grandes" esse efeito desaparece e permanecemos em k_0 . A intuição desse resultado é que uma vez que a barreira seja crível, maiores reservas não conferem maior credibilidade à mesma no sentido de retardar o momento em que x atinge x' pela primeira vez.

No entanto, k' é uma função crescente em R_0 , mantidos x' e B_0 fixos. Assim, sejam as reservas "grandes" ou "pequenas", um aumento das mesmas sempre eleva o tempo esperado de se romper a barreira, mudando-se para o regime de câmbio livre.

Obtenhamos agora a função $x = G(k)$ para o caso $m_0 > m^*$. Para o caso $U(t) < k_0$, a derivação da equação é inteiramente análoga ao que foi feito antes no caso $m_0 \leq m^*$:

$$x = m_0 + k + \alpha\mu - (1/\lambda) \exp[-\lambda(k - k_0)] \quad (25)$$

Note que $dx(k_0)/dk = 0$. Observe também que enquanto $U(t) < k_0$, x ainda não atingiu x' e o governo ainda não interviu. Isso significa que o logaritmo da base monetária m continua fixo em $m = m_0$.

No entanto, enquanto $k_0 \leq U(t) < k'$, na medida em que o governo intervém vendendo suas reservas, o logaritmo da base monetária é contraída no montante $U(t) - k_0$, de maneira que

$$m(t) = m_0 - [U(t) - k_0] \quad (26)$$

Isso faz com que o fundamento regulado f não ultrapasse $f = m_0 + k_0$.

Usando a definição de k_0 em (23):

$$m(t) = k' + m^* - U(t) \quad (27)$$

Com $m(t)$ dado por (26), o governo somente pode perder reservas no volume $m(t) - m^*$. O nível do fundamento livre k_m , enquanto $x = x'$, imediatamente antes de ocorrer o ataque especulativo é dado por:

$$k_m = k' - (m - m^*) \quad (28)$$

ou dado (27):

$$k_m = U(t) \quad (29)$$

Assim, para $k_0 \leq U(t) < k'$ a equação do câmbio é obtida por argumentos idênticos àqueles usados em (25) e se expressa por:

$$x = m(t) + k + \alpha\mu - (1/\lambda) \exp[\lambda(k - k_m)]$$

Substituindo (27) e (29) na equação acima:

$$x = k' + m^* - U(t) + k + \alpha\mu - (1/\lambda) \exp[\lambda(k - U(t))]$$

Substituindo (18):

$$x = x' + 1/\lambda + k - U(t) - (1/\lambda) \exp[\lambda(k - U(t))] \quad (30)$$

Os resultados para $m_0 > m^*$ podem ser resumidos na proposição a seguir:

PROPOSIÇÃO 5: Na regra de intervenção marginal, se $m_0 > m^*$ então a equação cambial é dada por:

$$x = \begin{cases} m_0 + k + \alpha\mu - (1/\lambda) \exp[-\lambda(k - k_0)] & U(t) < k_0 \\ x' + 1/\lambda + k - U(t) - (1/\lambda) \exp[-\lambda(k - U(t))] & k_0 \leq U(t) < k' \\ m_1 + k + \alpha\mu & U(t) \geq k' \end{cases} \quad (31)$$

3- DUAS BARREIRAS SUPERIORES

Vejamos agora o caso em que o governo anuncia que, além de defender o câmbio em x' , comprometerá parte de suas reservas tentando estabilizá-lo, pelo menos temporariamente, num nível x'' menor que x' . Seja R_1 o montante de reservas que o governo dedica a este propósito, de maneira que lhe restam $R_0 - R_1$ reservas para defender o câmbio em x' . Admita também que o governo somente intervenha no mercado cambial em x'' e x' : enquanto $x < x''$ ou $x'' < x < x'$ ele se afasta do mercado.

Defina $m_1'' = \ln(B_0 - x'' R_1)$ e $m_1' = \ln[B_0 - x'' R_1 - x'(R_0 - R_1)]$. As variáveis m_1'' e m_1' são, respectivamente, os logaritmos da base monetária após o governo concluir suas intervenções em x'' e x' . Mantendo-se a notação para o caso em que temos apenas uma barreira superior x' , temos $m_1 = \ln(B_0 - x' R_0) < m_1'$.

Suponha inicialmente que temos ataque especulativo quando x atinge x'' e x' pela primeira vez. Para que isso aconteça em x' basta que a seguinte condição, análoga à (22), seja verificada:

$$m_1'' \leq m_1' + 1/\lambda \equiv m^* \quad (32)$$

Observe que em realidade (22) implica em (32) uma vez que $m_0 > m_1'' > m_1' > m_1$.

Usando as definições de m_1'' e m_1' a equação (32) pode ser reescrita de duas maneiras:

(i) $R_0 \leq R_1 + 1/x' [B_0 - x'' R_1][1 - \exp(-1/\lambda)]$, i.e., dados B_0 , x'' , x' e R_1 , R_0 tem que ser suficientemente pequena;

$$(ii) R_1 \geq R_1' \text{ onde } R_1' = \frac{B_0 - \exp(1/\lambda)[B_0 - x' R_1]}{x'' + \exp(1/\lambda)(x' - x'')} \quad (33)$$

i.e., dados B_0 , x'' , x' e R_0 , R_1 tem que ser suficientemente grande (de maneira que temos um reduzido escopo para contrair a base em x').

Quanto à condição para o ataque especulativo em x'' , esta será obtida mais tarde. Por hora basta lembrar que tal condição garante que x seja sempre uma função crescente de k .

Sejam kd'' e kd' ("d" de duas barreiras) os níveis do fundamento livre a partir dos quais ultrapassamos x'' e x' , respectivamente. A equação do câmbio é dada por:

$$x = \begin{cases} m_0 + k + \alpha\mu + A \exp[\lambda(k + m_0)] & U(t) < kd'' \\ m_1'' + k + \alpha\mu + A_1 \exp[\lambda(k + m_1'')] & kd'' \leq U(t) < kd' \\ m_1' + k + \alpha\mu & U(t) \geq kd' \end{cases} \quad (34)$$

onde A e A_1 são constantes a serem determinadas.

Como as intervenções do governo são plenamente antecipadas, não podemos observar saltos discretos do câmbio em kd'' e kd' . Este último é trivialmente determinado pela equação do câmbio livre:

$$kd' = x' - m_1' - \alpha\mu \quad (35)$$

Como $m_1 < m_1'$, $kd' < k'$, i.e., a introdução de uma intervenção intermediária reduz o tempo esperado em se atingir x' . Isso se deve ao fato do governo vender parte de suas reservas a uma cotação inferior a x' . Assim, a capacidade do governo em contrair a base monetária é menor no caso de duas barreiras.

Da inexistência de salto em kd' obtemos a expressão do câmbio para $kd'' \leq U(t) < kd'$ de maneira análoga ao realizado na seção anterior:

$$x = m_1'' + k + \alpha\mu - (m_1'' - m_1') \exp[\lambda(k - kd')] \quad (36)$$

Note a semelhança com a equação (20).

Quanto à kd'' , este é obtido implicitamente substituindo $x = x''$ e $k = kd''$ na equação acima:

$$x'' = m_1'' + kd'' + \alpha\mu - (m_1'' - m_1') \exp[\lambda(kd'' - kd')] \quad (37)$$

Para determinarmos a constante A , usamos a condição de inexistência de salto em kd'' :

$$x'' = m_1'' + kd'' + \alpha\mu - (m_1'' - m_1') \exp[\lambda(kd'' - kd')] = m_0 + kd'' + \alpha\mu + A \exp[\lambda(kd'' + m_0)]$$

PROPOSIÇÃO 6: Na regra de intervenção marginal com duas barreiras superiores, se ocorre ataque especulativo na primeira vez que x atinge x'' (veja a condição (41), a seguir) e $m'' \leq m^*$, então a equação cambial é dada por:

$$x = \begin{cases} m_0 + k + \alpha\mu - (m_0 - m_1'') \exp[\lambda(k - kd'')] - (m_1'' - m_1') \exp[\lambda(k - kd')] & U(t) < kd'' \\ m_1'' + k + \alpha\mu - (m_1'' - m_1') \exp[\lambda(k - kd')] & kd'' \leq U(t) < kd' \\ m_1' + k + \alpha\mu & U(t) \geq kd' \end{cases} \quad (38)$$

Quanto à derivada em relação a k :

$$\partial x / \partial k = \begin{cases} 1 - \lambda(m_0 - m_1'') \exp[\lambda(k - kd'')] - \lambda(m_1'' - m_1') \exp[\lambda(k - kd')] & U(t) < kd'' \\ 1 - \lambda(m_1'' - m_1') \exp[\lambda(k - kd')] & kd'' \leq U(t) < kd' \\ 1 & U(t) \geq kd' \end{cases} \quad (39)$$

Observe que para um dado k , as derivadas crescem à medida que as barreiras vão sendo superadas. Em outras palavras, o câmbio vai ficando mais instável.

Comparemos a equação do câmbio com duas barreiras em (38) com aquela quando temos apenas uma em (20). Por conveniência de notação, iremos escrever xd para o câmbio da equação (38). De (20), (21), (38) e (39) temos, para $U(t) < kd''$:

$$\partial xd / \partial k - \partial x / \partial k = \lambda(xd - x) \quad (40)$$

A introdução de duas barreiras ou estabiliza e reduz o câmbio (ambos os termos negativos), ou o torna mais volátil e maior. Em outros termos as curvas xd e x não podem se cruzar para $U(t) < kd''$.

Mostremos que a primeira alternativa é a correta. Tudo que precisamos mostrar é que kd'' é crescente em $R1$, o que será feito mais tarde no artigo. Com efeito, o regime de uma única intervenção pode ser interpretado como o caso limite do regime de dupla intervenção quando $R1$ vai a zero. Para $R1$ próximo de zero o nível k^* onde o regime de única intervenção atinge x'' praticamente coincide com kd'' . Com kd'' crescente em $R1$, temos que para $R1$ positivo faz com que $kd'' > k^*$, o que implica em $x(kd'') > x(k^*) = xd(kd'')$. Dessa forma, a curva xd está abaixo da curva x .

Assim, o câmbio é menor e mais estável no caso com duas barreiras. Isso significa que, embora os agentes saibam que a capacidade do governo em contrair a base monetária seja menor no caso com duas barreiras, o fato de que parte dessa contração seja realizada num momento mais próximo do que no caso de apenas uma barreira mais do que contrabalança o primeiro efeito.

No entanto, após x superar x'' , ou seja, para $kd'' \leq U(t) < kd'$, o câmbio fica mais instável relativamente ao caso de uma barreira. Para tal mostremos que $\partial xd / \partial k - \partial x / \partial k > 0$:

$$\partial x_d / \partial k - \partial x / \partial k = \lambda \left[(m_0 - m_1) \exp[\lambda(k - k')] - (m_1'' - m_1') \exp[\lambda(k - kd')] \right]$$

Usando (18) e (35), a expressão para $\partial x_d / \partial k - \partial x / \partial k$ é dada por:

$$C \left[(m_0 - m_1) \exp[-\lambda(m_1'' - m_1)] - (m_1'' - m_1') \exp[-\lambda(m_1'' - m_1')] \right]$$

onde $C = \lambda \exp[\lambda(k - x' + \alpha\mu + m_1'')] > 0$. Como $m_0 > m_1'' > m_1' > m_1$:

$$\partial x_d / \partial k - \partial x / \partial k > C \left[(m_1'' - m_1) \exp[-\lambda(m_1'' - m_1)] - (m_1'' - m_1') \exp[-\lambda(m_1'' - m_1')] \right]$$

Mostremos que o termo entre chaves é positivo. Considere a função $h(y) = y \exp(-\lambda y)$. Claramente, $dh/dy \geq 0$ para $y \leq 1/\lambda$. Pela hipótese (32), $m_1'' \leq m_1' + 1/\lambda$, o que demonstra o resultado.

Quanto à condição para que tenhamos ataque especulativo na primeira vez que a barreira intermediária é atingida, esta é simplesmente que a derivada do câmbio em $k = kd''$ seja não negativa:

$$1 - \lambda(m_0 - m_1'') - \lambda(m_1'' - m_1') \exp[\lambda(kd'' - kd')] \geq 0 \quad (41)$$

Enunciemos os resultados relativos à mudança de regime na proposição seguinte:

PROPOSIÇÃO 7: Considere a intervenção marginal. Seja x o logaritmo do câmbio quando temos apenas intervenção numa barreira e x_d o análogo de x quando temos a dupla intervenção. Então, valendo a relação (41) e supondo $m'' \leq m^*$ temos que, para $U(t) < kd''$, $\partial x_d / \partial k < \partial x / \partial k$ e $x_d < x$. Para $kd'' \leq U(t) < kd'$, $\partial x_d / \partial k > \partial x / \partial k$.

Observe que valendo (41), o que de fato ocorre por hipótese, o câmbio é sempre crescente e côncavo em k , para $U(t) < kd''$.

Estudemos agora o que ocorre no regime de duas barreira quando aumentamos as reservas utilizadas na defesa da barreira intermediária. Investiguemos inicialmente o efeito de uma variação de R_1 sobre kd'' e kd' . Defina $b = kd'' - kd'$. A equação (37) pode ser reescrita como:

$$x'' = m_1'' + b + kd' + \alpha\mu - (m_1'' - m_1') \exp(\lambda b)$$

Diferenciando-se a equação acima em relação a R_1 obtemos:

$$\partial x / \partial R_1 = D \left[\partial m_1' / \partial R_1 - \partial m_1'' / \partial R_1 \right]$$

onde $D = \frac{1 - \exp(\lambda b)}{1 - \lambda(m_1'' - m_1') \exp(\lambda b)} \geq 1$ já que $\lambda(m_1'' - m_1') \leq 1$ por hipótese. Assim:

$$\partial b / \partial R_1 \geq [\partial m_1' / \partial R_1 - \partial m_1'' / \partial R_1] \quad (42)$$

$$\partial k d'' / \partial R_1 = \partial b / \partial R_1 + \partial k d' / \partial R_1 = \partial b / \partial R_1 - \partial m_1' / \partial R_1 \geq -\partial m_1'' / \partial R_1 > 0$$

$k d''$ é crescente em R_1 para $m_1'' \leq m_1' + 1/\lambda$.

De (38) e (39), para $U(t) < k d''$:

$$\partial [\partial \alpha / \partial k] / \partial R_1 = \lambda \partial \alpha / \partial R_1$$

e por motivos já discutidos, ambos os termos são negativos para todo k . Assim, o câmbio fica mais estável e menor. De (39), para $k d'' \leq U(t) < k d'$ vale:

$$\partial [\partial \alpha / \partial k] / \partial R_1 = -\lambda \exp[\lambda(k - k d'')] \left[\partial m_1'' / \partial R_1 - \partial m_1' / \partial R_1 [1 - \lambda(m_1'' - m_1')] \right]$$

Por (42), o termo entre chaves acima é negativo e o câmbio passa a ser mais instável.

PROPOSIÇÃO 8: No regime de dupla intervenção, valendo a relação (41) e supondo $m'' \leq m^*$ temos para $U(t) < k d''$ que $\partial [\partial \alpha / \partial k] / \partial R_1 < 0$ e $\partial \alpha / \partial R_1 < 0$. Para $k d'' \leq U(t) < k d'$, $\partial [\partial \alpha / \partial k] / \partial R_1 > 0$.

Vejamos agora uma extensão do modelo anterior onde não temos ataque especulativo imediatamente quando a barreira superior é atingida. Quanto à barreira intermediária, mantemos o ataque na primeira vez em que é atingida. Seja k_0' o nível de fundamento livre no qual x é igual a x' pela primeira vez. Quanto a $k d'$ e $k d''$, estes retêm a definição do modelo anterior.

Por hipótese, $m_1'' > m^*$ e analogamente a (23):

$$k_0' = k d' - (m_1'' - m^*) \quad (43)$$

Usando as definições de $k d'$ em (35) e de m^* em (32):

$$k_0' = x' - \alpha \mu - m_1'' + 1/\lambda \quad (44)$$

Calculemos o efeito de um aumento de R_1 , mantido tudo o mais constante. De (44), $\partial k_0' / \partial R_1 = -\partial m_1'' / \partial R_1 > 0$. De (35), $\partial k d' / \partial R_1 = -\partial m_1' / \partial R_1 < 0$.

Assim, qualquer que seja m_1'' , o nível do fundamento livre a partir do qual passamos para o câmbio livre é estritamente decrescente em R_1 , refletindo o fato de que, quanto mais reservas são gastas na defesa da banda intermediária, menores as reservas para a defesa da barreira superior e maior a base monetária no longo prazo.

Já o nível de k aonde x atinge x' pela primeira vez é crescente em R_1 para $m_1'' > m^{*'}$ e decrescente em R_1 para $m_1'' \leq m^{*'}$ (lembre que nessa circunstância $k_0' = kd'$). Dessa forma, k_0' atinge um máximo quando $m_1'' = m^{*'}$, ou seja, quando $R_1 = R_1'$ (equação (33)). Para $R_1 \geq R_1'$, aumentos de R_1 reduzem k_0' ; para $R_1 < R_1'$ vale o contrário.

Obtenhamos a expressão de kd'' . Do desenvolvimento da seção anterior obtemos a expressão do câmbio para $kd'' \leq U(t) < k_0'$:

$$x = m_1'' + k + \alpha\mu - 1/\lambda \exp[\lambda(k - k_0')] \quad (45)$$

A expressão de kd'' é obtida implicitamente da equação acima no ponto $k = kd''$:

$$x'' = m_1'' + kd'' + \alpha\mu - 1/\lambda \exp[\lambda(kd'' - k_0')] \quad (46)$$

Analogamente ao que foi feito para obtermos (31) e (38):

$$x = \begin{cases} m_0 + k + \alpha\mu - (m_0 - m_1'') \exp[\lambda(k - kd'')] - 1/\lambda \exp[\lambda(k - kd')] & U(t) < kd'' \\ m_1'' + k + \alpha\mu - 1/\lambda \exp[\lambda(k - kd')] & kd'' \leq U(t) < k_0' \\ x' + 1/\lambda + k - U(t) - 1/\lambda \exp[\lambda(k - U(t))] & k_0' \leq U(t) < kd' \\ m_1' + k + \alpha\mu & U(t) \geq kd' \end{cases} \quad (47)$$

PROPOSIÇÃO 9: Na regra de intervenção marginal com duas barreiras superiores, valendo a relação (41) e $m'' > m^{*'}$, então a equação cambial é dada por (47).

Quanto à derivada em relação a k :

$$x = \begin{cases} 1 - \lambda(m_0 - m_1'') \exp[\lambda(k - kd'')] - \exp[\lambda(k - kd')] & U(t) < kd'' \\ 1 - \exp[\lambda(k - kd')] & kd'' \leq U(t) < k_0' \\ 1 - \exp[\lambda(k - U(t))] & k_0' \leq U(t) < kd' \\ 1 & U(t) \geq kd' \end{cases} \quad (48)$$

Vejamos o que ocorre com o câmbio quando aumentamos R_1 . Como será mostrado a seguir, valem os resultados usuais: para $U(t) < kd''$ o câmbio é mais estável e menor e para $kd'' \leq U(t) < k_0'$ este é mais instável.

Derivando (46) em relação a R_1 e lembrando que $\partial k_0' / \partial R_1 = -\partial m_1'' / \partial R_1 > 0$ obtemos $\partial kd'' / \partial R_1 = -\partial m_1'' / \partial R_1 > 0$. Note que esse resultado implica que $\partial[kd'' - k_0'] / \partial R_1 = 0$. Dessa forma, para $m_1'' > m^*$, kd'' é crescente em R_1 . Como isso também vale para $m_1'' \leq m^*$, concluímos que kd'' é sempre crescente em R_1 .

De (47) e (48) temos que, para $U(t) < kd''$:

$$\partial[\partial \alpha / \partial k] / \partial R_1 = \lambda \partial \alpha / \partial R_1$$

e por motivos já discutidos, ambos os termos são negativos para todo k . De (48), para $kd'' \leq U(t) < k_0'$ vale que $\partial[\partial \alpha / \partial k] / \partial R_1 = \lambda \exp[\lambda(k - kd'')] \partial kd'' / \partial R_1 > 0$.

PROPOSIÇÃO 10: No regime de dupla intervenção, valendo a relação (41) e supondo $m'' > m^*$ temos para $U(t) < kd''$ que $\partial[\partial \alpha / \partial k] / \partial R_1 < 0$ e $\partial \alpha / \partial R_1 < 0$. Para $kd'' \leq U(t) < k_0'$, $\partial[\partial \alpha / \partial k] / \partial R_1 > 0$.

4- O TEMPO DE DURAÇÃO ESPERADO

Como visto nas seções anteriores, o programa de defesa cambial com limite superior x' termina quando k atinge k' , definido em (20), pela primeira vez, no caso de intervenção apenas em x' ; ou quando k atinge kd' , definido em (35), também pela primeira vez.

Para obtermos o tempo esperado de duração do programa de defesa cambial, basta calcularmos o tempo esperado dos fundamentos livres atingirem k' ou kd' , dado que seu nível corrente é k^* .

Suponha $a \leq k^* \leq b$. O tempo $T(k^*, a, b)$ esperado dos fundamentos livres atingirem a ou b pela primeira vez é expresso por³:

$$T(k^*, a, b) = \begin{cases} \frac{b-a}{\mu} \left[\frac{\exp(-2a\mu/\sigma^2) - \exp(-2k^*\mu/\sigma^2)}{\exp(-2a\mu/\sigma^2) - \exp(-2b\mu/\sigma^2)} - \frac{k^*-a}{b-a} \right] & \mu \neq 0 \\ (b-k^*)(k^*-a)/\sigma^2 & \mu = 0 \end{cases} \quad (49.a)$$

que pode ser convenientemente rearranjado como:

³ Karlin e Taylor (1975), páginas 345-355, demonstram a equação (69.a), assim como outras propriedades relativas à primeira vez que um movimento browniano atinge a um determinado nível.

$$T(k^*, a, b) = \begin{cases} \frac{b-a}{\mu} \left[\frac{\exp(-2b\mu/\sigma^2) - \exp(-2k^*\mu/\sigma^2)}{\exp(-2a\mu/\sigma^2) - \exp(-2b\mu/\sigma^2)} + \frac{b-k^*}{b-a} \right] & \mu \neq 0 \\ (b-k^*)(k^*-a)/\sigma^2 & \mu = 0 \end{cases} \quad (49.b)$$

Fazendo "a" tender a menos infinito na equação acima, obtemos o tempo esperado de k atingir b pela primeira vez:

$$T(k^*, b) = \begin{cases} (b-k^*)/\mu & \mu > 0 \\ \infty & \mu \leq 0 \end{cases} \quad (50)$$

Usando (18) e (35), o tempo esperado de duração do programa de defesa cambial é obtido substituindo b por k' em (50):

PROPOSIÇÃO 11: Seja k' o nível de fundamento livre onde o programa de defesa cambial com uma só barreira superior colapsa. Seja kd' o análogo de k' para a intervenção com duas barreiras superiores. O tempo esperado de duração do programa de defesa cambial é dado por

$$T(k^*, b) = \begin{cases} (x'_1 - m_1 - k^*)/\mu - \alpha & b = k', \mu > 0 \\ (x'_1 - m_1' - k^*)/\mu - \alpha & b = kd', \mu > 0 \\ \infty & \mu \leq 0 \end{cases} \quad (51)$$

A equação acima mostra que se $\mu \leq 0$ a defesa da banda superior é esperada durar indefinidamente e teremos, dessa forma, o câmbio sempre mais estável do que no câmbio livre.

Com drift positivo, o tempo esperado de duração do programa é tanto maior quanto: (i) maior x'_1 ; (ii) menor μ ; (iii) maior o ataque inicial de reservas R_0 ; (iv) menor a quantidade de reservas gastas na defesa da barreira intermediária, dado R_0 .

Se interpretamos o "drift" μ como o financiamento via expansão monetária do deficit público, que o governo não pode reduzir, temos que quanto maior o deficit público menor o tempo esperado de duração do programa de defesa cambial.

Quanto ao tempo esperado para se superar a barreira intermediária, este é obtido substituindo-se b por kd". Este é tão maior quanto menor μ e maiores x'' , R_1 e R_0 .

COMENTÁRIOS FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A utilização apenas de reservas como instrumento de intervenção sobre os fundamentos pode parecer pouco realista. Com efeito, um país com acesso a crédito externo pode facilmente adquirir reservas no mercado internacional. Neste contexto, o estoque inicial de reservas R_0 é praticamente irrelevante. Esta observação sugere que o modelo aqui desenvolvido deve ser enquadrado numa situação de defesa unilateral da paridade superior, e não num contexto de um acordo bilateral ou multilateral de países em defesa de um conjunto de taxas de câmbio.

Entretanto, há outras formas do governo afetar os fundamentos sem utilizar reservas: basta colocar títulos públicos no mercado. Dessa forma o escopo da emissão de títulos públicos por parte do governo é fundamental na qualificação das reservas como únicos instrumentos de intervenção.

Além disso, podemos ter outros fatores determinando a duração do programa de defesa cambial. Taxas de juros elevadas podem gerar uma recessão politicamente inaceitável e o fim do programa. A manutenção do câmbio limitado superiormente por muito tempo pode causar a sobrevalorização do câmbio real e a perda da competitividade dos produtos nacionais.

O modelo aqui desenvolvido se adequa ao seguinte contexto: um governo sem crédito externo ou interno tentando conter movimentos "especulativos" no câmbio. A tentativa de antecipar a intervenção, de maneira a estabilizar o câmbio a curto prazo envolve a troca de um câmbio menor e mais estável a curto prazo por uma maior instabilidade futura. Além disso, a duração total esperada do programa de defesa cambial também é reduzida.

BIBLIOGRAFIA

Bertola, Giuseppe, 1991, "Continuous-time models of exchange rates and intervention". Working Paper in International Economics G-91-01, December, Princeton University.

Bertola, Giuseppe and Ricardo J. Caballero, 1989, "Target zones and realignments", Working Paper no. 398 (Centre for Economic Policy Research).

Buiter, Willem H. and Paolo A. Pesenti, 1990, "Rational speculative bubbles in an exchange rate target zone", Working paper no. 3467 (National Bureau of Economic Research).

Dixit, Avinash, 1991, "The Art of Smoothing Pasting".

Flood, Robert P. and Peter M. Garber, 1983, "A model of stochastic process switching", *Econometrica* 51, 537-552.

Flood, Robert P. and Peter M. Garber, 1989, "The linkage between speculative attack and target zone models of exchange rates", *The Quarterly Journal of Economics*, November, 1367-72.

Frenkel, Jacob A. and Harry G. Johnson, eds., 1978, *The economics of exchange rates* (Addison-Wesley, Reading, MA).

Froot, Kenneth A. and Maurice Obstfeld, 1991, "Exchange-rate dynamics under stochastic regime shifts - a unified approach", *Journal of International Economics* 31, 203-229.

Froot, Kenneth A. and Maurice Obstfeld, 1991, "Stochastic process switching: some simple solutions", *Econometrica* 59, 241-250.

Froot, Kenneth A. and Maurice Obstfeld, 1991, "Intrinsic bubbles: the case of stock prices", *The American Economic Review* 81, 1189-1214.

Leiderman, Leonardo and Elhanan Helpman, 1992, "Israel's exchange rate band", mimeo, Tel Aviv University.

Giovannini, Alberto, 1989, "How do fixed exchange-rate regimes work? Evidence from the gold standard, Bretton Woods and the EMS", chapter 2 in *Blueprints for Exchange Rate Management*, Academic Press.

Grilli, Vittorio U., 1986, "Buying and selling attacks on fixed exchange rate systems", *Journal of International Economics* 20, 143-156.

Klein, Michael W., 1990, "Playing with the band: dynamic effects of target zones in an open economy", *International Economic Review* 31, 757-772.

Krugman, Paul R., 1979, "A model of Balance-of-Payments Crises", *Journal of Money, Credit and Banking* 11, 311-325.

Krugman, Paul R., 1991, "Target zones and exchange rate dynamics", *Quarterly Journal of Economics* 106, 669-682.

Krugman, Paul and Julio Rotemberg, 1990, "Target zones with limited reserves", Working Paper no. 3418 (National Bureau of Economic Research).

Lindberg, Hans, Lars E. O. Svensson and Paul Söderlind, 1991, "Devaluation expectations: the Swedish Coroa 1982-1991", Seminar Paper no. 495 (Institute for International Economic Studies).

Miller, Marcus and Paul Weller, 1989, "Exchange rate bands and realignments in a stationary stochastic setting", chapter 7 in *Blueprints for Exchange Rate Management*, Academic Press.

Miller, Marcus and Paul Weller, 1990, "Currency bubbles which affect fundamentals: a qualitative treatment", *The Economic Journal Supplement* 100, 170-179.

Miller, Marcus and Paul Weller, 1991, "Exchange rate bands with price inertia", *The Economic Journal* 101, 1380-1399.

Miller, Marcus and Paul Weller, 1991, "Currency bands, target zones and price flexibility", *IMF Staff Papers* 38, 184-215.

Minford, Patrick, 1989, "Exchange-rate regimes and policy coordinations", chapter 9 in *Blueprints for Exchange Rate Management*, Academic Press.

Obstfeld, Maurice, 1984, "Balance-of-Payments crisis and devaluation", *Journal of Money, Credit and Banking* 16, 208-217.

Obstfeld, Maurice, 1986, "Rational and self-fulfilling Balance-of-Payments Crises", *The American Economic Review* 76, 72-81.

Svensson, Lars E. O., 1990, "The foreign exchange risk premium in a target zone with devaluation risk", Working paper no. 3466 (National Bureau of Economic Research).

Svensson, Lars E. O., 1991, "Target zones and interest rate variability", *Journal of International Economics* 31, 27-54.

Svensson, Lars E. O., 1991, "The term structure of interest rate differentials in a target zone: theory and Swedish data", Discussion Paper no. 495 (Centre for Economic Policy Research).

Svensson, Lars E. O., 1991, "Assessing target zone credibility: mean reversion and devaluation expectations in the EMS", Working Paper no. 3795 (National Bureau of Economic Research).

Svensson, Lars E. O., 1991, "The simplest test of target zone credibility", *IMF Staff Papers*, vol. 38, no. 3, September, 655-65

Svensson, Lars E. O. and Giuseppe Bertolla, 1991, "Stochastic devaluation risk and the empirical fit of target zone models", Working Paper no. 3576 (National Bureau of Economic Research).

Welch, John y Darryl Mcleod, 1992, "El libre comercio y el peso", *Economía Mexicana, Nueva Época*, vol. I, num. 1, Enero-Junio, 193-235.

Arbitragem de Carteira de Ações contra Futuro de Índice

Arbitragem de Carteira de Ações contra Futuro de Índice

Introdução

O objetivo deste artigo é investigar a operação de arbitragem de uma carteira de ações contra o futuro de índice de bolsa de valores.

Na primeira seção discutimos a regra de ajustes dos contratos futuros de maneira que, quaisquer que sejam a estrutura a termo de juros e a trajetória do futuro de índice, um determinado valor financeiro seja obtido na data de liquidação do contrato futuro, após seu vencimento. A estrutura a termo de juros é suposta conhecida e permitimos uma liquidação dos contratos futuros em k dias úteis, k genérico.

Na segunda seção discutimos a arbitragem de futuro de índice contra uma carteira de ações. A carteira é suposta render β vezes o retorno do índice à vista, β genérico. Além disso, permitimos um período também genérico de liquidação das transações em bolsas de valores de s dias úteis.

Na subseção 2.1 discutimos as condições de arbitragem sob as hipóteses de ausência de custos de transação, e crédito e vendas a descoberto ilimitados. Nesta seção utilizamos o conceito de imunização de um portfólio relativamente ao índice à vista para construirmos o portfólio de arbitragem. Com base neste derivamos o preço "justo" - aquele que não permite ganhos de arbitragem - do contrato futuro de índice. Basicamente o resultado decorre da aplicação do modelo de "custo de carregamento" ao contexto do futuro de índice de bolsa.

Na subseção 2.2 mostramos que o princípio de imunização de portfólio utilizado na seção 2.1 produz o mesmo resultado que o princípio conhecido como hedge estatístico, que consiste em minimizar a variância de um portfólio. Embora, a rigor, a arbitragem da seção 2.1 só seja válida para indivíduos neutros ao risco ou numa economia onde o único componente aleatório do retorno da carteira seja o retorno do índice, o princípio de imunização de portfólio é muito mais intuitivo do que aquele de minimização de variância.

Na subseção 2.3 discutimos as condições de otimalidade para se encerrar prematuramente o portfólio de arbitragem. A idéia intuitiva de que devemos encerrar o portfólio assim que o futuro de índice atinge seu valor "justo" na data é corroborada, sob certas condições.

Na seção 2.4 fazemos uma breve abordagem dos aspectos operacionais da arbitragem.

Por fim concluímos o artigo fazendo um resumo dos principais resultados.

1) Regra de ajustes de contratos futuros de índice

Nesta seção veremos como resolver o problema oriundo dos ajustes diários dos contratos futuros, para a montagem de portfólios de arbitragem. Cada ajuste diário é determinado pela diferença entre os preços de ajuste do dia e do dia anterior, proporcionalmente ao número de contratos possuídos.

A demonstração da regra de ajustes de contratos futuros de índice realizada nesta seção baseia-se em Cox, J.; Ingersoll & Ross, S (1981). Para uma aplicação da regra num contexto de taxas de juros constantes, veja Varga, Gyorgy (1993).

Suponhamos que as taxas de juros sejam não estocásticas. Seja $r(t)$ a taxa de juros diária entre a data t e a data $t+1$. Todas as datas são tratadas como dias úteis. Defina $J(x,y)$ como 1 mais a taxa de juros acumulada entre as datas x e y , para $y \geq x$, i.e.,

$$J(x,y) \equiv \begin{cases} (1+r(x))(1+r(x+1)) \cdots (1+r(y-1)) & y > x \\ 1 & y = x \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{ou}$$
$$J(x,y) \equiv \begin{cases} \prod_{i=x}^{y-1} (1+r(i)) & y > x \\ 1 & y = x \end{cases} \quad (1')$$

Seja $F(t)$ o preço de um contrato futuro na data t de um ativo $I(t)$, cujo vencimento se dá na data T . Suponha que todas as transações de uma data ocorram ao preço de ajuste da data. Seja h a quantidade de cruzeiros (ou quantidade de unidades monetárias) por contrato futuro.

Seja k o prazo de liquidação do contrato futuro, ou seja, um investidor que compre z contratos na data t , receberá em $t+k+1$ a quantia de $zh[F(t+1) - F(t)]$, relativa ao ajuste diário de $t+1$. Denotemos por $n(t+1,k)$ o total de contratos futuros comprados na data t , cuja liquidação se dá em k dias.

Nosso problema é determinar uma sequência de contratos $n(t+1,k)$, $t=0,1,\dots,T-1$ tal que na data $T+k$ o montante financeiro resultante da operação com os contratos futuros seja igual a $nh[F(T) - F(0)]$, n arbitrário. A razão disso é que queremos que tal montante independa da trajetória seguida pelos preços dos contratos futuros entre as datas 0 e T , dependendo apenas de $F(0)$ e $F(T)$.

PROPOSIÇÃO 1: A sequência de contratos $n(t+1, k) = \frac{n}{J(t+k+1, T+k)}$, $t=0, 1, \dots, T-1$ produz em $T+k$ o montante financeiro $nh[F(T) - F(0)]$.

DEM: Seja $G(T+k)$ o montante financeiro na data $T+k$, oriundo da sequência de contratos futuros. A compra de $n(t+1, k)$ contratos na data t produz $n(t+1, k)h[F(t+1) - F(t)]$ na data $t+k+1$, que investidos às taxas de juros de mercado rendem em $T+k$ a quantia de $n(t+1, k)h[F(t+1) - F(t)]J(t+k+1, T+k)$. O total financeiro em $T+k$ é dado por:

$$G(T+k) = \sum_{t=0}^{T-1} n(t+1, k)h[F(t+1) - F(t)]J(t+k+1, T+k)$$

Observe que $\sum_{t=0}^{T-1} nh[F(t+1) - F(t)] = nh[F(T) - F(0)]$. Assim, tomando-se $n(t+1, k)J(t+k+1, T+k) = n$, $t=0, 1, \dots, T-1$ obtemos o resultado desejado. CQD

A demonstração da proposição 1 é uma adaptação da demonstração da proposição 2 em Cox, J.; Ingersoll & Ross, S (1981), que demonstra que, independentemente dos juros serem estocásticos ou não, o preço futuro $F(t)$ é o valor de um contrato que pagará em T o valor $I(T)J(t+k, T+k)$ (na realidade, ou autores fazem $k=0$).

Note que o fator de desconto é $J(t+k+1, T+k)$ e não $J(t+k, T+k)$. Isso decorre do fato de que é preciso esperar até o ajuste do dia seguinte para se saber qual o ajuste diário. O efeito prático disto é reduzir em um dia útil o período até o vencimento do futuro de índice, independentemente do prazo de liquidação do mesmo.

Intuitivamente a proposição 1 nos diz que o número de contratos em cada dia, é o número de contratos desejado no vencimento do contrato futuro, descontado por uma taxa de juros apropriada. Note que se $k=0$, ou seja, liquidação financeira se dá sem defasagem - o caso da maioria dos livros texto, então $n(t+1, 0)$ é o valor presente de n , da data T , na data $t+1$. A introdução de um período de liquidação de $k>0$ dias tem o efeito de deslocar por k dias a estrutura dos juros.

O efeito pode ser significativo. Para uma estrutura a termo de juros crescente no tempo, o número de contratos (o valor absoluto de contratos, já que n pode ser negativo quando temos que vender contratos) é menor que aquele da regra dos livros textos ($k=0$). Analogamente, para uma estrutura a termo decrescente, o número de contratos é maior que aquele quando $k=0$. O efeito prático de se ignorar a defasagem de liquidação é tornar o montante financeiro oriundo dos contratos futuros dependente da trajetória $F(t)$, $t=0, 1, \dots, T$ enquanto que pela regra da proposição 1, tal montante é função apenas de $F(0)$ e $F(T)$.

Mais genericamente, se fizermos o ajuste dos contratos futuros por uma estrutura a termo $J^*(t+k+1, T+k)$ (no caso de se ignorar a defasagem, $J^*(t+k+1, T+k) = J(t+1, T)$, por exemplo), obteremos

$$G^*(T+k) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{n}{J^*(t+k+1, T+k)} h[F(t+1) - F(t)] J(t+k+1, T+k) =$$

$$nh[F(T) - F(0)] + \sum_{t=0}^{T-1} nh[F(t+1) - F(t)] \left[\frac{J(t+k+1, T+k)}{J^*(t+k+1, T+k)} - 1 \right]$$

Note que $G^*(T+k)$ depende da trajetória dos $F(t)$ e da relação entre as estrutura a termo efetiva e suposta. Além disso, não podemos determinar *a priori* quão grande é a distorção relativamente a $nh[F(T) - F(0)]$.

Particularmente no caso de ignorância da defasagem temos uma relação simples entre os contratos dados pela sequência da proposição 1, e aqueles oriundos da defasagem, denotados por $n(t+1, k=0)$:

$$n(t+1, k=0) = n(t+1, k) \frac{J(T, T+k)}{J(t+1, t+k+1)}$$

Observe que $n(t+1, k=0) = n(t+1, k)$, $t=0, 1, \dots, T-1$, a implica em $r(t)$ constante para $t=1, 2, \dots, T+k-1$. Também $r(t) = r$ para $t=1, 2, \dots, T+k-1$ implica na irrelevância da defasagem k . Com efeito, nesse caso, para cada t

$$J(t+k+1, T+k) = (1+r)^{T-t-1} \quad \forall k$$

Nesse caso a sequência de contratos $n(t+1) = \frac{n}{(1+r)^{T-t-1}} \quad t=0, 1, \dots, T-1$ produz em $T+k$ o resultado financeiro $nh[F(T) - F(0)]$. Note que temos $T-t-1$ dias úteis e não $T-t$.

Assim, a defasagem de liquidação k é irrelevante se e somente se a taxa de juros diária entre $t=1, 2, \dots, T+k-1$ é constante.

A estratégia da proposição 1 implica numa relação clara entre o número de contratos entre duas datas quaisquer:

$$\frac{n(t+p+1, k)}{n(t+1, k)} = \frac{\frac{n}{J(t+p+k+1, T+k)}}{\frac{n}{J(t+k+1, T+k)}} = J(t+k+1, t+p+k+1) \quad 0 \leq p \leq T-t-1$$

Lembrando que $J(t+k+1, t+k+2) = (1+r(t+k+1))$, temos que a proposição 1 pode ser alternativamente enunciada como:

PROPOSIÇÃO 1': A sequência de contratos

$$n(t+1, k) = \begin{cases} \frac{n}{J(k+1, T+k)} & t = 0 \\ n(t, k)(1+r(t+k)) & 1 \leq t \leq T-1 \end{cases}$$

produz em $T+k$ o fluxo financeiro $nh[F(T) - F(0)]$.

Pela proposição 1', uma vez obtido o número de contratos inicial, basta aumentá-lo de um overnight (diferido em k dias úteis) para se obter o número de contratos do dia seguinte e assim sucessivamente.

Vejamos um exemplo com o futuro de índice IBOVESPA, negociado na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BMF).

Tamanho do contrato ("h"): CR\$ 50,00 por ponto de índice;

Período para liquidação ("k"): 1 dia útil;

Data inicial: 14/01/94;

Vencimento: 09/02/94;

Estrutura a termo: Taxa de 1,7% ao dia para todos os dias de janeiro e taxa de 1,93% ao dia para todos os dias de fevereiro;

Dias úteis no período (calendário): 18, sendo 12 em janeiro e 6 em fevereiro;

Contratos desejados no vencimento ("n"): 10

Conforme notado anteriormente, o número de dias úteis correto é de 17, sendo 11 em janeiro e 6 em fevereiro.

O efeito prático do deslocamento da curva de juros de um dia, é fazer com que a operação tenha, efetivamente, 10 dias úteis em janeiro e 7 dias úteis em fevereiro.

Na tabela 1 e 2 abaixo apresentamos quatro cenários. Em cada um deles mostramos a sequência de contratos futuros, os ajustes diários, e o ganho acumulado da operação.

No primeiro cenário seguimos a regra da proposição 1. No segundo, ignoramos a defasagem de um dia. No terceiro, fazemos o ajuste pela taxa de juros média diária do

período, considerando a defasagem. Esta taxa é dada por 1,7946%¹. No quarto, não fazemos qualquer ajuste de contratos, mantendo 10 contratos desde o início da operação.

A sequência de cotações do contrato futuro é arbitrária e iremos admitir que podemos comprar um número fracionário de contratos (observe que isto é apenas uma questão de escala). No exemplo, $F(0)=68.000$ e $F(T)=66.400$. Dessa forma o valor financeiro desejado no vencimento é dado por $50 \cdot 10 \cdot (-1.600) = -800.000$.

TABELA 1

Data	Juros	Fut.	Cenário 1			Cenário 2: k=0		
			{n}	Ajuste	G. Acum.	{n}	Ajuste	G. Acum.
14/01		68,000	7.39			7.41		
17/01	1.0170	68,200	7.52			7.53		
18/01	1.0170	67,900	7.64	73,905	73,905	7.66	74,073	74,073
19/01	1.0170	67,800	7.77	(112,743)	(37,581)	7.79	(112,998)	(37,666)
20/01	1.0170	68,000	7.91	(38,220)	(76,440)	7.92	(38,306)	(76,612)
21/01	1.0170	67,400	8.04	77,739	0	8.06	77,915	0
24/01	1.0170	69,000	8.18	(237,182)	(237,182)	8.20	(237,718)	(237,718)
25/01	1.0170	69,000	8.32	643,237	402,023	8.33	644,692	402,932
26/01	1.0170	68,000	8.46	0	408,858	8.48	0	409,782
27/01	1.0170	68,400	8.60	(415,808)	0	8.62	(416,749)	0
28/01	1.0170	67,000	8.75	169,151	169,151	8.77	169,533	169,533
31/01	1.0170	66,400	8.92	(602,092)	(430,066)	8.92	(603,454)	(431,038)
1/02	1.0193	66,300	9.09	(262,426)	(699,803)	9.09	(263,020)	(701,386)
2/02	1.0193	66,100	9.26	(44,582)	(757,891)	9.26	(44,582)	(759,504)
3/02	1.0193	66,500	9.44	(90,885)	(863,403)	9.44	(90,885)	(865,047)
4/02	1.0193	66,900	9.62	185,277	(694,789)	9.62	185,277	(696,465)
7/02	1.0193	67,000	9.81	188,853	(519,346)	9.81	188,853	(521,054)
8/02	1.0193	66,500	10.00	48,124	(481,245)	10.00	48,124	(482,986)
9/02	1.0193	66,400		(245,266)	(735,799)		(245,266)	(737,574)
10/02				(50,000)	(800,000)		(50,000)	(801,809)

¹ $(1,017)^{10}(1,0193)^7 = (1,017946)^{17}$

TABELA 2

Data	Juros	Fut.	Cenário 3: tx. média			Cen. 4: Nenhum Ajuste		
			{n}	Ajuste	G. Acum.	{n}	Ajuste	G. Acum.
14/01		68,000	7.39			10.00		
17/01	1.0170	68,200	7.52			10.00		
18/01	1.0170	67,900	7.66	73,905	73,905	10.00	100,000	100,000
19/01	1.0170	67,800	7.80	(112,848)	(37,686)	10.00	(150,000)	(48,300)
20/01	1.0170	68,000	7.94	(38,291)	(76,617)	10.00	(50,000)	(99,121)
21/01	1.0170	67,400	8.08	77,956	36	10.00	100,000	(806)
24/01	1.0170	69,000	8.22	(238,066)	(238,029)	10.00	(300,000)	(300,820)
25/01	1.0170	69,000	8.37	646,236	404,160	10.00	800,000	494,066
26/01	1.0170	68,000	8.52	0	411,031	10.00	0	502,465
27/01	1.0170	68,400	8.67	(418,524)	(506)	10.00	(500,000)	11,007
28/01	1.0170	67,000	8.83	170,414	169,900	10.00	200,000	211,194
31/01	1.0170	66,400	8.99	(607,154)	(434,366)	10.00	(700,000)	(485,215)
1/02	1.0193	66,300	9.15	(264,879)	(706,629)	10.00	(300,000)	(793,464)
2/02	1.0193	66,100	9.31	(44,939)	(765,205)	10.00	(50,000)	(858,778)
3/02	1.0193	66,500	9.48	(91,490)	(871,464)	10.00	(100,000)	(975,352)
4/02	1.0193	66,900	9.65	186,265	(702,019)	10.00	200,000	(794,177)
7/02	1.0193	67,000	9.82	189,607	(525,960)	10.00	200,000	(609,504)
8/02	1.0193	66,500	10.00	48,253	(487,859)	10.00	50,000	(571,268)
9/02	1.0193	66,400		(245,592)	(742,867)		(250,000)	(832,293)
10/02				(50,000)	(807,204)		(50,000)	(898,356)

Como se observa, apenas no primeiro cenário obtêm-se o resultado desejado. Observe também que os cenários 2 e 3 produzem ajustes próximos ao valor correto, mas a estratégia de não se fazer nenhum ajuste pode produzir resultados muito distintos do desejado. Por fim, observe do cenário 1, que seguindo a regra da proposição 1, toda a vez o índice futuro retorna ao seu valor inicial, o ganho acumulado se anula. Demonstraremos esse resultado na proposição 5.

2) Arbitragem de carteira de ações contra futuro de índice

2.1) Condições de arbitragem

Sejam $I(t)$, $F(t)$ e $C(t)$ o índice de bolsa à vista, o futuro de índice e o valor de uma carteira de ações na data t , respectivamente. Suponha que desejemos criar um portfolio composto por uma carteira de ações e por contratos futuros de índice, de maneira que o retorno deste portfolio entre as datas 0 e T independa da trajetória do índice à vista $I(t)$, $t = 0, 1, \dots, T$. Queremos apenas que haja dependência a $I(0)$, que é conhecido nada data 0..

Postulemos um comportamento do retorno da carteira relativamente ao retorno do índice. Sejam $RC(x,y)$ e $RI(x,y)$ as taxas de retorno da carteira e do índice à vista entra as

data x e y . Por hora, vamos supor uma relação determinística entre $RC(x,y)$ e $RI(x,y)$. Na seção seguinte, quando tratarmos do hedge estatístico, mostraremos que a relação aqui usada pode ser interpretada como aquela esperada entre as variáveis, bem como os resultados obtidos nesta seção.

Suponha que, para o período de interesse, a taxa de retorno da carteira seja β vezes a taxa de retorno do índice, mais um excesso α , ou seja²,

$$RC(0, T) = \alpha + \beta RI(0, T) \quad (2)$$

Suponha que a liquidação no mercado futuro ocorra em k dias úteis, e a liquidação no mercado de ações em s dias úteis. Seja $W(x,y)$ a função que leva um valor na data x à data y :

$$W(x,y) = \begin{cases} J(x,y) & x \leq y \\ J(x,y)^{-1} & x > y \end{cases} \quad (3)$$

Seja $P(T+s)$ o valor do portfolio na data $T+s$, quando temos n contratos futuros na data T :

$$P(T+s) = C(T) + nh[F(T) - F(0)]W(T+k, T+s) \quad (4)$$

Na data T , $F(T) = I(T) = I(0)(1 + RI(0,T))$ e $C(T) = C(0)(1 + RC(0,T))$. Substituindo em (4):

$$P(T+s) = C(0)(1 + RC(0,T)) + nh[I(0)(1 + RI(0,T)) - F(0)]W(T+k, T+s) \quad (5)$$

Ou usando a relação (2):

$$P(T+s) = C(0)(1 + \alpha + \beta RI(0,T)) + nh[I(0)(1 + RI(0,T)) - F(0)]W(T+k, T+s) \quad (6)$$

O princípio de imunização de portfolio em relação a uma variável, consiste em tornar o portfolio insensível a mudanças na referida variável. No caso queremos tornar o portfolio imune a variações em $RI(0,T)$.

Derivando a expressão (6) em relação a $RI(0,T)$, a expressão de n que anula a derivada é dada por

² Na seção seguinte iremos trabalhar com a relação

$$RC(0, T) = \alpha + \beta RI(0, T) + \varepsilon$$

que nada mais é do que relação (2) acrescida de um termo estocástico de média nula.

$$n = - \frac{\beta C(0)}{hI(0)W(T+k, T+s)} \quad (7)$$

Vejamos a interpretação de (7). O sinal negativo significa que a posição no mercado futuro de índice tem que ser oposta àquela no mercado à vista. Caso contrário, teríamos uma dupla exposição ao mercado à vista.

Os termos h e $W(T+k, T+s)$ são técnicos em essência: o primeiro corrige o tamanho do contrato, sendo meramente um fator de escala; o segundo "acerta" as datas de liquidação do mercado futuro e à vista.

O termo $\frac{\beta C(0)}{I(0)}$ possui uma interpretação bastante interessante e intuitiva: é a quantidade de unidades de índice correspondente à carteira à vista.

Substituindo (7) em (6) obtemos $P(T+s)^*$ dado por:

$$P(T+s)^* = C(0) \left(1 + \alpha + \beta \left(\frac{F(0)}{I(0)} - 1 \right) \right) \quad (8)$$

que claramente independe de $I(T)$ e de $C(T)$.

Note que tudo que foi dito até o momento pressupõe as seguintes hipóteses, que chamaremos de hipóteses básicas:

HIPÓTESES BÁSICAS

- ausência de custos de transação;
- juros conhecidos e não estocásticos;
- estabilidade da relação (2).

Podemos enunciar a proposição 2:

PROPOSIÇÃO 2 (Composição do portfolio de arbitragem): Valendo as hipóteses básicas, o portfolio composto pela carteira $C(0)$ e pela sequência de contratos futuros

$$n(t+1, k) = - \frac{\beta C(0)}{hI(0)J(t+k+1, T+s)}, \quad t=0, 1, \dots, T-1$$

$$\text{vale em } T+s \quad P(T+s)^* = C(0) \left(1 + \alpha + \beta \left(\frac{F(0)}{I(0)} - 1 \right) \right).$$

DEM: Substitua n dado por (7) na proposição 1, e observe que $W(T+k, T+s)J(t+k+1, T+k) = J(t+k+1, T+s)$. CQD

Na prática, dificilmente supomos $\alpha \neq 0$ e, dessa forma, iremos ignorar esse termo daqui em diante para não carregar demais a notação. A hipótese (2) será reduzida simplesmente a:

$$RC(0, T) = \beta RJ(0, T) \quad (2')$$

A relação (8) passa a ser dada por:

$$P(T+s)^* = C(0) \left(1 + \beta \left(\frac{F(0)}{I(0)} - 1 \right) \right) \quad (8')$$

Em que situação vale a pena construir o portfolio da proposição 2? Quando o valor de tal portfolio for superior ao seu custo de carregamento. Em termos formais, montamos o portfolio quando:

$$P(T+s)^* > J(s, T+s)C(0) \quad (9)$$

O ganho $G(\beta, 0, T+s)$ da operação iniciada na data 0, na data $T+s$ é dado por:

$$G(\beta, 0, T+s) = \frac{\beta C(0)}{I(0)} [F(0) - F(\beta, 0)] \quad (10)$$

$$\text{onde } F(\beta, \tau) = I(\tau) \left(1 + \frac{J(s+\tau, T+s) - 1}{\beta} \right) \quad (11).$$

$F(\beta, \tau)$ pode ser interpretado como o índice "justo" na data τ , isto é, se $F(\tau)$ difere de $F(\beta, \tau)$, então há possibilidades de arbitragem, que consiste em comprar ou vender a carteira de ações e adquirir a sequência de contratos futuros descrita na proposição 2. Enunciemos a proposição 3:

PROPOSIÇÃO 3 (Preço futuro na ausência de possibilidades de arbitragem): Valendo as hipóteses básicas e o acesso ilimitado ao crédito e ao mecanismo de venda a descoberto, então $F(\tau) = F(\beta, \tau)$, $0 \leq \tau \leq T$.

DEM: De (10), se $F(0) > F(\beta, 0)$, a compra da carteira conjuntamente à venda de contratos futuros na sequência da proposição 2 não apresenta nenhum custo inicial para

um ganho certo na data $T+s$. Isso porque a compra da carteira pode ser financiada. Com crédito infinito, o investidor obteria um lucro infinito o que é incompatível com a idéia de equilíbrio.

Se $F(0) < F(\beta, 0)$, o investidor faz o reverso, vendendo a carteira a descoberto e aplicando os fundos obtidos até a data $T+s$. A possibilidade de venda infinita a descoberto produz lucros infinitos.

A única configuração de equilíbrio é aquela onde $F(0) = F(\beta, 0)$. Para estender o resultado a uma data τ qualquer, basta iniciar a operação de compra ou venda da carteira e aquisição da sequência de contratos futuros a partir da data τ e notar que analogamente a (10) temos:

$$G(\beta, \tau, T+s) = \frac{\beta C(\tau)}{I(\tau)} [F(\tau) - F(\beta, \tau)] \quad (12). \text{ CQD}$$

As hipóteses de venda a descoberta e acesso a crédito infinitos são trivialmente violadas na prática. Entretanto o resultado é extremamente útil: com $F(\tau) \neq F(\beta, \tau)$, há ganhos de arbitragem a serem explorados que, embora não sejam infinitos, são muito bem-vindos.

Vejamos um exemplo de ganho de arbitragem quando $F(0) < F(\beta, 0)$. A trajetória dos preços futuros, as taxas de juros e os prazos são os mesmos das tabelas 1 e 2. Suponha $\beta = 1.03$, ou seja, a carteira tende a andar 3% mais rapidamente que o índice à vista.

A liquidação das operações de bolsa no Brasil são feitas em 2 dias úteis. Assim, o período da transação possui 18 dias úteis, sendo 10 em janeiro e 8 em fevereiro. A taxa de juros do período é dada por:

$$(1.017)^{10} (1.0193)^8 - 1 = 37,9195\%$$

Suponha que $I(0) = 51,000$. Isto implica que o índice justo seja dado por:

$$51.000 \left(1 + \frac{0,379195}{1,03} \right) = 69.775,68$$

Vendendo o equivalente a CR\$ 102.000.000,00 na carteira, o ganho esperado da arbitragem em 11/02/94 é de (usando (10)):

$$-\frac{1,03 * 102.000.000}{51.000} (68.000 - 69.775,68) = 3.657.905,84$$

Para tal é necessário seguir a proposição 2, com n dado por (7). No caso $W(10/02/94, 11/02/94) = 1.0193$. Dessa forma n é igual a

$$n = -\frac{1.03 * -102.000.000}{50 * 51.000 * 1.0193} = 40,4199$$

Como $I(T)=F(T) = 66.400$, temos que o índice à vista rendeu 30,1961% no período e como $\beta = 1,03$ a carteira rendeu 31,1020% no período.

A tabela 3 abaixo mostra a evolução do ganho no mercado futuro até 10/02/94. A tabela 4 resume o resultado financeiro da operação que é composto de três partes: a) ganho no mercado futuro em 11/02/94, que é o ganho de 10/02/94 corrigido por 1,93%; b) ganho decorrente da aplicação dos CR\$ 102.000.000,00 no mercado de juros; e c) ganho decorrente da necessidade de recomprar a carteira a preços de mercado.

TABELA 3

Data	Juros	Fut.	{n}	Ajuste	G. Acum.
14/01		68,000	29.8725		
17/01	1.0170	68,200	30.3803		
18/01	1.0170	67,900	30.8968	298,725	298,725
19/01	1.0170	67,800	31.4220	(455,705)	(151,902)
20/01	1.0170	68,000	31.9562	(154,484)	(308,968)
21/01	1.0170	67,400	32.4995	314,220	0
24/01	1.0170	69,000	33.0520	(958,686)	(958,686)
25/01	1.0170	69,000	33.6138	2,599,957	1,624,973
26/01	1.0170	68,000	34.1853	0	1,652,598
27/01	1.0170	68,400	34.7664	(1,680,692)	0
28/01	1.0170	67,000	35.3575	683,706	683,706
31/01	1.0170	66,400	36.0399	(2,433,650)	(1,738,321)
1/02	1.0193	66,300	36.7354	(1,060,724)	(2,828,597)
2/02	1.0193	66,100	37.4444	(180,199)	(3,063,388)
3/02	1.0193	66,500	38.1671	(367,354)	(3,489,865)
4/02	1.0193	66,900	38.9037	748,888	(2,808,331)
7/02	1.0193	67,000	39.6546	763,342	(2,099,190)
8/02	1.0193	66,500	40.4199	194,519	(1,945,186)
9/02	1.0193	66,400		(991,364)	(2,974,092)
10/02				(202,099)	(3,233,592)

TABELA 4

Resultados em 11/02/94:		
Futuros		
	10/02/94	(3,233,591.68)
a)	11/02/94	(3,296,000.00)
Carteira		
b) Juros		140,677,905.84
c) Recompra		(133,724,000.00)
Total (a+b+c)		3,657,905.84

2.2) Hedge estatístico

Na seção anterior supomos válida a relação 2, que definia o retorno do índice à vista como a única fonte de variação para o retorno da carteira.

Suponhamos agora uma relação um pouco mais complexa que incorpora a possibilidade de outros fatores afetarem o retorno da carteira:

$$RC(0, T) = \alpha + \beta RI(0, T) + \varepsilon \quad (13)$$

Seja $E[X]$ o valor esperado da variável aleatória X . Vamos supor que $E[\varepsilon]$ e $E[\varepsilon RI(0, T)]$ sejam ambos nulos, o que implica em ε e $RI(0, T)$ não correlacionados no período.

No que se segue, quando não houver risco de confusão, abreviaremos a notação não escrevendo o período ao qual as variáveis se referem.

Observe que das hipóteses estatísticas acima, a relação (2) vale em termos de valor esperado

$$E[RC] = \alpha + \beta E[RI] \quad (14)$$

e que

$$\beta = \frac{\text{cov}(RC, RI)}{\text{var}(RI)} \quad (15)$$

e

$$\text{var}(RC) = \beta^2 \text{var}(RI) + \text{var}(\varepsilon) \quad (16)$$

O valor do portfolio composto pela carteira e n contratos futuros na data T+s é dado por (5) e será repetido aqui por conveniência:

$$P(T+s) = C(0)(1+RC) + nh[I(0)(1+RI) - F(0)]W \quad (5)$$

O valor esperado e a variância do portfolio em T+s são dados respectivamente por:

$$E[P(T+s)] = C(0)(1+E[RC]) + nh[I(0)(1+E[RI]) - F(0)]W \quad (17)$$

$$\text{var}(P(T+s)) = C(0)^2 \text{var}(RC) + (nhI(0)W)^2 \text{var}(RI) + 2 \text{cov}(RC, RI)C(0)nhWI(0) \quad (18)$$

O princípio do hedge estatístico (ver Duffie(1989), por exemplo) é minimizar a variância do portfolio através da escolha apropriada do número de contratos futuros. Minimizando a expressão acima em n, obtemos:

$$n = -\frac{C(0)}{hI(0)W(T+k, T+s)} \frac{\text{cov}(RC, RI)}{\text{var}(RI)} \quad (19)$$

Ou usando (15):

$$n = -\frac{\beta C(0)}{hI(0)W(T+k, T+s)} \quad (20)$$

que é idêntica à expressão (7).

Substituindo n dado por (20) em (17) e usando a relação (14), temos que o valor esperado do portfolio em T+s coincide com $P(T+s)^*$ dado por (8). Assim, em termos de valor esperado, os procedimentos de imunização do portfolio relativamente ao índice à vista usado na seção anterior e o de minimização da variância do portfolio são equivalentes.

Quanto à variância do portfolio, substituindo n dado por (20) em (18), temos:

$$\text{var}(P(T+s))^* = C(0)^2 \text{var}(RC) - \beta^2 C(0)^2 \text{var}(RI) \quad (21)$$

Usando a relação (16), (21) reduz-se a:

$$\text{var}(P(T+s))^* = C(0)^2 \text{var}(\varepsilon) \quad (22)$$

Observe que a variância do portfolio de arbitragem não é nula, a menos que $\text{var}(\varepsilon)=0$ que é exatamente o caso da seção 2.1. Com $\text{var}(\varepsilon)\neq 0$, o portfolio de arbitragem não pode ser assim chamado, uma vez que ainda existe risco.

Assim, no contexto mais geral da relação (13), as proposições 3 em diante (quando pertinente, é claro; algumas proposições a serem enunciadas posteriormente) somente são válidas se: i) $\text{var}(\varepsilon)=0$, ou seja a relação entre RC e RI é determinística; ou ii) o indivíduo é neutro ao risco, quando a variância residual (22) passa a ser irrelevante. No que se segue, suporemos que alguma dessas condições seja válida.

2.3) Liquidação antecipada

Havemos de levantar uma questão importante: em que condições devemos encerrar prematuramente o portfolio da arbitragem? A manutenção do portfolio de arbitragem, de acordo com a regra de ajustes dos contratos, conduz a um ganho de (9) na data $T+s$. O valor desse retorno numa data $\tau+s \leq T+s$ é dado por:

$$\frac{G(\beta, 0, T+s)}{J(\tau+s, T+s)} = \frac{\beta C(0) [F(0) - F(\beta, 0)]}{I(0) J(\tau+s, T+s)} \quad (23)$$

Investiguemos agora o retorno do encerramento prematuro do portfolio da arbitragem na data τ . Começemos pelo retorno da posição de contratos futuros.

PROPOSIÇÃO 5 (Ganho na posição de futuros): Seguindo a sequência de contratos da proposição 1, o ganho acumulado da posição de futuros, na data $\tau+s$, iniciada na data 0 e encerrada na data τ , $G(0, \tau+s)$, é dado por:

$$G(0, \tau+s) = \frac{nh[F(\tau) - F(0)]}{J(\tau+s, T+k)} \quad (24)$$

DEM: Por definição:

$$G(0, \tau+s) = \sum_{t=0}^{\tau-1} n(t+1, k) h[F(t+1) - F(t)] J(t+k+1, \tau+s)$$

Multiplicando ambos os termos por $J(\tau+s, T+k)$ obtemos:

$$J(\tau+s, T+k) G(0, \tau+s) = \sum_{t=0}^{\tau-1} n(t+1, k) h[F(t+1) - F(t)] J(t+k+1, T+k)$$

Usando a definição de $n(t+1, k)$ como na proposição 1 temos que:

$$J(\tau+s, T+k) G(0, \tau+s) = \sum_{t=0}^{\tau-1} nh[F(t+1) - F(t)] = nh[F(\tau) - F(0)]$$

o que demonstra a proposição. CQD

Note da proposição 5 que toda vez que $F(\tau)=F(0)$, o ganho acumulado no mercado futuro se anula, como observado na tabela 1.

No caso da arbitragem de índice, com n dado por (7), temos que:

$$G(0, \tau + s) = - \frac{\beta C(0)}{hI(0)W(T+k, T+s)} \frac{h[F(\tau) - F(0)]}{J(\tau + s, T+k)}$$

ou

$$G(0, \tau + s) = - \frac{\beta C(0)}{I(0)} \frac{[F(\tau) - F(0)]}{J(\tau + s, T+s)} \quad (25)$$

O ganho da carteira em $\tau+s$ é dado por

$$C(\tau) - C(0)J(s, \tau + s) \quad (26)$$

O ganho do portfolio, iniciado em 0, em $\tau+s$ é dado por (26) + (25), ou seja:

$$G(\beta, 0, \tau + s) = C(\tau) - C(0)J(s, \tau + s) - \frac{\beta C(0)}{I(0)} \frac{[F(\tau) - F(0)]}{J(\tau + s, T+s)} \quad (27)$$

Observe que $G(\beta, 0, \tau + s)$ é função de $C(\tau)$ e $F(\tau)$.

Podemos enunciar a proposição 6, cuja demonstração é evidente.

PROPOSIÇÃO 6 (Critério para liquidação antecipada): Se $C(\tau)$ e $F(\tau)$ são tais que

$$G(\beta, 0, \tau + s) > \frac{G(\beta, 0, T + s)}{J(\tau + s, T + s)}$$

então a liquidação antecipada do portfolio de arbitragem é ótima.

O critério da proposição 6 é bastante claro e envolve o cálculo de (23) e (27). Entretanto, existe a idéia intuitiva de que o portfolio de arbitragem deve ser encerrado assim que o índice futuro da data τ atingir o índice justo da mesma data. Vejamos em que condições é possível obtermos tal relação.

Iniciemos notando que, a menos que $\beta = 1$, a carteira rendendo β vezes o retorno do índice em dois subperíodos não renderá β vezes o índice em todo o período. Com efeito para uma data τ arbitrária entre 0 e T :

$$(1 + \beta RI(0, \tau))(1 + \beta RI(\tau, T)) = \left(1 + \beta \left(\frac{I(\tau)}{I(0)} - 1\right)\right) \left(1 + \beta \left(\frac{I(T)}{I(\tau)} - 1\right)\right) \neq \left(1 + \beta \left(\frac{I(T)}{I(0)} - 1\right)\right)$$

Enunciemos a chamada hipótese de aproximação.

HIPÓTESE DE APROXIMAÇÃO: O retorno de uma carteira igual a β vezes o retorno do índice em dois subperíodos subsequentes, produz o retorno de β vezes o retorno do índice para todo o período.

Cabe observar que para $\beta=1$ não há necessidade de tal hipótese, já que esta é trivialmente satisfeita. Valendo a hipótese de aproximação:

$$C(\tau) = C(0)(1 + \beta RI(0, \tau)) = C(0) \left(1 + \beta \left(\frac{I(\tau)}{I(0)} - 1\right)\right) \quad (28)$$

Adicionando e subtraindo o termo $\frac{\beta C(0)}{I(0)} \frac{F(\beta, 0)}{J(\tau + s, T + s)}$ em (25), obtemos:

$$G(0, \tau + s) = \frac{G(\beta, 0, \tau + s)}{J(\tau + s, T + s)} + \frac{\beta C(0)}{I(0)} \frac{[F(\beta, 0) - F(\tau)]}{J(\tau + s, T + s)} \quad (29)$$

Com (28) e (29) podemos reescrever (27):

$$G(\beta, 0, \tau + s) = \frac{G(\beta, 0, \tau + s)}{J(\tau + s, T + s)} + \frac{\beta C(0)}{I(0)J(\tau + s, T + s)} A(\beta, \tau, \dots) \quad (30)$$

onde

$$A(\beta, \tau, \dots) = I(\tau)J(\tau + s, T + s) + I(0) \frac{1 - \beta}{\beta} J(\tau + s, T + s) - \frac{I(0)}{\beta} J(s, T + s) + F(\beta, 0) - F(\tau) \quad (31)$$

De posse das equações (30) e (31) podemos enunciar a proposição 6 em outros termos:

PROPOSIÇÃO 6' (Critério para liquidação antecipada): Valendo a hipótese de aproximação, se $C(\tau)$ e $F(\tau)$ são tais que $C(0)$ e $A(\beta, \tau, \dots)$ possuem o mesmo sinal, então a liquidação antecipada do portfolio de arbitragem é ótima.

Vejamos agora como reescrever $A(\beta, \tau, \dots)$ de uma maneira mais intuitiva. De (11) temos que:

$$F(\beta, 0) = \frac{I(0)}{\beta} J(s, T+s) - \frac{1-\beta}{\beta} I(0) \quad (32)$$

Substituindo (32) em (31) obtemos:

$$A(\beta, \tau, \dots) = I(\tau)J(\tau+s, T+s) - F(\tau) + I(0)\frac{1-\beta}{\beta}(J(\tau+s, T+s) - 1) \quad (33)$$

Também de (11) temos:

$$I(\tau)J(\tau+s, T+s) = \beta F(\beta, \tau) + I(\tau)(1-\beta) \quad (34)$$

Substituindo (34) em (33):

$$A(\beta, \tau, \dots) = \beta(F(\beta, \tau) - F(\tau)) + H(\beta, \tau, \dots) \quad (35)$$

onde

$$H(\beta, \tau, \dots) = (1-\beta) \left[\frac{I(0)}{\beta} (J(\tau+s, T+s) - 1) + I(\tau) - F(\tau) \right] \quad (36)$$

Se $H(\beta, \tau, \dots)$ é aproximadamente igual a zero, então o sinal de $A(\beta, \tau, \dots)$ é dado pelo sinal $F(\beta, \tau) - F(\tau)$. Observe que $H(1, \tau, \dots) = 0$. Podemos enunciar a proposição 7:

PROPOSIÇÃO 7 (Critério para liquidação antecipada): Se a) $\beta=1$ ou b) vale a hipótese de aproximação e $H(\beta, \tau, \dots) = 0$, então a liquidação antecipada do portfolio de arbitragem é ótima nas seguintes circunstâncias:

- i) estamos vendidos a futuro e o preço do contrato futuro na data τ é menor que o contrato justo nesta data; ou
- ii) estamos comprados a futuro e o preço do contrato futuro na data τ é maior que o contrato justo nesta data.

DEM: Iremos demonstrar o item i), já que o segundo é análogo. Quando estamos vendidos a futuro no portfolio de arbitragem, estamos comprados na carteira, pela proposição 2, ou seja, $C(0) > 0$.

Se e o preço do contrato futuro na data τ é menor que o contrato justo nesta data, então $F(\beta, \tau) - F(\tau) > 0$. Como $H(\beta, \tau, \dots) = 0$ por hipótese, temos de (35) que $A(\beta, \tau, \dots) > 0$, tendo portanto, o mesmo sinal que $C(0)$. Pela proposição 6', a liquidação antecipada é ótima. CQD

A proposição 7 corresponde à idéia intuitiva de que devemos liquidar o portfolio de arbitragem assim que o índice futuro atinge o índice justo. No entanto, tal idéia somente é plenamente correta se $\beta=1$. Quando β difere de 1 o resultado vale como aproximação já que não podemos garantir nem a validade da hipótese de aproximação, nem $H(\beta, \tau, \dots) = 0$.

A seguir apresentamos um exemplo de liquidação antecipada quando $\beta = 1$ e estamos vendidos na carteira de ações e comprados nos futuros de Ibovespa. Todos os dados são idênticos àqueles das tabelas anteriores com a seguintes alterações:

i) o índice justo é dado por $51.000 \left(1 + \frac{0,379195}{1} \right) = 70.338,95$;

ii) o ganho esperado em 11/02/94 é de

$$-\frac{1 \cdot 102.000.000}{51.000} (68.000 - 70.338,952) = 4.677.905,84;$$

iii) $n = -\frac{1 \cdot -102.000.000}{50 \cdot 51.000 \cdot 1,0193} = 39,2426$;

iv) o índice à vista e a carteira renderam 30,1961% no período;

v) em 26/01/94, oito dias úteis após o início das operações, o índice futuro retorna ao seu nível justo da data; para as outras datas, o preços futuros são os mesmos das tabelas anteriores. O índice à vista subiu 15% desde o início da operação passando a valer 58.650. A carteira também subiu 15%, e vale CR\$ 117.300.000. A taxa de juros de 28/01/94 até 11/02/94 é de $1,379195 / (1,017^8) = 1,205197$. O futuro justo é dado por:

$$58.650 \cdot 1,205197 = 70.684,80$$

A tabela 5 abaixo mostra a evolução do ganho no mercado futuro até 10/02/94. A tabela 6 resume o resultado financeiro da operação completa, sem encerrá-la em 26/01/94. Finalmente, a tabela 7 mostra que o resultado da liquidação antecipada em 26/01/94 é idêntico àquele da tabela 6.

TABELA 5

Data	Juros	Fut.	{n}	Ajuste	G. Acum.
14/01		68,000	29.0024		
17/01	1.0170	68,200	29.4955		
18/01	1.0170	67,900	29.9969	290,024	290,024
19/01	1.0170	67,800	30.5068	(442,432)	(147,477)
20/01	1.0170	68,000	31.0254	(149,984)	(299,969)
21/01	1.0170	67,400	31.5529	305,068	0
24/01	1.0170	69,000	32.0893	(930,763)	(930,763)
25/01	1.0170	69,000	32.6348	2,524,231	1,577,644
26/01	1.0170	70,685	33.1896	0	1,604,464
27/01	1.0170	68,400	33.7538	2,749,177	4,380,917
28/01	1.0170	67,000	34.3276	(3,791,601)	663,792
31/01	1.0170	66,400	34.9902	(2,362,767)	(1,687,691)
1/02	1.0193	66,300	35.6655	(1,029,829)	(2,746,210)
2/02	1.0193	66,100	36.3538	(174,951)	(2,974,163)
3/02	1.0193	66,500	37.0554	(356,655)	(3,388,219)
4/02	1.0193	66,900	37.7706	727,076	(2,726,535)
7/02	1.0193	67,000	38.4996	741,109	(2,038,049)
8/02	1.0193	66,500	39.2426	188,853	(1,888,530)
9/02	1.0193	66,400		(962,489)	(2,887,468)
10/02				(196,213)	(3,139,409)

TABELA 6

Resultados em 11/02/94:		
Futuros		
10/02/94	(3,139,409.40)	
a)	(3,200,000.00)	
11/02/94		
Carteira		
b) Juros	140,677,905.84	
c) Recompra	(132,800,000.00)	
Total (a+b+c)	4,677,905.84	

TABELA 7

Resultados em 28/01/94:		
Futuros		
27/01/94	4,380,917.29	
a)	4,455,392.88	
28/01/94		
Carteira		
b) Juros	116,726,051.58	
c) Recompra	(117,300,000.00)	
Total (a+b+c)	3,881,444.46	
Juros	20.5197%	
Resultado em 11/02/94	4,677,905.84	

2.4) Aspectos Operacionais

Nesta subseção iremos abordar três questões operacionais importantes para a montagem da operação de arbitragem de uma carteira de ações contra futuro de índice.

A primeira questão diz respeito às taxas de juros. Todos os resultados aqui obtidos, em especial a obtenção do preço "justo" para o futuro de índice, partiram do pressuposto do conhecimento prévio das taxas de juros, o que pode ser uma hipótese por demais simplificadora.

Em particular, posições compradas em futuros de índice (e vendidas na carteira de ações) são beneficiadas com a elevação das taxas de juros, o contrário ocorrendo para posições vendidas.

O procedimento adequado seria fazer um hedge para a taxa de juros, o que está fora do escopo deste trabalho.

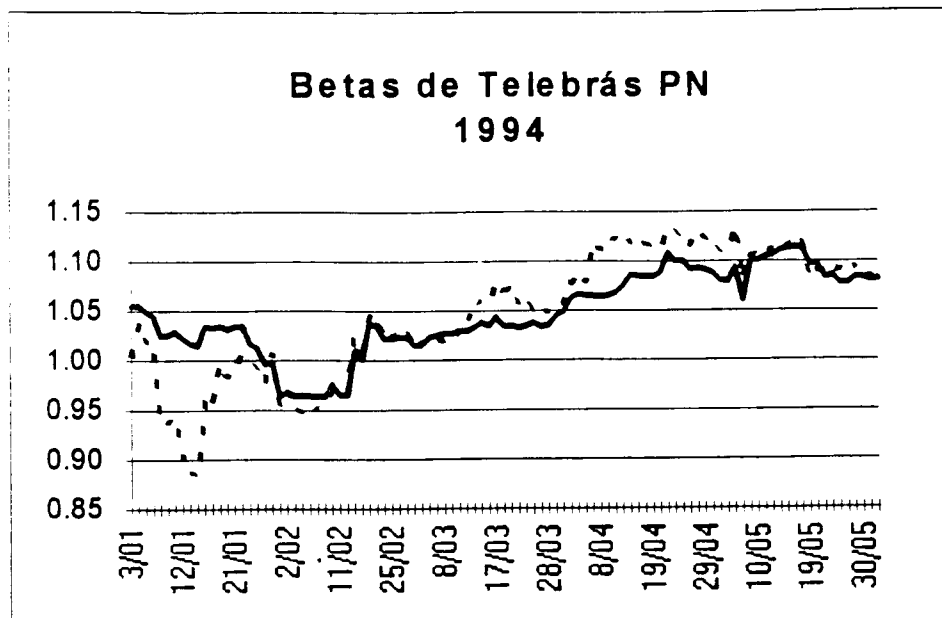
O segundo ponto relaciona-se ao critério de seleção da carteira de ações. A carteira deve ser escolhida de maneira a possuir o beta mais estável possível, para que o desempenho da carteira relativamente ao índice não sofra desvios significativos do desempenho esperado.

Observe que este critério pode não coincidir com aquele mais difundido de se escolher a carteira com o beta mais próximo de 1.

Na prática, entretanto, a seleção da carteira não é uma tarefa fácil por dois motivos: i) a inclusão de diversos papéis pode inviabilizar a execução da operação, e ii) para carteiras relativamente pequenas, os betas podem ser muito instáveis.

A instabilidade dos betas é o nosso terceiro ponto. A título de exemplo, mostramos abaixo um gráfico dos betas de Telebrás PN, a ação de maior participação no Índice Bovespa, com uma participação superior a 30%.

Os betas foram estimados a partir de regressões lineares simples, utilizando-se o método de mínimos quadrados ordinários. A linha contínua corresponde a uma amostra de três meses e a pontilhada, a uma amostra de dois meses.



Observe que mesmo a estimativa de três meses, mais estável, flutua consideravelmente. Na prática, este problema é grave, já que em geral lidamos com prazos inferiores a dois meses.

O gráfico acima sugere a aleatoriedade do parâmetro β . Para analisarmos os efeitos disso sobre o *hedge* da carteira de ações com futuros de Ibovespa, consideremos a seguinte adição à modelagem da seção 2.2:

$$\beta = \beta^* + \delta \quad (37)$$

com $E[\delta] = E[\delta\epsilon] = E[\delta RI] = 0$. Dessa forma, o valor esperado de β é β^* .

Podemos escrever a seguinte equação:

$$RC(0, T) = \alpha + \beta^* RI(0, T) + \theta \quad (13')$$

onde $\theta = \delta RI(0, T) + \epsilon$. Nosso problema passa a ser estimar β^* .

Como $E[\theta] = 0$, podemos escrever:

$$E[RC] = \alpha + \beta^* E[RI] \quad (14')$$

Analogamente à seção 2.2, gostaríamos de mostrar que β^* é a razão entre a covariância entre RC e RI, dividido pela variância de RI. Infelizmente, obtemos apenas a relação abaixo:

$$\beta^* = \frac{\text{cov}(RC, RI) - E[\delta RI^2]}{\text{var}(RI)} \quad (15')$$

O efeito prático da aleatoriedade de β é tornar inadequada a sua estimação através de mínimos quadrados ordinários, que fornece estimadores viesados para o parâmetro. O problema aqui é a questão clássica de correlação entre o erro e a variável independente ($\text{cov}(\theta, RI) = E[\delta RI^2]$).

Fica evidente a necessidade da modelagem do processo estocástico de β , mas isto foge ao escopo deste trabalho. Uma sugestão interessante seria fazer com que a estimativa do parâmetro dependesse mais fortemente da informação recente, como num modelo ARCH (vide Engle (1982)), por exemplo. A idéia subjacente a esta modelagem é que os mercados financeiros se adaptam rapidamente às novas condições de mercado, tornando relações históricas de variáveis tão menos relevantes quanto mais distantes no tempo.

3) Conclusões

A utilização de contratos futuros envolve algumas complicações técnicas, relativamente aos contratos a termo, já que as taxas de juros nominais são positivas. Tais complicações traduzem-se pela necessidade de se ajustar o número de contratos futuros numa determinada sequência, para que se obtenha o resultado desejado. A obtenção da sequência de contratos requer a incorporação dos prazos de liquidação financeira, bem como o pleno conhecimento da estrutura a termo de juros. Na ausência deste último, é necessário fazer um *hedge* para as taxas de juros.

O preço de um contrato futuro se relaciona com o preço do ativo ou índice à vista, mas a maneira exata como isto se dá depende de variáveis como taxas de juros, custos de transação, estabilidade de parâmetros estatísticos e outros. Neste artigo supomos a estrutura a termo conhecida, ausência de custos de transação e parâmetro β conhecido e constante. Vimos o papel fundamental que tal parâmetro desempenha: o índice à vista e a estrutura a termo não são suficientes para determinar o preço do contrato futuro. É necessário saber como a carteira de ações se relaciona ao índice à vista. Uma vez conhecida essa relação, o preço futuro é determinado por arbitragem através da construção de um portfólio adequado.

Tal arbitragem por sua vez só pode ser considerada como tal (i.e. sem risco) sob determinadas condições: indivíduo neutro ao risco e/ou retorno da carteira unicamente dependente do retorno do índice à vista. Se tais condições não forem válidas, temos apenas um portfólio de variância mínima, que no entanto, faz com que o preço futuro não se diferencie demais do preço "justo", uma vez que essa variância mínima independe da diferença entre o preço efetivo e o preço "justo", mas o ganho esperado cresce na razão direta da diferença.

Uma vez constituído o portfólio de arbitragem não é necessário aguardar o vencimento do contrato futuro para obter o lucro esperado. Sob determinadas condições,

a posição deve ser encerrada quando o índice futuro retorna ao preço "justo" da data corrente.

Referências bibliográficas

Bolsa Mercantil e de Futuros. Especificação de contratos. 1993

Cox, J.; Ingersoll & Ross, S. The relation between forward prices and futures prices. *Journal of Financial Economics*, 9: 321-46, 1981.

Duffie, Darrel. futures markets. Prentice-Hall International, 1989.

Engle, Robert F., Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica* 50, 987-1008, 1982.

Kolb, Robert W. Understanding futures markets. Kolb Publishing Company, 1991.

Hull, John. Options, futures and other derivative securities. Prentice-Hall, 1989.

Varga, Gyorgy. Estratégias de proteção no mercado futuro de dólar. *Revista Brasileira de Economia*, 47(3): 449-66, jul./set. 1993.

Aplicações do Contrato Futuro de Juros no Brasil

Aplicações do Contrato Futuro de Juros no Brasil

Introdução

Para uma economia capitalista o *hedge* de taxas de juros é fundamental. O descasamento entre os fluxos financeiros inerentes aos processos de produção torna inevitável a exposição dos agentes econômicos às oscilações das taxas de juros. Esta por sua vez varia ao sabor da demanda e oferta de recursos no mercado monetário, devido à atuação das autoridades monetárias do país e, no caso de economias financeiramente integradas, em função da política monetária adotada por outros países.

Para o setor financeiro, a função de intermediação financeira, que promove a transferência de recursos dos agentes poupadores líquidos para os captadores líquidos, a exposição às taxas de juros faz parte do próprio negócio do setor, uma vez que os prazos de captação e aplicação são em gerais distintos. A própria atividade de criação de liquidez implica num prazo de captação inferior àquele de aplicação. Neste caso, o *hedge* de taxas de juros torna menos arriscada a intermediação financeira, o que se traduz num menor *spread* de juros, i.e., taxas de juros mais elevadas para os poupadores e mais baixas para os captadores.

A eficiência da intermediação financeira está diretamente associada à capacidade do setor financeiro em se proteger de oscilações adversas da taxa de juros. Não é por acaso que não se desenvolveu no Brasil um mercado privado para financiamentos a longo prazo. Com mais de um ano de plano real ainda não existe no mercado nenhum mecanismo de *hedge* de juros de um ano, por exemplo.

A importância dos mecanismos de proteção à oscilações de juros não se restringe ao setor financeiro. Qualquer empresa lida diariamente com a administração do ativo e do passivo circulantes que raramente terão características semelhantes. Por exemplo, a folha salarial é paga quinzena ou mensalmente e as vendas são efetuadas ao longo do mês; ou, o empréstimo contraído para capital de giro embute uma taxa fixa enquanto que o fluxo de receitas de vendas tem que ser aplicadas às taxas vigentes de mercado.

O *hedge* de taxas de juros para as empresas é importante para que estas se concentrem nas suas atividades fim.

No Brasil, há vários instrumentos financeiros que permitem ao investidor fazer *hedge* de taxas de juros. Dentre eles destaca-se o chamado contrato futuro de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia, ou simplesmente, **DI-futuro**, negociado na Bolsa Mercantil & Futuros (BM&F).

Este contrato tem tido larga aceitação no mercado brasileiro, negociando diariamente o equivalente a R\$ 6 bilhões em títulos, aproximadamente. A tabela a seguir

Mês	Negócios	Volume	Valor Nocional (em milhões)
Jul/94	737	58.574	2.801
Ago/94	790	94.651	4.486
Set/94	674	105.862	4.994
Out/94	781	130.070	6.095
Nov/94	806	139.993	6.526
Dez/94	702	133.420	6.383
Jan/95	589	138.500	6.639
Fev/95	427	94.495	4.484
Mar/95	920	138.090	6.504
Abr/95	738	117.390	5.492
Mai/95*	813	128.043	5.951

Fonte: BM&F

* até o dia 22/5/95

detalha a evolução do futuro de DI a partir do plano Real. Os dados são consolidados para todos os contratos de DI negociados por dia.

O objetivo deste artigo é mostrar como utilizar o futuro de DI em várias modalidades de arbitragens e *hedges* de taxas de juros.

A primeira seção define e caracteriza o contrato futuro de DI. Mostra também que este nada mais é do que um *swap* entre uma taxa de juros pré-fixada contra uma sequência pós-fixada de taxas de juros diárias.

Na segunda mostramos como obter o preço do futuro de DI a partir das taxas de juros vigentes no mercado. Em seguida exemplificamos como obter ganhos de arbitragem quando a taxa de juros implícita no futuro de DI difere daquela vigente.

Na terceira seção mostramos como apostar num nível futuro de juros, como por exemplo, apostar na taxa de juros de maio quando ainda estamos em março. Também é mostrado como apostar num *spread* entre uma taxa de juros futura e a corrente, como por exemplo na aposta de que a taxa de juros de maio será 0,5% maior que a de abril.

Na quarta e mais importante seção do artigo, resolvemos o problema de *hedge* de um papel pré, sem coupons, quando há descasamento dos prazos do papel e do futuro de DI. O resultado, entretanto, é válido apenas para pequenas oscilações da taxa de juros.

Na quinta seção estendemos o resultado para papéis que pagam coupons.

Por fim, a sexta seção tece alguns comentários finais e sugere extensões.

Seção 1: Caracterização do DI-futuro

O DI-futuro é definido da seguinte forma:

Em primeiro lugar, suponha que existe um título sem coupon Z_i , cujo vencimento é no primeiro dia útil do mês $(i+1)$. Este título é definido pelo seu valor de face F e pela data do seu vencimento n_i+1 . Atualmente, $F = R\$ 100.000,00$.

Em segundo lugar, suponha que este título seja negociado todos os dias úteis. Pode-se definir o seu preço de ajuste diário como sendo a média da última meia hora de pregão.

A compra ou venda deste título num determinado dia acarreta um fluxo de caixa proporcional à diferença entre o preço da transação e o preço de ajuste do dia. No caso de posições em aberto (aquelas compradas ou vendidas desde o dia anterior), haverá ajustes diários proporcionais à diferença entre o preço de ajuste do dia e o preço de ajuste do dia anterior, corrigido pela taxa diária de depósito interfinanceiro de um dia da CETIP. Os ajustes diários, devidos no dia útil seguinte, i.e., em $t+1$, são calculados da seguinte forma:

a) ajuste das operações realizadas no dia, pago em $t+1$

$$AD^*(t) = (P(t) - P^*(t))hk$$

b) ajuste das posições em aberto no dia anterior, também pago em $t+1$

$$AD(t-1) = (P(t) - (1+i(t-1))P(t-1))hk$$

onde:

$AD^*(t)$ = valor do ajuste diário da data t , da posição iniciada em t ;

$AD(t-1)$ = valor do ajuste diário da posição carregada de $t-1$;

$P(t)$ = preço (PU) de ajuste na data t ;

$P^*(t)$ = preço (PU) da operação;

$i(t-1)$ = taxa média de DI de um dia, da CETIP, referente ao dia anterior;

h = tamanho do contrato (Reais por pontos de PU);

k = número de contratos.

Observe que por definição $P(n+1) = F$.

EXEMPLO 1: Suponha que num determinado dia t um investidor compre 100 contratos de DI-futuro por 92.000, que o preço de ajuste deste dia seja 92.250 e que o preço de ajuste do dia seguinte seja 92.500. Sabe-se também que a taxa de juros da CETIP de um dia no dia t é 5,50% e que cada ponto de PU corresponda a R\$ 0,50.

Neste caso, no dia $t+1$ ele receberá um ajuste correspondente ao dia t igual a:

$$(92.250 - 92.000) * 100 * .5 = 12.500$$

Já no dia $t+2$ ele receberá o ajuste de $t+1$, referente a posição de 100 contatos adquirida em t , igual a:

$$\left(92.500 - 92.250 * \left(1 + \frac{5,50}{3000} \right) \right) * 100 * .5 = 4.043,75$$

Supondo que a taxa de juros de $t+1$ seja de 5,60%, o total acumulado em $t+2$ é:

$$12.500 * \left(1 + \frac{5,60}{3000} \right) + 4.043,75 = 16.567,08$$

Vejamos agora qual o resultado para o investidor que carrega uma posição de w/h contratos de DI-futuro até o vencimento do mesmo. A data inicial será denotada por $t=1$ e todos os ajustes diários serão aplicados a CDI até a data $t = n+1$ de vencimento do contrato futuro. Conforme definido mais adiante, iniciaremos a posição com $k^*(1)$ contratos comprados ao preço $P^*(1)$ e a partir daí iremos ajustando a posição de contratos, a começar pela própria data 1, de maneira a ficarmos comprados em $k(t)$ contratos ao preço de ajuste $P(t)$, $t=1,2,...,n$. Mais exatamente, para compensar a defasagem de um dia na liquidação financeira faremos $k^*(1) = w/h (1+i(1))$ e $k(t) = w/h (1+i(t+1))$, $t=1,2,...,n$. Observe que estamos assumindo que o CDI do dia seguinte seja conhecido, a cada dia.

Introduzamos uma notação para o fator que atualiza um montante financeiro da data “a” até a data “b”:

$$Cdi(a,b) = \begin{cases} (1+i(a))(1+i(a+1))\dots(1+i(b-1)) & b > a \\ 1 & b = a \\ [(1+i(b))(1+i(b+1))\dots(1+i(a-1))]^{-1} & b < a \end{cases}$$

O resultado do carregamento da posição até uma data τ (quando a posição é encerrada ao preço $P^*(\tau)$, não necessariamente igual ao preço de ajuste), com resultado financeiro em $\tau+1$ é dado por:

$$AD^*(1)Cdi(2,\tau+1) + AD(1)Cdi(3,\tau+1) + \dots + AD(t)Cdi(t+2,\tau+1) + \dots + AD(\tau-2)Cdi(\tau,\tau+1) + k(\tau-1)h [P^*(\tau) - P(\tau-1)(1+i(\tau-1))]$$

Ou usando a definição de ajuste diário:

$$k^*(1)h[P(1) - P^*(1)] Cdi(2, \tau+1) + k(1)h[P(2) - P(1)(1+i(1))]Cdi(3, \tau+1) + \dots + \\ k(t)h[P(t+1) - P(t)(1+i(t))]CDI(t+2, \tau+1) + \dots + k(\tau-2)h[P(\tau-1) - P(\tau-2)(1+i(\tau-2))](1+i(\tau)) + \\ k(\tau-1) h [P^*(\tau) - P(\tau-1)(1+i(\tau-1))]$$

Substituindo a definição dos números de contratos adquiridos em cada data temos que o resultado financeiro em $\tau+1$ é dado por:

$$\begin{aligned} P(1) w Cdi(1, \tau+1) & - P^*(1) w Cdi(1, \tau+1) + \\ P(2) w Cdi(2, \tau+1) & - P(1) w Cdi(1, \tau+1) + \\ & \dots \\ P(t+1) w Cdi(t+1, \tau+1) & - P(t) w Cdi(t, \tau+1) + \\ & \dots \\ P(\tau-1) w (1+i(\tau-1)) (1+i(\tau)) & - P(\tau-2) w Cdi(\tau-2, \tau+1) + \\ P^*(\tau) w (1+i(\tau)) & - P(\tau-1) w (1+i(\tau-1)) (1+i(\tau)) = \\ P^*(\tau) w (1+i(\tau)) - P^*(1) w Cdi(1, \tau+1) = \\ w (1+i(\tau)) [P^*(\tau) - P^*(1) Cdi(1, \tau)] \end{aligned}$$

Claramente, a posição rende em τ a quantia $w [P^*(\tau) - P^*(1) Cdi(1, \tau)]$, ou seja, a diferença entre o PU de encerramento da posição e o PU de aquisição, corrigido pelo CDI acumulado do período.

Fazendo $\tau = n+1$ e lembrando que, por definição, $P^*(n+1) = F$, temos que o resultado, em reais de $t = n+1$, de se carregar a posição de w/h contratos de DI até o vencimento do contrato é dado por $w [F - P^*(1) Cdi(1, n+1)]$.

Assim, o carregamento de uma posição de w/h contratos de DI-futuro significa obter no vencimento do mesmo w vezes a diferença entre o seu valor de face e o PU de aquisição da posição corrigido pelo CDI acumulado do período.

Seja $I(t)$ a taxa de juros pré-fixada implícita no DI-futuro, i.e., $F/P^*(1) = (1+I(1))$. O carregamento de w/h contratos pode ser alternativamente escrito como:

$$w P^*(1) [(1+I(1)) - Cdi(1, n+1)]$$

Dessa forma, o carregamento de uma posição de w/h contratos de DI-futuro equivale a uma aplicação pré à taxa I , pelo prazo até o vencimento do contrato, da quantia em reais igual a $R\$ wP^*(1)$. Alternativamente, equivale a um *swap* de pré contra DI, de valor nocional $w P^*(1)$, taxa pré igual a I e prazo até o vencimento do DI.

Assim, o investidor que deseja apostar na alta das taxas de juros deve vender contratos de DI, enquanto que aquele que quer apostar na baixa dos juros, deve comprá-los.

Para concluir a caracterização do futuro de DI falta mostrar como variações nas taxas de juros afetam o PU, i.e., determinar sua duração e convexidade. Isto será feito na quinta seção deste artigo.

Seção 2: Pricing do futuro de DI

A interpretação do DI-futuro como uma aplicação pré-fixada torna trivial o seu pricing relativamente à taxa pré-fixada vigente no mercado. A proposição 1 abaixo enuncia o resultado:

PROPOSIÇÃO 1: Seja a R a taxa pré de mercado vigente para uma aplicação de reais a partir da data corrente com resgate em $t = n+1$. Suponha que o CDI da CETIP da data t seja conhecido na própria data t , $t = 1, 2, \dots, n+1$. Então $P^*(1) = F/(1+R)$, i.e., $I(1) = R$.

Dem: Se $I(1) > R$, captamos pré no mercado, digamos x reais, e compramos $w/h = x/P^*(1)/h$ contratos de DI-futuro, ou melhor, compramos a sequência $k^*(1) = w/h (1+i(1))$ e $k(t) = w/h (1+i(t+1))$, $t=1, 2, \dots, n$.

A captação pré resulta em $x [Cdi(1, n+1) - (1+R)]$ na data $t = n+1$, enquanto que a compra do DI resulta na mesma data em $x [(1+I(1)) - Cdi(1, n+1)]$. Liquidamente, obtemos $x [I(1) - R] > 0$, ou seja, um ganho sem risco.

Se $I(1) < R$, fazemos o contrário: aplicamos pré e vendemos DI-futuro para, novamente, um lucro sem risco. CQD.

Observe que a estratégia de arbitragem da proposição acima envolve o “casamento” dos financeiros correntes da aplicação pré e do PU do DI-futuro. Com efeito, para obtermos w/h , resolvemos para esta variável a equação $w/h P^*(1) h = x$.

Há uma maneira alternativa de se demonstrar a proposição anterior que envolve o “casamento” dos financeiros futuros, quando resolvemos para w/h a equação $w/h F h = x (1+R)$. Vejamos:

Dem: Se $I(1) > R$, captamos pré no mercado, e compramos $w/h = x (1+R)/F/h$ contratos de DI-futuro. A capta captação pré resulta em $x [Cdi(1, n+1) - (1+R)]$ na data $t = n+1$, enquanto que a compra do DI resulta na mesma data em $x (1+R)/F P^*(1) [(1+I(1)) - Cdi(1, n+1)] = x (1+R)/(1+I(1)) [(1+I(1)) - Cdi(1, n+1)]$. Liquidamente, obtemos $x Cdi(1, n+1)/(1+I(1)) [I(1) - R] > 0$, ou seja, um ganho sem risco. CQD

Uma aplicação imediata da proposição 1 é a obtenção *ex-post* de um ganho gerencial vislumbrado *ex-ante*, quando há distorções entre o mercado pré e o DI-futuro. Vejamos isso em detalhe.

Suponha, por exemplo, que tenhamos uma oportunidade de aplicar um montante de R\$ x a uma taxa pré R maior que a aquela implícita no DI-futuro, de maneira que $(1+R) = (1+I(1))(1+r)$, $r > 0$. Na ausência de alterações da taxa de juros, obteríamos *ex-post* o mesmo excesso r sobre o CDI verificado *ex-ante*. Entretanto, mudanças não-antecipadas na taxa de juros podem fazer com que isto não se verifique. Em particular, um aumento das taxas de juros torna o excesso *ex-post* menor ao excesso *ex-ante*.

Com efeito, denotando-se por I^* o acumulado *ex-post* do CDI, i.e., $1+I^* = Cdi(1, n+1)$, temos que o ganho *ex-ante* da operação é xR , que equivale em $n+1$ a $xr(1+I^*)$. Entretanto, o ganho *ex-post* efetivo é $x[(1+R)-(1+I^*)] = xr(1+I(1)) + x[I(1)-I^*]$. Se $I(1) = I^*$, os ganhos *ex-post* e *ex-ante* se igualam. Se $I^* > I(1)$, a operação pode gerar prejuízo.

Fazendo o *hedge* no DI-futuro passamos a ter a garantia de obtermos *lucro ex-post* se *ex-ante* temos lucro. Mas devemos “casar” os financeiros correntes ou futuros?

Igualando os financeiros correntes, obtemos *ex-post* o lucro *ex-ante* corrigido pelo CDI inicialmente projetado, qualquer que seja a evolução efetiva do CDI no período. Com efeito, fazendo $w = -x/P^*(1)$ (estamos vendendo contratos de DI-futuro) o resultado da posição consolidada é dado por:

$$x[(1+R)-(1+I^*)] - x[(1+I(1)) - (1+I^*)] = xr(1+I(1))$$

Igualando os financeiros futuros, obtemos *ex-post* o lucro *ex-ante* corrigido pelo CDI efetivamente verificado no período. Fazendo $w = -x(1+R)/F$, o resultado consolidado é dado por:

$$x[(1+R)-(1+I^*)] - x(1+R)/[(1+I(1))((1+I(1)) - (1+I^*))] = xr(1+I^*)$$

Qual das duas possibilidades deve ser adotada depende essencialmente da visão que temos sobre o nível futuro das taxas de juros. Nesse caso específico, se acreditamos que as taxas de juros irão subir, então devemos escolher o “casamento” dos financeiros futuros.

Cabe observar que, para o caso de uma captação de R\$ x , deveríamos comprar contratos de DI-futuro e os resultados das posições consolidadas são $-xr(1+I(1))$ e $-xr(1+I^*)$, respectivamente para os “casamentos” de financeiro corrente e futuro.

Um resultado interessante quando arbitramos um papel pré-fixado com o DI-futuro igualando os financeiros futuros é que o resultado da posição consolidada rende o CDI diário, ou seja, para uma data $t = \tau$, o resultado consolidado é dado por $x r \text{Cdi}(1, \tau)$. Com efeito, temos:

Resultado do carregamento do papel pré:	$x (1+R) / (1+I(\tau)) - x \text{Cdi}(1, \tau)$
Resultado da venda de $x (1+R)/F/h$ contratos:	$x (1+r) \text{Cdi}(1, \tau) - x (1+R) / (1+I(\tau))$
Resultado final:	$x r \text{Cdi}(1, \tau)$

Outra observação importante é que através do DI-futuro podemos transformar uma posição pré-fixada em pós-fixada. Isso é especialmente importante para empresas que se financiam através do desconto de duplicatas: enquanto que o passivo está pré-fixado, as receitas de vendas terão que ser aplicadas às taxas de mercado vigentes quando dos recebimentos das mesmas.

Observe que nos exemplos anteriores nada mais fizemos do que transformar posições pré-fixadas em pós-fixadas. Se $r = 0$, essa transformação não produz nem lucros nem prejuízos. Entretanto, se a taxa de juros pré da posição diferir daquela implícita no DI-futuro, então lucros ou prejuízos serão obtidos, dependendo se $r > 0$ ou $r < 0$, respectivamente.

Através do futuro de DI também podemos transformar uma posição indexada ao CDI em uma posição pré-fixada, cuja taxa pré é aquela implícita no DI-futuro, i.e., fazer o oposto ao que mostramos no parágrafo anterior. Com efeito, se temos uma aplicação de x reais, basta comprar $w = x/P^*(1)$ contratos. Nesse caso, temos:

Resultado da aplicação pós:	$x (1+I^*)$
Resultado do DI-futuro:	$x [(1+I(1)) - (1+I^*)]$
Resultado consolidado:	$x (1+I(1))$

Observe que a operação de *hedge* envolveu o “casamento” dos financeiros correntes. Note que não há alternativa de se igualar os financeiros futuros uma vez que este não é definido para o papel pós.

Em todas as operações acima mostradas os vencimentos dos papéis, pré ou pós fixados, coincidem com aquele do DI-futuro. Os exemplos 2, 3 e 4 abaixo ilustram algumas operações de *hedge*.

EXEMPLO 2: Suponha que a cinco dias úteis de um vencimento de DI-futuro a taxa *over* média implícita no mesmo seja de 5,30% e a taxa pré de 5 dias embuta uma taxa *over* média de 5,50%, i.e., equivale a 0,92003% no período. O valor de face do DI-futuro é 100.000, o tamanho do contrato é de R\$ 0,50 por ponto de PU e o investidor dispõem de

R\$ 100.000.000,00 para aplicar no título pré. O excesso *ex-ante* da taxa pré sobre o CDI é de

$$r = \frac{\left(1 + \frac{5,50}{3000}\right)^5}{\left(1 + \frac{5,30}{3000}\right)} - 1 = 0,03328\%$$

O investidor espera que a taxa de juros suba, portanto irá “casar” os financeiros futuros.

A tabela abaixo mostra a evolução da arbitragem de acordo com as taxas de juros diárias e os preços de ajuste do DI-futuro. Por simplicidade, assumimos que o investidor se posiciona no DI-futuro exatamente ao preço de ajuste.

A título de exemplo, o número de contratos vendidos na data 1 é dado por

- 100.000.000 x 1,0092003 / 100.000 / 0,5 x (1+5,2/3000) = - 2.021,90

Data	CDI	Contratos	Preço de Ajuste	Varição	Financeira
				Diária	Acumulada
1	5,10	(2.021,9)	99.121		
2	5,20	(2.022,0)	99.100		
3	5,30	(2.022,2)	99.600	191.914	191.914
4	5,60	(2.022,2)	99.600	(331.832)	(139.579)
5	5,70	(2.022,3)	99.700	177.910	38.071
6	5,80		100.000	86.875	125.019
7				(111.803)	13.457

A taxa acumulada do CDI entre as datas 1 e 7 foi de 1,095. A aplicação pré mais a posição em DI-futuro rende na data 7 (no caso, n+2 =7):

$$100.000.000 * \left(1 + \frac{5,50}{3000}\right)^5 * \left(1 + \frac{5,80}{3000}\right) + 13.457 = 101.128.602,80$$

o que representa uma rentabilidade de 1,1286%. Observe que o excesso de 1.1286% para 1.095% é exatamente o excesso inicial de 0,03328%.

No exemplo acima, os contratos de DI-futuro foram tratados como perfeitamente divisíveis, o que não corresponde à realidade. Na prática, a unidade mínima são 10 contratos. No exemplo acima o investidor teria que vender apenas 2020 contratos. Neste

caso, o financeiro na data 7 produzido no DI-futuro seria de 13.440, o que praticamente não altera o resultado. Para financeiros menores, a diferença pode ser significativa. □

EXEMPLO 3: Suponha que um banco esteja aplicado a uma taxa pré de 15%, no valor de R\$ 1.000.000. Após a subida da taxa de juros do DI-futuro para 15,5%, a empresa resolveu *hedgear* sua posição temendo novas altas das taxas de juros. A empresa deve *hedgear* sua posição “casando” os financeiros correntes ou futuros?

Começemos por notar que nesse caso r é negativo. Como a empresa espera uma nova alta das taxas de juros, ela deve escolher igualar os financeiros correntes. Nesse caso venderia 23,10 contratos de DI para uma perda de R\$ 5.000, qualquer que seja o CDI acumulado do período.

A título de exemplo, suponha que os juros efetivos tenham sido de 18%. Teríamos, então, no vencimento do DI-futuro:

Resultado do papel pré:	$1.000.000 \times 15\% = 150.000$
Custo de carregamento:	$1.000.000 \times 18\% = 180.000$
Resultado da posição sem <i>hedge</i> :	-30.000
Resultado do DI-futuro:	$-23,1 \times 0,5 \times 100.000 / 1,155 \times (1,155 - 1,18) = 25.000$
Resultado final :	-5.000

Caso a empresa tivesse optado por “casar” os financeiros futuros, teria vendido apenas 23 contratos e o resultado do DI seria de R\$ 24.891. □

EXEMPLO 4: Suponha que uma empresa tenha uma dívida de R\$ 1.000.000 em CDI, cujo vencimento conhece com aquele do DI-futuro. Antecipando-se a uma alta das taxas de juros, a empresa decide prefixar a sua dívida. A empresa então vende 23,2 contratos de DI-futuro, cuja taxa pré implícita é de 16% para o período, por exemplo. Desse modo, qualquer que seja a taxa pós-fixada do período, o custo de financiamento será de 16%. Com efeito, supondo-se que a taxa pós-fixada ficou em 18% temos:

Despesa com a dívida original:	$1.000.000 \times 18\% = 180.000$
Receita com o DI-futuro:	$-23,2 \times 0,5 \times [100.000 - 100.000 / 1,16 \times 1,18] = 20.000$
Total da despesa:	$180.000 - 20.000 = 160.000$ □

Seção 3: Trava de nível e de *spread* de juros

Nesta seção apresentamos duas estratégias envolvendo contratos futuros de DI de vencimentos diferentes. Sejam $P_c(t)$ e $P_L(t)$ os PUs, na data t , dos contratos futuros de DI curto e longo, respectivamente. O contrato curto vence em N_c+1 e o longo em N_L+1 . Sejam $I_c(t)$ e $I_L(t)$ as taxas de juros pré implícitas nos contratos curto e longo, respectivamente. Dessa forma, por definição, $1+I_c(t) = F/P_c(t)$ e $1+I_L(t) = F/P_L(t)$.

A taxa de juros projetada pelos contratos de DI para o período entre N_c+1 e N_L+1 , denominada de taxa a termo, é dada por $1+Z_{CL}(t) = P_c(t)/P_L(t) = (1+I_c(t))/(1+I_L(t))$. Suponha que queiramos montar uma operação para apostar na alta de $Z_{CL}(t)$. Intuitivamente devemos comprar o DI curto e vender o longo, mas em que proporção?

Sejam W_c e W_L o número de contratos futuros comprados do curto e vendidos do longo, respectivamente. Uma prática comum no mercado financeiro é “casar” os financeiros correntes dos contratos curto e longo (observe que os financeiros futuros coincidem). Assim, temos a seguinte relação:

$$W_c \cdot P_c(t) = W_L \cdot P_L(t) \Rightarrow W_c = W_L \cdot P_L(t) / P_c(t)$$

Vejamos em detalhe o resultado financeiro gerado no dia seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Res.} &= W_L \cdot P_L(t) / P_c(t) [P_c(t+1) - (1+i(t)) P_c(t)] - W_L [P_L(t+1) - (1+i(t)) P_L(t)] = \\ &= W_L [P_L(t) P_c(t+1) / P_c(t) - P_L(t+1)] = \\ &= W_L P_L(t+1) [(1+Z_{CL}(t+1)) / ((1+Z_{CL}(t)) - 1)] = \\ &= W_L P_L(t+1) / ((1+Z_{CL}(t)) [Z_{CL}(t+1) - Z_{CL}(t)]) \end{aligned}$$

Da expressão final do resultado acima observamos que o sinal do mesmo depende apenas da diferença entre as taxas futuras Z_{CL} das datas t e $t+1$. Observe que o nível da taxa curta isoladamente não interfere no sinal do resultado. Entretanto, esta determina a magnitude do mesmo. Com efeito, podemos reescrever o resultado acima como:

$$\text{Res.} = W P_c(t+1) [1 / (1+Z_{CL}(t)) - 1 / (1+Z_{CL}(t+1))]$$

Quanto mais alta a taxa de juros curta, menor o resultado. Assim, para quem aposta na alta de juros a termo, o cenário ideal é aquele onde a taxa curta cai e a taxa a termo aumenta, i.e., quando a estrutura a termo fica mais inclinada. Já para quem aposta na queda da taxa a termo, vendendo o DI curto e comprando o longo, o cenário ideal é o deslocamento para baixo de toda a estrutura a termo, quando tanto as taxas curtas quanto as taxas a termo se deslocam para baixo.

Cabe notar que a estratégia acima mostrada não se limita a apenas um dia. Com efeito, suponha que carreguemos a posição até o dia $t = \tau$. Nesse caso, o resultado seria dado por:

$$\begin{aligned} \text{Res.} &= W_L P_L(t)/P_c(t) [P_c(\tau) - P_c(t)Cdi(t, \tau)] - W_L [P_L(\tau) - P_L(t)Cdi(t, \tau)] = \\ &= W_L P_L(\tau) / ((1+Z_{CL}(t)) [Z_{CL}(\tau) - Z_{CL}(t)]) \end{aligned}$$

Observe que apenas substituímos, na expressão final do resultado, a data $t+1$ pela data τ .

Na seção anterior vimos que o futuro de DI pode ser interpretado como um *swap* de taxa pré contra taxa pós-fixada, onde esta é definida como o acumulado dos CDIs diários no período. O resultado acima referente aos DI's curtos e longos mostra como se posicionar numa taxa a termo implícita em *swaps* de mesmo valor futuro, no caso, o valor do contrato no vencimento.

Quando o valor futuro dos *swaps* não coincidem, a regra de se igualar os financeiros correntes continua válida. Com efeito, suponha um *swap* iniciado em $t=1$ com vencimento antes do DI-futuro, valor nocional dado por x e taxa pré dada por R . Numa data τ qualquer antes do vencimento do *swap*, o valor deste é simplesmente $x(1+R)/CdiE(\tau, Nc+1) - x Cdi(1, \tau)$, onde $CdiE(a,b)$ denota a taxa pré esperada ante as datas "a" e "b".

A taxa a termo inicial é dada por $1+Z_{CL}(1) = (1+I_L(1))/(1+R)$, enquanto que aquela da data τ é dada por $1+Z_{CL}(\tau) = (1+I_L(\tau))/CdiE(\tau, Nc+1)$. Vendendo-se $x/P_L(1)/h$ contratos de DI futuro, tem-se que o resultado em τ é dado por $x/P_L(1) [Cdi(1, \tau) P_L(1) - P_L(\tau)]$. O resultado da posição consolidada (*swap* mais DI-futuro) é dada por:

$$x(1+R)/CdiE(\tau, Nc+1) - x P_L(\tau)/P_L(1) = x(1+R) / (1+I_L(\tau)) / [Z_{CL}(\tau) - Z_{CL}(1)]$$

Novamente, ficamos apostados na alta da taxa a termo.

O exemplo 5 abaixo ilustra a estratégia de aposta na alta da taxa a termo.

EXEMPLO 5: Suponha que estamos em 20 de março e a taxa do DI maio (com vencimento no primeiro dia útil de maio) seja de 6%, enquanto que a taxa projetada para o DI junho seja de 9,71%. Assim, a taxa de juros projetada para o mês de maio é de 3,5%. Julgando esta taxa de maio baixa, podemos fazer a seguinte operação: comprar 100 contratos de DI maio e vender 103,5 contratos do DI junho. Suponha que carreguemos a posição por 3 dias úteis, que o acumulado do CDI diário nesse período seja de 0,5209%, e que os DI maio e DI junho estejam projetando 5,9481% e 10,186%, respectivamente. Note que a taxa a termo para o mês de maio aumentou para 4%. O ganho total da operação é:

DI maio: $100 \times 0,5 \times [100.000/1,059481 - 1.005209 \times 100.000/1,0600] = -22.260,08$
 DI junho: $-103,5 \times 0,5 \times [100.000/1,101860 - 1.005209 \times 100.000/1,0971] = 44.947,96$
 Resultado final: 22.687,88

Outra modalidade de operação envolve uma aposta (ou trava) não no nível da taxa a termo, mas sim num *spread* entre esta e a taxa curta, ou simplesmente num *spread* entre taxas (por exemplo, aposta que a taxa de juros de agosto será maior que aquela de julho, quando ainda estamos em março).

Para tornar a exposição prática, consideremos explicitamente a trava de juros mensais, que podem tanto ser de um mês para outro, como uma trava de juros mensais médios, como ficará claro mais adiante. Modelaremos o DI-futuro da seguinte maneira:

$$P_c(t) = F / [(1 + x(t)) (1 + Z_c(t))^{n_c}] \text{ e } P_L(t) = F / [(1 + x(t)) (1 + Z_c(t))^{n_c} (1 + Z_L(t))^{n_L}]$$

onde:

$x(t)$ = taxa de juros entre a data corrente e o primeiro dia útil do mês seguinte;
 $Z_c(t)$ = taxa de juros média mensal entre o dia acima e o vencimento do DI-futuro curto;
 n_c = número de meses do período relativo a $Z_c(t)$;
 $Z_L(t)$ = taxa de juros média mensal entre o vencimento do DI curto e do longo;
 n_L = número de meses do período relativo a $Z_L(t)$.

Para ilustrar a notação, suponha que estejamos em 20 de março e os futuros de DI para abril, junho e setembro sejam, respectivamente, 99.000, 93.320 e 82.960. Neste caso, temos que $x(t) = 1,010\%$, $n_c = 2$, $n_L = 3$, $Z_c(t) = 2,998\%$ e $Z_L(t) = 4,000\%$.

Defina o *spread* $s(t)$ por $1+s(t) = (1+Z_L(t))/(1+Z_c(t))$, i.e., $s(t)$ é a diferença entre as taxas médias mensais entre os meses relativos a taxa a termo e aqueles da taxa curta. No exemplo acima $s(t) = 0,973\%$.

A expressão do DI longo pode ser reescrita como:

$$P_L(t) = F / [(1 + x(t)) (1 + Z_c(t))^{(n_c+n_L)} (1 + s(t))^{n_L}]$$

Nosso objetivo é montar uma carteira composta por DI's curtos e longo de maneira a ganhar nas mudanças do *spread* s , ou seja, não estamos apostando no nível absoluto da taxa a termo, mas no seu nível relativamente à taxa curta.

Considere uma posição de k_C/h contratos curtos e k_L/h contratos longos. Numa data τ , anterior ao primeiro dia útil do mês seguinte ao corrente, o resultado da posição RES é dado por:

$$\begin{aligned} \text{RES} &= k_C [P_C(\tau) - \text{Cdi}(1, \tau) P_C(1)] + k_L [P_L(\tau) - \text{Cdi}(1, \tau) P_L(1)] = \\ &= A(x(\tau)) + k_C F/(1+x(\tau)) [(1+Z_C(\tau))^{-n_C} - (1+Z_C(1))^{-n_C}] + \\ &\quad + k_L F/(1+x(\tau)) [(1+Z_C(\tau))^{-(n_C+n_L)}(1+s(\tau))^{-n_L} - (1+Z_C(1))^{-(n_C+n_L)}(1+s(1))^{-n_L}] \end{aligned}$$

onde:

$$A(x(\tau)) = F[k_C(1+Z_C(1))^{-n_C} + k_L(1+Z_C(1))^{-(n_C+n_L)}(1+s(1))^{-n_L}] [1/(1+x(\tau)) - \text{Cdi}(1, \tau)/(1+x(1))]$$

ou, simplesmente:

$$A(x(\tau)) = (1+x(1)) [k_C P_C(1) + k_L P_L(1)] [1/(1+x(\tau)) - \text{Cdi}(1, \tau)/(1+x(1))]$$

O termo $A(x(\tau))$ reflete a contribuição no resultado da variação da taxa de juros de curtíssimo prazo (entre a data corrente e o primeiro dia útil do mês seguinte) relativamente à variação do CDI. Este termo nada mais é do que o resultado de uma posição de $(1+x(1)) [k_C P_C(1) + k_L P_L(1)] / F / h$ contratos no DI que vence no primeiro dia útil do mês seguinte ao corrente. Montando uma posição contrária nesse futuro de DI, podemos tornar a posição total de DI imune a variações em “x”, de maneira que apenas variações em “Zc” e “s” afetem o resultado.

A partir de agora as operações aqui descritas terão sempre resultados aproximados. Expressões do tipo “aproximação de primeira ordem” ou “aproximação de 1.ª ordem” serão encontradas com frequência. Antes de continuarmos com a análise sobre travas iremos definir formalmente o que tais “aproximações” significam.

Seja uma função de duas variáveis $g(x, y)$ contínua, $g: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$. Sejam δx e δy variações em x e y , respectivamente. A aproximação de primeira ordem é definida como:

$$g(x+\delta x, y+\delta y) = g(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \delta x + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \delta y + r_1(\delta x, \delta y)$$

$$\text{onde } \lim_{(\delta x, \delta y) \rightarrow 0} r_1(\delta x, \delta y) / \|(\delta x, \delta y)\| = 0.$$

O termo $r_1(\delta x, \delta y)$ é o erro de segundo ordem da aproximação.

A aproximação de segunda ordem é definida como:

$$g(x+\delta x, y+\delta y) = g(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \delta x + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \delta y + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) \delta x^2 + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} g(x, y) \delta y \delta x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x, y) \delta y^2 \right] + r_2(\delta x, \delta y)$$

$$\text{onde } \lim_{(\delta x, \delta y) \rightarrow 0} r_2(\delta x, \delta y) / \|(\delta x, \delta y)\|^2 = 0.$$

O termo $r_2(\delta x, \delta y)$ é o erro de terceira ordem da aproximação.

As aproximações de primeira e segunda ordem nada mais são do que as expansões em fórmula de Taylor até a primeira e segunda ordem, respectivamente, para a função $g(x, y)$. O leitor interessado pode referir-se ao livro “Curso de Análise, vol. 2”, de Elon

às variações em Z_c e s , respectivamente. O resultado RES aproximado até a primeira ordem é dado por:

$$\begin{aligned} \text{RES} &= F/(1+x(\tau)) [-nc \, kc(1+Z_c(1))^{-(nc+1)} - (n_L+nc) \, k_L [(1+Z_c(1))^{-(nc+n_L+1)} (1+s(1))^{-n_L}] \delta Z_c \\ &\quad - n_L \, k_L F/(1+x(\tau)) [(1+Z_c(1))^{-(nc+n_L)} (1+s(1))^{-(n_L+1)}] \delta s = \\ &= (1+x(1)) / (1+x(\tau)) / (1+Z_c(1)) [-nc \, kc \, P_c(1) - (n_L+nc) \, k_L \, P_L(1)] \delta Z_c + \\ &\quad - n_L \, k_L (1+x(1)) / (1+x(\tau)) / (1+s(1)) \, P_L(1) \delta s \end{aligned}$$

Nosso objetivo é escolher k_c e k_L de maneira que o resultado dependa apenas da variação do *spread* “ s ”. Para tal fazemos $k_c = - (n_L+nc) \, P_L(1) / nc \, P_c(1) \, k_L$, ou seja, igualamos os financeiros correntes ponderados pelos meses até os vencimentos dos respectivos contratos.

Como a aproximação obtida é de primeira ordem, a magnitude exata do resultado dependerá de fatores de ordem superior. Entretanto, o sinal do resultado é inequivocamente determinado. Por exemplo, para uma posição vendida no DI longo (k_L negativo) e consequentemente comprada no curto, aumentos do *spread* “ s ” produzem lucro.

Podemos resumir os resultados obtidos com a proposição 2 a seguir:

PROPOSIÇÃO 2: A posição de k_L/h contratos futuros longos ao preço $P_L(1)$, mais a posição de k_c/h contratos curtos ao preço $P_c(1)$, onde $k_c = - (n_L+nc) \, P_L(1) / nc \, P_c(1) \, k_L$ e

a posição de $n_L/n_C (1+x(1)) P_L(1)/F_{KL}/h$ contratos do DI vencendo no primeiro dia útil do mês seguinte ao corrente produz, na data τ , um resultado aproximado até a primeira ordem de $-n_L K_L (1+x(1)) / (1+x(\tau)) / (1+s(1)) P_L(1) \delta s$.

O exemplo 6 abaixo ilustra a proposição 2.

EXEMPLO 6: Suponha que estejamos em 20 de março e os futuros de DI para abril, junho e setembro são, respectivamente, 99.000, 93.320 e 82.960. Neste caso, temos que $x(1) = 1,010\%$, $n_C = 2$, $n_L = 3$, $Z_C(1) = 2,998\%$, $Z_L(1) = 4,000\%$ e $s(1) = 0,973\%$. Suponha que acreditamos que o *spread* irá subir. Nesse caso, montamos a seguinte posição em contratos de DI futuro:

DI setembro: vendemos 2.000 contratos ($K_L = 1.000$);

DI junho: compramos 4.444,92 contratos ($4.444,92 = 5/2 \times 82.960 / 93.320 \times 2.000$);

DI abril: vendemos 2.513,68 contratos ($2.513,68 = 3/2 \times 1,01 \times 82.960 / 99.000 \times 2.000$)

Três dias depois, os PUs dos contratos de DI são, respectivamente, 99.480, 93.410 e 82.090. Temos, então, $x(4) = 0,527\%$, $Z_C(4) = 3,192\%$, $Z_L(4) = 4,400\%$ e $s(4) = 1,171\%$. De acordo com a proposição 2, o ganho da operação é de aproximadamente $3 \times 1.000 \times 1,01 / 1,00527 / 1,00973 \times 82.960 \times 0,198\% = 490.330,13$.

Suponha que o CDI acumulado entre as datas 1 e 4 seja de 0,501%. Vejamos o resultado efetivo da posição:

DI setembro: $-2.000 \times 0,5 \times [82.090 - 1,00501 \times 82.960] = 1.285.629,60$

DI junho: $4.444,92 \times 0,5 \times [93.410 - 1,00501 \times 93.320] = - 839.052,43$

DI abril: $- 2.513,68 \times 0,5 \times [99.480 - 1,00501 \times 99.000] = 20.096,87$

Total = 466.674,04

Observe que o resultado efetivo difere da aproximação de primeira ordem em 23.656,09, ou aproximadamente 5%. Podemos melhorar a aproximação fazendo também uma aproximação de segunda ordem. No entanto, nesta aproximação não apenas a variação do *spread* afeta o resultado como também a variação de $Z_C(t)$.

Para obtermos a aproximação de segunda ordem é necessário adicionarmos três termos:

$$\begin{aligned} & (1+x(1)) / (1+x(\tau)) n_L K_L P_L(1) (n_C+n_L) / (1+Z_C(1))^2 \delta Z_C^2 / 2 + \\ & (1+x(1)) / (1+x(\tau)) n_L K_L P_L(1) (n_L+1) / (1+s(1))^2 \delta s^2 / 2 + \\ & (1+x(1)) / (1+x(\tau)) / (1+Z_C(1)) (n_C+n_L) K_L P_L(1) [1+n_L/(1+s(1))] \delta s \delta Z_C \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos têm o mesmo sinal que K_L . O terceiro termo também tem o mesmo sinal se δs e δZ_C têm o mesmo sinal. Assim, se essa última condição valer, a aproximação de segunda ordem aumenta ou diminui o resultado da primeira conforme estamos comprados ou vendidos, respectivamente, no contrato longo.

Computemos os três termos acima no caso do exemplo 6:

Termo 1: $1,01/1,00527 \times 3x - 1.000 \times 82.960 \times 5 / 1,06085 \times 0,000001882 = -2.228,29$
 Termo 2: $1,01/1,00527 \times 3x - 1.000 \times 82.960 \times 4 / 1,01955 \times 0,00000196 = -1.923,00$
 Termo 3: $1,01/1,00527 \times 1,02998 \times 5x - 1.000 \times 82.960 \times [1+3/1,00973] \times 0,000003841 = -6.547,61$
 Total:-10.698,90

A aproximação até a segunda ordem é igual a

$490.330,13 - 10.698,90 = 479.631,23$, mais próximo do resultado efetivo.□

Seção 4: *Hedge* de papel pré com DI-futuro quando há descasamento de prazo

Na seção 2 vimos como determinar o PU do futuro de DI a partir da taxa pré vigente no mercado para o prazo do contrato. Vimos também como transformar posições pré em pós-fixadas, e vice-versa, mas sempre mantendo os mesmos prazos.

Nesta seção mostraremos como arbitrar os juros de um papel pré contra o implícito no futuro de DI quando os prazos não coincidem. Inicialmente trabalhamos com a hipótese, pouco realista, de que os juros para o período de descasamento de prazo sejam conhecidos. Isso reduz o problema de *hedge* essencialmente àquele abordado na seção 2. Posteriormente, relaxamos essa hipótese e obtemos uma regra dinâmica de ajuste do número de contratos futuros para efetuarmos o *hedge* da posição.

O papel pré vence em $t = Np+1$ e o futuro de DI vence em $t = N+1$. A taxa de juros acumulada do período de descasamento é dada por $Cdi(N+1, Np+1) - 1$. Observe que $Cdi(N+1, Np+1)$ pode ser maior ou menor do que 1, dependendo se Np for maior ou menor que N , respectivamente. A notação da seção 2 está mantida: “x” é o montante de recursos aplicado à taxa pré R.

4.1) Juros do período de descasamento são conhecidos

Por comodidade de notação, defina $Y = Cdi(N+1, Np+1)$, Y conhecido. Mostremos que existe possibilidade de arbitragem se a taxa pré diferir daquela implícita no futuro de DI, i.e., se $1+R$ diferir de $F/P^*(1) Y$. Note que, por hipótese, $Cdi(1, Np+1) = Cdi(1, N+1) Y$.

Suponha que $1+R > F/P(1)Y$. O ganho gerencial de se aplicar pré, captando-se a CDI, na data 1 é de $x [(1+R)/(F/P(1)Y) - 1]$. Como na seção 2, o “casamento” dos financeiros presentes resulta em $t=Np+1$ no ganho gerencial inicial corrigido pelo acumulado de CDI projetado pelo DI-futuro, enquanto que o “casamento” dos financeiros futuros corrige o resultado inicial pelo acumulado de CDI efetivamente verificado entre $t=1$ e $t=Np+1$. Mostremos esses resultados.

i) “Casamento” dos financeiros presentes: $w = - x/P(1) /h$.

Resultado do DI-futuro em $t=N+1$: $- x/P(1) [F - P(1) Cdi(1, N+1)]$

Resultado do DI-futuro em $t=Np+1$: $- x F/P(1)Y + x Cdi(1, Np+1)$

Resultado do papel pré em $t=Np+1$: $x (1+R) - x Cdi(1, Np+1)$

O resultado final em $t=Np+1$ é dado por: $x F/P(1) Y [(1+R)/(F/P(1)Y) - 1]$.

ii) “Casamento” dos financeiros futuros: $w = - x (1+R)/ FY /h$.

Faremos a decomposição do resultado para uma data τ genérica, para mostrar que a carteira composta pelo papel pré mais os contratos futuros rende CDI sobre o resultado gerencial inicial.

Resultado do DI-futuro em $t=\tau$: $-x (1+R)/ FY [P(\tau) - P(1)Cdi(1,\tau)]$

Resultado do papel pré em $t=\tau$: $x (1+R)/(F/P(\tau)Y) - x Cdi(1,\tau)$

O resultado final em $t=\tau$ é dado por: $x Cdi(1,\tau) [(1+R)/(F/P(1)Y) - 1]$. Para $\tau=Np+1$, o resultado é simplesmente o resultado inicial, corrigido pelo acumulado de CDI efetivamente observado no período.

Como visto acima, a hipótese de Y conhecido torna muito cômodo o tratamento da questão do *hedge* do papel pré com futuro de DI. Entretanto, essa hipótese é pouco realista, devendo apenas ser adotada quando o período de descasamento for curto. Com efeito, como aceitar que diante de uma alta generalizada das taxas de juros de curto prazo, por exemplo, Y se mantenha constante? A seção seguinte desenvolve uma técnica de *hedge* capaz de lidar com essas questões.

4.2) Juros do período de descasamento não são conhecidos

Para se “*hedgear*” uma posição pré com futuro de DI quando há descasamento de prazo, há que se modelar as mudanças da estrutura a termo de juros até o vencimento do ativo mais longo da carteira, ou seja, o vencimento do papel pré ou do futuro de DI, o que

for maior. A técnica a ser apresentada nesta seção considera apenas pequenas mudanças paralelas da estrutura a termo de juros. Assim excluimos tanto mudanças paralelas discretas (abruptas) da estrutura a termo, quanto mudanças não paralelas.

Em relação às mudanças paralelas discretas, estas podem ser favoráveis ou não ao investidor, dependendo da convexidade da carteira ser positiva ou negativa, como veremos posteriormente. O bom uso da técnica descrita nesta seção recomenda a busca de convexidade positiva.

Quanto aos deslocamentos não paralelos dos juros, nenhuma solução é proposta. Entretanto, o *hedge* dinâmico a ser apresentado não apresenta memória para os erros. Para ilustrar o ponto, suponha que num determinado dia a curva de juros sofreu um *steepening*, i.e. as taxas de juros mais longas subiram mais relativamente às mais curtas. Claramente o *hedge* não funcionará a contento para aquele dia. No entanto, a partir daí a nova curva de juros será utilizada para a construção do *hedge*, que será efetivo para pequenos deslocamentos paralelos da estrutura de juros a partir desta nova curva. Nesse sentido, o erro de um dia não é "carregado" para os dias subsequentes.

Introduzamos uma notação adicional que simplificará a exposição. Seja N_{m+1} , a data de vencimento do ativo mais longo da carteira, i.e., $N_{m+1} = \text{MAX}[N+1, N_p+1]$. Defina $n(t) = N + 1 - t$ e $np(t) = N_p + 1 - t$ como o número de dias úteis da data t às datas de vencimento do futuro de DI e do papel pré, respectivamente.

A estrutura a termo corrente de juros será denotada por $i(t,s)$, $s = t, t+1, \dots, N_m$. Assim, por exemplo, $i(t+j, t+k)$ significa a taxa de juros diária para o dia $t+k$, prevista na estrutura a termo do dia $t+j$. Denotaremos $i(s,s)$ simplesmente como $i(s)$. Observe que $i(s)$ é conhecida em s , para todo s . A exemplo do que fizemos na primeira seção, vamos também supor que a taxa de juros do dia seguinte seja conhecida, ou seja, $i(t, t+1) = i(t+1)$.

Seja $Cdi(c; a, b)$ o fator que atualiza um montante financeiro da data "a" até a data "b", conforme previsto pela estrutura a termo de juros na data $c \leq \min(a, b)$:

$$Cdi(c; a, b) = \begin{cases} (1+i(c, a))(1+i(c, a+1)) \dots (1+i(c, b-1)) & b > a \\ 1 & b = a \\ [(1+i(c, b))(1+i(c, b+1)) \dots (1+i(c, a-1))]^{-1} & b < a \end{cases}$$

Não confundir esta notação com aquela introduzida na primeira seção $Cdi(a, b)$, já que esta denota o acumulado de juros efetivamente verificado entre as datas "a" e "b".

Assumiremos deslocamentos paralelos na estrutura de juros, de maneira que $i(t+1, s) = (1+i(t, s))(1+z) - 1$, para $s = t+1, t+2, \dots, N_m$.

Suponha que o investidor consiga, na data $t=1$, aplicar um valor x à taxa pré-fixada R e que $1+R > Cdi(1;1,Np+1)$, ou seja, a taxa pré é maior que aquela implicada pela estrutura a termo. O ganho potencial, na data de vencimento do papel pré, em se aplicar à essa taxa pré é dado por:

$$x(1+R) - xCdi(1;1,Np+1)$$

ou, equivalentemente na data $t=1$:

$$x[(1+R)/Cdi(1;1,Np+1)-1]$$

Este ganho é potencial porque pode não se materializar caso a taxa de juros suba. Com efeito o ganho efetivo é dado por:

$$\begin{aligned} x(1+R) - xCdi(1,Np+1) &= [x(1+R) - xCdi(1;1,Np+1)] - x[Cdi(1,Np+1) - Cdi(1;1,Np+1)] = \\ &= \text{Ganho Potencial} - x[Cdi(1,Np+1) - Cdi(1;1,Np+1)] \end{aligned}$$

O problema do investidor é fazer com que $x(1+R)/Cdi(1;1,Np+1)$, o valor gerencial de sua aplicação pré, renda o CDI diário acumulado do período. Com efeito, nesse caso ele obterá:

$$\begin{aligned} [x(1+R)/Cdi(1;1,Np+1)] Cdi(1,Np+1) - xCdi(1,Np+1) &= \\ x[(1+R)/Cdi(1;1,Np+1)-1] Cdi(1,Np+1) & \end{aligned}$$

que é simplesmente o ganho potencial da operação na data inicial, corrigida pelo CDI diário acumulado até $Np+1$, ou seja, o ganho potencial se materializa *ex-post*.

Para obter isso o indivíduo construirá uma carteira composta por:

- i) o papel pré;
- ii) um certo número de contratos futuros de DI;
- iii) os ajustes diários do futuro de DI acumulados até a data corrente, sempre reinvestidos às taxas do CDI diárias.

Seja $C(t)$ o valor da carteira na data t . Como o posicionamento no futuro de DI nada custa, o valor inicial da carteira é simplesmente o valor presente do papel pré descontado pela taxa de juros implicada pela estrutura a termo de juros:

$$C(1) = x(1+R)/Cdi(1;1,Np+1)$$

O investidor terá que escolher uma sequência de contratos futuros $k(t)$ de tal modo que a carteira renda o CDI acumulado do período, i.e.:

$$C(Np+1) = C(1) Cdi(1, Np+1)]$$

A metodologia que aqui será utilizada é fazer com que a carteira renda o CDI diário todos os dias, ou seja:

$$C(t+1) = C(t) (1+i(t))$$

Defina $A(t)$ como o valor acumulado dos ajustes do DI futuro até a data t . Por definição temos que:

$$A(t+1) = A(t) (1+i(t)) + k(t)h/(1+i(t+1)) [P(t+1) - P(t)(1+i(t))]$$

onde o segundo termo à direita corresponde ao ajuste do dia t .

O valor financeiro da carteira numa data t qualquer será o valor presente do financeiro pré descontado pela taxa de juros da data t (que pode ser diferente daquela prevaescente na data inicial), que será denotado por $x(t)$, e o acumulado dos ajustes dos futuros de DI:

$$C(t) = x(t) + A(t) = x(1+R)/ Cdi(t;t, Np+1) + A(t)$$

Vamos definir $\Delta C(t+1)$ como a variação da carteira de t para $t+1$, acima da correção pelo CDI diário:

$$\Delta C(t+1) = C(t+1) - (1+i(t)) C(t)$$

Expandindo os termos da expressão acima obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta C(t+1) &= x(1+R)/Cdi(t+1;t+1, Np+1) + A(t+1) - (1+i(t)) [x(1+R)/Cdi(t;t, Np+1) + A(t)] \\ &= x(1+R)[1/Cdi(t+1;t+1, Np+1) - (1+i(t))/Cdi(t;t, Np+1)] + \\ &\quad + k(t)h/(1+i(t+1)) [P(t+1) - P(t)(1+i(t))] \end{aligned}$$

Vejamos inicialmente a parcela dos futuros:

$$P(t+1) - (1+i(t)) P(t) = F [1/ Cdi(t+1;t+1, N+1) - (1+i(t))/ Cdi(t;t, N+1)] =$$

$$= F / Cdi(t;t+1,N+1)] [(1+z)^{-n(t+2)}-1]$$

Analogamente para a primeira parcela de $\Delta C(t+1)$ temos:

$$x(1+R)[1/Cdi(t+1;t+1,Np+1) - (1+i(t))/Cdi(t;t,Np+1)] = \\ x(1+R)/Cdi(t;t+1,Np+1)] [(1+z)^{-np(t+2)}-1]$$

Reescrevendo $\Delta C(t+1)$ como $\Delta C(t+1,z)$:

$$\Delta C(t+1,z) = x(1+R)/Cdi(t;t+1,Np+1)] [(1+z)^{-np(t+2)}-1] + \\ + k(t)h/(1+i(t+1)) F / Cdi(t;t+1,N+1)] [(1+z)^{-n(t+2)}-1]$$

Observe que $\Delta C(t+1,0) = 0$, ou seja, na ausência de alteração na estrutura a termo de juros, a carteira rende o CDI diário.

Derivando-se a expressão acima em relação a z , e calculando a derivada no ponto $z = 0$, obtemos:

$$d\Delta C(t+1,0)/dz = - np(t+2) x (1+R)/ Cdi(t;t+1,Np+1) \\ - n(t+2)k(t)h/(1+i(t+1))F/ Cdi(t;t+1,N+1)]$$

A quantidade de contratos futuros na carteira $k(t)$ que anula $d\Delta C(t+1,0)/dz$ é dada por:

$$k(t) = - \frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{np(t+2)}{n(t+2)} \frac{x(1+R)}{F} \frac{Cdi(t; Np+1, N+1)}{F}$$

Alternativamente, dividindo-se o numerador e o denominador da expressão acima por $Cdi(t;t,N+1)$ chegamos a uma expressão alternativa para $k(t)$:

$$k(t) = - \frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{np(t+2)}{n(t+2)} \frac{x(t)}{PU(t)}$$

Comprando-se $k(t)$ contratos como definido acima garante que a carteira renda o CDI diário para deslocamentos paralelos da estrutura a termo de juros, a menos de um erro de segunda ordem. Com efeito, denotando-se pequenas oscilações de juros por δz e expandindo-se $\Delta C(t+1, z)$ em Taylor, em torno de $z = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} d\Delta C(t+1, 0) &\cong \Delta C(t+1, 0) + d\Delta C(t+1, 0)/dz \delta z + d^2 \Delta C(t+1, 0)/dz^2 (\delta z)^2 / 2 \cong \\ &\cong d^2 \Delta C(t+1, 0)/dz^2 (\delta z)^2 / 2 \end{aligned}$$

No caso, temos que esse erro de segunda ordem é aproximado por:

$$d^2 \Delta C(t+1, 0)/dz^2 (\delta z)^2 / 2 = x(1+R) np(t+2) / Cdi(t; t+1, Np+1) [Np-N] (\delta z)^2 / 2$$

Podemos enunciar a proposição 3:

PROPOSIÇÃO 3: A sequência de contratos de DI-futuro

$$k(t) = - \frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{np(t+2)}{n(t+2)} \frac{x(1+R) Cdi(t; Np+1, N+1)}{F}, \text{ ou}$$

$$k(t) = - \frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{np(t+2)}{n(t+2)} \frac{x(t)}{PU(t)}, t=1, 2, \dots, \min(Np, N)$$

faz com que, mesmo com deslocamentos paralelos da estrutura a termo de juros, o valor gerencial inicial da carteira pré $x(1+R) / Cdi(1; 1, Np+1)$ renda CDI até o vencimento do papel pré ou do futuro de DI, o que for menor, a menos de um erro de segunda ordem, cuja expressão diária é aproximada por

$$x(1+R) np(t+2) / Cdi(t; t+1, Np+1) [Np-N] (\delta z)^2 / 2.$$

Vejamos algumas observações quanto a esta proposição. Se os vencimentos do papel pré e do DI-futuro coincidem, i.e. $N = Np$, então $k(t) = - \frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{x(1+R)}{F}$, $t=1, 2, \dots, Np$. Esta é exatamente a expressão obtido na seção 2, quando “casamos” os financeiros futuros.

A expressão de $k(t)$ pode ser interpretada como o número de contratos obtidos quando “casamos” os financeiros futuros comparados numa mesma data (daí o termo $Cdi(t; Np+1, N+1)$), ou os financeiros correntes, ponderados pelo número de dias úteis

até os vencimentos, onde a taxa de juros diária ainda é desconhecida. Observe que o termo $(1+i(t+1))/h$ é meramente técnico, aparecendo na expressão de $k(t)$ apenas em função do tamanho do contrato de DI e da liquidação em $t+1$.

Note também que o termo $Cdi(t; Np+1, N+1)$ depende da data em que se esteja, de maneira que este vai se adaptando às mudanças na expectativa de juros futuros. Nesse sentido, a regra de ajustes aqui proposta não carrega erros passados, ou seja, os erros não têm memória: impactam apenas a data t quando ocorrem, mas não as datas futuras.

Outro ponto importante é que o sinal do erro de segunda ordem é o mesmo que aquele de x $[Np-N]$. Como o ideal é sempre termos um erro de segunda ordem positivo (nesse caso o valor gerencial inicial da carteira pré $x(1+R)/Cdi(1;1,Np+1)$ renda pelo menos CDI), se estamos aplicando (x positivo) então devemos vender um DI-futuro mais curto que o papel pré. Se estamos captando (x negativo) devemos comprar um DI-futuro mais longo que a captação pré.

Vejamos um corolário interessante da proposição 3.

COROLÁRIO: Suponha que existam dois futuros de DI, um vencendo antes do papel pré, em Nc e outro depois, em NL . Então, as sequências de contratos de DI-futuro curto $kc(t)$ e longo $kl(t)$ dadas por:

$$kc(t) = - \frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{np(t+2)}{nc(t+2)} \frac{x[NL - Np](1+R) Cdi(t; Np+1, Nc+1)}{F[NL - Nc]}$$

$$kl(t) = - \frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{np(t+2)}{nl(t+2)} \frac{x[Np - Nc](1+R) Cdi(t; Np+1, NL+1)}{F[NL - Nc]}, t = 1, 2, \dots, Nc.$$

fazem com que, mesmo com deslocamentos paralelos da estrutura a termo de juros, o valor gerencial inicial da carteira pré $x(1+R)/Cdi(1;1,Np+1)$ renda CDI até o vencimento do futuro de DI curto, a menos de erros de terceira ordem.

Dem: Podemos dividir x em $x = x_c + x_L$, onde x_c e x_L são as parcelas de x que serão “*hedgeadas*” com os futuros curto e longo, respectivamente. Usando a proposição 3, temos as sequências de contratos

$$kc(t) = - \frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{np(t+2)}{nc(t+2)} \frac{x_c(1+R) Cdi(t; Np+1, Nc+1)}{F}, e$$

$$kl(t) = - \frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{np(t+2)}{nl(t+2)} \frac{x_L(1+R) Cdi(t; Np+1, NL+1)}{F}$$

geram erros de primeira ordem nulos e um erro de segunda ordem total aproximado por $[x_c [N_p - N_c] + (x - x_c) [N_p - N_L]] (1+R)^{np(t+2)} / Cdi(t; t+1, N_p+1) (dz)^2 / 2$. A expressão de x_c que anula a aproximação do erro de segunda ordem é dada por $x_c = x [N_L - N_p] / [N_L - N_c]$. CQD.

Apesar de interessante, o corolário acima é absolutamente inútil. Isso porque, na existência de dois contratos futuros, um mais curto que o papel pré, e outro mais longo, sempre teremos um futuro de DI que produz *hedges* com erros de segunda ordem positivos, o que é claramente preferível à ausência de erros de segunda ordem. Isto não significa afirmar que nunca devemos utilizar ambos os futuros de DI num *hedge*, mas que o objetivo deste *hedge* têm que ser mais amplo do que proteger a carteira para deslocamentos paralelos da estrutura de juros. Talvez a proteção da carteira para deslocamentos não paralelos dos juros envolva o uso de ambos os futuros de DI, mas isso foge do escopo deste artigo.

O exemplo 7 a seguir ilustra o uso da proposição 3.

EXEMPLO 7: Suponha que um investidor se depare com a seguinte oportunidade: há um papel pré no mercado pagando 5,600% de taxa *over* média num período de 20 dias úteis, enquanto que a taxa *over* média embutida no futuro de DI, para o prazo do papel pré, é de 5,385%. O futuro de DI vence em 35 dias úteis.

Na ausência de alterações nas taxas de juros, uma aplicação de R\$ 10.000.000 nesse papel pré, renderia

$$10.000.000 \left[\left[\frac{1 + \frac{5,600}{3.000}}{1 + \frac{5,385}{3.000}} \right]^{20} - 1 \right] = 14.317$$

O valor de resgate da aplicação pré é de R\$ 10.380.029.

O problema do investidor é fazer o valor gerencial inicial de sua posição dado por R\$ 10.014.317 render o CDI diário, para deslocamentos paralelos da estrutura de juros.

Na Tabela 1 fazemos uma simulação da evolução da estrutura a termo de juros. Na coluna "Data" apenas enumeramos as datas; na coluna "shift" mostramos o deslocamento paralelo da estrutura de juros para o dia, relativamente ao projetado no dia anterior. Observe que para uma taxa *over* de 5,385%, a taxa de juros diária é de 0,1795% e,

portanto, um *shift* de 0,0050% corresponde a deslocamento de aproximadamente 2,8% da taxa de juros original.

A terceira coluna mostra a evolução do futuro de DI. As três colunas seguintes mostram as evoluções do CDI diário, da taxa *over* média entre a data corrente e o vencimento do papel pré e a taxa *over* média entre o vencimento do papel pré e o vencimento do futuro de DI., respectivamente. Note que a oscilação dessa última taxa é especialmente violenta na nossa simulação, oscilando de um mínimo de 5,40% até um máximo de 6,15%.

A última coluna lista a quantidade de contratos futuros a serem vendidos para se efetuar o *hedge*.

TABELA 1

Data	"Shift"	Futuro de DI	Juros - Taxa <i>over</i>			Contratos
			Cdi Diário	Até venc. papel pré	Entre venc. pré e DI	
1	0,0000%	93.909	5,30	5,38	5,40	(117)
2	0,0050%	93.920	5,30	5,53	5,55	(114)
3	0,0050%	93.935	5,45	5,69	5,70	(110)
4	0,0050%	93.960	5,70	5,84	5,85	(107)
5	0,0050%	93.998	5,85	5,99	6,00	(103)
6	0,0050%	94.045	6,00	6,14	6,15	(100)
7	-0,0050%	94.365	6,15	6,01	6,00	(95)
8	-0,0050%	94.686	6,00	5,86	5,85	(91)
9	-0,0050%	94.999	5,85	5,71	5,70	(86)
10	-0,0050%	95.303	5,70	5,56	5,55	(80)
11	-0,0050%	95.599	5,55	5,41	5,40	(74)
12	0,0050%	95.666	5,40	5,53	5,55	(68)
13	0,0050%	95.732	5,55	5,68	5,70	(61)
14	0,0050%	95.809	5,70	5,83	5,85	(54)
15	0,0050%	95.895	5,85	5,98	6,00	(45)
16	0,0050%	95.991	6,00	6,12	6,15	(36)
17	-0,0050%	96.269	6,15	6,04	6,00	(25)
18	-0,0050%	96.549	6,00	5,90	5,85	(13)
19	-0,0050%	96.819	5,85	5,78	5,70	0
20	-0,0050%	97.081	5,70	5,70	5,55	0

Na Tabela 2, listamos na segunda coluna a evolução desejada da carteira, i.e., corrigimos o valor inicial da mesma (10.014.317), pelo CDI observado, conforme descrito na Tabela 1.

As quatro colunas seguintes apresentam o resultado efetivo da carteira decomposto em suas parcelas referentes ao papel pré, na coluna 3, e aos contratos futuros, nas colunas 4 e 5. A coluna seguinte consolida as parcelas e a última coluna relata a diferença entre o resultado desejado e o obtido.

Observe que a diferença observada no vencimento do papel pré foi de apenas R\$ 36. Considerando-se que o ganho potencial corrigido pelo CDI efetivo é de R\$ 14.877 ($14.317 \times 1,03906$), o erro foi de apenas 0,242%.

Note também que na ausência do *hedge* a aplicação pré-fixada daria prejuízo. Com efeito, seu valor de resgate de R\$ 10.380.029 é inferior ao custo de carregio de R\$ 10.390.600 ($10.000.000 \times 1,03906$).

TABELA 2

Data	Carteira Evolução a CDI (i)	Carteira - evolução efetiva			Dif (i)-(iv)
		Papel (ii)	Futuros Ajuste Diário (iii)	Total (iv)=(ii)+(iii)	
1	10.014.317	10.014.317	0	10.014.317	0
2	10.032.009	10.022.985	9.021	10.032.006	3
3	10.049.733	10.032.161	8.527	10.049.726	7
4	10.067.990	10.042.350	8.033	10.067.980	11
5	10.087.121	10.053.890	7.540	10.087.108	14
6	10.106.794	10.066.449	7.046	10.106.777	17
7	10.127.012	10.093.144	(6.561)	10.126.992	19
8	10.147.777	10.119.910	(6.073)	10.147.755	22
9	10.168.076	10.145.732	(5.581)	10.168.052	24
10	10.187.907	10.170.603	(5.086)	10.187.880	26
11	10.207.265	10.194.516	(4.589)	10.207.237	28
12	10.226.150	10.209.292	4.083	10.226.120	30
13	10.244.557	10.224.090	3.577	10.244.525	31
14	10.263.510	10.239.933	3.071	10.263.477	33
15	10.283.012	10.256.826	2.563	10.282.978	34
16	10.303.067	10.274.774	2.054	10.303.032	35
17	10.323.677	10.296.872	(1.545)	10.323.641	35
18	10.344.845	10.319.017	(1.032)	10.344.809	36
19	10.365.538	10.340.176	(517)	10.365.502	36
20	10.385.754	10.360.342	0	10.385.718	36
21	10.405.489	10.380.029	0	10.405.452	36

Seção 5: Caso Geral

Na seção anterior o papel pré não pagava nenhum coupon, com todo seu pagamento concentrado na data de vencimento. Vejamos como obter a regra de ajustes de contratos de futuro de DI para se “*hedgear*” um papel que pague coupons.

Começemos definindo duração e convexidade para um papel que paga “m” coupons F_i nas datas $t = N_i + 1$, respectivamente. O valor $x(t)$ desse papel pré numa data t qualquer é dado por:

$$x(t) = \sum_{i | N_i + 1 \geq t} \frac{F_i}{Cdi(t; t, N_i + 1)}$$

Para incorporar mudanças nas taxas de juros, reescrevamos $Cdi(t; t, N_i + 1)$ como $Cdi(t; t, N_i + 1)(1+z)^{ni(t+2)}$. Observe que utilizamos $ni(t+2)$ ao invés de $ni(t)$ já que tanto a taxa de juros do dia, como aquela do dia seguinte, são supostas conhecidas. Reescrevendo $x(t)$ como $x(t, z)$ temos:

$$x(t, z) = \sum_{i | N_i + 1 \geq t} \frac{F_i}{Cdi(t; t, N_i + 1)(1+z)^{ni(t+1)}}$$

A primeira e a segunda derivadas de $x(t, z)$ em relação a z são dadas por:

$$\frac{dx(t, z)}{dz} = - \sum_{i | N_i + 1 \geq t} \frac{ni(t+2)F_i}{Cdi(t; t, N_i + 1)(1+z)^{ni(t+3)}} e$$

$$\frac{d^2 x(t, z)}{dz^2} = \sum_{i | N_i + 1 \geq t} \frac{ni(t+2) ni(t+3) F_i}{Cdi(t; t, N_i + 1)(1+z)^{ni(t+4)}}$$

Definimos duração $D(t)$ como:

$$D(t) = - \frac{1}{x(t)} \left. \frac{dx(t, z)}{dz} \right|_{z=0} = \frac{1}{x(t)} \sum_{i | N_i + 1 \geq t} \frac{ni(t+2)F_i}{Cdi(t; t, N_i + 1)}$$

Definimos convexidade $\text{Con}(t)$ como:

$$\text{Con}(t) = \frac{d^2 x(t, z)}{dz^2} \Big|_{z=0} = \sum_{i: N_i+1 \geq t} \frac{n_i(t+2) n_i(t+3) F_i}{C_{di}(t, t, N_i+1)}$$

No caso de um papel pré sem coupon temos que $D(t) = np(t+2)$ e $\text{Con}(t) = np(t+2) np(t+3) x(t)$, ou alternativamente $\text{Con}(t) = D(t) (D(t)-1) x(t)$.

Quanto ao futuro de DI, como este é um *swap* de papel pré contra um papel pós-fixado, sua duração e convexidade são as mesmas da parte pré-fixada do *swap*, ou seja, $D(t) = n(t+2)$ e $\text{Con}(t) = np(t+2) np(t+3) PU(t)$. Observe que o comprador do DI-futuro tem convexidade positiva, enquanto que o vendedor, negativa.

Denotando-se a duração do papel pré por $D_p(t)$, temos que a expressão da regra de contratos futuros de DI da proposição 3 pode ser reescrita como:

$$k(t) = -\frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{D_p(t)}{D(t)} \frac{x(t)}{PU(t)}, \quad t=1,2,\dots, \min(N_p, N)$$

Assim, $k(t)$ é o número de contratos obtidos quando “casamos” os financeiros correntes ponderados pelas durações dos instrumentos.

Mostremos agora que esta expressão de $k(t)$ também é válida para o *hedge* de um papel pré pagando coupons utilizando-se o DI-futuro.

Nosso objetivo é fazer com que $x(1)$ renda a taxa do CDI efetivamente verificada. Para tal constituiremos uma carteira formada por:

- i) o papel pré;
- ii) um certo número de contratos futuros de DI;
- iii) os ajustes diários do futuro de DI mais os coupons pagos, acumulados até a data corrente, sempre reinvestidos às taxas do CDI diárias.

Seja $C(t)$ o valor da carteira na data t . Claramente, $C(1) = x(1)$. Defina $f(t)$ como:

$$f(t) = \begin{cases} F_i & \text{se } t = N_i + 1 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

Defina $A(t)$ como o valor acumulado dos ajustes do DI futuro mais os coupons pagos até a data t . Por definição temos que:

$$A(t+1) = [A(t) + f(t)] (1+i(t)) + k(t)h/(1+i(t+1)) [P(t+1) - P(t)(1+i(t))]$$

O valor financeiro carteira numa data t qualquer é dada por:

$$C(t) = \sum_{i | Ni+1 \geq t} \frac{Fi}{Cdi(t; t, Ni + 1)} + A(t)$$

A variação da carteira acima do CDI é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta C(t+1) &= \sum_{i | Ni+1 \geq t+1} \frac{Fi}{Cdi(t+1; t+1, Ni + 1)} + A(t+1) - (1+i(t)) \left[\sum_{i | Ni+1 \geq t} \frac{Fi}{Cdi(t; t, Ni + 1)} + A(t) \right] \\ &= \sum_{i | Ni+1 \geq t+1} \frac{Fi}{Cdi(t+1; t+1, Ni + 1)} - (1+i(t)) \left[\sum_{i | Ni+1 \geq t} \frac{Fi}{Cdi(t; t, Ni + 1)} - f(t) \right] + \\ &\quad + k(t)h/(1+i(t+1)) [P(t+1) - P(t)(1+i(t))] \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $Cdi(t+1; t+1, Ni+1) = Cdi(t; t, Ni+1)(1+z)^{ni(t+2)}/(1+i(t))$, temos:

$$\sum_{i | Ni+1 \geq t+1} \frac{Fi}{Cdi(t+1; t+1, Ni + 1)} = (1+i(t)) \sum_{i | Ni+1 \geq t+1} \frac{Fi}{Cdi(t; t, Ni + 1)(1+z)^{ni(t+2)}}$$

Somando-se e subtraindo-se o termo $(1+i(t))f(t)$ da expressão acima, obtemos:

$$\sum_{i | Ni+1 \geq t+1} \frac{Fi}{Cdi(t+1; t+1, Ni + 1)} = (1+i(t)) \left[\sum_{i | Ni+1 \geq t} \frac{Fi}{Cdi(t; t, Ni + 1)(1+z)^{ni(t+2)}} - f(t) \right]$$

Como a expressão da parcela de futuros é a mesma daquela obtida na seção 4.2, temos:

$$\begin{aligned} \Delta C(t+1, z) &= (1+i(t)) \sum_{i | Ni+1 \geq t} \frac{Fi}{Cdi(t; t, Ni + 1)} [(1+z)^{-ni(t+2)} - 1] + \\ &\quad + k(t)h/(1+i(t+1)) F / Cdi(t; t+1, N+1) [(1+z)^{-n(t+2)} - 1] \end{aligned}$$

Observe que $\Delta C(t+1,0) = 0$. Derivando-se $\Delta C(t+1,z)$ em relação a z , calculando a derivada no ponto $z = 0$, e usando a definição de duração obtida anteriormente nesta seção obtemos:

$$k(t) = -\frac{(1+i(t+1))}{h} \frac{Dp(t)}{D(t)} \frac{x(t)}{PU(t)}$$

o que demonstra o resultado desejado.

O exemplo 8 a seguir ilustra o caso geral.

EXEMPLO 8: No início do mês, um comerciante estuda a viabilidade de distribuir o produto XYZ. Pesquisas de mercado indicam uma boa aceitação por parte dos consumidores e é esperada uma venda média de 100.000 unidades por dia (útil, para simplificar) ao preço de R\$ 50,00 a unidade. O fornecedor do produto cobra R\$ 49,50 a unidade num lote de 3 milhões de unidades. O prazo de pagamento é de 45 dias, ou 30 dias úteis da data inicial. Além disso, o esforço adicional de vendas requererá despesas extras de mão-de-obra e propaganda, a serem pagas no final do mês (ou 20 dias úteis da data inicial) ordem de R\$ 5 milhões.

Na data inicial o investidor conhece as taxas de juros diárias para os próximos 30 dias úteis, mas sabendo que estas são apenas projeções de taxas de juros, e não taxas efetivas. As taxas over para o período são:

Da data 0 até a data 11: 5,30 ou 0,176%;
 Da data 12 até a data 19: 5,40 ou 0,180%; e
 Da data 20 até a data 29: 5,50 ou 0,183%.

Às projeções correntes de juros, o comerciante pode facilmente calcular qual o valor presente do seu ganho. Para tal, basta reconhecer que o fluxo de caixa de seu negócio pode ser interpretado como um título que paga coupons F_i dados por:

$F_i = 100.000 \times 50 = 5.000.000$ ($i=1,2,\dots, 19,21,\dots,29$)
 $F_{20} = 100.000 \times 50 - 5.000.000 = 0$
 $F_{30} = 100.000 \times 50 - 3.000.000 \times 49,50 = - 143.500.000$

O valor presente do ganho do comerciante é de R\$ 397.674,91.

O comerciante sabe que seu resultado depende das taxas de juros. Com efeito, as receitas de vendas significativamente antecedem as despesas.

Na ausência de alterações das taxas de juros, o resultado do comerciante no dia 1 é simplesmente aquele da data 0 corrigido por uma taxa over de 5,30, ou seja, R\$ 398.377,46. No entanto, caso as taxas de juros caiam, o comerciante terá prejuízo. A título de exemplo suponha que as taxas over caiam de 0,2 (com exceção da taxa do dia 1, suposta constante, como fizemos ao longo deste artigo). As novas taxas de juros são:

Data 1 : 5,30
 Da data 2 até a data 11: 5,10 ou 0,170%;
 Da data 12 até a data 19: 5,20 ou 0,173%; e
 Da data 20 até a data 29: 5,30 ou 0,176%.

O resultado do comerciante passa a ser de apenas R\$ 260.127,17, ou seja, uma perda R\$ 138.250,29 ou 34,70% do lucro original.

O mais prudente é o comerciante efetuar um hedge para a taxas de juros. Vamos supor que existe um contrato de DI-futuro que vence em 20 dias úteis. Seu preço, de acordo com a estrutura a termo de juros inicial é dado por 96.505,67. A *duration* D(0) desse DI é igual a 19.

Já a *duration* do ganho do comerciante é de -5.220,05. O número de contratos a ser adquirido pelo comerciante é de:

$$2.268,26 = \frac{1,00176 \times 5.220,05 \times 397.674,91}{0,5 \times 19 \times 96.505,67}$$

Com a nova curva de juros, o PU do DI na data 1 é de 96.792,05 e o resultado do *hedge* é de

$$132.160,20 = 0,5 \times 2.268,26 \times [96.792,05 - 1,00176 \times 96.505,67]$$

Observe que o *hedge* cobre quase que a totalidade da perda, a diferença sendo devida a erros de segunda ordem. Claramente, o comerciante tem que ajustar diariamente o número de contratos para que o *hedge* funcione ao longo do tempo.

Seção 6: Comentários Finais e Sugestões

A consolidação da estabilidade econômica deverá modificar substancialmente o uso de instrumentos relacionados às taxas de juros. Num ambiente de inflação elevada e imprevisível para um futuro próximo, o prazo dos instrumentos financeiros naturalmente se reduz e o foco das mesas de renda fixa é a previsão das taxas de inflação. Nesse

ambiente, virtualmente inexistente uma estrutura a termo de juros. Com uma economia estável, o alongamento dos prazos é inevitável.

O propósito principal deste artigo é apresentar técnicas de hedge de taxas de juros para instrumentos financeiros.

O principal resultado aqui descrito é o *hedge* de uma carteira de títulos para pequenas oscilações paralelas da estrutura a termo de juros. Em particular, tal hipótese implica no *hedge* de juros com apenas um contrato futuro de DI que é escolhido entre aqueles contratos que maximiza a convexidade da posição hedgeada.

Entretanto, todas as possibilidades de deslocamentos não-paralelos foram excluídas. Um investidor simultaneamente preocupado com o *steepening* ou o *flattening* da estrutura a termo de juros não encontrará uma solução para o seu problema. Provavelmente sua estratégia de *hedge* envolverá mais de um contrato de DI-futuro.

Dessa forma, sugerimos a extensão do modelo aqui desenvolvido para incorporar o caso de deslocamentos não paralelos da estrutura de juros.

A análise empírica das mudanças na estrutura a termo das taxas de juros no Brasil é outra linha de pesquisa interessante. Mesmo que o *hedge* para deslocamentos não paralelos seja conhecido, cabe ao *hedger* determinar qual tipo de deslocamento da estrutura a termo de juros deve ser hedgeado. É nessa etapa do processo de decisão que a evidência empírica é decisiva.

A título de exemplo, Scheinkman and Litterman (1991) mostram que os deslocamentos das taxas de juros para títulos do governo americano (*US government bonds*) são afetados por três fatores que os autores denominam por “nível” (*level*), “inclinação” (*steepness*) e “curvatura” (*curvature*). Empiricamente, os três fatores explicam, em média, 98,4% da variância das taxas de juros. Dessa proporção, 89,5% devem-se ao fator “nível”, cabendo aos fatores “inclinação” e “curvatura” 8,5% e 2,0%, respectivamente.

Além de identificar os fatores afetando as taxas de juros dos *bonds*, os autores sugerem técnicas de *hedge* para cada um dos fatores.

Claramente, estudos semelhantes para o caso brasileiro são muito bem-vindos.

Bibliografia

- BM&F; *Especificações do Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de um Dia*.
- Ho, Thomas S. Y.; *Strategic Fixed-Income Investment*, Dow Jones-Irwin, 1990.
- Lima, Elon Lages; *Curso de Análise, Vol. 2*; IMPA, segunda edição.
- Scheinkman, José and Litterman, Robert; *Common Factors Affecting Bond Returns*, The Journal of Fixed Income, June 1991.