

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

NAIO INO

DELTA HEDGE COM CUSTOS DE TRANSAÇÃO: UMA ANÁLISE COMPARATIVA

SÃO PAULO
2013

DELTA HEDGE COM CUSTOS DE TRANSAÇÃO: UMA ANÁLISE COMPARATIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia e Finanças da Fundação Getúlio Vargas/EESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia, linha de Finanças Quantitativas.

Orientador:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

SÃO PAULO

2013

Ino, Naio.

Delta Hedge com custos de transação: uma análise comparativa / Naio
Ino. - 2013.
58 f.

Orientador: Afonso de Campos Pinto

Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Mercado de opções. 2. Ações (Finanças) - Preços. 3. Custos de
transação. 4. Método de Monte Carlo. I. Pinto, Afonso de Campos. II.
Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo. III. Título.

CDU 336.764.2

NAIO INO

DELTA HEDGE COM CUSTOS DE TRANSAÇÃO: UMA ANÁLISE COMPARATIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia e Finanças da Fundação Getúlio Vargas/EESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia, linha de Finanças Quantitativas

Data da Aprovação: ____/____/____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto
(Orientador)
FGV - EESP

Prof. Dr. Juan Carlos Ruilova Téran
FGV - EESP

Prof. Dr. Roberto Anis Calfat
INSPER

Agradecimentos

Aos meus pais, por todos os anos de apoio e encorajamento para superar desafios.

À minha esposa, Tânia, pelo apoio e paciência, sem o qual esse trabalho não teria sido possível.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto pela oportunidade de fazer parte da primeira turma do MPFE – Linha de Finanças Quantitativas da FGV-SP, pelo suporte ao longo de todo o curso, e por todo o apoio na conclusão deste trabalho.

A todos os professores do MPFE – Linha de Finanças Quantitativas.

Resumo

Dentre as premissas do modelo de Black-Scholes, amplamente utilizado para o apreçamento de opções, assume-se que é possível realizar a replicação do *payoff* da opção através do rebalanceamento contínuo de uma carteira contendo o ativo objeto e o ativo livre de risco, ao longo da vida da opção. Não somente o rebalanceamento em tempo contínuo não é possível, como mesmo que o fosse, em um mercado com custos de transação, rebalanceamentos da estratégia replicante com intervalos de tempo muito baixos teriam o *payoff* da estratégia replicante comprometido pelos altos custos totais de transação envolvidos.

Este trabalho procura comparar metodologias de *delta-hedge*, tomando como base uma *call* européia vendida em um mercado com custos de transação. Para comparar as diferentes estratégias, este estudo será dividido em duas partes: na primeira, serão escolhidas três ações do mercado brasileiro, e usando simulações de Monte Carlo para cada ação, avaliamos diferentes modelos de *delta-hedge* a partir do erro de replicação do portfolio global e dentro de um contexto de média \times variância, considerando-se custos de transação. Em um segundo momento, para o mesmo grupo de ações, testamos os resultados práticos dos modelos, usando dados de mercado.

Os resultados encontrados indicam que os modelos do tipo *move-based* apresentam desempenho superior aos do tipo *time-based*.

Palavras-Chave: *Delta-Hedge*, Opções, Custos de transação, Monte Carlo, Erro de replicação.

Abstract

Among the assumptions of the Black-Scholes model, widely used for option pricing, it is assumed that it is possible to perform the replication of the option payoff through continuous rebalancing of a portfolio containing the underlying asset and the risk-free asset, along the life of the option. Not only rebalancing in continuous time is not possible, even as it were, in a market with transaction costs, replicating the rebalance strategy with very low time intervals would have the payoff of the replicating strategy compromised by the high total transaction costs involved.

This paper seeks to compare delta-hedge methodologies, based on a short European call in a market with transaction costs. To compare the different strategies, this study will be divided into two parts: in the first part, three stocks of the Brazilian market will be chosen, and using Monte Carlo simulations for each stock, we evaluate different delta-hedging models based on the replication error in a mean \times variance context, considering transaction costs. In the second part, for the same group of shares, we tested the practical results of the models using market data.

The results indicate that move-based models have superior performance than time-based models.

Key-words: *Delta-Hedge*, Options, Transaction Costs, Monte Carlo, Replication Error.

Sumário

1. Introdução.....	10
1.1. Motivação.....	10
1.2. Objetivo.....	10
1.3. Estrutura.....	11
2. Revisão Bibliográfica.....	13
3. Arcabouço Teórico	17
3.1. Custos de Transação	19
3.2. Modelos de <i>Delta-Hedge</i>	22
3.2.1. Black-Scholes	22
3.2.2. Leland	24
3.2.3. Banda de Tolerância para o Preço do ativo objeto	25
3.2.4. Whalley e Wilmott	26
3.3. Modelo de Heston.....	30
4. Metodologia	33
4.1. Simulações de Monte Carlo	33
4.2. Aplicação Prática	36
5. Resultados.....	38
5.1. CYRELA ON	38
5.2. OGX ON.....	44
5.3. PETROBRAS PN.....	49
6. Conclusões e Pesquisas Futuras	55
6.1. Conclusões.....	55
6.2. Pesquisas Futuras.....	56
7. Referências Bibliográficas	57

Lista de gráficos e figuras

Gráfico 1 - Distribuição de probabilidades para o preço de uma opção, sem custos de transação, variando-se os intervalos de rebalanceamento.....	17
Gráfico 2 - Distribuição de probabilidades para o preço de uma opção, com custos de transação, variando-se os intervalos de rebalanceamento.....	18
Gráfico 3 - Estratégia de hedge comparada contra o delta de Black Scholes para um <i>short Butterfly spread</i> usando: $\gamma = 2$, $\lambda = 0,01$, $St = 100$, $\sigma = 0.25$, $\mu = r = 0,05$, $T - t = 0,5$ e preços de exercício 80, 100 e 120.	28
Gráfico 4 - Faixas de tolerância ao redor do delta da opção. $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 0.1$ $\lambda = 0,5\%$, $St = 100$, $\sigma = 0.20$, $k = 100$, $T - t = 1$	30
Gráfico 5 - Fronteiras eficientes para os modelos BS, LEL, BTP, WW para CYRE3.....	35
Gráfico 6 - Histórico do preço da CYRE3.....	38
Gráfico 7 - CYRE3 - Fronteiras eficientes para $K_1 = 18,5$	39
Gráfico 8 – CYRE3 - Fronteiras eficientes para $K_2 = 17,5$	40
Gráfico 9 – CYRE3 - Fronteiras eficientes para $K_3 = 16,5$	41
Gráfico 10 – CYRE3 – Erro de replicação para $K_1 = 18,5$	42
Gráfico 11 – CYRE3 – Erro de replicação para $K_2 = 17,5$	43
Gráfico 12 – CYRE3 – Erro de replicação para $K_3 = 16,5$	43
Gráfico 13 - Histórico do preço da OGXP3	44
Gráfico 14 – OGXP3 - Fronteiras eficientes para $K_1 = 7$	45
Gráfico 15 – OGXP3 - Fronteiras eficientes para $K_2 = 6$	46
Gráfico 16 – OGXP3 - Fronteiras eficientes para $K_3 = 5$	46
Gráfico 17 – OGXP3 – Erro de replicação para $K_1 = 7$	47
Gráfico 18 – OGXP3 – Erro de replicação para $K_2 = 6$	48
Gráfico 19 – OGXP3 – Erro de replicação para $K_3 = 5$	48
Gráfico 20 - Histórico do preço da PETR4	49
Gráfico 21 – PETR4 - Fronteiras eficientes para $K_1 = 23$	50
Gráfico 22 – PETR4 - Fronteiras eficientes para $K_2 = 21$	50
Gráfico 23 – PETR4 - Fronteiras eficientes para $K_3 = 20$	51
Gráfico 24 – PETR4 – Erro de replicação para $K_1 = 23$	52
Gráfico 25 – PETR4 – Erro de replicação para $K_2 = 21$	53
Gráfico 26 – PETR4 – Erro de replicação para $K_3 = 20$	53

1. Introdução

1.1. Motivação

O uso de opções financeiras tem se difundido nas últimas décadas como uma importante alternativa de investimento. E o entendimento do conceito de *delta-hedge*, quando se relaxam algumas hipóteses do modelo de Black e Scholes (1973) é algo que deve ser dominado por *market makers*, *risk managers*, e investidores interessados em operar volatilidade, como uma forma de se mitigar riscos indesejáveis de uma determinada operação, ou poder realizar o melhor apreçamento destes derivativos.

Diversos trabalhos teóricos foram desenvolvidos nas últimas décadas, com o mesmo objetivo: avaliar os efeitos de se relaxar a hipótese de ausência de custos de transação. Cada um destes modelos, com suas vantagens e desvantagens.

Mas a pergunta que resta é: dentre os diversos modelos disponíveis na literatura hoje, algum deles é mais eficiente do que os demais em se tratando de *delta-hedge* em um mercado onde os custos de transação não são nulos e qual a melhor forma de avaliá-los ? Além disso, se este modelo teórico, aplicado a um conjunto de opções no mercado local, produziria resultados satisfatórios, tomando-se como critério de avaliação o erro de replicação ?

1.2. Objetivo

O objetivo deste trabalho é avaliar diferentes modelos utilizados para se fazer o *delta-hedge* de uma *call* européia *plain vanilla*, quando consideramos os custos de transação envolvidos. Este estudo não tem a pretensão de avaliar todos os modelos disponíveis, mas sim focar nas metodologias mais utilizadas pelo mercado. Para se poder chegar a uma conclusão, modelaremos o comportamento dos preços de um grupo de ações do mercado brasileiro, usando o modelo de volatilidade estocástica de Heston, e através de simulações de Monte Carlo,

avaliaremos o erro de replicação dentro de um critério de risco x retorno, variando-se os parâmetros de cada um dos modelos.

O objetivo deste passo é verificar a existência de um modelo que se prove superior, para cada uma das ações escolhidas, ou para todo o grupo, e encontrar os parâmetros que tornam a comparação entre os diferentes modelos, equivalente.

Em um segundo momento, com base na escolha do melhor parâmetro para cada modelo e ação, iremos simular o resultado das estratégias de *delta-hedge* de cada modelo, utilizando preços de mercado para um grupo de ações negociadas no mercado brasileiro.

1.3. Estrutura

Este trabalho está dividido em 5 capítulos, onde no capítulo 1, apresentamos uma breve descrição com a motivação para este trabalho, e o objetivo que esperamos ser alcançado na conclusão do mesmo.

No capítulo 2, apresentamos uma revisão bibliográfica mencionando os trabalhos que já foram realizados sobre a comparação de diferentes modelos de *delta-hedge* considerando-se os custos de transação, e uma breve descrição do que deverá ser a contribuição deste trabalho para o tema.

No capítulo 3, demonstramos o *trade-off* existente ao se aplicar o conceito de *delta-hedge* em um mercado com custos de transação. Também definimos o que será considerado custo de transação neste estudo, e conceituamos os modelos de *delta-hedge* a serem analisados neste estudo. Ainda no capítulo 3, fazemos uma breve descrição do modelo de Heston, que será utilizado para as simulações de Monte Carlo com volatilidade estocástica.

A divisão do estudo, e as metodologias a serem adotadas neste trabalho, incluindo os parâmetros, intervalos de tempo, e ativos a serem testados, se encontram no capítulo 4.

No capítulo 5, apresentamos os resultados obtidos, tanto os resultados teóricos, quanto os resultados práticos, e no capítulo 6, encerramos este trabalho com as conclusões obtidas e sugestões para pesquisas futuras.

2. Revisão Bibliográfica

Ao longo das últimas décadas, diversos trabalhos teóricos foram dedicados ao estudo de modelos que fossem capazes de incorporar custos de transação para o apreçamento e *delta-hedge* de opções. Porém, pouco foi feito no que se refere a comparação empírica entre os modelos.

Mohamed (1994) foi um dos pioneiros neste campo, onde separou o erro de *delta-hedge* em 2 componentes: o erro de replicação e os custos de transação. Rebalanceamentos frequentes da estratégia replicante reduzem o erro de replicação, mas em compensação, aumentam os custos de transação. Para avaliar o *trade-off* entre os diferentes parâmetros e modelos, simulações de Monte Carlo foram usadas, assumindo-se uma posição *short* em uma *call*, e custos de transação proporcionais ao valor financeiro das operações de rebalanceamento.

Martellini e Priaulet (2002), optaram por testar 5 modelos de *delta-hedge* para mercados com custos de transação, dividindo-os em 2 tipos de estratégia: *time-based* e *move-based*. Dentro da estratégia do tipo *time-based*, 3 estratégias foram testadas: *single*, *double*, e *triple*. Na estratégia *single*, o rebalanceamento da estratégia replicante foi feito a cada passo de tempo. Na estratégia *double* ($t1-t2$), metade da posição foi rebalanceada no passo de tempo $t1$, e a segunda metade no passo $t2$. Na estratégia *triple* ($t1-t2-t3$), como é possível imaginar, apenas um terço da posição foi rebalanceada no passo de tempo $t1$, o segundo terço no passo $t2$, e o último terço no terceiro passo de tempo $t3$, e assim por diante. Para as estratégias do tipo *move-based*, duas estratégias foram escolhidas: *UAMB* (*Underlying Asset Move Based*), e *DMB* (*Delta Move Based*). Para a estratégia *UAMB*, estabeleceu-se um limite \underline{a} para a variação do preço do ativo objeto. Uma vez rompido esse limite, é feito o rebalanceamento. Lógica idêntica é adotada para o *DMB*. Um limite \underline{b} é estabelecido para variação do delta da opção, ao redor do delta de *Black e Scholes* (1973) e uma vez rompido este limite, o rebalanceamento é realizado.

Um a um, os modelos foram testados em uma simulação de Monte Carlo. Os parâmetros a , b , t_1 , t_2 e t_3 puderam variar em intervalos pré-estabelecidos. Para cada modelo, e para cada parâmetro, dois valores foram obtidos: o valor esperado do custo total de transação e o desvio padrão do erro de *hedge*, desconsiderando-se os custos de transação. Ou seja, para cada modelo, n pontos correspondentes ao número de valores para o parâmetro testado foram obtidos, formando uma “fronteira-eficiente” para cada modelo. Refazendo as simulações, alterando-se características da opção tais como preço de exercício, e prazo para o vencimento, os autores concluíram que, em geral, as estratégias do tipo *DMB* tendem a produzir melhores resultados que seus pares, mas que os resultados podem variar de acordo com as características da opção.

Zakamouline (2008), também parte do princípio da “fronteira eficiente” gerada através de simulações de Monte Carlo, testando, além dos modelos citados acima, os modelos de Whalley e Wilmott (1997), e Leland (1985), além do próprio modelo de Black e Scholes (1973). Como parâmetro, o modelo de Whalley e Wilmott (1997) possui um índice de aversão a risco do investidor, e será visto em mais detalhes adiante, mas, de forma resumida, pode ser entendido como um modelo similar ao *DMB*, onde a largura da banda de tolerância ao redor do delta de Black e Scholes (1973) é uma função do parâmetro de aversão a risco, dos custos de transação e do gama da opção. O autor também inclui em seus estudos o modelo de Leland (1985), que também será avaliado neste estudo, e que tem como parâmetro, além dos custos de transação, a frequência dos rebalanceamentos. A abordagem de avaliar os resultados dentro de um contexto de média \times variância é mantida. Todavia, ao invés de tratar de forma separada as variáveis erro de hedge e custos de transação, Zakamouline (2008) avalia o resultado conjunto destas duas componentes, que contribuem concomitantemente para o erro de replicação. Portanto, o valor esperado do erro de replicação faz o papel do retorno esperado, e o desvio padrão do erro de replicação faz o papel de risco nesta abordagem. Novamente, uma *call at the money* vendida é usada como exemplo, e a conclusão é que para uma aversão moderada a risco, a estratégia de Whalley e Wilmott (1997) tende a dominar as demais estratégias. Zakamouline (2008), além de

estudar estes modelos para uma *call at the money* vendida, também avalia o uso destas estratégias para estratégias com opções exóticas, concluindo que os resultados podem variar de acordo com as características da opção.

Portanto, conforme demonstrado por Zakamouline (2008), parece haver uma dominância dos modelos do tipo *move-based* sobre os modelos do tipo *time-based*, para o caso de uma *call at the money* vendida. Apesar disso, em nenhum destes estudos, o objetivo do autor é estabelecer qual o melhor parâmetro para cada modelo a ser utilizado, dado que existe um *trade-off* entre maior precisão do erro de replicação, e o impacto dos custos de transação no valor esperado do erro de replicação. Neste trabalho, estabelecemos uma relação entre os parâmetros dos diferentes modelos e aplicamo-los a algumas situações reais, com o objetivo de avaliar os resultados práticos destes modelos.

Clelow e Hodges (1997) também se baseiam no princípio da maximização da utilidade esperada, em mercados com custos de transação para desenvolver um modelo otimizado para *delta-hedge*, assumindo que o custo de transação pode ser representado tanto por um custo fixo quanto por um custo proporcional ao valor transacionado. Para resolver o problema de otimização da maximização da utilidade esperada computacionalmente, constrói-se uma árvore binomial representando os possíveis estados da função utilidade, entre o momento inicial e o vencimento, e resolve-se essa árvore, de trás para frente, usando-se Newton Raphson e Bisseção com o objetivo de se chegar aos parâmetros que irão definir os limites da região de “não-transação”. Para incorporar a questão dos custos fixos, o modelo trabalha com 2 limites para a região de venda e 2 limites para a região de compra. Por exemplo, uma vez atingido o limite de compra, o rebalanceamento deve comprar mais ativos de forma a trazer o delta não de volta para este limite, mas sim a um limite ajustado que incorpora o custo fixo de transação. Para mostrar a eficiência do modelo, utiliza-se novamente simulações de Monte Carlo e um *framework* de média \times variância, comparando-se os resultados do modelo proposto com os obtidos utilizando-se Black e Scholes (1973) e Leland (1985), e concluindo-se que este *framework* obtém resultados

melhores que os 2 antecessores, quando incorpora-se custos de transação fixos e variáveis.

Hoggard, Whalley e Wilmott (1994) estenderam o modelo de Leland (1985), eliminando uma de suas principais limitações: o sinal do gama deveria ser constante ao longo da vida da opção. Portanto, adaptando o modelo de Leland (1985) para ser aplicado a um portfólio de opções. Uma das desvantagens é que o modelo deixa de ter uma solução fechada, necessitando ser resolvido computacionalmente.

Aguirre (2012) aplicou o modelo de Hoggard, Whalley e Wilmott (1994) para o mercado brasileiro, tomando como base, opções sobre a ação do Banco Itaú PN (ITUB4), e testando diferentes frequências de rebalanceamento com base em simulações de Monte Carlo com volatilidade estocástica. O autor concluiu que a frequência ótima para os rebalanceamentos era de 27min. e que os resultados obtidos com a aplicação do modelo de Hoggard, Whalley e Wilmott (1994) eram superiores aos obtidos com base na aplicação de Black e Scholes (1973) apenas.

Este trabalho explora a aplicação destes modelos de *delta-hedge* ao mercado brasileiro de opções sobre ações e será dividido em duas partes. Na primeira, escolhemos um grupo de ações do mercado brasileiro e usaremos simulações de Monte Carlo que busquem refletir o comportamento dos preços destas ações, e avaliamos o comportamento de cada modelo de *delta-hedge* no mesmo arcabouço de risco e retorno utilizado por Zakamouline (2008) e buscando uma relação entre os parâmetros dos diferentes modelos que nos permita uma comparação equivalente. Na segunda parte, nos aprofundamos nos modelos usando preços reais de mercado para avaliar os resultados das estratégias, e comparando-as com os resultados teóricos.

3. Arcabouço Teórico

Os impactos dos custos de transação e dos rebalanceamentos em tempo discreto ficam claros ao se imaginar o apreçamento de uma *call* europeia, por exemplo, usando uma simulação de Monte Carlo, assumindo-se inicialmente que todas as premissas do modelo de Black e Scholes (1973) são válidas, exceto a de que o rebalanceamento pode ser realizado continuamente. Ao se escolher intervalos de rebalanceamento muito grandes, e se examinar a distribuição de probabilidades dos resultados da estratégia replicante desta opção, trazidos a valor presente, veremos uma distribuição achatada, com uma dispersão significativa ao redor de uma média, onde essa média é igual ao resultado obtido pela fórmula fechada de Black e Scholes (1973). Ao se diminuir o intervalo de rebalanceamentos, iremos perceber que a média deverá se manter, mas a dispersão ao redor desta média tenderá a diminuir, na medida em que os intervalos ficam cada vez menores, conforme demonstrado no Gráfico 1 abaixo:

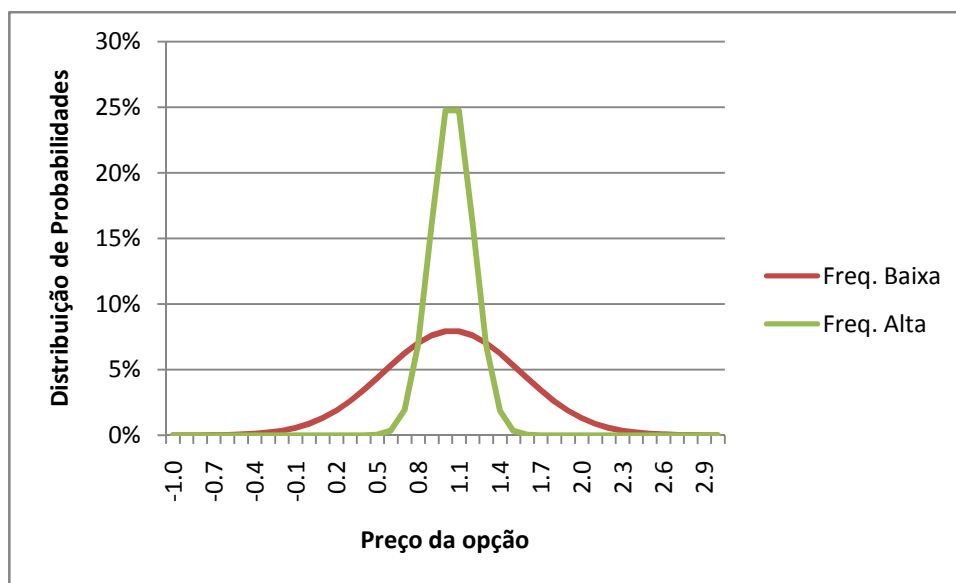


Gráfico 1 - Distribuição de probabilidades para o preço de uma opção, sem custos de transação, variando-se os intervalos de rebalanceamento.

Na medida em que aproximamos o modelo ainda mais da realidade e incluímos custos de transação, temos que, ao diminuirmos o intervalo de rebalanceamentos, diminuimos a dispersão dos resultados, ou seja, diminuimos os riscos da

operação, mas ao mesmo tempo, deslocamos a média da distribuição para a esquerda, o que de certa forma é indesejado, como ilustrado no Gráfico 2 abaixo:

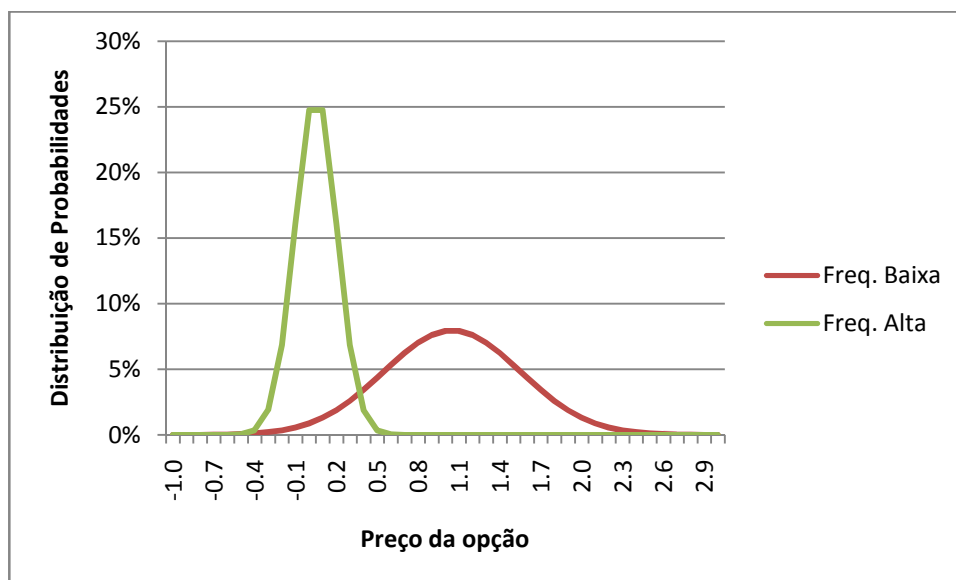


Gráfico 2 - Distribuição de probabilidades para o preço de uma opção, com custos de transação, variando-se os intervalos de rebalanceamento.

Esse exemplo serve exatamente para ilustrar que o erro de replicação (ER) de uma opção pode ser dado pela diferença entre o erro de *hedge* (EH), que é o erro incorrido ao não se rebalancear a cada intervalo infinitesimal de tempo, ou a cada variação mínima do preço do ativo objeto, menos os custos de transação totais (CT) incorridos ao longo da vida da opção:

$$ER = EH - CT \quad (3.1)$$

Ao se tentar reduzir o erro de *hedge*, aproximando-o do zero, através da diminuição do intervalo entre os rebalanceamentos, aumentamos os custos de transação total, e consequentemente, pioramos o erro de replicação. Portanto, as estratégias de rebalanceamento para o *delta-hedge* devem sempre levar em conta o *trade-off* entre maior precisão do *delta-hedge* e o risco de não se atingir o resultado esperado.

Dado que em condições normais de mercado, o rebalanceamento de uma estratégia de *delta-hedge* não pode ser feito nem continuamente e muito menos sem a ausência de impactos de custos de transação, a estratégia replicante por *delta-hedge* não pode ser considerada uma estratégia livre de risco. Portanto, o investidor interessado em realizar *delta-hedge* deve assumir algum grau de risco ao tentar replicar o *payoff* de uma opção ou de um portfolio de opções. O nível de risco que o investidor está disposto a aceitar deve ser refletido nos parâmetros de cada modelo de *delta-hedge* que veremos a seguir. Ao se comparar os diferentes modelos de *delta-hedge*, devemos levar em conta o *trade-off* de cada um dos modelos, e seus respectivos parâmetros.

Uma das formas mais comumente aceitas para se comparar as diferentes estratégias de *delta-hedge* é compará-las empiricamente, dentro de uma análise de risco \times retorno. Portanto, utilizamos uma abordagem idêntica à utilizada por Zakamouline (2008), mas incorporando um modelo de volatilidade estocástica, que será detalhado mais adiante neste trabalho. Dentro desta adaptação, para cada ativo, teremos uma simulação de Monte Carlo que irá refletir a evolução de dados de mercado. Nestas simulações aplicaremos os modelos de *delta-hedge*, detalhados a seguir, variando-se os parâmetros, tais como a frequência de rebalanceamento, mantendo todos os demais parâmetros constantes, de forma a obter diversos pares de média e desvio padrão do erro de replicação. Esses pares de resultados, colocados em um gráfico, irão formar o que pode ser interpretado como uma fronteira eficiente, análogo ao modelo desenvolvido por Markowitz (1952), representando o risco e retorno de cada estratégia.

Partindo do princípio de que o investidor interessado no *delta-hedge* é um investidor racional, o mesmo deverá sempre preferir a estratégia com o maior retorno, dado o mesmo nível de risco.

3.1. Custos de Transação

Nesta seção, iremos rever brevemente a estrutura de custos de transação nos mercados. Em seguida, apresentamos o tratamento habitual dos custos de

transação na teoria dos modelos. Em geral, os modelos assumem que os custos de transação são proporcionais ao volume de negociação, o que faz todo o sentido na prática.

Na maioria dos modelos teóricos assume-se o mercado como sendo livre de custos de transação e o estoque sendo considerado infinitamente divisível, o que significa que um investidor pode comprar ou vender qualquer número de ações de um estoque. Nos mercados reais, no entanto, os negócios são feitos em incrementos discretos, por exemplo, que pode variar desde uma única unidade para incrementos de 100 (lote-padrão) ou mais unidades.

Os custos de transação no mercado de capitais consistem de três componentes principais: metade do tamanho do *bid-ask spread*, corretagem e emolumentos, e os custos indiretos de impacto no mercado¹. Além disso, há impostos, custos de oportunidade, etc... Se o investidor vender ações que ele não possua, então ele também irá incorrer em custos de aluguel da ação.

Todos os investidores enfrentam os mesmos *bid-ask spreads* e custos de impacto no mercado, para um dado volume ou momento do mercado. Em contraste, a corretagem negociada depende, por exemplo, do volume anual de negociação.

Para modelar custos de transação realistas, geralmente é feita uma distinção entre duas classes de investidores: grandes e pequenos. Grandes investidores geralmente enfrentam custos de corretagem mais favoráveis e, muitas vezes, fazem acordos com corretoras para executar suas ordens com um rebate da taxa de corretagem considerável, independente do volume de uma ordem específica. Assim, as comissões pagas por grandes investidores para a negociação de uma determinada ação são proporcionais ao valor financeiro negociado. Em contrapartida, o impacto de mercado marginal tende a aumentar, a medida que o volume de ações negociadas aumenta.

¹ Impacto no Mercado: está associado ao conceito de liquidez, e pode ser definido como o quanto se movem as cotações contra a posição de um comprador ou vendedor, para este conseguir efetuar uma compra ou venda de determinada dimensão.

Em contraste, os pequenos investidores são definidos como aqueles que operam pequenos volumes através de corretoras de varejo. Para estes investidores, há uma taxa mínima de corretagem, ou um custo fixo associado, por exemplo, independente do volume.

Os custos indiretos de impacto no mercado podem se tornar um problema se um investidor coloca uma ordem de compra ou venda de uma quantidade de ações que é grande em relação ao volume médio diário negociado no mercado. Custos de impacto de mercado são menos significativos com ações líquidas, e podem ser considerados como a soma de dois componentes: impactos temporários e impactos permanentes nos preços das ações negociadas e estão associados ao desequilíbrio causado ao se inserir uma nova ordem de compra ou venda na fila de ordens, sendo que os impactos temporários irão se dissipar em um curto espaço de tempo, e os permanentes não.

Através dessa breve revisão, é possível notar que não é algo trivial modelar de forma realista a estrutura de custos de transação no mercado de capitais. Para simplificar o seu tratamento, geralmente assume-se que tais custos são proporcionais ao volume da transação. Como mencionado anteriormente, esta hipótese só é válida para grandes investidores que negociam ações consideradas líquidas.

Neste trabalho, os custos de transação são dados pela corretagem cobrada pela bolsa, descontado um rebate de 85%, o que resulta em um custo de corretagem de 0,075% do valor financeiro negociado, acrescido da metade do valor do *bid-ask spread*.

Segundo estudo publicado por Araújo, Barbedo e Vicente (2011), o *bid-ask spread* médio na bolsa brasileira é 0,10%, considerando-se uma amostra de 52 ações negociadas. Portanto, o valor a ser considerado será metade disso, e será somado ao custo de corretagem para compor o valor total do custo de transação proporcional, resultando em um custo total estimado em 0,125%, proporcional ao valor financeiro transacionado.

3.2. Modelos de *Delta-Hedge*

Os modelos de *delta-hedge* a serem testados neste trabalho foram escolhidos com base em estudos anteriores, e pela possibilidade de possuírem maior aplicação prática, ao dispensar, por exemplo, o uso de métodos numéricos que, por serem lentos, muitas vezes acabam inviabilizando a aplicação prática.

Para maior entendimento, os modelos aqui apresentados podem ser divididos em 2 grupos distintos: (i) modelos do tipo *time-based*, onde o principal parâmetro que diferencia o modelo dos demais é determinado pelo intervalo de tempo entre os rebalanceamentos fixos e pré-determinados, independentemente dos demais parâmetros, (ii) modelos do tipo *move-based*, onde o instante do momento do rebalanceamento não é mais pré-determinado e fixo, mas sim é uma função de “gatilhos”. De certa forma, esses modelos talvez sejam muito mais intuitivos que os do tipo *time-based*, pois em um cenário onde o preço do ativo se altera muito pouco, não deveria haver necessidade de um rebalanceamento. Por outro lado, a aplicação prática deste tipo de modelo requer monitoramento contínuo das variáveis de controle.

A seguir, detalhamos os quatro modelos a serem avaliados neste trabalho, a saber: (i) Black e Scholes (BS), (ii) Leland (LEL), (iii) Banda de Tolerância (BTP), e (iv) Whalley e Wilmott (WW).

3.2.1. Black-Scholes

O modelo de Black e Scholes (1973), foi desenvolvido com base em premissas importantes, tais como a normalidade da distribuição de probabilidades dos log-retornos dos preços do ativo em questão, a ausência de custos de transação, e a possibilidade de replicação contínua do *pay-off* da opção ao longo do tempo. É um modelo com ampla aplicação, tanto prática quanto teórica, pois pode ser considerado um modelo robusto por produzir bons resultados, mesmo com o relaxamento destas premissas. Nesta parte do trabalho, apresentamos

rapidamente o conceito de *delta-hedge*, que é parte do modelo de Black e Scholes.

Assumindo-se que o comportamento do ativo segue um passeio aleatório dado pela dinâmica abaixo:

$$\partial S = \mu S \partial t + \sigma S \partial X, \quad (3.2)$$

e que uma call europeia de valor $V(S, t)$ pode ser modelado pela seguinte equação diferencial parcial, derivada do Lema de Itô²:

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial t} \partial t + \frac{\partial V}{\partial S} \partial S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \partial t, \quad (3.3)$$

existe um portfolio Π , formado por uma call $V(S, t)$ e $-\Delta$ quantidades do ativo objeto, definido como:

$$\Pi = V(S, t) - \Delta S, \quad (3.4)$$

cujas variação em dt é dada por:

$$\partial \Pi = \partial V - \Delta \partial S. \quad (3.5)$$

Portanto, $d\Pi$ pode ser escrito como:

$$\partial \Pi = \frac{\partial V}{\partial t} \partial t + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \partial S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \partial t. \quad (3.6)$$

² Lema de Itô foi desenvolvido pelo matemático japonês Kiyoshi Itô para encontrar o diferencial da função de um processo estocástico onde uma das variáveis é o tempo, e é amplamente utilizado em modelos financeiros.

Os termos determinísticos são aqueles acompanhados por dt e os aleatórios são aqueles acompanhados por dS , os quais representam o componente de risco do portfolio. Para eliminarmos o risco do portfolio, devemos ter que:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS = 0. \quad (3.7)$$

Portanto, o *delta-hedge* pode ser definido como a quantidade do ativo que irá imunizar o risco do portfolio, ou seja:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (3.8)$$

Dado que o portfolio é considerado livre de risco, pelo princípio da não arbitragem, ele deverá apresentar retornos compatíveis com a taxa livre de risco, para então chegarmos na forma final da EDP de Black e Scholes (1973):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.9)$$

3.2.2. Leland

Leland (1985) foi pioneiro ao modificar a estratégia de rebalanceamentos proposta no modelo de Black e Scholes, adotando o rebalanceamento em intervalos regulares fixos e propondo uma modificação que permite a replicação de uma única opção com volume finito de custos de transação, não importando o quão pequeno seja o intervalo de rebalanceamento. A estratégia replicante é ajustada usando uma volatilidade modificada. Uma evolução do modelo de Leland (1985) foi o modelo de Hoggard, Whalley e Wilmott (1994) que observaram que a abordagem de Leland é igualmente aplicável ao *delta-hedge* de um portfólio de opções. O autor chega à seguinte EDP para a solução do valor da opção/portfolio de opções de valor $V(S_t, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left[1 - A \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \quad (3.10)$$

onde:

$$A = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{\frac{8}{\pi \delta t}}, \quad (3.11)$$

sendo λ o parâmetro que representa os custos de transação, e δt o intervalo entre os rebalanceamentos.

Se compararmos a EDP 3.10 acima, com a desenvolvida por Black Scholes, podemos definir σ_m^2 como:

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 \left[1 - \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{\frac{8}{\pi \delta t}} \right]. \quad (3.12)$$

Ou seja, o modelo de Leland (1985) pode ser simplificado de forma a ser interpretado como um ajuste na volatilidade de Black e Scholes (1973), indicado por σ_m , que depende, dentre outros parâmetros, do sinal do gama da opção. No caso deste estudo, por se tratar de uma opção de compra vendida, o gama será negativo, e a volatilidade modificada será tão maior quanto forem os custos de transação e a frequência de rebalanceamentos.

3.2.3. Banda de Tolerância para o Preço do ativo objeto

O modelo de Banda de Tolerância para o Preço (BTP) foi sugerido inicialmente por Henrotte (1993) e pode ser considerado um dos modelos mais intuitivos, pois o “gatilho” que define o momento dos rebalanceamentos é baseado em uma variação percentual do preço do ativo objeto, em módulo, maior que um determinado parâmetro de controle h . Caso esta condição seja violada, deve-se

efetuar o rebalanceamento para o delta de Black e Scholes (1973). Assim, os instantes de rebalanceamento, $\tau_i, i = 1, 2, \dots$, são dados por:

$$\tau_1 = t, \quad \tau_{i+1} = \inf \left\{ \tau_i < \tau < T: \left| \frac{S(\tau) - S(\tau_i)}{S(\tau)} \right| > h \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.13)$$

onde $S(\tau)$ é o preço do ativo no momento inicial, caso $\tau_1 = t$, e o preço no último instante de rebalanceamento, h é a tolerância percentual de variação do preço do ativo, e que será tão menor quanto menor for a aversão a risco do investidor, e T o instante de vencimento da vida da opção.

3.2.4. Whalley e Wilmott

O trabalho de Hodges e Neuberger (1989) foi pioneiro em desenvolver uma nova abordagem para o apreçamento de opções que levasse em consideração a aversão a risco do investidor através da sua função utilidade. Eles foram seguidos por Davis, Panas e Zariphopoulou (1993) que usaram uma abordagem de otimização estocástica e mostraram que o preço da opção pode ser encontrada usando-se o conceito de solução de viscosidade, através de métodos numéricos. A idéia chave se baseia na indiferença do investidor em tolerar risco, ou seja, em quantificar o montante financeiro que faz com que o investidor interessado no *delta-hedge* seja indiferente, em termos de sua função utilidade, a operar ou não a opção.

O investidor está interessado no *delta-hedge*, com o objetivo de maximizar sua utilidade ao final de um horizonte de tempo $[t, T]$. O investidor possui x_t unidades monetárias no ativo livre de risco, e y_t quantidades de ações no momento t . A função que define a expectativa de maximização de utilidade do investidor, em opções é dada por:

$$J_0(t, x_t, y_t, S_t) = \max E_t[U(x_T + y_T S_T)], \quad (3.14)$$

onde $U(z)$ é a função Utilidade³ do investidor. De forma análoga, caso o investidor decidisse vender a opção, teríamos:

$$J_1(t, x_t, y_t, S_t) = \max E_t[U(x_T + y_T S_T - V(T, S_T))], \quad (3.15)$$

portanto, o preço da opção p , deve ser o valor financeiro que torna o investidor indiferente a vender a opção, dado sua função utilidade, e *payoff* da opção:

$$J_1(t, x_t + p, y_t, S_t) = J_0(t, x_t, y_t, S_t), \quad (3.16)$$

normalmente, a função escolhida para representar a utilidade do investidor é da forma:

$$U(z) = -\exp(-\gamma z); \quad \gamma > 0. \quad (3.17)$$

onde γ é a medida do índice de aversão a risco do investidor, que no caso é constante. A escolha deste tipo de função, exponencial negativa, apresenta 2 propriedades desejáveis:

- A estratégia do investidor independe do tamanho da posição investida no ativo livre de risco;
- O poder computacional necessário para se resolver este problema é sensivelmente menor ao se adotar o índice de aversão a risco como uma constante.

³ A função Utilidade é comumente utilizada por economistas para traçar a curva de indiferença do investidor, e que por exemplo, representa as diferentes combinações de risco e retorno que tornam o investidor indiferente na tomada de uma decisão de investimento.

Os resultados computacionais mostram que se o índice de aversão a risco do investidor for muito baixo, o investidor acabará optando por uma estratégia de *hedge* estática, ou seja, irá comprar Δ ações no instante inicial t , e as manterá até o vencimento da opção, em T .

Quando o índice de aversão a risco do investidor é moderado, a solução numérica mostra que o Δ deverá necessariamente permanecer entre um limite superior Δ_u e um limite inferior Δ_l , tal que $\Delta_l \leq \Delta \leq \Delta_u$.

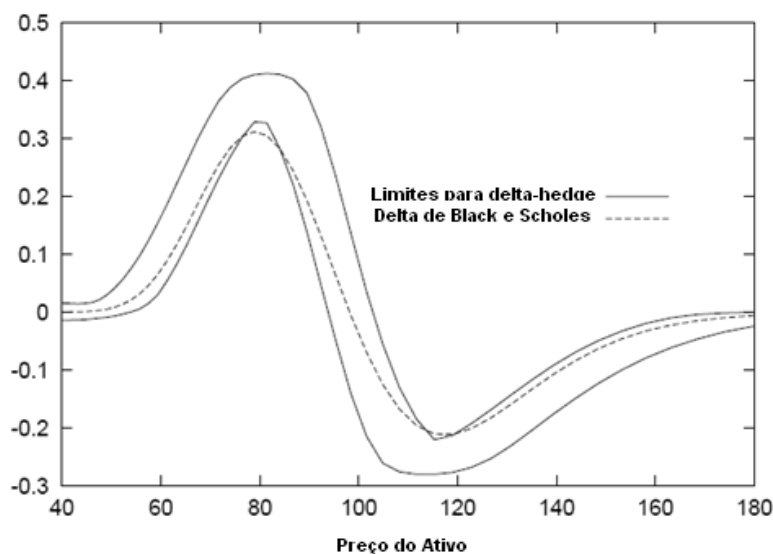


Gráfico 3 - Estratégia de hedge comparada contra o delta de Black Scholes para um *short Butterfly spread* usando: $\gamma = 2$, $\lambda = 0,01$, $S_t = 100$, $\sigma = 0.25$, $\mu = r = 0,05$, $T - t = 0,5$ e preços de exercício 80, 100 e 120.

No Gráfico 3, a região compreendida entre as 2 fronteiras é conhecida como região sem transações, pois enquanto o Δ se mantiver dentro dessa região, não será necessário nenhum rebalanceamento da estratégia de *delta-hedge*. Caso o Δ da opção viole alguma das fronteiras, a estratégia indica que é necessário rebalancear a estratégia de forma a trazê-la novamente para a fronteira.

Apesar de uma sólida fundamentação econômica, esta abordagem encontra uma limitação prática por não possuir uma solução fechada, e portanto, precisar ser calculada numericamente.

Como alternativa prática, Whalley e Wilmott (1997), se utilizaram de uma análise assintótica para se chegar a uma solução fechada para o problema proposto por Hodges e Neuberger (1989). Em uma análise assintótica, um ou mais parâmetros do problema assumem valores grandes ou pequenos. No caso, Whalley e Wilmott (1997) partiram da premissa de que os custos de transação são pequenos. E reduziram o problema à solução fechada abaixo:

$$\Delta = \frac{\delta V}{\delta S} \pm H_{ww} = \frac{\delta V}{\delta S} \pm \left(\frac{3}{2} \frac{e^{-r(T-t)} \lambda S \Gamma^2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.18)$$

onde $\frac{\partial V}{\partial S}$ é o delta de Black e Scholes (1973), r é a taxa livre de risco, T o prazo para o vencimento da opção, λ representa os custos de transação, S o preço do ativo, Γ é o gama de Black e Scholes ($\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$), e por fim, γ representa o índice de aversão a risco do investidor. Essa solução, apesar de ter sido desenvolvida para uma *call* européia vendida, pode ser aplicada para situações mais complexas, tal como um portfólio de opções.

É fácil também perceber que a largura da banda da fronteira não é constante, mas sim depende de uma série de parâmetros. Quando os custos de transação tendem a zero, $\lambda \rightarrow 0$, os limites da banda colapsam, e o que resta é o próprio Δ de Black-Scholes. Na medida em que o índice de aversão a risco γ aumenta, a banda tende a se estreitar, como forma de diminuir o risco de *delta-hedge* do portfólio. Além disso, a largura da banda depende do gama da opção, dado que para gamas altos, os rebalanceamentos serão menos frequentes. Zakamouline (2008) mostrou que a estratégia proposta por Whalley e Wilmott (1997) é mais eficiente do que a estratégia baseada em uma banda de tolerância fixa ao redor do delta da opção, pois ao não considerar por exemplo o gama da opção, a estratégia baseada em uma tolerância H constante, pode realizar rebalanceamentos desnecessários para mudanças maiores que H no preço da ação.

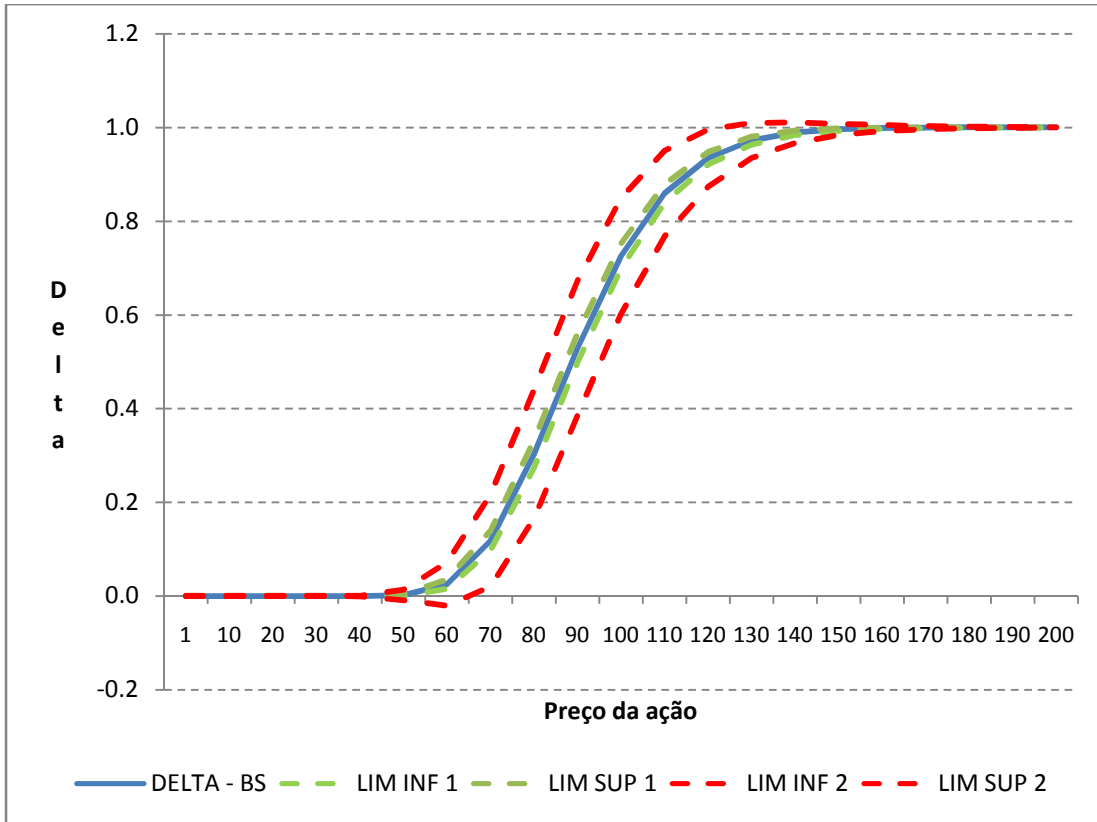


Gráfico 4 - Faixas de tolerância ao redor do delta da opção. $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 0.1$, $\lambda = 0,5\%$, $S_t = 100$, $\sigma = 0.20$, $k = 100$, $T - t = 1$

Nas simulações de Monte Carlo aqui apresentadas, consideramos que a dinâmica dos ativos base seguem o modelo de Heston, o qual considera que a volatilidade também é um passeio aleatório com reversão à média, como descrito no item a seguir.

3.3. Modelo de Heston

O modelo de Heston, proposto em 1993, foi escolhido por ser amplamente utilizado para modelagem de ativos financeiros, e por melhor refletir o comportamento dos preços de ativos financeiros, ao incorporar em seu modelo, a volatilidade estocástica, e parte das seguintes equações:

$$\partial S_t = \mu S_t \partial t + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1, \quad (3.19)$$

$$\partial V_t = \kappa(\theta - V_t)\partial t + \sigma\sqrt{V_t}\partial W_t^2, \quad (3.20)$$

$$\partial W_t^1 \partial W_t^2 = \rho \partial t, \quad (3.21)$$

onde S_t é o preço, V_t é a variância, W_t^1 e W_t^2 são processos de Wiener correlacionados pelo parâmetro ρ . O processo da variância reverte à média de longo-prazo θ , com uma velocidade de reversão κ . E por fim, σ representa a volatilidade da volatilidade.

A aplicação deste modelo permite violar a hipótese de normalidade dos log-retornos dos ativos financeiros, permitindo que o modelo reflita melhor o comportamento real das séries de preços. Por exemplo, o parâmetro ρ , se for menor que zero, caso comum entre ativos de renda variável, nos diz que caso os retornos aumentem, a volatilidade deverá diminuir, afetando a assimetria da distribuição. O parâmetro σ por sua vez, irá afetar a curtose da distribuição. O caso particular é quando $\sigma = 0$, e neste caso, a volatilidade será determinística e constante no tempo. E o parâmetro κ está associado com a velocidade com que a volatilidade reverte à média, e seu valor irá refletir no agrupamento de volatilidade.

Para calibrar corretamente os parâmetros, de forma a que estes reflitam dados reais de mercado para cada um dos ativos selecionados, utilizamos a fórmula fechada para uma *call* europeia do modelo de Heston:

$$C(S_t, V_t, t, T) = S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2, \quad (3.22)$$

onde:

$$P_j(x, V_t, T, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_{ij}(x, V_t, T, \phi)}{i\phi} \right) d\phi, \quad (3.23)$$

$$x = \ln(S_t), \quad (3.24)$$

$$f_{ij}(x, V_t, T, \phi) = \exp\{C(T - t, \phi) + D(T - t, \phi)V_t + i\phi x\}, \quad (3.25)$$

$$C_{ij}(T - t, \phi) = r\phi ir + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - ge^{dr}}{1 - g}\right) \right], \quad (3.26)$$

$$D_{ij}(T - t, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{dr}}{1 - ge^{dr}} \right), \quad (3.27)$$

$$g_{ij} = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}, \quad (3.28)$$

$$d_{ij} = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}, \quad (3.29)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa + \beta - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa + \beta,$$

onde β representa o preço de mercado do risco de volatilidade. Em uma abordagem neutra ao risco, seu valor pode ser assumido como zero.

4. Metodologia

Este trabalho pode ser dividido em duas partes. Na primeira parte, utilizamos simulações de Monte Carlo, assumindo-se que a volatilidade do ativo base é estocástica, para replicar o comportamento esperado do preço de cada um dos três ativos de mercados escolhidos, a saber: Cyrela ON (CYRE3), OGX ON (OGXP3), Petrobras PN (PETR4). De maneira idêntica à utilizada por Zakamouline (2008), construiremos a fronteira eficiente do erro de replicação para cada um dos quatro modelos escolhidos (BS, LEL, BTP, WW), assumindo-se uma estratégia replicante para uma *call* europeia vendida. Para observar o impacto do *moneyness* da opção em cada simulação, são escolhidos três *strikes* diferentes para cada ação. Na segunda parte, para as mesmas três ações, e respectivas opções, já mencionadas, avaliamos os resultados práticos ao se aplicar os quatro modelos, utilizando os preços de mercado entre 21 de agosto e 15 de outubro de 2012. Para cada modelo, escolheremos o parâmetro que compatibiliza o risco da estratégia, como será detalhado a seguir.

4.1. Simulações de Monte Carlo

Assim como feito por Zakamouline (2008), geramos simulações de Monte Carlo para a evolução do preço de cada ativo considerado neste estudo. Para cada um destes ativos, os resultados dos diferentes modelos de *delta-hedge* são testados para opções com três diferentes níveis de *moneyness*. Com o objetivo de simular de forma mais adequada o comportamento do preço do ativo, ao invés de usarmos uma simulação de Monte Carlo com volatilidade constante, como feito por Zakamouline (2008), utilizamos o modelo de volatilidade estocástica de Heston, detalhado no item 3.3. Desta forma, é possível incorporar os efeitos da não normalidade dos log-retornos dos respectivos ativos nas simulações. Quanto à calibração dos parâmetros do modelo de Heston, foi implementada a sua fórmula fechada para o apreamento de uma opção europeia em Matlab, e utilizada a função *lsqnonlin()* do próprio Matlab, para minimizar a soma dos erros

quadráticos entre os preços de mercado, e aqueles obtidos pela expressão do modelo. Ou seja, através da solução da expressão abaixo os parâmetros são estimados.

$$\min_{\Omega} S(\Omega) = \min_{\Omega} \sum_{i=1}^N [C_i^{\Omega}(K_i, T_i) - C_i^M(K_i, T_i)]^2, \quad (4.1)$$

onde Ω é o vetor de parâmetros do modelo de Heston, $C_i^{\Omega}(K_i, T_i)$ é preço da opção com *strike* K_i e vencimento T_i calculada pelo modelo usando os parâmetros Ω , e $C_i^M(K_i, T_i)$ são os preços de mercado da mesma opção. Desta forma, uma importante vantagem é que o comportamento do preço do ativo dentro das simulações irá refletir as expectativas dos agentes de mercado para cada ativo. Os dados de mercado são carregados com base nas informações de mercado disponíveis em 21 de Agosto de 2012, que é a data inicial a ser considerada na segunda parte desta análise.

Para cada realização do preço do ativo, simulamos o comportamento da estratégia replicante, a cada passo de tempo, comprando ou vendendo o ativo, sempre que sugerido pelo modelo, considerando-se uma taxa de custo de transação λ estimada em 0,125% do valor financeiro de cada operação. A conta caixa é remunerada pela taxa de juros livre de risco, estimada em 7%a.a. e a volatilidade implícita a ser usada nos rebalanceamentos de cada opção é feita a partir de dados de mercado.

Para cada um dos quatro modelos a serem testados, temos uma variável de controle que representa a tolerância a risco do investidor. No caso dos modelos BS e LEL, a variável é o intervalo de tempo entre os rebalanceamentos, para o modelo BTP, temos a variação máxima percentual h , e para o modelo WW, o índice de aversão a risco γ . Para cada simulação e par modelo-variável escolhido, temos desvio padrão e valor médio do erro de replicação. Se executarmos diversas vezes a mesma simulação, com o mesmo modelo, mas variando-se a

variável de controle, obtemos diversos pares de resultados de desvio padrão e média de erro de replicação. Por exemplo, para o modelo BS, se usarmos intervalos entre rebalanceamentos muito pequenos, deveremos esperar um desvio padrão do erro de replicação baixo, e uma média baixa. Em contrapartida, se usarmos um intervalo entre rebalanceamentos muito alto, poderemos esperar uma média para o erro de replicação melhor que no caso anterior, mas uma dispersão também maior. O conjunto de resultados obtidos, variando-se o parâmetro de controle, para a mesma simulação e modelo, se colocado num plano cartesiano, onde a abscissa representa o desvio padrão do erro de replicação (e portanto o risco) e a ordenada representa a média do erro de replicação (o retorno), obtemos uma figura que pode ser interpretada como a fronteira eficiente do modelo, para aquela simulação.

Repetindo-se o processo para cada um dos 4 modelos, obtemos quatro diferentes fronteiras eficientes, uma para cada modelo, como mostrado no Gráfico 5 abaixo:

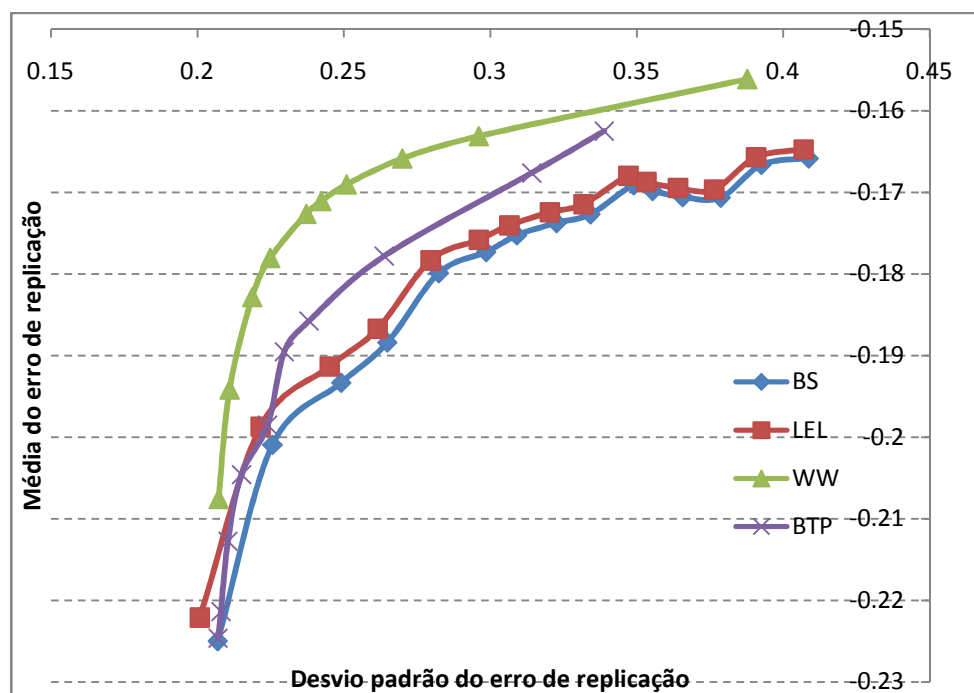


Gráfico 5 - Fronteiras eficientes para os modelos BS, LEL, BTP, WW para CYRE3

Sendo assim, é possível comparar os modelos de forma a se levar em consideração o *trade-off* entre risco e retorno para cada um dos modelos. Similarmente ao modelo de Markowitz, espera-se que um investidor racional, para um dado nível de risco, escolha o modelo que lhe traga o melhor retorno.

Para os modelos BS e LEL, os intervalos de rebalanceamento começam em $\frac{1}{4}$ de dia, e vão aumentando em passos de $\frac{1}{4}$ de dia até 3 dias e $\frac{3}{4}$ de dia, totalizando 15 possíveis valores. Para o modelo BTP, os valores possíveis de h são: 0,10%; 0,50%; 1,00%; 1,50%; 2,00%; 2,50%; 3,00%; 4,00%; 6,00%; 7,00%; totalizando 10 possíveis valores. Para o modelo WW, os possíveis valores de γ são: 0,1; 0,5; 1; 2; 3; 4; 10; 20; 100; 1000.

Tanto o modelo BTP quanto o modelo WW, por fazerem parte da família de modelos do tipo *move-based*, exigem monitoramento constante dos seus respectivos parâmetros. Por questões práticas, adotamos o menor intervalo de rebalanceamentos dos modelos *time-based*, que é $\frac{1}{4}$ de dia, como o intervalo para verificação se os “gatilhos” de cada modelo são atingidos.

4.2. Aplicação Prática

Com base nesta abordagem, e assumindo-se um investidor racional, que para um dado nível de risco, irá preferir o modelo com o melhor resultado⁴, é possível partir para a segunda etapa deste estudo, que consiste em tentar estabelecer uma relação entre os parâmetros dos modelos do tipo *time-based* e os dos modelos do tipo *move-based*, testando o desempenho de cada um dos modelos utilizando-se preços reais de mercado.

Para isso, escolhemos uma frequência de rebalanceamento para o modelo BS, e com base na fronteira eficiente para cada uma das opções consideradas, fixamos o que seria o nível de risco, ou seja, o desvio padrão do erro de replicação aceitável para o investidor interessado no *delta-hedge*. A partir deste nível de

⁴ Por melhor resultado, entende-se o modelo que melhor irá replicar o *payoff* da opção, considerando-se por exemplo, que a estratégia é *short vega*, e que a volatilidade histórica pode ser diferente da volatilidade implícita ao longo da vida da opção.

risco, estimamos qual o valor do índice de aversão a risco do modelo WW que gera o mesmo nível de risco do modelo BS para o intervalo de rebalanceamento escolhido. O mesmo raciocínio se aplica para o modelo BTP, estimando o valor de h .

É comum, como boa prática de gestão de risco, que o *delta-hedge* seja realizado sempre durante períodos em que não existam negociações do ativo-objeto. Portanto, é razoável assumir que o rebalanceamento seja feito diariamente, ao final de cada pregão, por exemplo. Com base nessa premissa, estimamos uma equivalência entre os parâmetros dos dois modelos do tipo *move-based* e aplicamos estes parâmetros em simulações, usando dados reais de mercado.

5. Resultados

A seguir apresentamos, para cada uma das ações selecionadas, os resultados obtidos, começando pela definição dos *strikes* considerados, e os parâmetros estimados para os respectivos modelos de Heston que serão usados nas simulações de Monte Carlo. Em seguida, construímos as fronteiras eficientes para cada uma das opções e discutimos os resultados. Com base na equivalência de parâmetros entre os quatro modelos, avaliamos os resultados relativos a dados reais de mercado.

5.1. CYRELA ON

Para testar a sensibilidade dos modelos em relação à *moneyness* das opções, foram escolhidos 3 *strikes* diferentes, para o mesmo vencimento (15 de outubro de 2012): $K_1 = 18,5$; $K_2 = 17,5$; $K_3 = 16,5$. O preço inicial adotado foi 17,35 e o comportamento do preço da ação no período de 21 de agosto a 15 de outubro de 2012 foi:

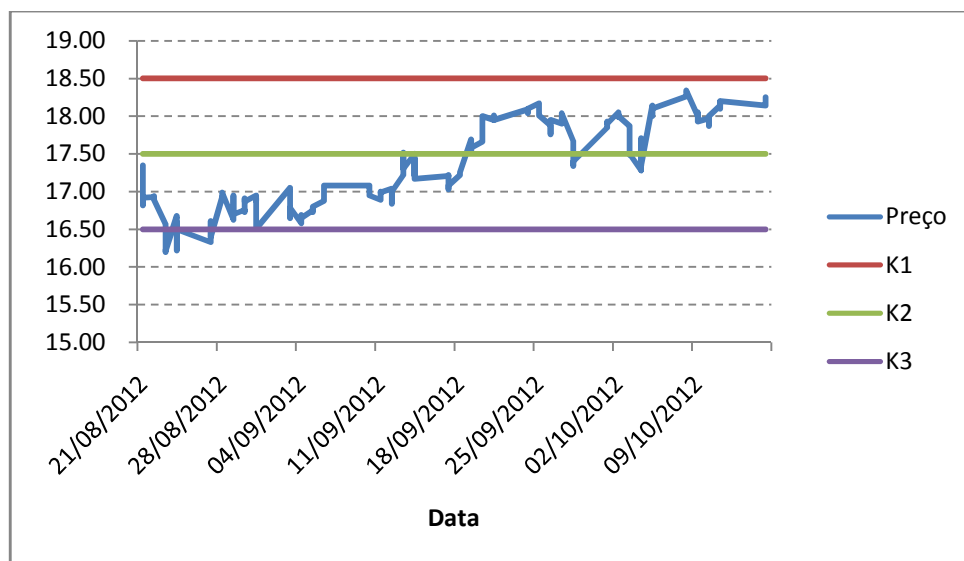


Gráfico 6 - Histórico do preço da CYRE3

A escolha deste período se deve ao fato de que representa a janela de entre os dois vencimentos de opções mais recentes em relação à produção deste trabalho.

Utilizando dados de mercado, disponíveis em 21 de Agosto de 2012, e com base no processo de minimização não linear dos erros quadráticos entre a diferença dos preços de mercado e a fórmula fechada para o apreçamento de uma opção do modelo de Heston, estimamos os seguintes parâmetros:

Parâmetro	Valor
κ	5.7
θ	0.37
σ	1.0
ρ	-0.7

Tabela 1 – Parâmetros de Heston para CYRE3

Com base nestes parâmetros executamos 5000 simulações de Monte Carlo para cada uma das três opções, e para cada um dos quatro modelos. Seguem os resultados abaixo:

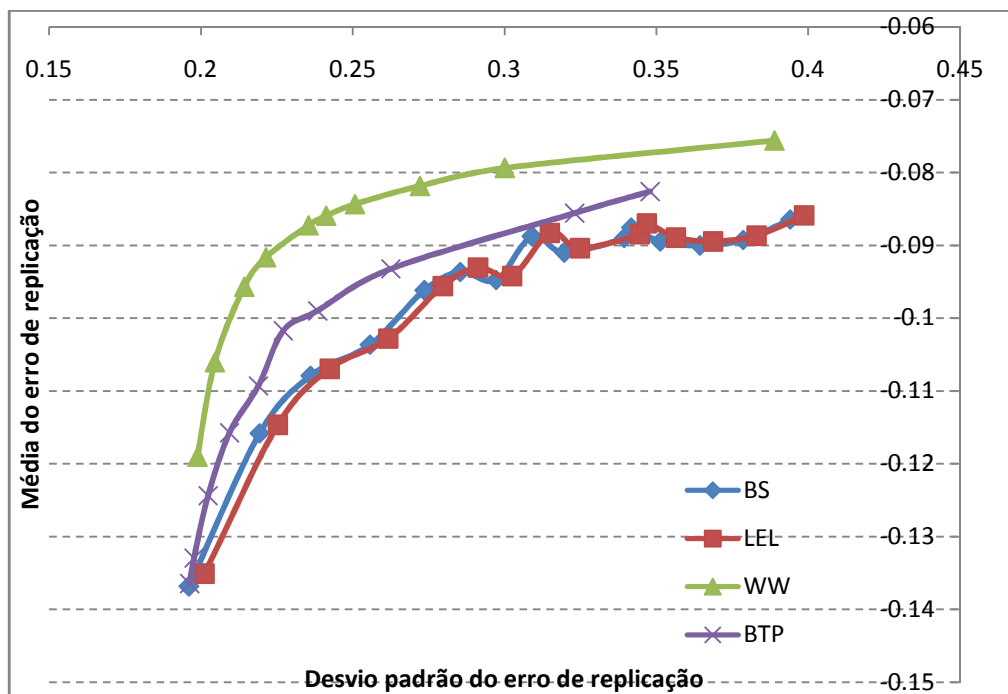


Gráfico 7 - CYRE3 - Fronteiras eficientes para $K_1 = 18,5$

Observa-se que o modelo WW apresenta resultados de erro de replicação melhores do que qualquer dos outros 3 modelos, para o mesmo nível de risco (desvio padrão do erro de replicação), chegando a apresentar um erro de replicação até 20% melhor em relação ao modelo BS, por exemplo. Para intervalos de rebalanceamentos intradiários, o modelo BS apresentou resultados marginalmente melhores que o modelo LEL.

Abaixo são apresentados os resultados gerados a partir das mesmas simulações, mas para a opção de *strike* K_2 .

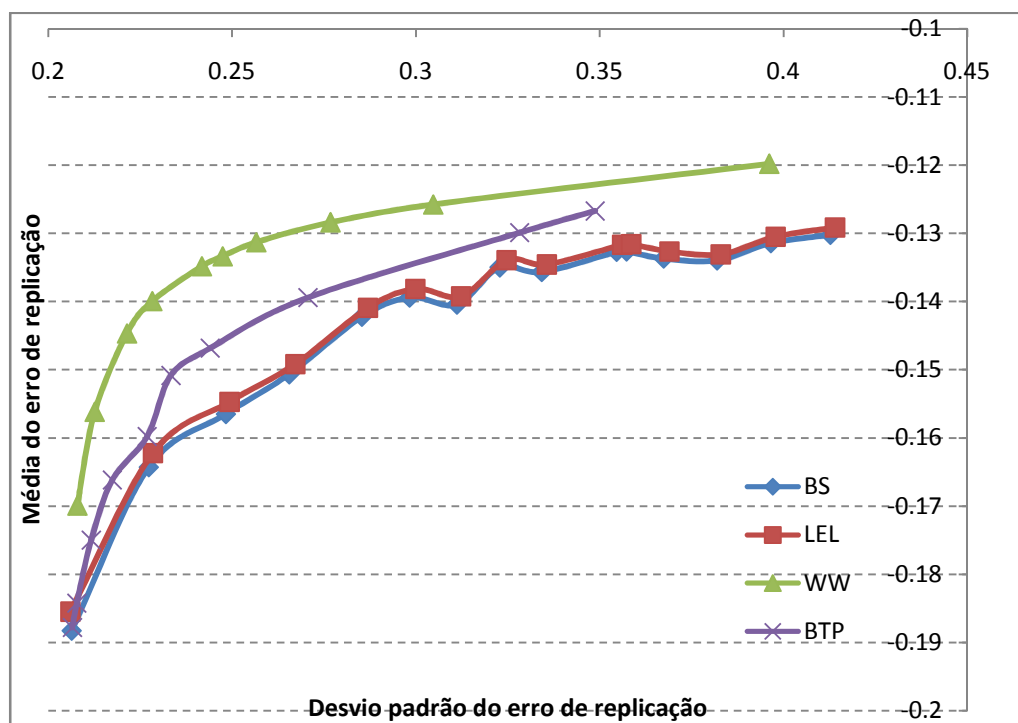


Gráfico 8 – CYRE3 - Fronteiras eficientes para $K_2 = 17,5$

Novamente, observamos que o modelo WW apresenta resultados superiores aos seus pares, dentro do contexto de média \times variância, e o modelo LEL, neste caso, sendo marginalmente superior ao modelo BS para qualquer escolha de intervalo de rebalanceamento.

A seguir são apresentados os resultados gerados a partir das mesmas simulações, mas para a opção de *strike* K_3 .

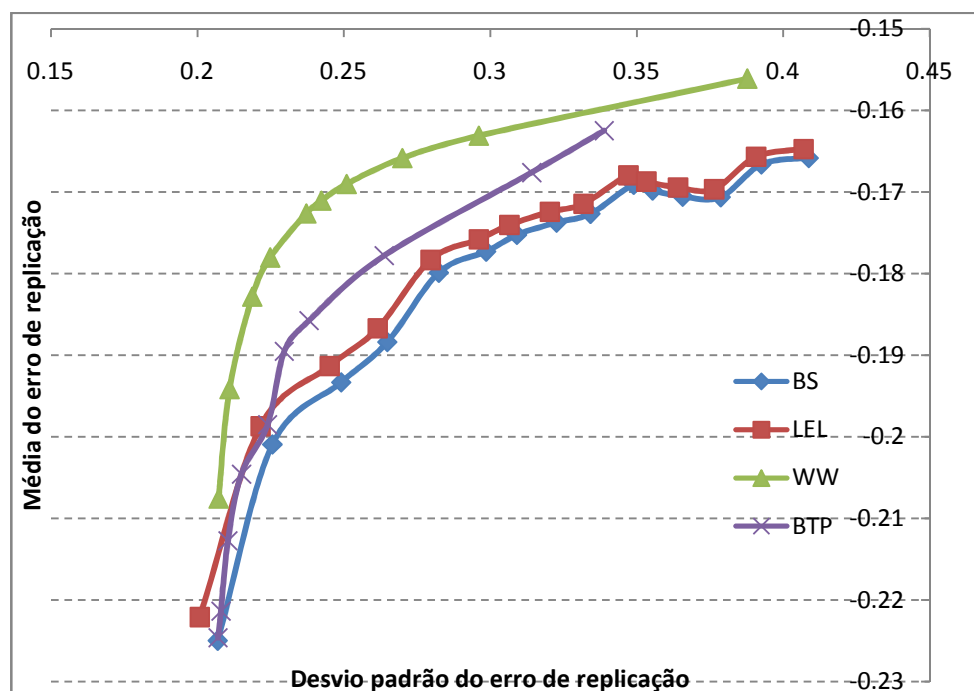


Gráfico 9 – CYRE3 - Fronteiras eficientes para $K_3 = 16,5$

Neste caso observamos um ganho cada vez maior do modelo LEL em relação ao modelo BS na medida em que se diminui o intervalo entre os rebalanceamentos.

De forma geral, para as três situações apresentadas, obtivemos resultados muito próximos daqueles obtidos por Zakamouline (2008), onde o modelo WW parece oferecer os melhores resultados. Em seguida, temos o modelo BTP e, em um patamar inferior, os modelos do tipo *time-based*. Para os casos K_2 e K_3 , temos que o modelo LEL oferece os melhores ao longo de toda a fronteira em relação ao modelo BS. Também chama a atenção o fato de que, quando a tolerância a risco do investidor é muito pequena (intervalos entre rebalanceamentos muito pequenos, ou por exemplo, um valor de h muito baixo) existe pouca ou nenhuma diferença nos resultados obtidos pelos modelos LEL, BS e BTP.

Com base nas fronteiras eficientes obtidas, tentamos estimar qual índice de aversão a risco λ , e qual limite de variação de preço h , que produzem o mesmo

desvio padrão no erro de replicação (risco) que aquele estimado pelo modelo BS com rebalanceamento diário. Neste caso temos que:

	K_1	K_2	K_3
γ	2	1	1
h	3.00%	4.00%	4.00%

Tabela 2 – Equivalência de parâmetros para CYRE3

Mesmo variando-se a *moneyness* das opções, é possível perceber que os parâmetros γ e h se alteram muito pouco. Estes valores são utilizados nos modelos de *delta-hedge*, assumindo a trajetória real do preço no período escolhido.

Para observar o comportamento da estratégia replicante, avaliamos, instante a instante, o resultado da estratégia replicante ao longo da vida de cada opção. Para K_1 temos:

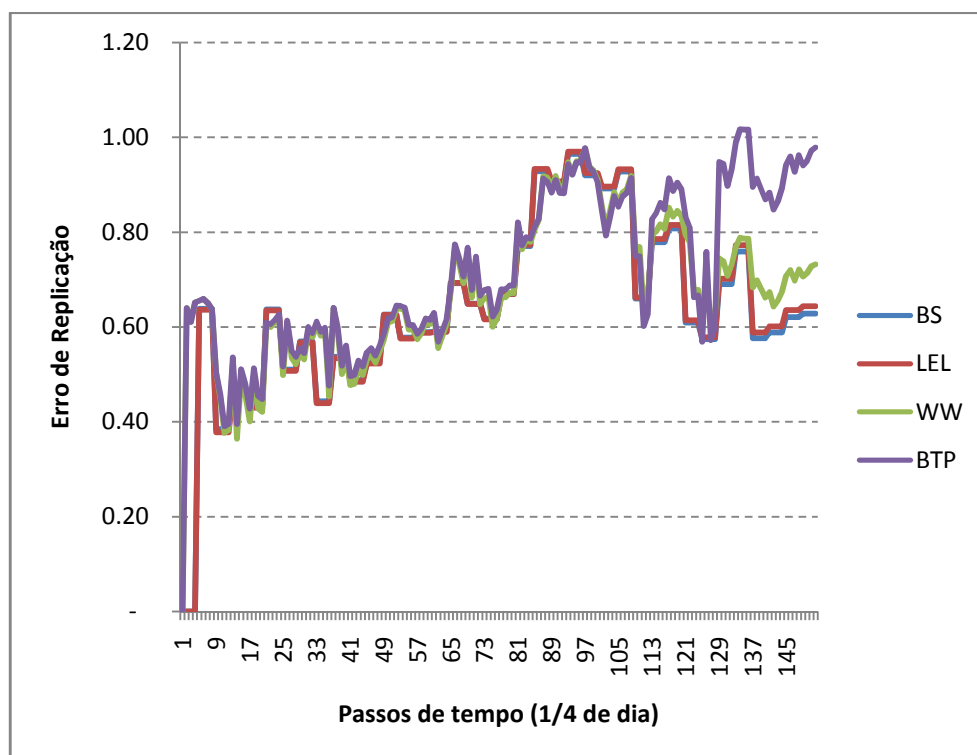


Gráfico 10 – CYRE3 – Erro de replicação para $K_1 = 18,5$

Os resultados de cada estratégia se mantêm muito próximos ao longo da vida da opção, se diferenciando nos momentos finais, onde o modelo BTP produziu o melhor resultado.

Para K_2 , temos:

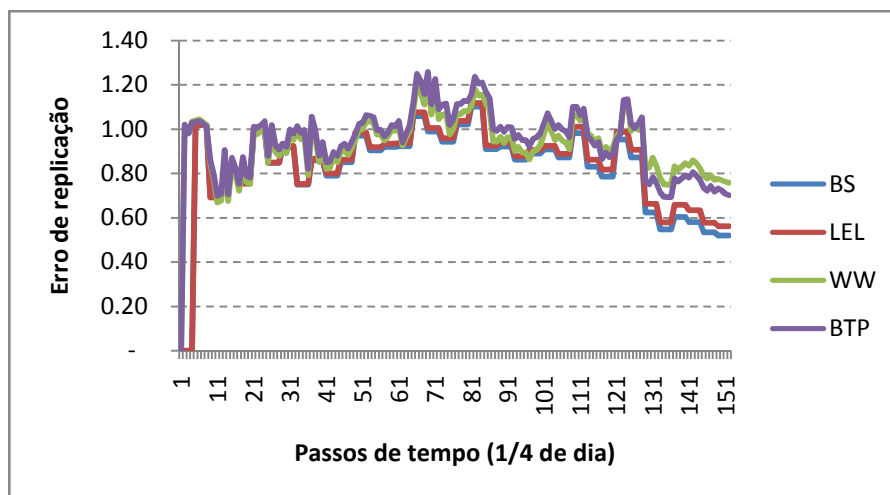


Gráfico 11 – CYRE3 – Erro de replicação para $K_2 = 17,5$

Novamente, temos que os resultados caminham de forma muito parecida, se diferenciando no final. Neste caso, temos que a ordem do melhor modelo para o pior é exatamente a mesma encontrada nas simulações de Monte Carlo.

Aplicando-se os modelos para K_3 :

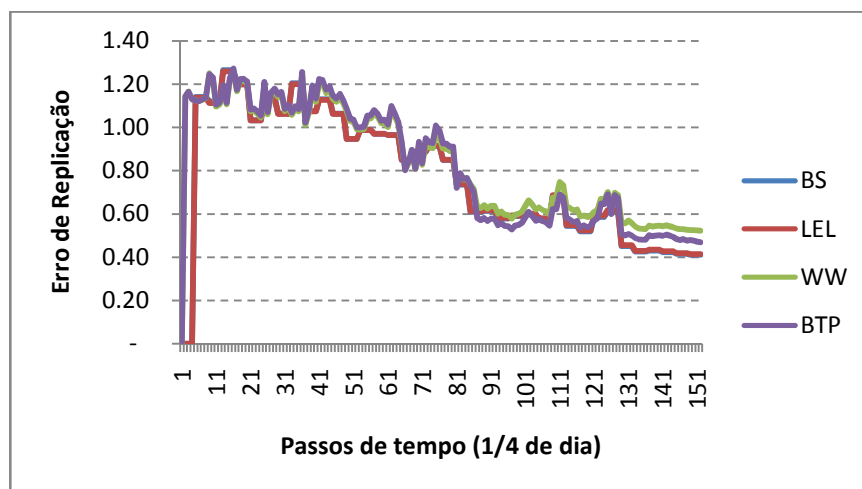


Gráfico 12 – CYRE3 – Erro de replicação para $K_3 = 16,5$

Conforme o Gráfico 12, também temos a mesma sequência de resultados encontrados no modelo de Monte Carlo para K_3 .

Nas três situações analisadas, os modelos do tipo *move-based* mostram resultados melhores do que os do tipo *time-based*, sendo que, para K_2 e K_3 , o modelo WW apresenta resultados superiores, e para K_1 o modelo BTP apresenta resultados superiores. Para os três *strikes* analisados, chama a atenção o fato de que os quatro modelos analisados apresentam maior diferenciação nos resultados ao se aproximar do final da vida de cada opção.

5.2. OGX ON

Repetimos os mesmo passos descritos no item anterior, agora para a ação OGXP3, e usando $K_1 = 7$; $K_2 = 6$; $K_3 = 5$, e partindo de um preço inicial de 6,74, conforme demonstra o gráfico abaixo:

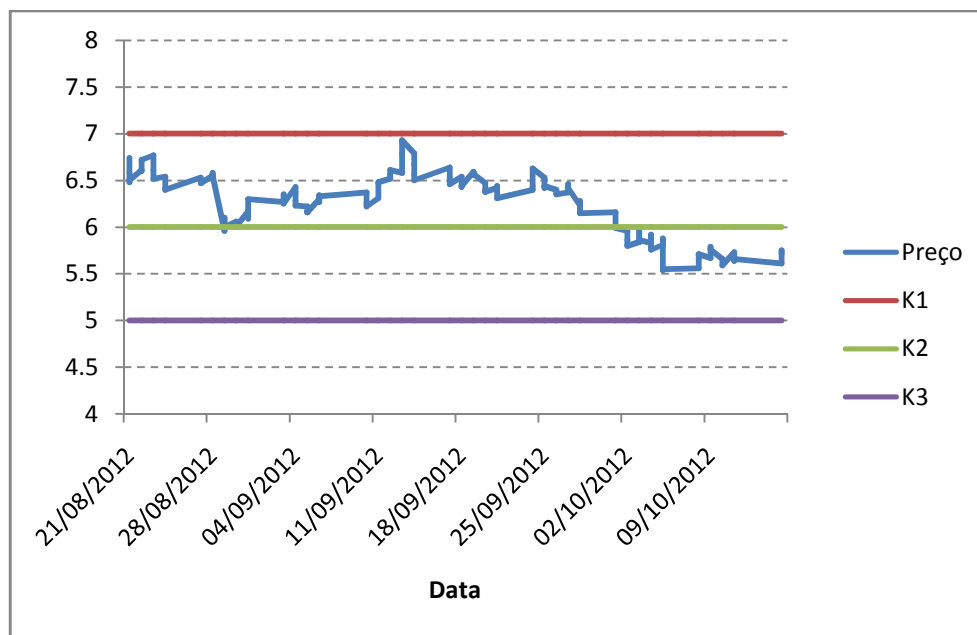


Gráfico 13 - Histórico do preço da OGXP3

Novamente, utilizando o Matlab, estimamos os parâmetros para o modelo de Heston:

Parâmetro	Valor
κ	99
θ	0.30
σ	0.99
ρ	0.37

Tabela 3 – Parâmetros de Heston para OGPX3

Com base nas simulações de Monte Carlo, obtemos, para K_1 :

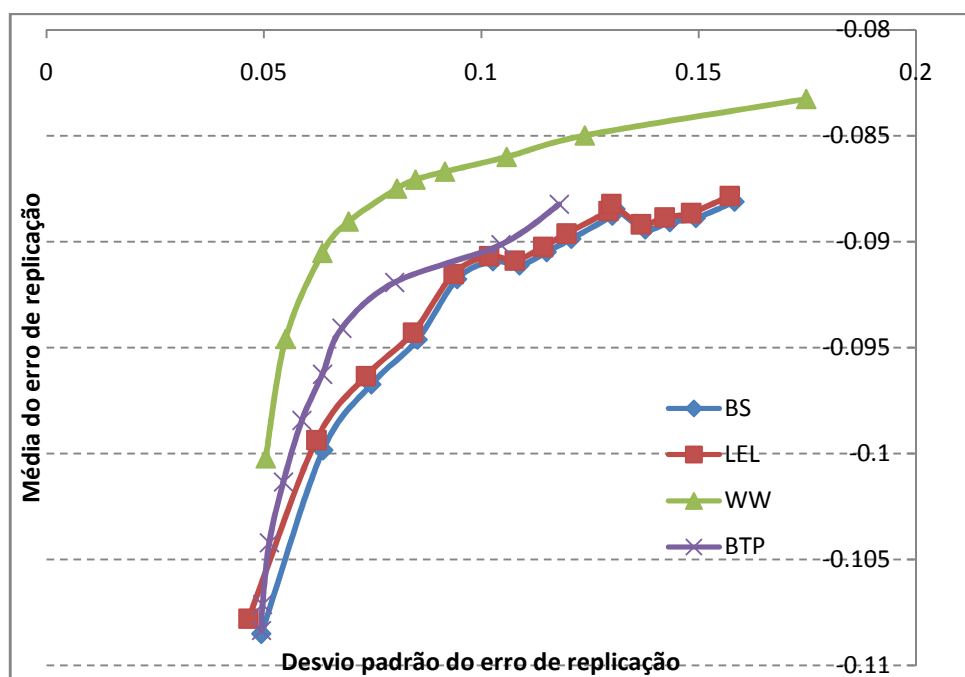


Gráfico 14 – OGPX3 - Fronteiras eficientes para $K_1 = 7$

Novamente, temos o modelo WW apresentando os melhores resultados, dentre os quatro modelos analisados.

Repetindo-se o processo para K_2 :

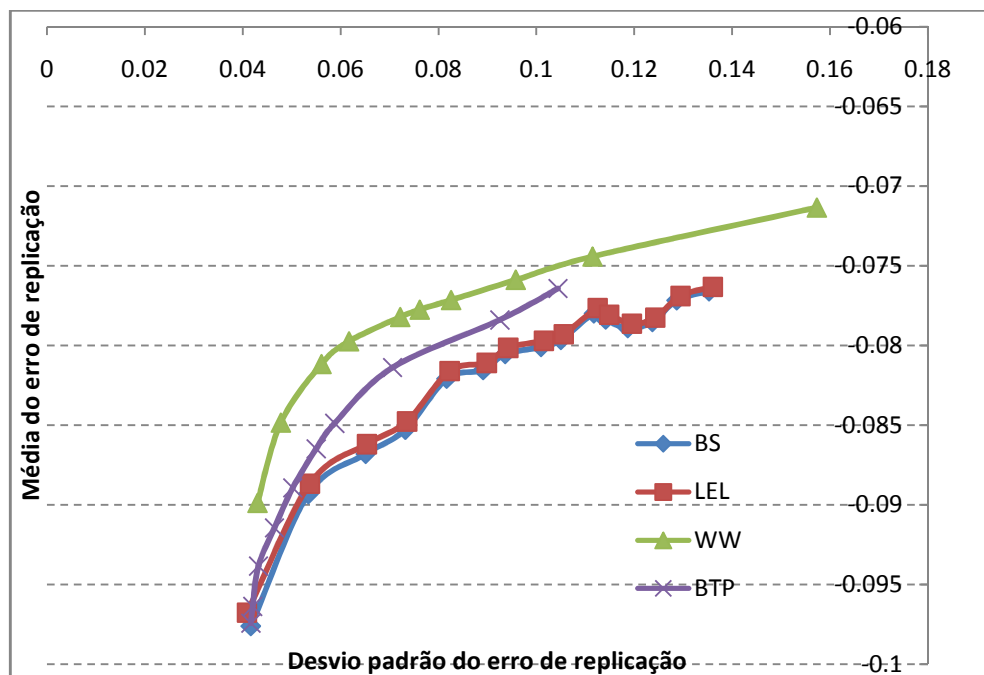


Gráfico 15 – OGXP3 - Fronteiras eficientes para $K_2 = 6$

Neste caso também, resultados idênticos aos obtidos para K_1 . Já para o caso K_3 os resultados seguem abaixo:

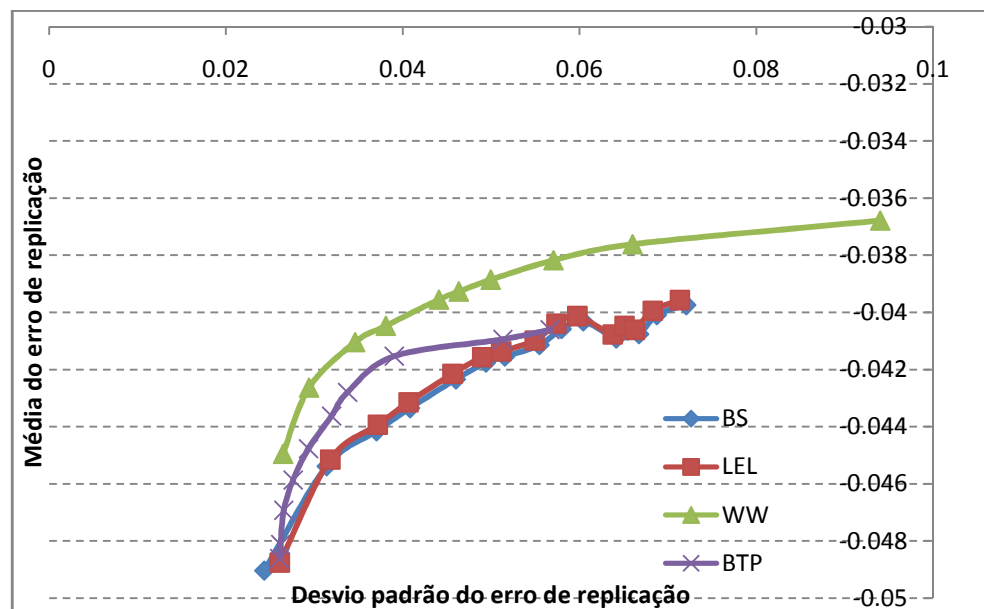


Gráfico 16 – OGXP3 - Fronteiras eficientes para $K_3 = 5$

Para K_3 também, poucas mudanças em relação aos resultados anteriores, onde não apenas os modelos do tipo *move-based* continuam a dominar os modelos do tipo *time-based*, como a ordem dos quatro modelos pouco se altera.

O modelo LEL se mostrou superior ao BS para as 3 situações apresentadas, e novamente pudemos perceber que para um investidor com baixa tolerância a risco, a escolha dos modelos de BS, LEL e BTP parece produzir resultados idênticos nas três situações apresentadas.

Estimando γ e h temos que:

	K_1	K_2	K_3
γ	3	4	5
h	4,00%	4,00%	4.00%

Tabela 4 – Equivalência de parâmetros para OGPX3

Observando-se o comportamento da estratégia replicante, para K_1 , para o mesmo intervalo de tempo, temos:

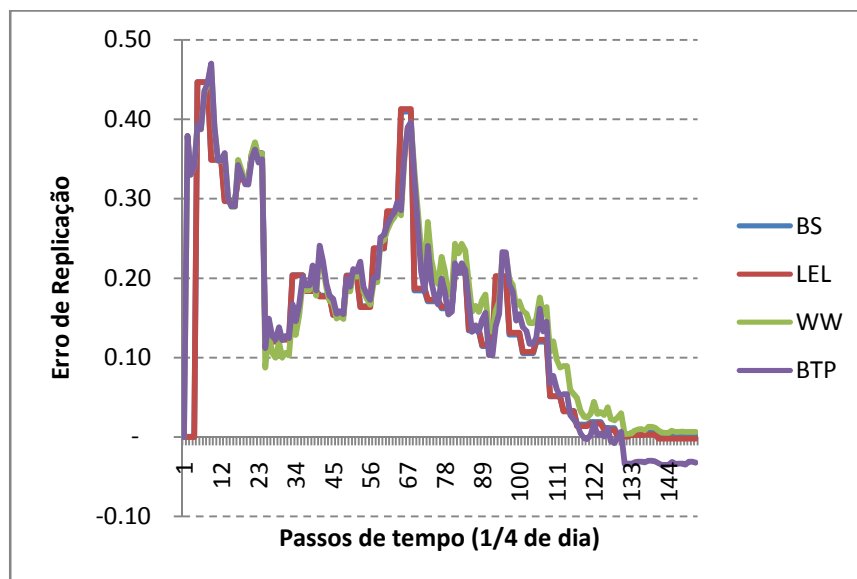
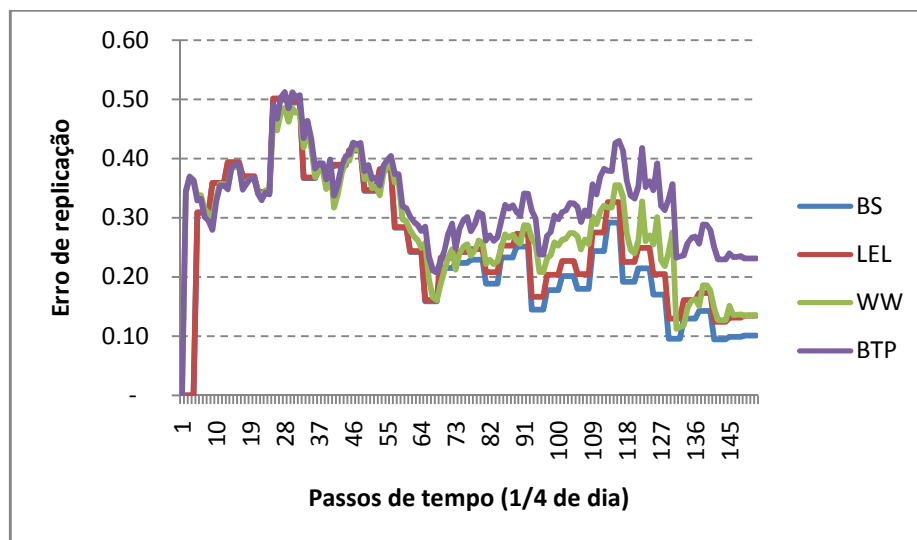


Gráfico 17 – OGPX3 – Erro de replicação para $K_1 = 7$

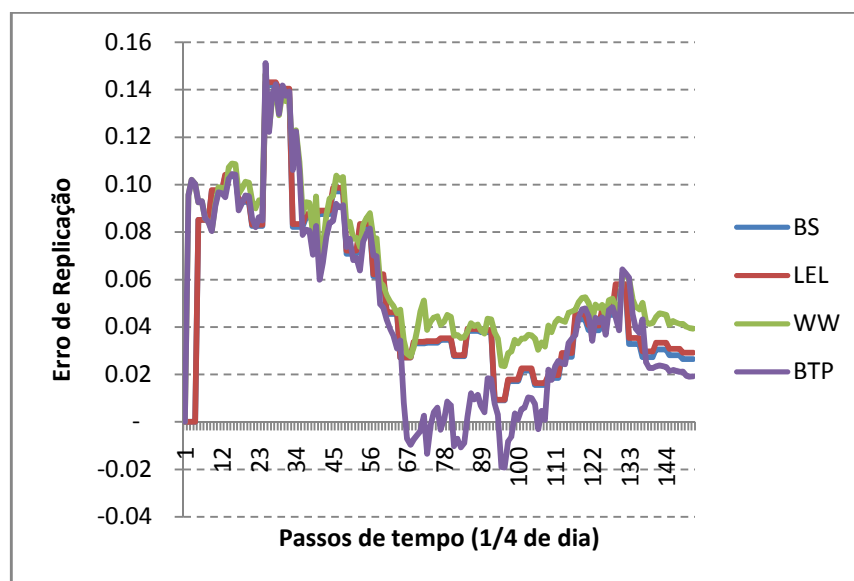
Observa-se que o modelo WW produz resultado marginalmente superior aos modelos LEL e BS. O modelo BTP produz o pior resultado dentre as 4 estratégias, descolando-se dos demais no final da vida da opção.

Mudando o *strike* para K_2 temos:



Para K_2 , temos, de certa forma, uma inversão do resultado, onde o modelo BTP, que era o pior resultado considerando-se K_1 , agora passa a ser o melhor, sendo que o limite h para K_1 e K_2 é de 4% para ambos os casos, e portanto mostrando que o fator *moneyness* foi relevante na escolha do modelo.

Por fim, para K_3 :



Para K_3 , temos, o modelo WW com um resultado superior aos demais, resultado este que foi persistente durante praticamente toda a vida da opção. Chama a atenção também o forte descolamento do modelo BTP próximo à metade da vida da opção. Dada a sua simplicidade, este pode ser considerado o modelo que apresenta menor sensibilidade à proximidade do vencimento da opção.

Novamente o modelo WW apresentou bons resultados em 2 das 3 situações, sendo que na situação em que foi o segundo melhor, o modelo baseado em BTP apresentou o melhor resultado.

5.3. PETROBRAS PN

Para a ação PETR4, usamos os seguintes *strikes*: $K_1 = 23$; $K_2 = 21$; $K_3 = 20$, e partimos de um preço inicial de 21,47:

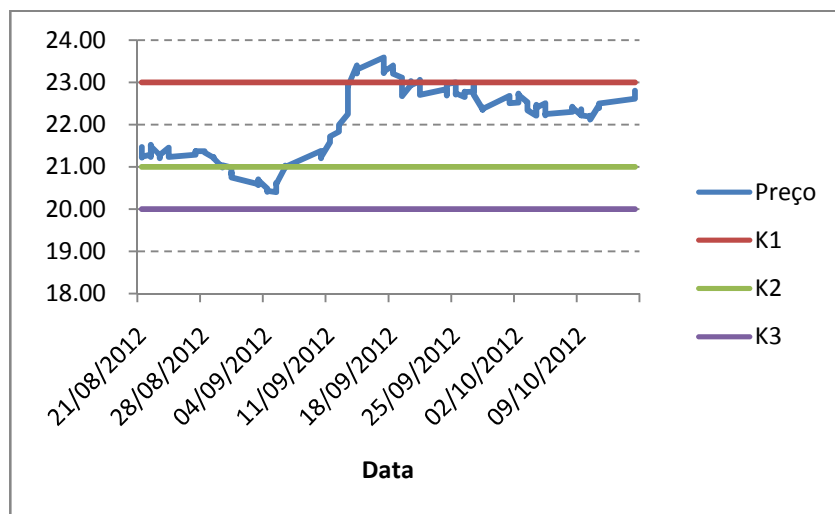


Gráfico 20 - Histórico do preço da PETR4

Parâmetros de Heston:

Parâmetro	Valor
κ	19
θ	0,09
σ	0,84
ρ	-0,95

Tabela 5 – Parâmetros de Heston para PETR4

Com base nas simulações de Monte Carlo, obtemos para K_1 :

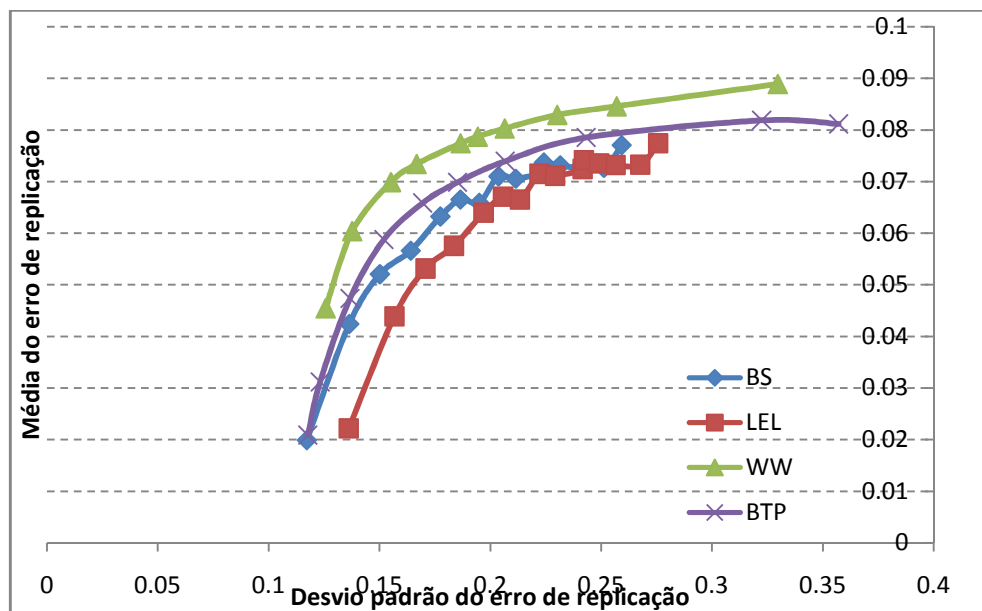


Gráfico 21 – PETR4 - Fronteiras eficientes para $K_1 = 23$

No Gráfico 21, chama a atenção o fato do modelo BS apresentar resultados superiores ao do modelo LEL para praticamente toda a fronteira.

Aplicando a mesma simulação e assumindo o *strike* K_2 , temos:

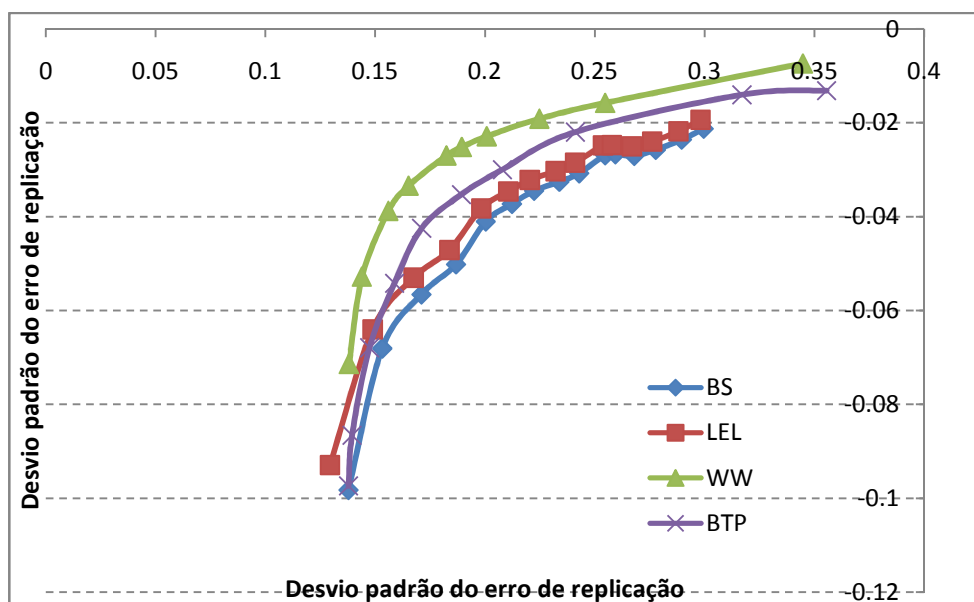


Gráfico 22 – PETR4 - Fronteiras eficientes para $K_2 = 21$

No Gráfico 22, temos resultados idênticos aos obtidos para os outros ativos, e K_2 .

Para K_3 temos:

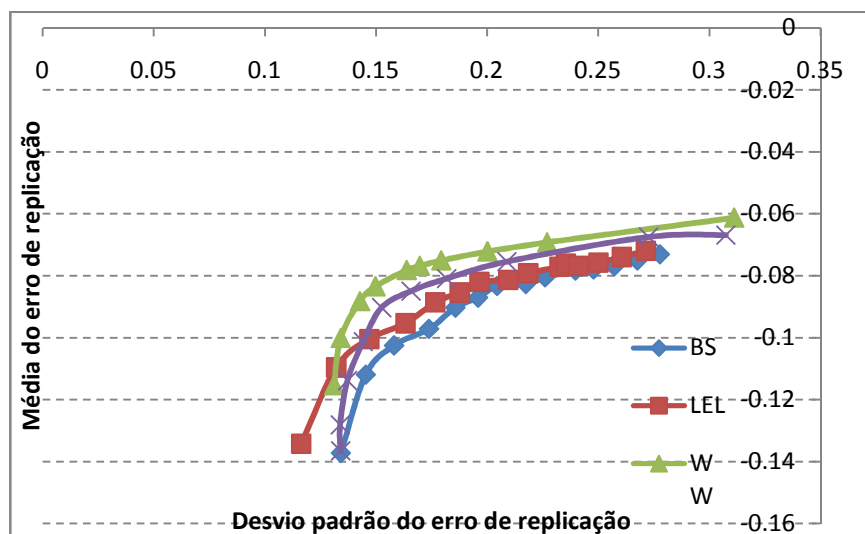


Gráfico 23 – PETR4 - Fronteiras eficientes para $K_3 = 20$

Neste caso K_3 , o modelo LEL parece se destacar para investidores com baixa tolerância a risco, sendo superior inclusive ao modelo WW.

De forma geral, o modelo LEL parece se destacar sobre o modelo BS para opções *in the money*, especialmente para intervalos intradiários de rebalanceamento. O inverso parece ocorrer para opções *out of the money*, onde o modelo BS produziu resultados melhores para dois dos três casos analisados.

Com base nos resultados acima, estimamos γ e h como:

	K_1	K_2	K_3
γ	10	3	3
h	3,00%	2,50%	5.00%

Tabela 6 – Equivalência de parâmetros para PETR4

Chama a atenção que para K_1 , temos um valor de γ muito diferente do estimado para os demais *strikes*. Além disso, chama a atenção ainda o valor de h , encontrado para K_3 , que difere dos valores encontrados para K_1 e K_2 , o que pode

indicar que os parâmetros de aversão a risco para os modelos do tipo *move-based*, não são indiferentes a *moneyness* das opções.

Observando-se o comportamento da estratégia replicante, para K_1 temos:

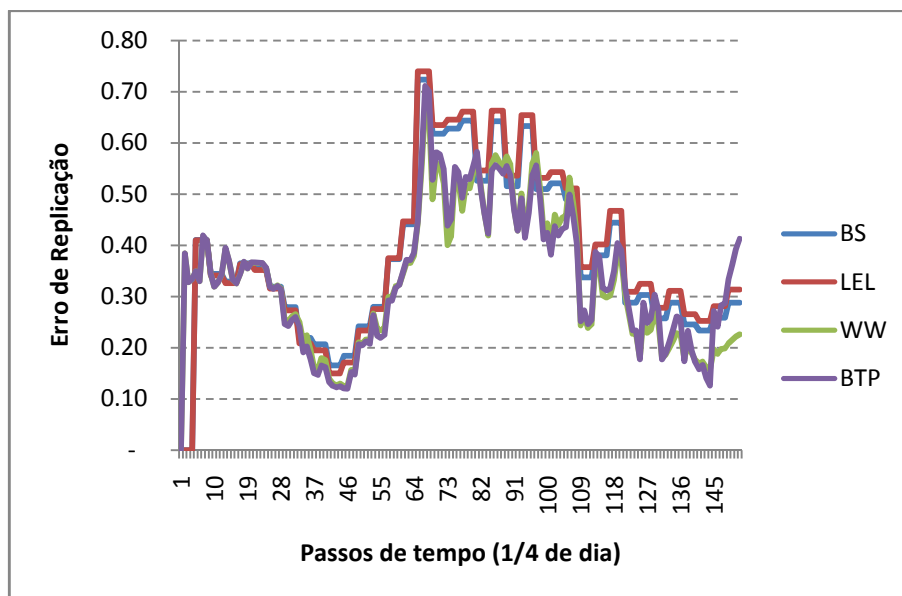


Gráfico 24 – PETR4 – Erro de replicação para $K_1 = 23$

Para este caso, o modelo WW apresentou o pior resultado dentre os quatro modelos avaliados. Um dos fatores que contribuiu para a pior performance deste modelo foi o fato de que o preço da ação se manteve próximo ao *strike* quando a opção estava próxima ao vencimento. Nesta condição o gama da opção está próximo ao seu máximo, e consequentemente, a banda de tolerância calculada pelo modelo WW pode se tornar muito larga, impedindo o rebalanceamento ótimo da estratégia.

Para K_2 :

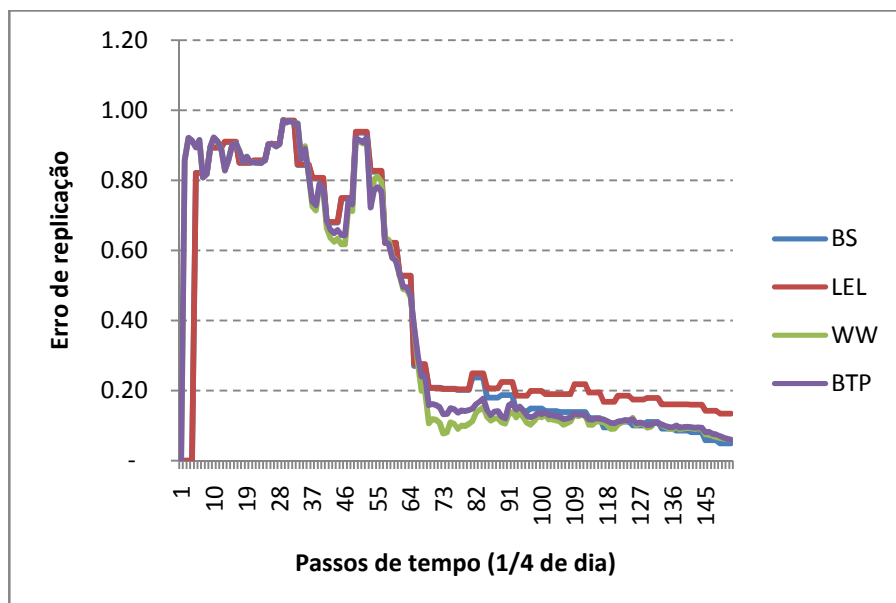


Gráfico 25 – PETR4 – Erro de replicação para $K_2 = 21$

Neste caso, o modelo LEL apresentou os melhores resultados, e os demais modelos apresentaram resultados muito próximos uns dos outros.

Assumindo-se K_3 :

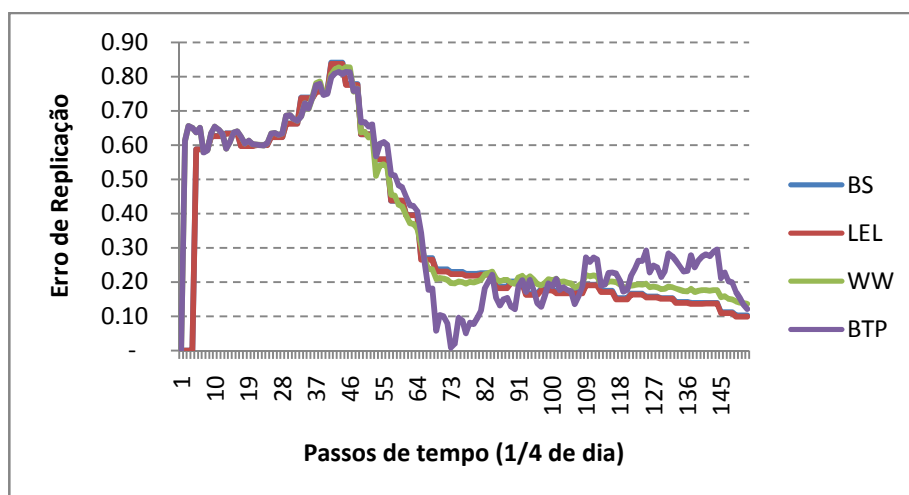


Gráfico 26 – PETR4 – Erro de replicação para $K_3 = 20$

Para o caso K_3 , onde a opção estava *deep in the money*, o modelo WW mostrou o melhor resultado no vencimento da opção.

Observamos que dentre todos os 9 casos analisados, utilizando preços de mercado, o modelo WW apresentou os melhores resultados para as situações onde as opções estavam *in-the-money* ou *deep-in-the-money*, indicando que a estratégia poderia ser mais apropriada para este tipo de situação.

6. Conclusões e Pesquisas Futuras

Neste capítulo, apresentamos no primeiro item, as principais conclusões desta dissertação a partir dos resultados obtidos. Em seguida, apresentamos recomendações para pesquisas futuras e possíveis melhorias e extensões deste estudo.

6.1. Conclusões

Nosso objetivo era explorar o resultado de diferentes modelos de *delta-hedge*, levando-se em conta os custos de transação, e tentar compará-los em diferentes contextos.

Na primeira parte da análise, utilizamos simulações de Monte Carlo, buscando modelar o comportamento de cada ativo a ser testado, de forma a refletir as expectativas dos agentes de mercado, e relaxar a hipótese de normalidade dos log-retornos dos ativos. Nesta etapa, em todos os casos analisados, as fronteiras eficientes resultantes mostraram o modelo WW como o que oferece o melhor *trade-off* entre risco e retorno dentre os modelos analisados, sempre seguido pelo modelo BTP. Esses resultados, de certa forma, já eram esperados, dados os resultados de estudos anteriores, mas reforçam que as abordagens do tipo *move-based*, apesar da necessidade de monitoramento constante, tendem a ser mais eficientes, dado que buscam minimizar os custos de transação totais ao longo da vida da opção, evitando desbalanceamentos desnecessários. Um dos principais desafios da aplicação prática dos modelos do tipo *move-based*, é a definição dos parâmetros γ e h e que definem a tolerância a risco do investidor.

A segunda parte deste trabalho, procurou contribuir justamente com esta discussão, procurando estender os resultados teóricos obtidos com as simulações de Monte Carlo para uma aplicação prática, avaliando o comportamento de cada um dos quatro modelos em situações reais de mercado. Ao se estabelecer uma

relação entre os parâmetros γ e h , dos modelos WW e BTP respectivamente, foi possível observar que os mesmos podem variar de acordo com as características do ativo, como a volatilidade, e com as características da opção, o que pode se traduzir em um impeditivo para uma adoção mais ampla de modelos do tipo *move-based*.

Nesta parte do estudo, foi possível observar situações onde a aplicação do modelo WW pode não ser o modelo mais indicado quando o preço do ativo estiver muito próximo do *strike* da opção e a opção estiver próxima ao vencimento, pelo fato de que, nesta situação, o gama da opção estará próximo do seu máximo, o que pode fazer com que a banda de tolerância do modelo WW seja muito elevada, e impeça o rebalanceamento ótimo da estratégia.

6.2. Pesquisas Futuras

O tema estudado neste trabalho apresenta amplas possibilidades, e é de extrema relevância para profissionais do mercado financeiro que atuam com contratos de derivativos e gestão de riscos.

Dentre as possibilidades para desenvolvimento futuro, sugerimos:

- Incorporar mais modelos de rebalanceamento na análise;
- Buscar alternativas na estimação dos parâmetros a serem utilizados para as estratégias do tipo *Move-based*;
- Comparar diferentes modelos para portfólios de opções;
- Aplicações para derivativos de commodities e renda-fixa;
- Testar a estabilidade da equivalência de parâmetros entre os diferentes modelos;
- Otimização dos parâmetros dos modelos WW e BTP.

7. Referências Bibliográficas

Aguirre, Guilherme K. P. (2012). “Modelos dinâmicos de hedging: um estudo sobre a volatilidade”, *Dissertação de Mestrado Profissional em Economia (Linha de Finanças) – EESP FGV*.

Araujo, Gustavo S., Barbedo, Claudio H. S. e Vicente, Jose V (2011). “The adverse selection cost component of the spread of brazilian stocks”, Working Paper Series BCB 262.

Avellaneda, M. and Paras, A. (1994). “Optimal Hedging Portfolios for Derivative Securities in the Presence of Large Transaction Costs”, *Applied Mathematical Finance*, 1, 165–193.

Black, F. and Scholes, M. (1973). “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81 (3), 637–654.

Clelland, L. and Hodges, S. (1997). “Optimal Delta-Hedging under Transaction Costs”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1353–1376.

Constantinides, G.M., and T. Zariphopoulou. “Bounds on Prices of Contingent Claims in an Intertemporal Economy with Proportional Transaction Costs and General Preferences.” *Finance and Stochastics*, 3 (1999), pp. 345-369.

Danthine, Jean-Pierre, Donaldson, John B. (2005), “Intermediate Financial Theory”, 2a.ed.

Davis, M. H. A., Panas, V. G., and Zariphopoulou T. (1993). “European Option Pricing with Transaction costs”, *Journal of Control and Optimization*, Vol 31, 470-493.

Fonseca, A. e Sanvicente, A. E Monteiro, R, “Bid-Ask Spread and Liquidity Premium in Brazil”

Heston, S., “A Closed-Form Solution for Options With Stochastic Volatility with applications to bond and currency options”, *Rev. Financ. Stud* (1993) 6, 327-343

Hodges, S. D. and Neuberger, A. (1989). “Optimal Replication of Contingent Claims under Transaction Costs”, *Review of Futures Markets*, 8, 222–239.

Hoggard, T., Whalley, A. E., and Wilmott, P. (1994). “Hedging Option Portfolios in the Presence of Transaction Costs”, *Advances in Futures and Options Research*, 7, 21–35.

Hull, J. C. Options, Futures and Other Derivatives, 4th edition. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2000.

Itô, Kiyoshi (1944). “Stochastic Integral”. *Proc. Imperial Acad.* 20, 519-524

Leland, H. (1985). “Option Pricing and Replication with Transaction Costs”, *Journal of Finance*, 5, 1283–1301.

Markowitz, H. (1952), “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, Vol 7, No.1, 77-91

Martellini, L. and Priaulet, P. (2002). "Competing Methods for Option Hedging in the Presence of Transaction Costs", *Journal of Derivatives*, 9 (3), 26–38.

Mohamed, B. (1994). "Simulations of Transaction Costs and Optimal Rehedging", *Applied Mathematical Finance*, 1, 49–63.

Moodley, N. (2005), "The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code", Sinclair, E., "Volatility Trading", John Wiley & Sons, 2008

Whalley, A. E. and Wilmott, P. (1997). "An Asymptotic Analysis of an Optimal Hedging Model for Option Pricing with Transaction Costs", *Mathematical Finance*, 7 (3), 307–324.

Wilmott, P.; Ahamed, R. "Which free lunch would you like today sir?: Delta hedging, volatility arbitrage and optimal portfolios", artigo, 2005.

Wilmott, P., "Paul Wilmott on quantitative finance", 2nd. Ed, John Wiley & Sons, 2006

Zakamouline, V., "The best hedging strategy in the Presence of Transaction Costs", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 12, 833 - 2008